

# EXERCICES DE TRIGONOMETRIE

Site Pédagogique de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

## EXERCICE 1 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E) et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

$$1^\circ) \cos(2x) = -\frac{1}{2} \quad ; \quad 2^\circ) 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \quad ; \quad 3^\circ) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4^\circ) \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \quad ; \quad 5^\circ) \cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad 6^\circ) \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

## EXERCICE 2 :

En utilisant les formules de transformations ou d'addition calculer les expressions

$$1^\circ) A = (\sin x - \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2 \text{ avec } x - y = \frac{\pi}{3}$$

$$1^\circ) B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cot \text{an}(-x) \quad ;$$

$$2^\circ) C = \cot \text{an}(-x) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot \text{an}(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos x \quad ;$$

$$3^\circ) D = \cos(2\pi - x) + \cos(-x) + \text{tg}(2\pi + x) + \cot \text{an}(-x) \quad ;$$

$$4^\circ) E = \cot \text{an}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \tan(\pi - x) + \cos(-x) + \sin(-x) .$$

## EXERCICE 3 :

Soit un point M ( $\cos \alpha$  ;  $\sin \alpha$ ) sur le cercle trigonométrique.

Déterminer l'angle  $\alpha$  en radians, pour que M ait pour coordonnées cartésiennes :

$$\text{a) } \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad \text{b) } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \text{c) } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \text{d) } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad ;$$

$$\text{e) } \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad \text{f) } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad ; \quad \text{g) } (-1; 0) \quad ; \quad \text{h) } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad ;$$

$$\text{i) } (0; 1) \quad ; \quad \text{k) } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \text{l) } (1; 0) \quad ; \quad \text{m) } \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{n) } \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad ; \quad \text{o) } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad ; \quad \text{p) } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \text{q) } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{r) } (0; -1) \quad ; \quad \text{s) } (-1; 0)$$

### **EXERCICE 4 :**

1°) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes d'inconnue  $x$  puis placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions.

a)  $2\cos(x) - 1 = 0$  ; b)  $2\sin(2x) - \sqrt{3} = 0$  ; c) Vérifier que :  $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$  puis résoudre  $-4\sin^2(x) + 2(\sqrt{3} - 1)\cos(x) + 4 - \sqrt{3} = 0$  ; d)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$

2°) a) Résoudre  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos x + \sin x = -1$  ;  $\cos x + \sin x = 3$ .

b) Après avoir vérifié que :  $\sin(2x) = (\sin x + \cos x)^2 - 1$  résoudre les équations

suivantes :  $1 - \frac{1}{2}\sin(2x) + \sin(x) + \cos(x) = 0$  . et  $1 + \frac{1}{2}\sin(2x) + \sin(x) + \cos(x) = 0$

3°) Résoudre  $(x; y) \in [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$  le système 
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ \cos(x) \cos(y) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

4°) Résoudre  $(x; y) \in [0; \pi] \times [0; \pi]$  le système 
$$\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

5°) Simplifier les expressions :

a)  $A = \sin(x-y)\cos(x+y) - \sin(x+y)\cos(x-y)$ .

b)  $B = \frac{\cos(2x)}{1 + \sin(2x)}$

6°) Démontrer que :  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$  sachant que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

### **EXERCICE 5 :**

On considère l'équation (E) :  $x \in [-\pi; \pi]$ ,  $\sin(3x) + 2\cos^2(x) + \sin(x) = 0$ .

1°) Factoriser  $\sin(3x) + \sin(x)$ .

2°) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E) et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

3°) Si  $a + b + c = 180^\circ$  alors prouver que :

a)  $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4\cos a \cos b \cos c$  ;

b)  $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 1 + 4\sin a \sin b \sin c$ .

4°) Donner l'expression factorisée de

a)  $A = \sin 5x + \sin 3x$  ; b)  $B = \sin x - \sin 5x$  ; c)  $C = \cos 4x - \cos 6x$

d)  $D = \cos 9x + \cos 3x$  ; e)  $E = \sin 4x - \sin 2x$  ; f)  $F = \cos 11x + \cos 3x$

### **EXERCICE 6 :**

Résoudre les équations suivantes

a°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$  ; b°)  $x \in [-2\pi; 2\pi]$ ,  $\sin^2(2x) - 4\sin(2x) + 3 = 0$

c°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-2(\sqrt{2}-1)\cos x - 4\cos^2 x + \sqrt{2} = 0$  ; d°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(5x) - \cos(x) = \sin(3x)$

e°)  $x \in [-\pi; \pi]$ ,  $2\sin^2(x) + (2 - \sqrt{2})\sin(x) - \sqrt{2} = 0$  ; f°)  $x \in [-2\pi; 2\pi]$ ,  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

g°)  $x \in [0; 2\pi]$ ,  $2\sin^2(x) + 7\cos(x) - 5 = 0$  ; h°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$

i°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2\cos(2x)\sin(x) = \sqrt{3}\sin(x)$  ; j°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x$

k°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-\sin x + \sqrt{3}\cos x - 1 = 0$  ; l°)  $x \in [0; 2\pi]$ ,  $\sqrt{2} + 2(\sqrt{2} - 1)\sin(x) = 4\sin^2(x)$

m°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2\sin(2x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)$  ; n°)  $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ ,  $\operatorname{tg}(2x) = \sqrt{3}$

p°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x) = \sqrt{6}$  ; q°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) - \sqrt{2} = 0$

r°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2\cos x \sin x + 4\sin(2x) = 0$  ; s°)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos x + \sin x = -1$ .

### **EXERCICE 7 :**

1°) Établir la relation :  $4\cos^4 x + 4\sin^4 x = 3 + \cos(4x)$ . Utiliser ce résultat pour résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $4\cos^4 x + 4\sin^4 x = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

2°) résoudre les équations :

a)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$  ; b)  $x \in [0; 2\pi]$ ,  $2\operatorname{tg}^2(x) - 3\operatorname{tg}(x) + 1 = 0$  ;

c)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(\sqrt{3}+1)\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^2 x = 0$  ; d)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{tg}(3x) + \operatorname{tg}(x) = 0$

e)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{3}\cos(3x) + \sin(3x) + 1 = 0$  ; f)  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ .

### **EXERCICE 8 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , chacune des équations suivantes

a)  $\sin(2x) - \sqrt{3}\cos(x) = 2$  ; b)  $\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 0$  ; c)  $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{3}$

d)  $3\sqrt{3}\cos(\pi x) + 3\sin(\pi x) = 0$  ; e)  $\cos(3x)\cos(x) = \sin(3x)\sin(x)$

f)  $\cos(2x)\cos(x) + \sin(2x)\sin(x) = \frac{1}{2}$  ; h)  $2\sin(x)\cos(x) + 2\sqrt{3}\cos(x) - \sqrt{3}\tan(x) + 3 = 0$

g)  $4\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x) - 2\cos(x) - 1 = 0$  ; i)  $2\sin(x)\tan(x) - \tan(x) = 1 - 2\sin(x)$

### **EXERCICE 9 :**

Démontrer les identités suivantes

$$1^\circ) (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x ; \quad 2^\circ) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x ;$$

$$3^\circ) (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x ; \quad 4^\circ) \tan(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)}$$

$$5^\circ) \sin^4 x - \cos^4 x + 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 3 ;$$

$$6^\circ) \frac{\sin x + \sin(5x)}{\cos x + \cos(5x)} = \tan(x) ; \quad 7^\circ) \frac{\sin(3x) + \sin(7x)}{\cos(3x) - \cos(7x)} = \cot an(2x) ;$$

$$8^\circ) \frac{\sin x + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos x + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x) ; \quad 9^\circ) \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \tan(y)$$

$$10^\circ) \frac{\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) + \sin(5x)}{\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cos(5x)} = \tan(3x) .$$

### **EXERCICE 10 :**

Résoudre les inéquations suivantes :

$$1^\circ) x \in [0 ; 2\pi[ , \cos(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad 2^\circ) x \in [0 ; \pi[ , \operatorname{tg}(x) \geq \sqrt{3} ;$$

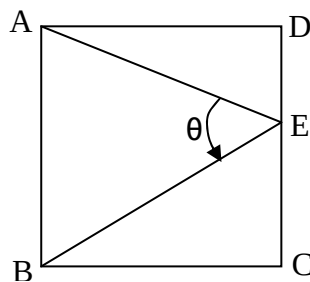
$$3^\circ) x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) ; \quad 4^\circ) x \in \mathbb{R}, 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$$

$$5^\circ) x \in \mathbb{R}, \sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) \geq 1 ; \quad 6^\circ) x \in \mathbb{R}, 4 \cos^2(x) - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cos(x) + \sqrt{6} \leq 0 .$$

7°) Factoriser  $f(x)$  puis en déduire une résolution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = 0$  dans les cas suivants :  $f(x) = \sin 3x + \sin x + 2 \sin 2x$  ;  $f(x) = \cos 3x + \cos x + 2 \cos 2x$

### **EXERCICE 11 :**

1°) Soit ABCD un carré tel que  $2EC = 3DE$  et  $\operatorname{mes}(A\hat{E}B) = \theta$ . Calculer  $\tan(\theta)$ .



2°) Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois nombres réels de  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$  tels que  $x + y + z = \pi$ .

Démontrer les égalités suivantes :

$$a) \cos x + \cos y + \cos z = 1 + 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2} ;$$

$$b) \sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} ;$$

$$c) \tan(x) + \tan(y) + \tan(z) = \tan(x) \times \tan(y) \times \tan(z) .$$