

Exercice 1 :

- 1) Calculer $\cos x$ et $\tan x$, sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $x \in \left] \frac{\pi}{2} ; \pi \right[$.
- 2) Calculer $\cos(5\pi - x) = \frac{4}{5}$ et $x \in]0 ; \pi[$.
- 3) Calculer $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$, sachant que : $\sin(-x) = \frac{2}{\sqrt{13}}$ et $x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \pi \right[$.

Exercice 2 :

- 1) Calculer, en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, les expressions suivantes :

$$A = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x).$$

$$B = \sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin(-x).$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$D = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right).$$

- 2) Démontrer que, pour tout nombre réel x

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Exercice 3 :

- 1) a) En remarquant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, démontrer que :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

b) En remarquant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$.

- 2) a) Ecrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

b) En déduire que $\tan 3x = \tan x \times \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$

- 3) a) Calculer :

$$A = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$B = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

b) En déduire que $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

Exercice 4 :

- 1) Calculer $\cos x$ et $\sin x$ dans chacun des cas :

- a) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ et $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$; b) $\cos 2x = \frac{7}{25}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$
- c) $\cos 2x = -\frac{7}{9}$ et $x \in \left[-\pi ; \frac{\pi}{2}\right]$; d) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

- 2) On donne:

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$A = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$$

- a) Calculer $A + B$ et $A - B$

- b) En déduire la valeur exacte de A et B .

Exercice 5 :

- 1) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ des mesures principales les équations suivantes :

a) $2 \sin 2x = 1$; b) $\cos 3x = 1$; c) $\sin 2x = \sin x$ d) $\cos 2x = \cos x$

- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$; b) $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) $\sin\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; d) $\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 3x = 0$

- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, à l'aide d'un changement de d'inconnue, les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $-2\cos^2 x + \cos x + 6 = 0$ et b) $\sin^2 2x - \sqrt{3} \sin 2x + \frac{3}{4} = 0$

- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{6} = 0$ et b) $\cos 2x - \sin 2x = -1$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

1) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; 2) $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$$3) \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \quad 4) \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$5) \cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) ; \quad 6) \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 7 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $x \in \mathbb{R}, \cos x + \sin x = \sqrt{2}$; b) $x \in \mathbb{R}, \cos(5x) - \cos(x) = \sin(3x)$
 c) $x \in [-2\pi ; 2\pi], \sin^2(2x) - 4\sin(2x) + 3 = 0$
 d) $x \in \mathbb{R}, -2(\sqrt{2} - 1)\cos x - 4\cos^2 x + \sqrt{2} = 0$
 e) $x \in [-\pi ; \pi], 2\sin^2 x + (2 - \sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0$
 f) $x \in \mathbb{R}, \cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$; g) $x \in \mathbb{R}, 2\cos(2x) \cdot \sin(x) = \sqrt{3}\sin(x)$
 h) $x \in \mathbb{R}, \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x$; i) $x \in \mathbb{R}, -\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{2} = 0$
 j) $x \in \mathbb{R}, 2\cos x \cdot \sin x + 4\sin(2x) = 0$ k) $x \in \mathbb{R}, \cos x + \sin x = -1$
 l) $x \in [0 ; 2\pi], \sqrt{2} + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x = 4\sin^2 x$

Exercice 8 :

4) Soit $f(x) = \sin 3x + \sin x + 2\sin 2x$ et $g(x) = \cos 3x + \cos x + 2\cos 2x$

a) Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

b) En déduire une résolution dans $\mathbb{R}$ des équations : $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$

Exercice 9 :

1) En s'aidant d'une représentation graphique du cercle trigonométrique, déterminer l'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ des mesures principales, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geq 0$; b) $2\sin x \leq 1$ c) $\cos x < -\frac{1}{2}$

2) Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $D = \mathbb{R}$
 b) $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq 0$; $D = [0 ; 2\pi]$
 c) $\sin x - \cos x \leq 0$; $D = \mathbb{R}$.

3) Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$; $D = [0 ; 2\pi[$; b) $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$; $D = \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} \sin 2x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$; $D = \mathbb{R}$

4) Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\frac{1-2\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} > 0$; $D =]-\pi ; \pi]$; b) $\frac{2\cos 2x - 1}{1+2\cos 2x} < 0$; $D = [0 ; 2\pi]$

5) Résoudre dans D les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a) $\sin^2 x - \frac{1}{2} \leq 0$; $D =]-\pi ; \pi]$
 b) $\cos x (2\sin x - 1) \leq 0$; $D =]-\pi ; \pi]$
 c) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geq 0$; $D = [0 ; 2\pi[$
 d) $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} \leq 0$; $D = [0 ; 2\pi]$

Exercice 10 :

Résoudre les inéquations suivantes:

1) $x \in [0 ; 2\pi], \sin(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $x \in \mathbb{R}, 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$

3) $x \in \mathbb{R}, \sqrt{3}\cos x + \sin x \geq 1$; 4) $x \in \mathbb{R}, \sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

5) $x \in \mathbb{R}, 4\cos^2 x - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})\cos x + \sqrt{6} \leq 0$

6) Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$ l'inéquation : $(2\sin x - 1)(-2\cos x + \sqrt{2}) \leq 0$

Exercice 11 :

1) En remarquant que $\sin 5x = \sin(4x + x)$, démontrer que :
 $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin 5x = 0$; vérifier que $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont des solutions de cette équation.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$

4) Déduire des questions précédentes les valeurs de $\sin \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 12 :

1) x , étant un nombre réel, démontrer que :

a) $\cos 5x = \cos x (16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5)$

b) $(1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2 = 1 - \cos 5x$

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 5x = 1$.

b) Dédire des questions précédentes les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$; $\cos \frac{4\pi}{5}$ et $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice 13 :

x et y étant deux nombres réels de l'intervalle $[0 ; \pi]$, on considère le système

$$\text{d'équation (S): } \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{cases}$$

a) Démontrer que le système (S) est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

b) Résoudre (S).

Exercice 14 :

1) a) Vérifier que : $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2X^2 + (1 - \sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2X^2 + (1 - \sqrt{2})X - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

2) Dédire de la question 1) b) la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.

3) Dédire de la question 1-c) la résolution dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ de

$$\text{l'inéquation : } 2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.

Exercice 15 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x et placer sur le cercle trigonométrique les points images des solutions.

a) $2\cos(x) - 1 = 0$; b) $2\sin(2x) - \sqrt{3} = 0$

c) Vérifier que: $(\sqrt{3} + 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$ puis résoudre l'équation :

$-4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\cos x + 4 - \sqrt{3} = 0$; d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$

2) Calculer $\cos x$ et $\sin x$ sachant que l'on a : $3\sin x + 4\cos x = 5$

3) Simplifier les expressions :

a) $A = \sin(x - y)\cos(x + y) - \sin(x + y)\cos(x - y)$; $B = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$

4) Démontrer que :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ sachant que } \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

Exercice 16 :

I/ On donne $A = \frac{2\sin 4x}{2\cos^2 x - 1}$

1. Trouver le domaine de définition de A .

2. Montrer que $\forall x \in D_A, A(x) = 4\sin 2x$.

3. Soit l'équation (E): $\frac{2\sin 4x}{2\cos^2 x - 1} = m$ où $m \in \mathbb{R}$.

a) Pour quelles valeurs de m , (E) admet-elle des solutions ?

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, pour $m = 2\sqrt{3}$, l'équation (E). Placer les points image des solutions sur le cercle trigonométrique.

c) Sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $m = 2$.

Montrer que $\forall x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[; \cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

d) Résoudre, $\forall x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[, \cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Exercice 17 :

On considère (E): $x \in \mathbb{R}, 8x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$

1. Vérifier que $\frac{1}{2}$ est une solution de (E).

2. Trouver toutes les solutions de (E).

3. Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$, l'équation : $8\sin^3 x - 4\sqrt{3} \sin^2 x - 2 \sin x + \sqrt{3} = 0$
Placer les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 18 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$

1. Transformer $\sin x + \sin 5x$ et $\cos x + \cos 5x$.
2. Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$, l'équation (E): $(1 + 2 \cos 2x) \cos 3x = 0$
3. Dédire des questions précédentes, l'ensemble de définition D_f .

de la fonction f et montrer que $\forall x \in D_f$, on a : $f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$.

4. Résoudre dans $x \in [0 ; 2\pi] \cap D_f$, l'inéquation (I): $f(x) < 1$.

Exercice 19 :

1. Calculer $(1 + \sqrt{3})^2$ sous la forme d'un carré, puis résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $4x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$.

2. Résoudre dans $[0 ; 2\pi]$, l'équation :

$$4(\cos^2 x - 1) + 2(\sqrt{3} - 1) \sin x + \sqrt{3} = 0.$$

Représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 20 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = 0$
2. En déduire les solutions de l'équation : $2\cos^3 x + 7\cos^2 x - 5 \cos x - 4 = 0$.
Placer les images des solutions de cette équation sur le cercle trigonométrique.
3. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation : $2\cos^3 x + 7\cos^2 x - 5 \cos x - 4 \leq 0$

Exercice 21 :

On considère la somme S définie par :

$$S = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right).$$

1. a) Donner la formule permettant de mettre la somme $\cos p + \cos q$ sous la forme de produit
- b) Transformer alors $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$
2. a) Ecrire la formule donnant $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$.
- b) Calculer $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

- c) En se référant à ce qui précède, démontrer que :

$$S = 4 \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$$

- d) Résoudre alors l'équation $S = -1$ d'inconnue $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 22 :

On considère la fonction $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x \cdot \sin x - 1$

- a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.
- c) Dédire les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0 ; \pi]$
- d) Résoudre dans $[0 ; \pi]$ l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 23 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose : $A(x) = \cos(3x) - 3 \sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

- 1) a) Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$
- b) Calculer $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
- 2) En déduire une écriture simple de $A(x)$.
- 3) a) Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$, l'équation $A(x) = \frac{1}{2}$.
- b) Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ l'inéquation $A(x) \leq \frac{1}{2}$

Exercice 24 :

On pose : $A(x) = 2\cos^2 x + 2 \cos x \cdot \sin x$

- 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \cos(2x) + \sin(2x) + 1$
- 2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x + \sin 2x$
- 3) Dédire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$
- 4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$