COURS PRIAMS

11e Sciences – 2022-2023

FICHE n°4 : ANGLES ORIENTES-TRIGONOMETRIE

Exercice 1

Détermine la mesure principale des angles suivants :

$\frac{9\pi}{2}$; $\frac{13\pi}{3}$; 12π ; 15π ; $\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{83\pi}{4}$; $\frac{131\pi}{6}$

$\frac{253\pi}{12}$; $-\frac{60\pi}{11}$; $\frac{15\pi}{8}$; $\frac{83\pi}{4}$; $-\frac{2016\pi}{3}$; $\frac{2017\pi}{6}$; $\frac{1989\pi}{3}$.

Exercice 2

1) Convertis les mesures des angles orientés suivants en degré : $\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{8}$ et $\frac{17\pi}{6}$.

2) Place sur le cercle trigonométrique les points images des nombres réels précédents.

Exercice 3

Complète :

1) $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = \cdots$

2) $(\ldots,\vec{w}) + (\ldots,\vec{t}) = (\vec{v},\vec{t})$

3) $(\vec{t},\vec{w}) + (\ldots,\vec{t}) = (\vec{v},\vec{w})$

4) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \cdots$

5) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{\ldots C},\overrightarrow{A\ldots}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

6) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\ldots}) + (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{\ldots B})$.

Exercice 4

Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \frac{2\pi}{3}$. Donne une mesure de :

1) $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DC})$; 2) $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB})$

3) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})$; 4) $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB})$.

Exercice 5

$ABCD$ est un carré de centre O.

Donne une mesure des angles orientés suivants :

1) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$; 2) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$; 3) $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$

4) $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AD})$; 5) $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})$; 6) $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

Exercice 6

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$ cm.

1) Construis le point C tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$ et $AB = AC$.

2) Construis le point D tel que ACD soit un triangle équilatéral et $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{3}$.

3) Construis le point E tel que $(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}) = \frac{11\pi}{12}$ et $DE = 3$ cm.

4) Démontre que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

5) Construis le point F tel que A, F et C soient alignés et $(\overrightarrow{BF},\overrightarrow{CD}) = \frac{5\pi}{12}$.

6) Démontre que les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

Exercice 7

1) Soit A, B, C et D des points du plan tels que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$.

Démontre que le triangle ABD est rectangle en A.

2) Soit A, B, C et D des points du plan tels que $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3}$, BCA est rectangle direct en B et $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) = \frac{5\pi}{6}$.

Démontre que les A, C et D sont alignés.

Exercice 8

Démontre que :

1) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

2) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$

3) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

4) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4\sin x \cos x$

5) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

6) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x$

7) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \,.\, \sin^2 x$

8) $\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

9) $\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} = 1$

10) $\frac{1+\cos 2x - \sin 2x}{1-\cos 2x - \sin 2x} = -\frac{\cos x}{\sin x}$.

Exercice 9

Montre que :

1) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

2) $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

3) $\cos(4x) = 1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x$

4) $\sin(4x) = \cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$

5) $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$

6) $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \cos 3x}{4}$

Exercice 10

Calcule :

$A = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$B = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1$

$C = -2\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) + 4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{103\pi}{2}\right)$

$D = \sqrt{2}\cos\left(-\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 11

Simplifie :

$A = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi + x) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi - x)$

$B = \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{11\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi)$

$C = \cos(-x) + \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$

$D = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$E = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

COURS PRIAMS

$F = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$

$G = -3\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos(2\pi - x)$

Exercice 12

1) Calcule $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

2) Calcule $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\tan\frac{\pi}{5}$ sachant que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

3) Calcule $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$ sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 13

On donne :

$A = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$B = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

1) Calcule $A + B$ et $A - B$.

2) En déduis les valeurs de A et B.

Exercice 14

1) Ecris $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

2) Ecris $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

3) En déduis que $\tan 3x = \tan x\left(\frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}\right)$.

Exercice 15

Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

$2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 2x = \sqrt{3}$

$\tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; $\tan^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$\sin 2x = \cos x$; $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin x + \cos x = 0$; $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x + \sin 2x = 0$; $\cos 5x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 16

Résous les équations trigonométriques suivantes :

$a)$ $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; $x \in [0; 2\pi]$

$b)$ $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

$c)$ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in [0; 2\pi]$

$d)$ $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$

$e)$ $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$; $x \in [-\pi; \pi]$

$f)$ $\tan x = 1$; $x \in [0; 2\pi]$

Exercice 17

Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

$b)$ $2\cos^2 x - \left(2 + \sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} = 0$

$c)$ $2\sin^2 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 0$

$d)$ $2\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$

Exercice 18

1) Calcule : $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2$.

2) Résous l'équation : $x \in \mathbb{R}, 4x^2 + 2x\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) - \sqrt{6} = 0$.

3) En déduis la résolution de l'équation :
$y \in [0; 2\pi[, -4\sin^2 y + 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\cos y - \sqrt{6} + 4 = 0$.
et place sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.

Exercice 19

Soit P la fonction polynôme défini par : $P(x) = 4x^3 - 3x - 1$.

1) a) calcule $P(1)$ puis factorise $P(x)$ en un produit de binôme du premier degré.

b) Résous l'équation : $x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$.

2) Soit l'équation (E): $x \in [0; 2\pi[, 4\cos^3 x - 3\cos x - 1 = 0$.

a) Résous cette équation.

b) Place sur le cercle trigonométrique les points images des solutions de (E).

Exercice 20

Soit l'équation (E) : $8x^3 - 4\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$

1) Vérifie que $\frac{1}{2}$ est une solution de (E).

2) Trouve toute les solutions de (E).

3) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation :
$8\sin^3 x - 4\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{3} = 0$

Exercice 21

Résous les inéquations trigonométriques suivantes :

$a)$ $2\cos x - 1 > 0$; $x \in [0; \pi]$

$b)$ $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$c)$ $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x \in]-\pi; \pi]$

$d)$ $\cos x \geq -\frac{1}{2}$; $x \in]-\pi; \pi]$

$e)$ $\sin x \geq 0$; $x \in [0; 2\pi]$

$f)$ $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in [0; 2\pi]$

$g)$ $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \leq \sqrt{2}$; $x \in]-\pi; \pi]$

Exercice 22

Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

b) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$

c) $\cos x + \sin x = 1$

$d)$ $-\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

$e)$ $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

$f)$ $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$

$g)$ $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

$h)$ $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 1$

COURS PRIAMS