

TRIGONOMETRIE

Exercice : 1

Démontrer les égalités suivantes :

$$1- \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$2- \forall x \in \mathbb{R} \quad \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$$

$$3- \forall x \neq \frac{k\pi}{2} \quad \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$4- \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\sin(a+b) \cdot \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$5- \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\cos^2(a-b) + \sin^2(a+b) = 1 + \sin(2a) \cdot \sin(2b)$$

$$6- \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \sqrt{1 + \sin 4x} = |\sin 2x + \cos 2x|$$

$$7- \forall x \neq \frac{\pi}{2} \quad \frac{1 - \cos x - \sin x}{1 + \cos x - \sin x} = -\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$8- \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x) = \sin^3 x - \cos^3 x$$

$$9- \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \tan(y)$$

$$10- \frac{\sin(x) + \sin(5x)}{\cos(x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$$

$$11- \frac{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$$

$$12- \frac{\sin(3x) + \sin(7x)}{\cos(3x) - \cos(7x)} = \cotan(2x)$$

$$13- \frac{\sin(x) + \sin(2x) + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x}{\cos(x) + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos(5x)} = \tan(3x)$$

Exercice : 2

A, B, C sont les mesures des angles d'un triangle.

Démontrer que : (1) $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(\frac{A}{2}\right)$

(2) $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{A}{2}\right)}$

Exercice : 3

1- Exprimer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$ puis $\sin \theta$ en fonction de $\sin \theta$

2- Démontrer que :

$$\tan 3\theta = \tan \theta \times \frac{3 - \tan^2 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$$

Exercice : 4

Calculer $\sin x$ et $\tan x$ dans chacun des cas suivants :

$$\cos x = -\frac{3}{\sqrt{5}}, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$$

$$\cos x = -\frac{12}{13}, \quad x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$$

Exercice : 5

Calculer $\sin x$ et $\cos x$ dans chacun des cas suivants :

$$\tan x = -2 \quad x \in]0; \pi[$$

$$\tan x = \frac{11}{60}, \quad x \in \left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$$

$$\tan x = -\frac{8}{15}, \quad x \in \left]\frac{3\pi}{2}; \pi\right[$$

Exercice : 6

Calculer $\cos x$ et $\tan x$ dans chacun des cas suivants

$$\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x \in \left]\frac{\pi}{2}; 2\pi\right[$$

$$\sin x = -0,8, \quad x \in \left] \pi; \frac{3\pi}{2} \right[$$

Exercice : 7

Déterminer l'angle α en radian dans les cas suivants :

$$(1) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4) \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (6) \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (8) \begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (10) \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Exercice : 8

On considère le réel x tel que :

$$\tan x = \sqrt{3} - 2, \quad x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[\text{ Calculer } \tan 2x \text{ et}$$

en déduire le réel x

On considère le réel x tel que :

$$\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\text{ Calculer } \cos 2x \text{ et}$$

en déduire le réel x .

Exercice : 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\cos 2x = \frac{1}{2}, \quad 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$$

$$\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \left(3x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\cos(3x) = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 0$$

$$4 \sin^2(2x) - 1 = 0 \quad 3 - 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = 0$$

$$\sin x - \sin(2x) \cdot \sin x = 0, \quad 4 \cos^2 x - 1 = 0$$

Exercice : 10

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ les équations suivantes

$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = -1, \quad \tan \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3}$$

$$\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \left(3x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(4x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\tan \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -\cotan \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$4 \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - 3 = 0, \quad 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0$$

$$\tan^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0, \quad \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan^2(2x)$$

$$2\sin x \cos x + \sqrt{3} \cos 2x = 0.$$

$$\tan^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 = 0, \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Exercice : 11

Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ les équations suivantes :

a- $2\cos^2 x + (2 + \sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0$

b- $\cos 2x = 3\cos x - 2$

c- $1 + \cos 2x + \cos 4x = 0$

d- $2\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$

e- $4\sin^2 x + 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$

f- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

g- $\cos^2 x + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$

h- $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$

i- $\sqrt{3}\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0$

j- $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$

Exercice : 12

Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ puis dans $] -\pi, \pi]$

$$2\cos x + 1 > 0, \quad 2\cos x - 1 \leq 0, \quad 1 - 2\sin x \leq 0$$

$$2\sin x - 3 < 0, \quad \tan x > 1, \quad \sqrt{3}\tan x - 3 \leq 0$$

$$4\cos^2 x - 2(\sqrt{2} - 1)\cos x - \sqrt{2} > 0$$

$$4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} \leq 0$$

$$-4\cos^2 x + 2(1 + \sqrt{2})\sin x + 4 + \sqrt{2} \leq 0$$

$$4\sin^2 x - 2(1 - \sqrt{3})\sin x - 4 + \sqrt{3} > 0$$

$$\tan^2 x - 3 \leq 0, \quad \sqrt{3}\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 > 0$$

$$-3\tan^4 x + 4\tan^2 x - 1 \geq 0, \quad \frac{2\cos 2x - 1}{1 + 2\cos 2x} < 0$$

$$\frac{1 - 2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} < 0, \quad \sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\cos x(2\sin x - 1) \leq 0, \quad \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0$$

$$2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} < 0, \quad 2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \geq 0$$

Exercice : 13

1- Vérifier que $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

2- Résoudre l'équation

$$2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

3- Résoudre l'inéquation

$$2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

4- Dédire de la question 1-)

a- la résolution de l'équation

$$2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

b- Représenter sur le cercle trigonométrique, les images des solutions de l'équation précédente.

5- Dédire de la question 1-)

a- Les solutions dans $[0, 2\pi[$ de l'inéquation

$$2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

b- Représenter sur le cercle trigonométrique les images solutions de l'inéquation précédente.

Exercice : 14

1- calculer $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$4x^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$$

3- Dédire les solutions dans $[0, 2\pi]$ de l'équation :

$$-4\sin^2 y + (1 - \sqrt{2})\cos y + 4 - \sqrt{6} = 0$$

et placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.

Exercice : 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \quad , \quad \sqrt{3} \sin x + \cos x = -1$$

$$\sqrt{3} \sin x + 3 \cos x = 3 \quad , \quad \sin x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \quad , \quad \sin x + \cos x = 1$$

$$\sqrt{6} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x = -2$$

$$\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{2}$$

Exercice : 16

On considère l'équation

$$(E): 8x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$$

- 1- Vérifier que $\frac{1}{2}$ est une solution de l'équation (E).
- 2- Trouver toutes les solutions de l'équation (E)
- 3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$8\sin^3 x - 4\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{3} = 0$$

Exercice : 17

- 1- x et y Étant deux nombres de l'intervalle $[0, \pi]$ on considère le système suivant :

$$(S): \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{4} \\ \sin x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \end{cases}$$

- 2- Démontrer que le système (S) est équivalent

$$\text{à } \begin{cases} \cos(x + y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- 3- Résoudre (S)

Exercice : 18

Trouver les couples solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice : 19

On considère le système d'équation

$$(S): \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x \cdot \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Démontrer que :

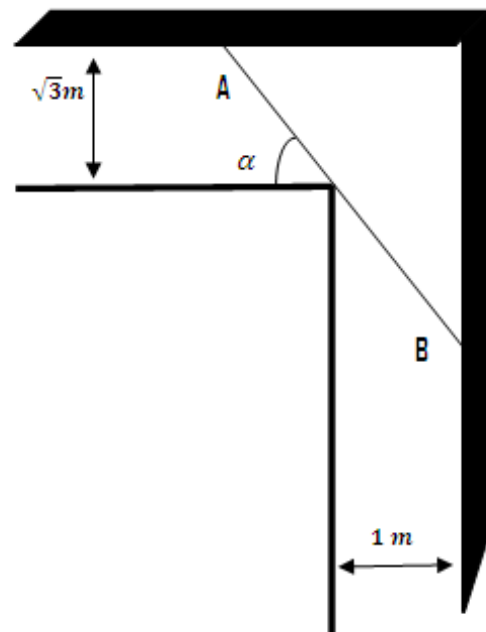
a- $\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y$

b- Le système (S) est équivalent au système

$$\text{suivant : } (S'): \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ \cos(x - y) = 0 \end{cases}$$

c- résoudre (S')

Exercice : 20



Un couloir de largeur de $\sqrt{3}$ mètres, tourne à l'angle droit et sa largeur n'est plus alors que 1 mètre.

Sur la figure, une droite passe par le point O, fait avec l'un des murs un angle α et coupe deux autres murs en A et B.

- 1- Exprimer en fonction de α les longueurs OA, OB et AB.
- 2- On pose $AB = f(\alpha)$

$$\text{Démontrer que } f(\alpha) = \frac{4 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha}$$

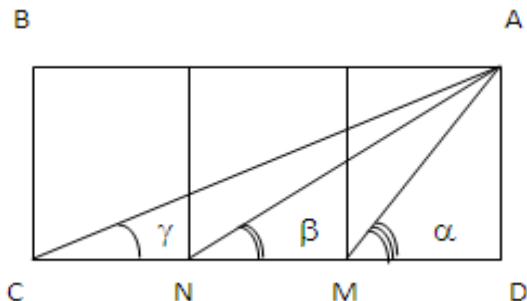
- 3- Déterminer α pour que :
 - a- $AB = 4$
 - b- $OA = OB$

Exercice : 22

On considère un rectangle tel que $AB = 3AD$
 Met N sont deux points tels que $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC}$

On désigne respectivement par α, β, γ les mesures des d'angles suivant : $\widehat{AMD}, \widehat{AND}, \widehat{ACD}$

Démontrer que $\alpha = \beta + \gamma$ (utiliser la formule $\cos(\gamma + \beta) = \cos\gamma \cdot \cos\beta - \sin\gamma \cdot \sin\beta$)



Exercice : 23

On considère un triangle ABC isocèle en A.

M et N sont deux points tels que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC}$

On pose $BC = a$ et $AB = AC = b$

- 1- Calculer AM et AN en fonction de a et b.
- 2- On suppose que le triangle ABC est équilatéral de côté a.
 Donner l'expression de AM et AN en fonction de a

RAPPELS COURS

Formules trigonométriques

Formules d'additions

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \quad 1$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \quad 2$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \quad 3$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \quad 4$$

Formules de duplications

En posant $a = b$ dans l'égalité 1, 2 et 4 on obtient respectivement

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad 5, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad 6$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a \quad 7$$

5 + 6 nous donne

$$2 \cos^2 a = 1 + \cos 2a \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad 8$$

5-6 nous donne :

$$2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad 9$$

$$\text{En posant } 2a = \theta \Rightarrow a = \frac{\theta}{2}$$

$$6 \text{ donne : } \cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$7 \text{ donne : } \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$$

$$8 \text{ Donne : } 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$9 \text{ donne : } 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Formules de transformations

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\sin a \times \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\cos a \times \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

En posant : $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}; \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2 a}; \quad 1 + \cot^2(a) = \frac{1}{\sin^2 a}$$

Equations trigonométriques

Equations du type: $\sin(x) = a$

☞ Si $|a| > 1$ alors l'équation $\sin x = a$ n'admet de solution donc $S = \emptyset$

☞ Si $|a| \leq 1$ on cherche une solution particulière α telle que $\sin \alpha = a$ donc serait $\sin a = \sin \alpha$, Toute solution de l'équation $\sin a = a$ est de la forme $s = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Equations du type: $\cos(x) = b$

☞ Si $|b| > 1$ alors l'équation $\sin x = a$ n'admet de solution donc $S = \emptyset$

☞ Si $|b| \leq 1$ on cherche une solution particulière α telle que $\cos \alpha = b$ donc serait $\cos a = \cos \alpha$, Toute solution de l'équation $\cos a = b$ est de la forme $s = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Equations du type: $\tan(x) = c$

On cherche une solution particulière α telle que $\tan x = c$.

Toute solution de l'équation $\tan x = c$ est de la forme $s = \{\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Equations du type: $a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) = c$

Pour résoudre une telle équation, on calcule le nombre réel positif $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Et on cherche $\theta \in]-\pi; \pi]$ tel que

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases}$$

L'équation $a \cos x + b \sin x = c \Leftrightarrow \cos(x - \theta) = \frac{c}{r}$

On résout l'équation $\cos(x - \theta) = \frac{c}{r}$

Si $\left|\frac{c}{r}\right| > 1$ alors l'équation $\cos(x - \theta) = \frac{c}{r}$ n'admet de solution donc $S = \emptyset$

Si $\left|\frac{c}{r}\right| \leq 1$ alors $\exists \alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que $\cos \alpha = \frac{c}{r}$ et l'équation $\cos(x - \theta) = \cos \alpha$

Toute solution de l'équation est de la

forme $s = \{\alpha + \theta + 2k\pi; -\alpha + \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

BONNE CHANCE

