

Trigonométrie-Cours privé

A- Définition du cercle trigonométrique :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de sens directe.

On appelle cercle trigonométrique, tout cercle orienté de centre $o(0,0)$ de rayon $r = 1 = \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$.

Un nombre réel α étant un angle orienté, on a

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ relation fondamentale de la trigonométrie

B- Formules de transformation trigonométrique :

1) Formules d'addition :

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \quad (1)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \quad (2)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (3)$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad (4)$$

2) Formules de duplication :

a- Expression de $\cos(2a)$

Dans la relation (1) remplaçons (b) par (a) ainsi, on a :

$$\cos(2a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad (5)$$

b- Autre expression de $\cos(2a)$

D'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a :

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \Rightarrow \sin^2 a = 1 - \cos^2 a$. Ainsi remplaçons $\sin^2 a$ par sa valeur dans la relation (5), ainsi on aura : $\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = >$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 \quad (6)$$

Ainsi de la relation (6), on en déduit :

Rappel Trigonométrie Terminale S

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \text{ et } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

c- Expression de $\sin(2a)$

Dans la relation (3) remplaçons (b) par (a) ainsi, on a :

$$\sin(2a) = \sin a \cos a + \sin a \cos a = 2 \sin a \cos a \quad (7)$$

3) Formules des tangentes :

a- Expression de $\tan(a+b)$

On sait que

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\cos a \cos b \left(\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} \right)}{\cos a \cos b \left(1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b} \right)} \end{aligned}$$

En simplifiant par $\cos a \cos b$, on obtient :

$$\Rightarrow \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)} \quad (8)$$

b- Expression de $\tan(a-b)$

Dans la relation (8) remplaçons (b) par $(-b)$ ainsi, on a :

$$\Rightarrow \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \cdot \tan(b)} \quad (9)$$

c- Expression de $\tan(2a)$

Dans la relation (8) remplaçons (b) par (a) ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \tan(2a) &= \frac{\tan(a) + \tan(a)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(a)} = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \\ \Rightarrow \tan(2a) &= \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \quad (10) \end{aligned}$$

4) Formules de transformation du produit en somme :

a- Expression de $\cos a \cos b$

Effectuons la somme des relations (1) et (2)

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (1)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1)+(2) &\Rightarrow \cos(a-b) + \cos(a+b) = 2 \cos a \cos b \\ \Rightarrow \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad (11) \end{aligned}$$

b- Expression de SinaSinb

Effectuons la différence des relations (1) et (2)

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (1)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]} \quad (12)$$

c- Expression de SinaCosb

Effectuons la somme des relations (3) et (4)

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (3)$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad (4)$$

$$(3)+(4) \Rightarrow \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]} \quad (13)$$

d- Expression de CosaSinb

Effectuons la différence des relations (3) et (4)

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (3)$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad (4)$$

$$(3) - (4) \Rightarrow \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]} \quad (14)$$

5) Formules de transformation de la somme en produit :

a- Expression de Cosp + Cosq

$$\begin{aligned} \text{Posons } \begin{cases} a+b=p & (1) \\ a-b=q & (2) \end{cases} & \Rightarrow \\ a = \frac{p+q}{2} & \text{ et } b = \frac{p-q}{2} \end{aligned}$$

Remplaçons ainsi $a+b$; $a-b$; a et b par leur valeurs dans la relation (14), on a :

Rappel Trigonométrie Terminale S

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) &= \frac{1}{2} [\cos(p) + \cos(q)] \\ \Rightarrow \boxed{\cos(p) + \cos(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} \end{aligned} \quad (15)$$

b- Expression de Cosp - Cosq

$$\text{Posons } \begin{cases} a+b=p & (1) \\ a-b=q & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{p+q}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{p-q}{2}$$

Remplaçons ainsi $a+b$; $a-b$; a et b par leur valeurs dans la relation (14), on a :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) &= \frac{1}{2} [\cos(p) - \cos(q)] \\ \Rightarrow \boxed{\cos(p) - \cos(q) &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)} \end{aligned} \quad (16)$$

c- Expression de Sinp + Sinq

$$\text{Posons } \begin{cases} a+b=p & (1) \\ a-b=q & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{p+q}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{p-q}{2}$$

Remplaçons ainsi $a+b$; $a-b$; a et b par leur valeurs dans la relation (15), on a :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) &= \frac{1}{2} [\sin(p) + \sin(q)] \\ \Rightarrow \boxed{\sin(p) + \sin(q) &= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} \end{aligned} \quad (17)$$

d- Expression de Sinp - Sinq

$$\text{Posons } \begin{cases} a+b=p & (1) \\ a-b=q & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{p+q}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{p-q}{2}$$

Remplaçons ainsi $a+b$; $a-b$; a et b par leur valeurs dans la relation (15), on a :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) &= \frac{1}{2} [\sin(p) - \sin(q)] \\ \Rightarrow \boxed{\sin(p) - \sin(q) &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)} \end{aligned} \quad (18)$$

Résolution d'équations trigonométriques.

1) Equations du type $\cos a = a$ ($a \in \mathbb{R}$) :

- Si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ alors $S = \{\}$.
- Si $a \in [-1; 1]$ alors on résout l'équation telle que :
 $\text{Cosa} = a \Leftrightarrow \text{Cosa} = \text{Cos}\beta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

Cas particuliers:

- Si $\text{Cosa} = -\text{Cos}\beta$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\pi + \beta + 2k\pi \end{cases}$
- Si $\text{Cosa} = \text{Sin}\beta$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} + \beta + 2k\pi \end{cases}$
- Si $\text{Cosa} = -\text{Sin}\beta$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} + \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} - \beta + 2k\pi \end{cases}$

2) Equations du type $\text{Sin}\alpha = a$ ($a \in \mathbb{R}$):

Résoudre de telles équations revient à déterminer tout angle β qui vérifie cette relation.

- Si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ alors $S = \{\}$.
- Si $a \in [-1; 1]$ alors on résout l'équation telle que si $\text{Sin}\alpha = a \Leftrightarrow$

$$\text{Sin}\alpha = \text{Sin}\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

Cas particuliers:

- Si $\text{Cosa} = -\text{Sin}\beta$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$
- Si $\text{Cosa} = \text{Sin}\beta$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} + \beta + 2k\pi \end{cases}$
- Si $\text{Cosa} = -\text{Sin}\beta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} + \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

3) Equations du type $\text{Tan}\alpha = a$ ($a \in \mathbb{R}$):

Résoudre de telles équations revient à déterminer tout angle β qui vérifie cette relation.

- Si $a \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ alors $S = \{\}$.
- Si $a \in [-1; 1]$ alors on résout l'équation telle que si $\text{Tan}\alpha = a$
 $\Leftrightarrow \text{Tan}\alpha = \text{Tan}\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi$

Cas particulier :

$$\begin{aligned} \text{Si } \text{Tan}\alpha &= -\text{Tan}\beta \\ \Leftrightarrow \alpha &= -\beta + k\pi \end{aligned}$$

4) Equations du type $a\text{Cos}x + b\text{Sin}x + c = 0$:

Résoudre de telles équations revient à mettre en évidence trois cas de résolution :

Premier cas : si $a = 0$ et $b = 0$ alors

$$\text{on a : } \begin{cases} S = \mathbb{R} \text{ si } c = 0 \\ S = \emptyset \text{ si } c \neq 0 \end{cases}$$

Deuxième cas : si $a = 0$ et $b \neq 0$

alors l'équation devient :

$$b\text{Sin}x = -c \Leftrightarrow \text{Sin}x = \frac{-c}{b}$$

- Si $\left| \frac{-c}{b} \right| > 1$ alors $S = \emptyset$.
- Si $\left| \frac{-c}{b} \right| \leq 1$ alors l'équation se ramène sous la forme : $\text{Sin}\alpha = a$.

Troisième cas : si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors on calcule :

- Le module r tel que : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- L'angle θ tel que :

$$\begin{cases} \text{Cos}\theta = \frac{a}{r} \\ \text{et} \\ \text{Sin}\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$$

Ainsi on résout l'équation $\text{Cos}(x - \theta) = \frac{-c}{r}$

NB : Si $a^2 + b^2 < c^2$ alors $S = \emptyset$.