

TD : Trigonométrie 11^e sciences

Lycée privé Empire Manding (LPEMA-F)

Situation 1

1) Détermine les mesures principales de chacun des angles suivants puis préciser ; dans chaque cas $\cos x$ et $\sin x$:

$$x = \frac{19\pi}{4}; x = \frac{110\pi}{3}; x = \frac{358\pi}{6}; x = -\frac{93\pi}{4}; x = \frac{47\pi}{3}; x = -\frac{241\pi}{4}; x = -\frac{217\pi}{6}; x = -\frac{131\pi}{3}$$

2) Place sur le cercle trigonométrique les points $A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $C\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $D\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$; $E\left(-\frac{2023\pi}{3}\right)$

Situation 2

Exprimé en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les réels suivants :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 5\sin(\pi + x)$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\cos(-\pi - x) + 5\sin(-x)$$

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(-x)$$

$$D = \cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$E = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(x + \pi) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi - x)$$

$$F = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi - x) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \cos(17\pi - x) + \sin\left(x - \frac{21\pi}{2}\right)$$

$$G = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

Situation 3

1) a) Calcule $\cos x$ et $\tan x$ sachant que $\sin x = -\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

b) Calcule $\cos x$ et $\tan x$ sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

2) a) Calcule $\cos x$ et $\sin x$ sachant que $\tan x = \sqrt{3}$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

b) Calcule $\cos x$ et $\sin x$ sachant que $\tan x = 2\sqrt{3}$; $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$.

3) Calcule $\cos x$; $\sin x$ et $\tan x$ sachant que $\cos(5\pi + x) = \frac{2}{3}$; $x \in]0; \pi]$

4) Calcule $\cos 2x$ sachant que $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

5) Calcule $\sin 2x$ et $\cos 2x$ sachant que $\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

6) En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$; calcule $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

7) Sachant que : $\cos x > \sin x > 0$ et $\cos x \cdot \sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Calcule $\cos x + \sin x$ et $\cos x - \sin x$. Déduis-en $\cos x$ et $\sin x$.

Situation 4

Sachant que : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

1) Montre que : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ puis calcule $\sin\frac{\pi}{8}$.

2) Calcule : $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Situation 5

Démontre les identités suivantes

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin(2x)$;

b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$;

c) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$;

d) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

e) $\sin^2 x + 2\cos^2 x = 1 + \cos^2 x$;

f) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \times \sin^2 x$

g) $\sqrt{1 + \sin 4x} = \sin 2x + \cos 2x$;

h) $\sin^4 x + \sin^2 x = \cos^4 x - 3\cos^2 x + 2$

i) $\cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x = 1$

j) $(\cos x + \sin x + 1)^2 = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$;

k) $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$; l) $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$; m) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$;

n) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$; o) $\frac{\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2}$; p) $\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

q) $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$; r) $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$; s) $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

Situation 6

1) a) Montre que pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}$ on a : $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sin x}$ et $\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{2}{\sin 2x}$

b) Déduis-en que : $\tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12} = 14$

2) a) Montre que : $\cos(4x) + 4\cos^2 x \cdot \sin^2 x = (1 + \sin 2x)^2$

b) Déduis-en la valeur de $A = \cos \frac{4\pi}{8} + 4\cos^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\pi}{8}$

Situation 7

1) Exprime $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

2) Exprime $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

3) Exprime $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

4) Exprime $\sin 5x$ en fonction de $\sin x$.

Situation 8

1) Calcule les sinus ; cosinus et tangentes des réels suivants :

a) $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$; c) $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$; d) $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

2) Réduis les expressions suivantes :

a) $A = \cos 7x \sin 6x - \sin 7x \cos 6x$; $B = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$; $C = \cos 3x \sin 2x + \cos 2x \sin 3x$.

3) Donne l'expression factorisée de :

$A = \sin 5x + \sin 3x$; $B = \sin x - \sin 5x$; $C = \cos 4x - \cos 6x$;

$D = \cos 9x + \cos 3x$; $E = \sin 4x - \sin 2x$; $F = \cos 11x + \cos 3x$.

Situation 9

Calcule les expressions suivantes

$$A = \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{10} - \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$B = \tan \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} + \tan \frac{\pi}{10} \cdot \tan \frac{2\pi}{5}$$

$$C = \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{7\pi}{8} + \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$D = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{4\pi}{5}$$

$$E = \sin^2 \frac{\pi}{14} + \sin^2 \frac{13\pi}{14} + \sin^2 \frac{3\pi}{7}$$

$$F = \frac{\sin \frac{7\pi}{15} + \sin \frac{8\pi}{15}}{\sin \frac{7\pi}{15}}$$

Situation 10

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels $\sin a = \frac{1}{2}$ et $\cos a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

1)) Calcule $\cos a$ et vérifie que $\sin b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) a) Calcule $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. Déduis-en $(a+b)$ puis b .

Situation 11

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels $\cos a = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

1)) Calcule $\cos 2a$

2) a) A quel intervalle appartient $2a$

b) Déduis-en a , en justifiant votre réponse.

Situation 12

1) a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\sin a = \frac{1}{3}$ et $\sin b = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

a) Calculer $\sin a$; $\cos 2a$; $\sin 2a$; $\cos \frac{a}{2}$ et $\sin \frac{a}{2}$.

b) Vérifier que $\cos b = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

c) Calcule $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$; en déduire $a+b$.

2) On donne : $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$.

a) Trouve les valeurs exactes de $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$.

b) On pose :

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}; B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}.$$

Calcule $A + B$ et $A - B$. En déduire A et B .

3) x est un nombre réel non multiple de $\frac{\pi}{2}$.

a) Démontre que $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$.

b) Exprimer en fonction de $\cos 2x$: $\frac{\sin 2x}{\sin x} + \frac{\cos 2x}{\cos x}$ et $\frac{\sin 5x}{\sin x} + \frac{\cos 5x}{\cos x}$.

Situation 13

1) Démontre que pour tous nombres réels a et b on a : $2\sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$

2) Soit A le nombre réel défini par : $A = 2\sin \frac{\pi}{11} \left(\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} \right)$

a) Démontre que : $A = \sin \frac{10\pi}{11}$

b) Déduis-en que : $A = \sin \frac{\pi}{11}$

c) Démontre que : $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

Situation 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$; puis dans $]-\pi; \pi]$ les équations trigonométriques suivantes :

a) $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$; b) $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$; d) $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

e) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; f) $\tan x^2 = \frac{1}{3}$; g) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin 3x$; h) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = 1$

i) $3\sin x - 4\cos x = 2$; j) $\sin(2x) - \sqrt{3}\cos(x) = 2$; k) $\cos(3x)\cos x = \sin(3x)\sin x$

l) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$; m) $\tan 2x = \tan x$; n) $\tan x \cdot \tan 4x = 1$

o) $\cos x + \sin x = 1$; p) $\cos 2x + \cos x - 2 = 0$; q) $\cos 2x + \sin 2x = 1$

n) $-2\sin x^2 x + \cos x + 1 = 0$; m) $\sqrt{3}\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - 1 = 0$;

Situation 15

Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes

$x \in [0; 2\pi[$; $\cos(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{2}$; $\tan x > \sqrt{3}$

$x \in]-\pi; \pi]$; $\sin x > \frac{1}{2}$; $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan x < -\sqrt{3}$

$x \in]-\pi; \pi]$; $\sin x > \frac{1}{2}$; $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan x < -\sqrt{3}$

$x \in [0; \pi]$; $\sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -1$

$x \in]-\pi; \pi]$; $\cos x + \sin x + \tan x \geq \frac{1}{\cos x}$

Situation 16

- 1) Résoudre $(x; y) \in [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$ le système
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ \cos(x) \cos(y) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$
- 2) Résoudre $(x; y) \in [0; \pi] \times [0; \pi]$ le système
$$\begin{cases} \cos(x + y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Situation 17

- 1) Démontre pour tout nombre réel x , $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$.
- 2) a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = -1$
- b) Représente les solutions de (E) appartenant à $\left] -\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$.

Situation 18

- 1) Vérifie que : $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$
- 3) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Situation 19

- 1) a) Vérifie que $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.
- b) Détermine α tel que $\sin x - \cos x = 2 \sin(x - \alpha)$.
- 2) On considère l'équation (E): $\tan x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$. Montre que $(E) \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$
- 3) Résous dans $[0; 2\pi[$ l'équation (E).

Situation 20

- 1) a) Montre que pour tout réel x , on a : $\cos(2x) - \sin(2x) + 1 = 2 \cos(x) (\cos(x) - \sin(x))$
- b) Prouver que pour tout réel x , on a : $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$
- 2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; 2\pi[$; l'équation : $\cos(2x) - \sin(2x) + 1 = 0$
- b) Représente graphiquement les solutions sur le cercle trigonométrique.
- 3) a) Montre que pour tout $x \in \left] 0; \frac{\pi}{4} \right[$, on a : $\frac{2\cos(2x)}{\cos(2x) - \sin(2x) + 1} = 1 + \tan(x)$
- b) En déduire que $\tan \left(\frac{\pi}{12} \right) = 2 - \sqrt{3}$

Situation 21

- 1) Montre pour tout réel x : $\cos x \cdot \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16} \sin 16x$
- 2) Déduis-en $\cos \frac{\pi}{32} \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}$.

3) On considère la fonction polynôme définie par $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

a) Calcule $P(-1)$.

b) Déduis-en que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$ ou a, b et c sont des réels que l'on déterminera.

c) Résous alors dans $\mathbb{R}$, l'équation (E): $2\sin^2 32x + 5\sin^2 2x - 2 = 0$

d) Déduis-en la résolution dans $]-\pi; \pi[$ de l'inéquation : $2\sin^2 32x + 5\sin^2 2x - 2 > 0$

Situation 22

Soit $f(x) = 1 + \cos(2x)\sin(2x)$

1) a) Montre que : $f(x) = 2\sqrt{2}\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Résous dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 0$.

2) On pose $g(x) = \frac{\sin(2x)-1}{1+\cos(2x)-\sin(2x)}$

a) Détermine l'ensemble de définition de g .

b) Montre que pour tout $x \in D_g$; on a $g(x) = \frac{1}{2}(\tan - 1)$.

c) Déduis-en que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.

d) Résous dans $[0; \pi]$; l'inéquation $g(x) < \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

Situation 23

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(2x)-\cos(2x)+\cos x+\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

1) Détermine, l'ensemble de définition de f .

2) a) Factorise $\sin(2x) - \cos(2x) + \cos x + \sin x + 1$.

b) Montre alors que : $f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{2\sin x - 1}$.

3) Résous dans $[0; \pi]$ les inéquations suivantes : $f(x) \leq 0$; $f(x) \leq -\cos x$.

Situation 24

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = 2\cos^3 x - \sqrt{3}\sin 2x$.

I. 1) Montre que, pour tout réel x , on a $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) + 1$.

2) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

II. Soit x un réel de l'intervalle $[0; \pi]$. On définit la fonction g par : $g(x) = \frac{2\cos(2x)-1}{f(x)}$

1) Détermine D_g l'ensemble de définition de g , puis vérifie que $g\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 1$.

2) a) Montre que pour tout réel x , on a : $2\cos 2x - 1 = \cos^2(2x) - 3\sin^2(2x)$.

b) Montre pour tout réel $x \in D_g$ on a : $g(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\tan x)$.

c) Déduis-en que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

Situation 25

Soit ABC est un triangle quelconque. On pose $\widehat{ABC} = \widehat{B}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{C}$

- 1) Montre que $BC = AC \cos \widehat{C} + AB \cos \widehat{B}$
- 2) Déduis-en que $\sin(\widehat{B} + \widehat{C}) = \sin \widehat{B} \cos \widehat{C} + \cos \widehat{B} \sin \widehat{C}$
- 3) Calcule alors $\sin \frac{7\pi}{12}$ on remarque $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$
- 4) Complete le tableau suivant

α	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$
$\sin \alpha$			
$\cos \alpha$			
$\tan \alpha$			
$\cotan \alpha$			

- 5) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, montre que $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$. Déduis-en la valeur de $\cos \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{8}$

Situation 26

Soit ABC est un triangle tel que $AB = 4\text{cm}$; $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$

- 1) Calcule $\widehat{ACB}$.
- 2) a) Montre que $AC^2 = 16 + BC^2 - 4\sqrt{2}BC$ et que $BC^2 = 16 + AC^2 + 4AC$.
b) Déduire que $AC = \sqrt{2}BC - 8$
- 3) a) Montre que $BC = \sqrt{\frac{3}{2}}AC$; déduis que $BC = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$
b) Calcule $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) Calcule l'aire du triangle ABC et le rayon de son cercle circonscrit.

Situation 27

Soit ABC est un triangle tel que $AB = 2\text{cm}$ et $\widehat{ABC} = \frac{5\pi}{6}$.

- 1) Calcule l'aire du triangle ABC .
- 2) Montre que $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ et que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
- 3) Montre que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- 4) $(\mathcal{C})$ est le cercle circonscrit au triangle ABC .
a) Calcule le rayon R de $(\mathcal{C})$.
b) La perpendiculaire à (AC) en A recoupe $(\mathcal{C})$ en D , calcule BD .

Situation 28

$ABCD$ est un trapèze de base $[AB]$ et $[CD]$; $\widehat{ADE} = 45^\circ$; $\widehat{BCF} = 60^\circ$; $AE = BF = 10$; $BE = 10\sqrt{10}$

