Avants - Propos :

Conformément au nouveau programme de mathématiques, ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé par un comité d'enseignants du secondaire qui répond au souci du ministère de l'éducation nationale pour la mise en œuvre de **l'approche par compétence (A.P.C)** dans les classes de **11ième S** (**11ième** Sciences) au Mali et ayant pour **objectif** d'uniformisé le niveau des élèves venant des classes antérieures afin de les offrir les mêmes chances dans la poursuite de leurs études universitaires. Il permet en outre d'harmonisée la pédagogie des mathématiques et de mettre à la disposition des élèves l'acquisition d'une formation solide.

Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de **04** parties :

Situation - Problème :

Une **activité ouverte** permettant d'aborder en grande partie les connaissances nouvelles.

Activités préparatoires :

Les **activités préparatoires,** approches simples des nouvelles notions à partir des connaissances acquises dans les classes antérieures.

Le cours :

Rien que **l'essentiel dans un langage clair et simple** avec des **démonstrations**. Chaque définition ou théorème est suivit d'un exemple simple, court, en situation, pouvant servir de référence et d'aide à la démonstration.

Exercices et problèmes :

- **Les exercices :** Inédits et ordonnés suivant **la progression du cours**, ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation du cours.
- **Les problèmes :** Variés, ce sont des **problèmes de synthèse** ou des problèmes ouverts pour aller plus loin dans l'acquisition de vos connaissances sans aller au-delà du programme en vigueur.

Nous souhaitons donc que l'utilisation de ce livre ne se substitue pas au travail des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace, utile aux élèves pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, nous tenons à remercier **les éditions SAMASSA** et tous ceux qui voudront bien nous faire part de leurs remarques, critiques, suggestions ou autres solutions plus élégantes que les miennes, que nous publierons dans une future édition.

Les auteurs

SOMMAIRE

1 Applications……1

1- Situation problème.
2- Activités préparatoires
3- Généralité
4- Image directe – Image réciproque.
5- Applications bijectives ; surjectives et injectives.
6- Applications composées.

2 Fonctions polynômes…….23

1- Situation problème.
2- Activités préparatoires
3- Définition.
4- Zéro d'un polynôme.
5- Factorisation d'un polynôme.
6- Egalité de deux polynômes
7- Fonction polynôme du second degré.

3 Trigonométrie …….63

1- Situation problème.
2- Activités préparatoires
3- Définition et représentation du cercle trigonométrique.
4- Formules de transformations.
5- Equations trigonométriques.

4 Fonctions numériques

1- Situation problème.
2- Activités préparatoires
3- Généralité.
4- Limites.
5- Continuités.
6- Dérivabilités.
7- Etude de fonctions.

Suites numériques

1- Situation problème.
2- Activités préparatoires
3- Généralité.
4- Suites arithmétiques.
5- Suites géométriques.
6- Suites économiques.

4 Dénombrement – Probabilité…100

1- Situation problème.
2- Activités préparatoires
3- Dénombrement.
4- Probabilité.

Géométrie plane.…147

1- Situation problème.
2- Activités préparatoires
3- Vecteurs du plan.
4- Produits scalaires.
5- Barycentre.
6- Homothétie.
7- Isométrie.
8- Similitude.

Géométrie dans l'espace.

1- Situation problème.
2- Activités préparatoires
3- Présentation d'un solide dans l'espace.
4- Points – Droites et plan.
5- Figures géométriques dans l'espace

Statistique…156

1- Situation problème.
2- Activités préparatoires
3- Définition et présentation des données.
4- Eléments caractéristiques d'une série statistique.
5- Série statistique à double caractères x et y.

Les applications

I- Généralité :

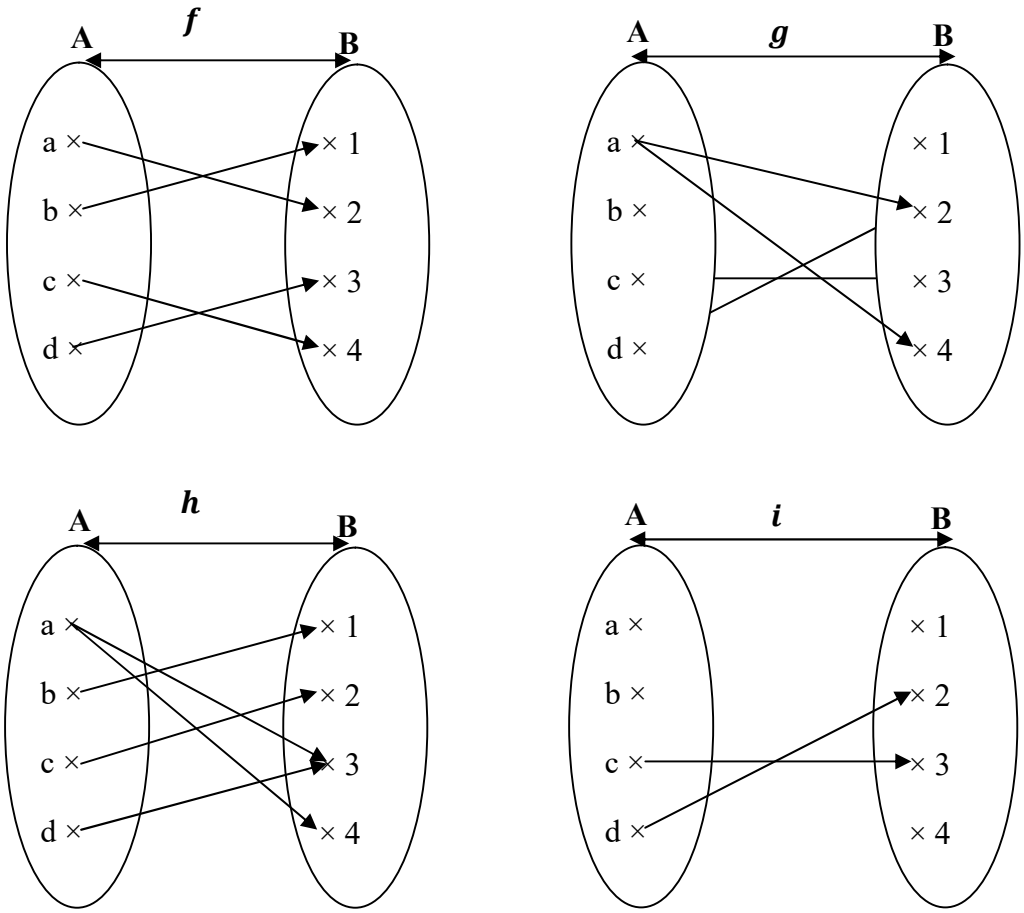
1- Définition : Soient A et B deux ensembles. On appelle application toute relation de A vers B qui à chaque élément de A, associe un seule élément de B.

- **A** est appelé l'ensemble de départ.
- **B** est appelé l'ensemble d'arrivé.

2- Reconnaître une application à partir d'un diagramme

Activité :

Observe les diagrammes ci-dessous puis identifie les applications données.



NB : Toute application est une fonction mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

II- Images directes – Images réciproques

1- Images directes :

a- Méthode algébrique

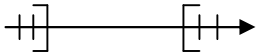
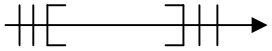
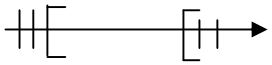
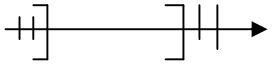
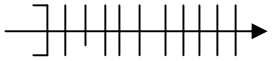
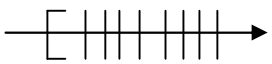
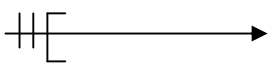
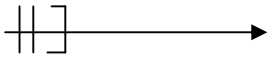
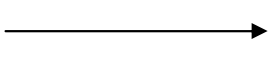
Etant donnée une fonction f de A vers B, l'ensemble des images des éléments de A par f est appelé ensemble image de A par f et est noté : f(A).

NB : f(A) ⊂ B.

Soit **a** un réel appartenant à **A,** l'image de **a** par f est ***notée*** f**(a) et est appelée image directe de a par f.**

En pratique, pour déterminer l'image directe d'un intervalle I par f, on cherche un **encadrement de $f(x)$** pour x élément de l'intervalle I.

Ainsi on retiendra ceci :

Notations	Interprétation littéraires	Désigne l'ensemble des nombres réels tel que	représentations graphiques
]a, b[	Intervalle ouvert : a, b	$a < x < b$	
[a, b]	Intervalle fermé : a, b	$a \leq x \leq b$	
[a, b[	Intervalle semi ouvert : a, b	$a \leq x < b$	
]a, b]	Intervalle semi fermé : a, b	$a < x \leq b$	
] ←,a]	Intervalle semi ouvert extrémité : a	$x \leq a$	
] ←, a[	Intervalle ouvert d'extrémité : a	$x < a$	
[a, →[	Intervalle semi ouvert d'origine : a	$x \geq a$	
]a, →[	Intervalle ouvert d'origine : a	$x > a$	
]←, →[	Intervalle ouvert -∞ ; +∞	$\mathbb{R}$	

NB:

- **L'image directe d'un réel est un réel.**
- **L'image directe d'un ensemble est un ensemble.**
- **L'image directe d'un intervalle est un intervalle.**

Activité 1 :

Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie par : pour tout x élément de$\mathbb{R}$,

$f(x) = -3x + 2.$

Détermine l'image directe par f de chacun des réels suivants : -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; $\frac{1}{3}$; $\frac{-1}{3}$.

Etant donné un sous-ensemble I de A, l'image directe par f de I, notée $f(I)$ est l'ensemble des images d'éléments de I tel que $\boldsymbol{f(I) = \{ y = f(x); x \in I \}}$.

Activité 2 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : pour tout x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = 2x^2 + 5x + 3.$

Détermine la (ou les) bonnes réponse(s) :

$f(1) = -2$; b) $f(-2) = 1$; d) 1 est l'image de -2 par la fonction f.

Activité 3 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : pour tout x élément de $\mathbb{R}$,

$f(x) = -2x + 3.$

On donne A = $\left\{-1 ; \frac{1}{2} ; 2\right\}$; B = $\left\{\frac{-1}{2} ; 0 ; 3\right\}$; C = {0} .

a) Détermine l'image directe par f de chacun des sous-ensembles : A ; B et C.

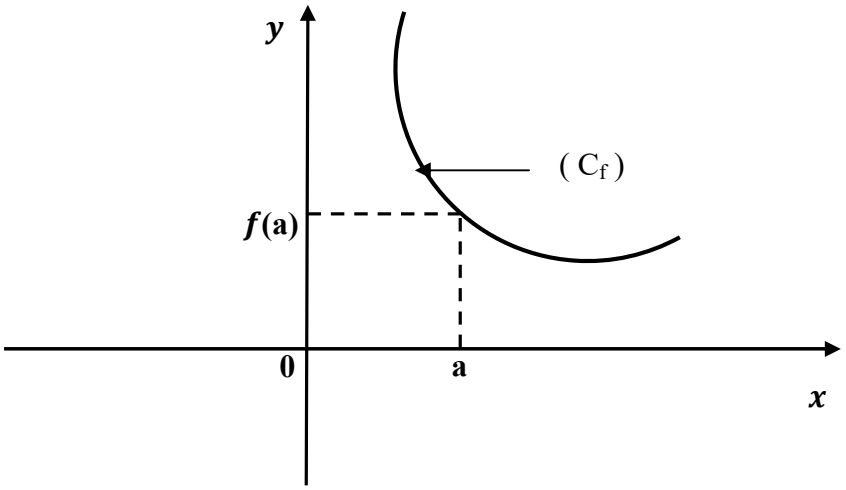
b) Détermine l'image directe par f de chacun des intervalles suivants :

I = $[-1 ; 1[$; J = $[0 ; 2]$; K = $]-\infty ; 3]$; L = $[2 ; +\infty[$.

b-<u>Méthode graphique :</u>

Etant donnée la courbe (C_f) représentant les variations d'une fonction f, Pour déterminer l'image directe d'un réel **a**, on trace la parallèle à l'axe $y'oy$ passant par le point M d'abscisse x = a, cette droite rencontre la courbe (C_f) en un point M'(a ; f(a)) .

Pour avoir f(a), on trace la parallèle à $x'ox$ passant par M'. Celle-ci coupe $y'oy$ en f(a) comme l'indique la figure ci-dessous.

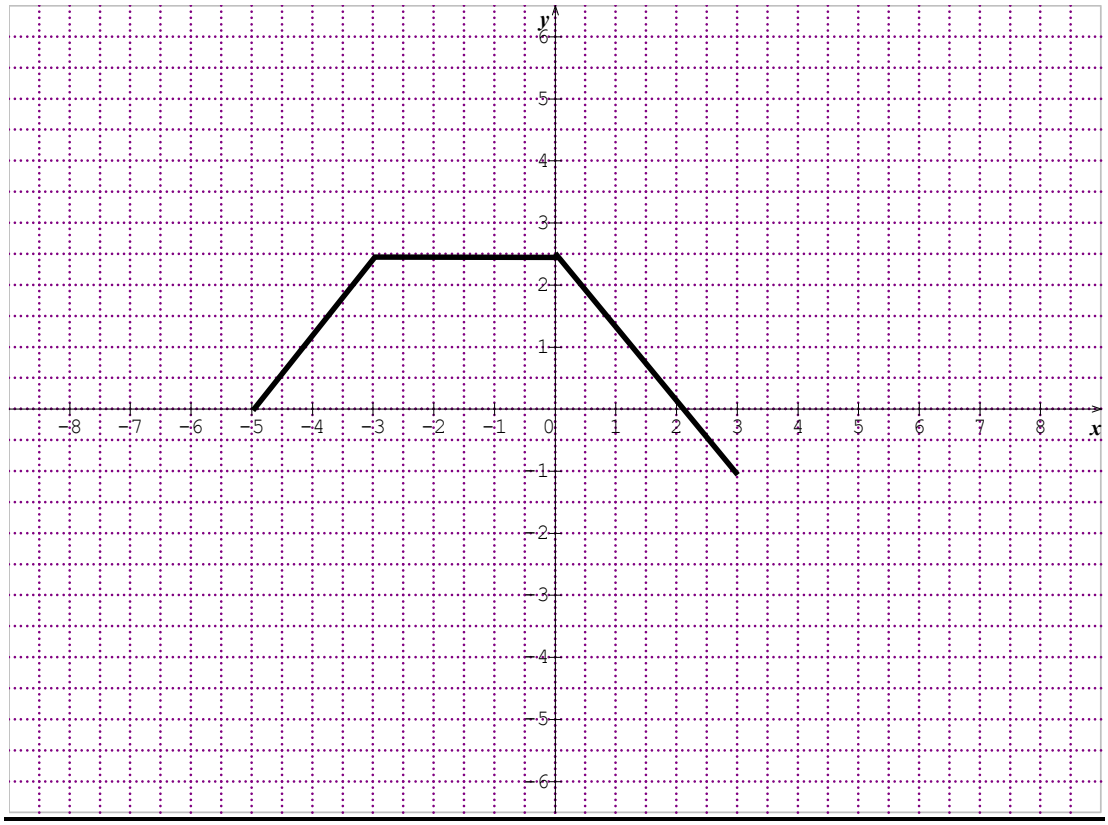


Activité 4 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x)$$

Soit (c_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.



a- Trouve l'image directe par f de chacun des réels suivants : $-4\ ;\ -3\ ;\ 0\ ;\ 2$
b- Trouve l'image directe par f de l'intervalle suivant : $]-4\ ;2\ ]$
c- Trouve l'image directe par f de l'ensemble suivant : $\{-1\ ;1\ ;3\ \}$

2- Image réciproque :

a) Méthode algébrique

Soit f une fonction définie de **A** vers **B**.

On appelle image réciproque d'un réel **b (b ∈ B) ,** les réels $\boldsymbol{x}$ obtenus en résolvant l'équation $\boldsymbol{f(x)}$ **= b.**

On note : $\boldsymbol{f^{-1}}$**(b) =** $\{\ \boldsymbol{x \in A}\ ;\ \boldsymbol{f(x) = b}\ \}$.

Soit : $\{\ \boldsymbol{x_1}\ ;\ \boldsymbol{x_2}\ ;\ ...\ \}$**,** l'ensemble solution de l'équation $f(x)$ = b, on a :

$\mathbf{f^{-1}(b) = \{\ x_1\ ;\ x_2\ ;\ ...\ \}}$**.**

Remarque :

Pour déterminer algébriquement l'image réciproque d'un intervalle I, on cherche un encadrement de la valeur de $\boldsymbol{x}$ **;** car $f(x) \in$ I donne un encadrement de $f(x)$.

Exemple : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = -x + 2$$

Déterminons l'image réciproque par f des intervalles suivants : $[-2\ ;2\ ]\ ;\ ]\ 1\ ;\ 3]$

Solution

- On a : $f(x) \in [-2\ ;2\ ] <=> -2 \leq f(x) \leq 2 <=> -2 \leq -x+2 \leq 2 <=>$

$-4 \leq -x \leq 0 <=> 0 \leq x \leq 4 <=> x \in [\ 0\ ;4\ ]$.

D'où l'image réciproque par f de l'intervalle $[-2\ ;2\ ]$ est [0 ; 4] et se traduit par $f^{-1}([-2\ ;2\ ]) = [\ 0\ ;4\ ]$.

- De même on a : On a : $f(x) \in\ ]\ 1\ ;\ 3] <=> 1 < f(x) \leq 3 <=> 1 < -x+2 \leq$

$3 <=> -1 < -x \leq 1 <=> -1 \leq x < 1 <=> x \in [-1\ ;1\ [$

D'où l'image réciproque par f de l'intervalle] 1 ; 3] est $[-1\ ;1\ [$et se traduit par $f^{-1}(]\ 1\ ;\ 3]\ ) = [-1\ ;1\ [$

Activité 1 :

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = x - 6$$

a) Détermine le réel x qui a pour image chacun des réels suivants : -1 ; 0 ; 1 ; 2.

b) Complète le tableau ci-dessous et construis la courbe (C_f) de f.

x	1	2	3	4
$f(x)$				

3) Détermine le réel x dans chacun des cas qui a pour image chacun des réels : -1 ; 0 ; 1 ; 2.

a- Par calcul algébrique.

b- En utilisant le graphique de f.

4) Détermine l'ensemble des réels x qui ont pour image chacun des intervalles suivants :

I = $[-1\,;1[$; J = $[0\,;2]$; K = $]-\infty\,;3]$; L = $[2\,;+\infty[$.

Activité 2 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = -3x + 1$$

a- Détermine l'image réciproque par f des réels suivants : -1 ; 0 ; 1 ; 2.

b- Détermine l'image réciproque par f des intervalles suivants :

$[-3\,;1[$; $[0\,;1]$; $]-\infty\,;5]$; $[3\,;+\infty[$

D'une manière générale pour déterminer l'image réciproque, on résous un système d'équations simultanées à une inconnue.

b- <u>Méthode graphique :</u>

Soit la fonction f :$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x)$$

Soit (c_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) .

Pour déterminer l'image réciproque d'un réel **b (situé sur l'axe oy),** on procède par projection suivant les étapes suivantes :

- On projette le réel b sur la courbe et parallèlement à l'axe des abscisses.
- Le point ainsi obtenu sur la courbe est à son tour projeté parallèlement à l'axe des ordonnées sur l'axe ox.

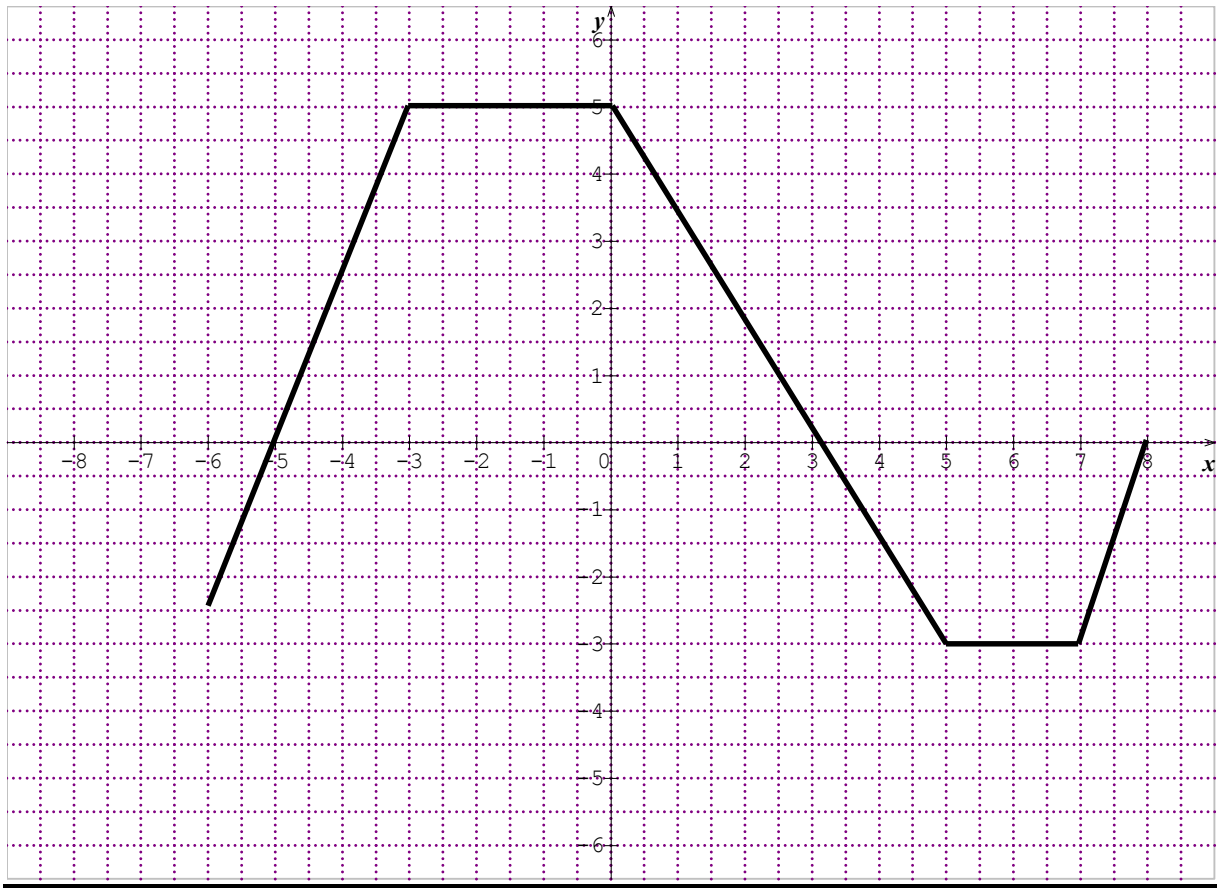
Ainsi le réel **a** ainsi obtenu sur l'axe ox est appelé : **image réciproque de b**.

<u>Activité 3 :</u>

Soit la fonction f :$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x)$$

Soit (c_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé



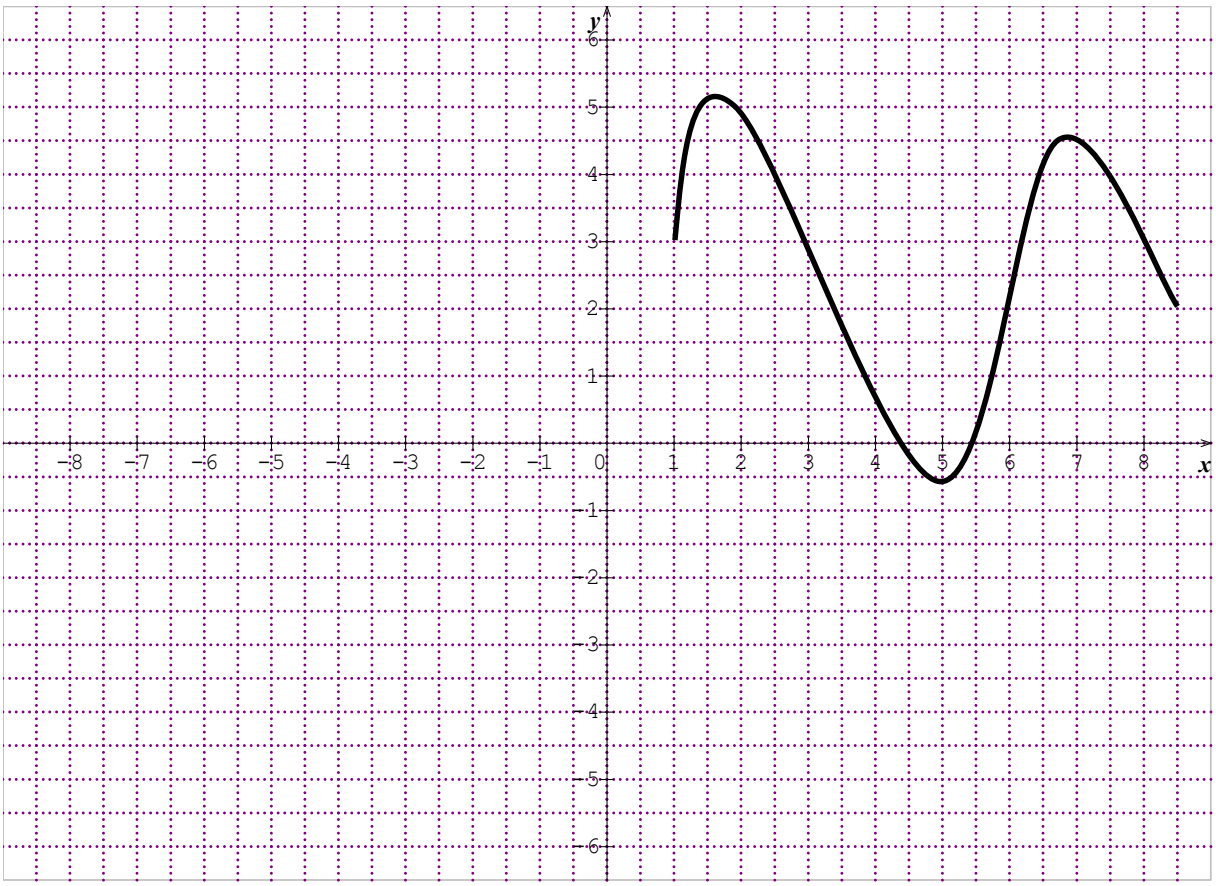
a- Trouve l'image réciproque par f de chacun des réels suivants : - 2 ; 0 ; 3

b- Trouve l'image réciproque par f de l'intervalle suivant : [0 ; 3]

c- Trouve l'image réciproque par f de chacun de l'ensemble suivant : $\{-2{,}5\ ;\ 3\}$

Exemple :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 8,5] et représenté par la courbe (C) ci dessous :



- L'équation $f(x) = 3$ a quatre solutions, S = $\{1\ ;\ 3\ ;\ 6{,}25\ ;\ 8\ \}$;
- L'équation $f(x) = 2$ a trois solutions, S = $\{3\ ;\ 6{,}5\ ;\ 8\ \}$;
- L'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a deux solutions, S = $\{\ 4\ ;\ 5{,}25\ \}$;
- L'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ a une seule solution, S = $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
- L'équation $f(x) = 6$ n'a pas de solution ; S = $\{\emptyset\}$.

III- Applications bijectives – Applications injectives – Applications surjectives

1- Applications bijectives :

a- Définition :

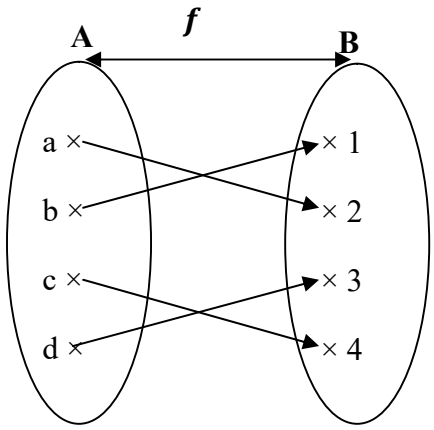
Soit l'application f : A ↦ B

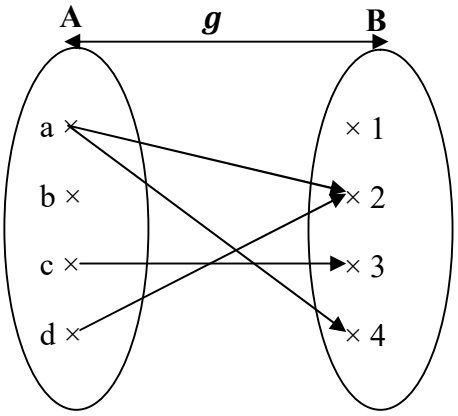
$$x \ \rightarrow f(x)$$

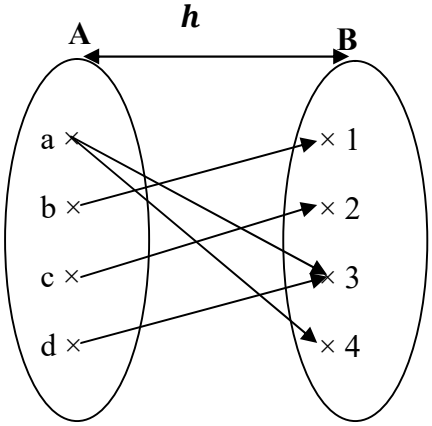
L'application f de A vers B est dite bijective si et seulement si chaque élément de l'ensemble d'arrivé B admet **un et un seul élément** dans l'ensemble de départ A.

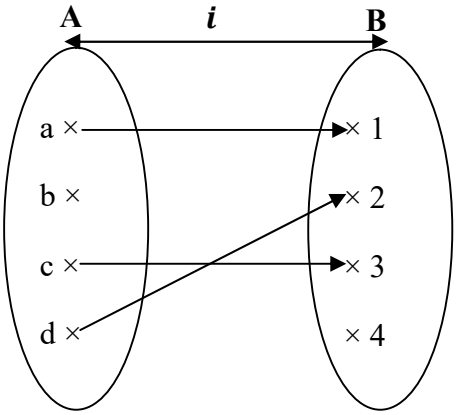
Activité :

Observe les diagrammes ci-dessous puis identifie les applications bijectives données.









NB : Toute application est une fonction mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

b- Théorème :

Toute application f bijective sur un intervalle admet une bijection réciproque notée f^{-1} .

Si $f(x) = y$ alors $f^{-1}(y) = x$.

c- Méthode pratique :

Pour démontrer qu'une application :

f : A ↦ B

$x \rightarrow f(x)$ Est bijective, on vérifie que : $\forall\, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B};\ \exists\, \boldsymbol{x}\,! \in \boldsymbol{A} \,/\, \boldsymbol{f(x) = b}$

On lit :

≪ quel que soit b appartenant à l'ensemble d'arrivé B , il existe un unique x appartenant à l'ensemble de départ A tel que $f(x) = b$ ≫.

Exemple

Soit les applications $f : \mathbb{R} - \{1\} \mapsto \mathbb{R} - \{2\}$ et $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$

$$x \rightarrow \frac{2x+3}{x-1} \qquad\qquad x \rightarrow x^2$$

1- Montrer que l'application f est bijective puis explicitée sa bijection réciproque $f^{-1}(x)$.
2- Vérifié si l'application g est bijective puis donner si possible sa bijection réciproque $g^{-1}(x)$.

2- Applications injectives :

a- Définition :

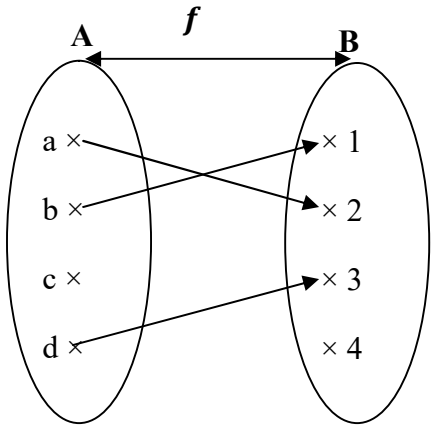
Soit l'application f : A ↦ B

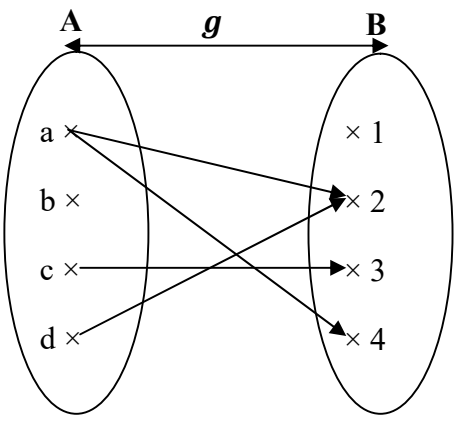
$$x \rightarrow f(x)$$

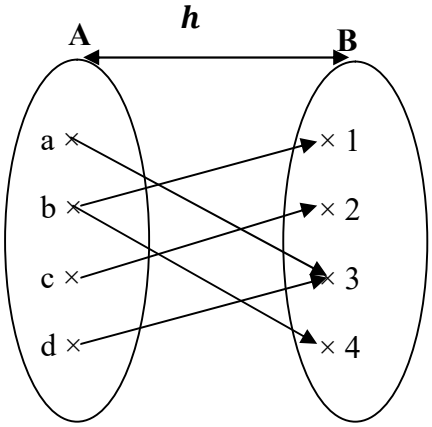
L'application f de A vers B est dite injective si et seulement si chaque élément de l'ensemble d'arrivé B admet **un ou zéro élément** dans l'ensemble de départ A.

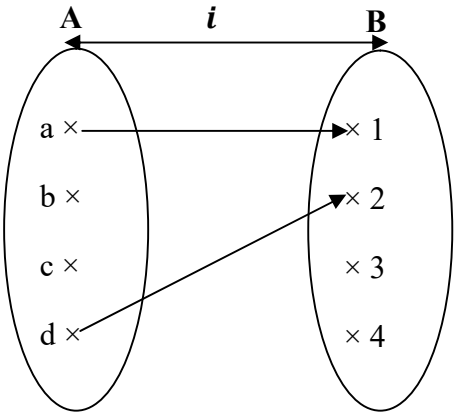
Activité :

Observe les diagrammes ci-dessous puis identifie les applications injectives données.









b- Théorème :

L'application f est dite injective de l'ensemble A vers l'ensemble B si $\forall\ \boldsymbol{a\ et\ b\ \in A}$, on a :

$f(a) = f(b) <=> a = b$

c- Méthode pratique :

Pour démontrer qu'une application :

f : A ↦ B

$x \rightarrow f(x)$ Est injective, on vérifie que : $\forall\ \boldsymbol{b\ \in B};\ \exists\ \boldsymbol{x}\ !\ \boldsymbol{ou\ 0 \in A\ /\ f(x) = b}$

On lit :

≪

quel que soit b appartenant à ***l'ensemble d'arrivé B , il existe un unique x ou zéro appartenant*** à ***l'ensemble de départ A tel que*** $\boldsymbol{f(x) = b}$ ≫.

Exemple

Soit les applications $f : \mathbb{R} - \{1\} \mapsto \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{2}{x - 1}$$

Montrer que l'application f est injective.

3- Applications surjectives :

a- Définition :

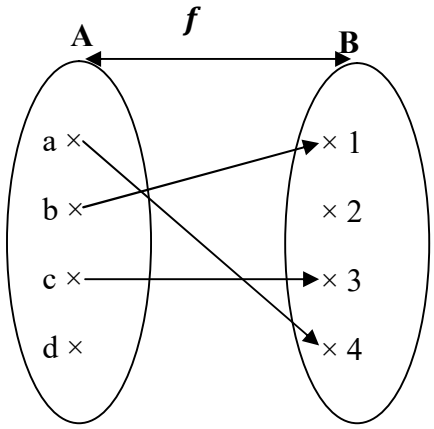
Soit l'application f : A ↦ B

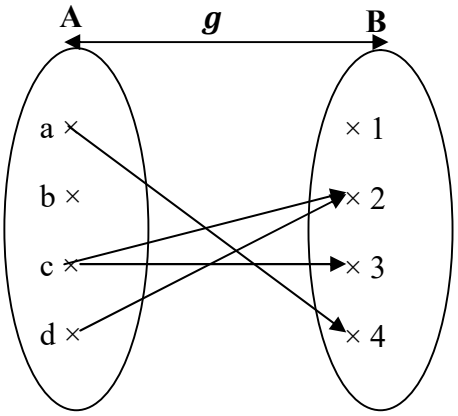
$$x \ \rightarrow f(x)$$

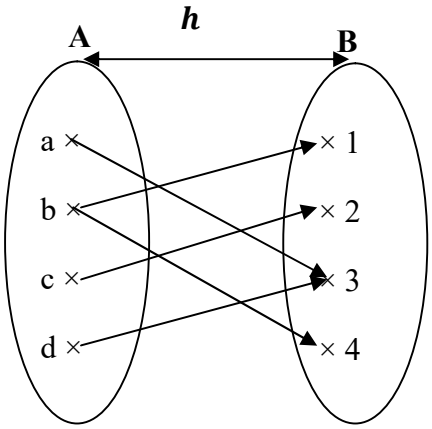
L'application f de A vers B est dite surjective si et seulement si chaque élément de l'ensemble d'arrivé B admet **un ou plusieurs éléments** dans l'ensemble de départ A.

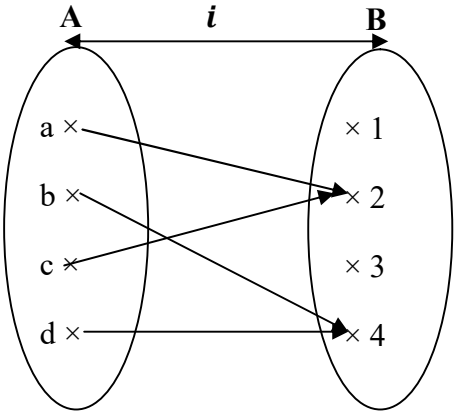
Activité :

Observe les diagrammes ci-dessous puis identifie les applications surjectives données.









b- Théorème :

L'application f est dite injective de l'ensemble A vers l'ensemble B si $\forall \ \boldsymbol{a \ et \ b} \in \boldsymbol{A}$, on a :

$f(a) = f(b) <=> a = b$

c- Méthode pratique :

Pour démontrer qu'une application :

f : A ↦ B

$x \rightarrow f(x)$ Est injective, on vérifie que : $\forall\, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B};\ \exists\, \boldsymbol{x}\,!$ ***ou plusieurs*** $\in$ $\boldsymbol{A}\ /\ \boldsymbol{f(x) = b}$

On lit :

≪

quel que soit b appartenant à ***l'ensemble d'arrivé B , il existe un unique x ou plusieurs appartenant*** à ***l'ensemble de départ A tel que*** $\boldsymbol{f(x) = b}$ ≫.

Exemple

Soit les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+ - [\,0\ ;\ 2]$

$$x \rightarrow (x + 2)^2$$

Montrer que l'application f est surjective.

NB : Toute **application à la fois injective et surjective est bijective.**

4- Restriction d'une fonction à un sous- ensemble B de D_f :

Activité :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow |\ 3 - x\ |$

a- Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b- Ecris l'expression de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle$[\ 3\ ;\ +\infty\ [$.

c- Ecris l'expression de $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle$]-\infty\ ;2\ ] \cup [\ 4\ ;6\ ]$.

On dit que la restriction de f à l'intervalle $]\ 3\ ;\ +\infty\ [$ est tel que $f(x) = x - 3$.

De même on dit que la restriction de f à l'intervalle $]-2\ ;3\ ] \cup [\ 4\ ;6\ ]$ est la fonction g telle que $g(x) = \begin{cases} 3 - x & si\ x \in\ ]-2\ ;3\ ] \\ x - 3 & si\ x \in [\ 4\ ;6\ ] \end{cases}$

a- Définition :

Soit les applications $f : A \mapsto B$ et $g : E \mapsto B$

$x \rightarrow f(x)$ $x \rightarrow g(x)$

Où E est un sous – ensemble de A c'est-à-dire $E \subset A$.

L'application $g : E \mapsto B$

$x \rightarrow g(x)$ Est appelé **restriction de f** sur l'ensemble E

Remarque :

Restreindre une fonction f à un sous−ensemble A de D_f signifie de limité le nouveau domaine de f à A, autrement dit définir f en considérant A comme domaine de définition de f.

b- Notation :

La restriction de f à l'intervalle A⊂ D_f est notée :

- $f_{\nearrow A}$ **et se lit ≪** $\boldsymbol{Restriction\ de\ f}$ à $\boldsymbol{A}$ **≫.**
  $\boldsymbol{ou}$
- $f_{\nearrow A}(x)$ **et se lit ≪** $(\boldsymbol{f\ Restraint}$ à $\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{de\ x}$ **≫.**
-

Exemple

Soit les applications f définie par $f(x)= |x - 2| - 3|x + 4|$

a- Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
b- Donner la restriction de f à l'intervalle $[2 ; +\infty[$

5- Applications composées:

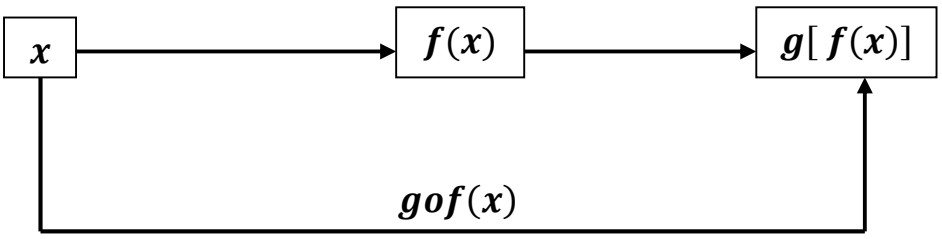
a- Définition :

Soit les applications f : E ↦ F et g : F ↦ G

$x \rightarrow f(x)$ $x \rightarrow g(x)$

On appelle composée de f par g, la fonction définie de E vers G notée gof et définie par :

$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Df}$ **et** $\forall\, \boldsymbol{f(x)} \in \boldsymbol{Dg}$, **on a** : $\boldsymbol{gof(x)} = \boldsymbol{g[\,f(x)]}$



Exemple

Soit les applications f et g définies par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x}$

a- Calculer $fog(x)$ et $gof(x)$.
b- Comparer $fog(x)$ et $gof(x)$.

b- Propriétés :

- **P_1 :** La composée des fonctions n'est pas commutative : $\boldsymbol{fog \neq gof.}$
- **P_2 :** La composée des fonctions est associative : $\boldsymbol{fo(goh) \neq (gof)oh.}$
- **P_3 :** La composée dune fonction $f(x)$ et celle de sa bijection réciproque $f^{-1}(x)$ est égale à la variable $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{fof^{-1}(x) = x}$

c- Ensemble de définition des fonctions composées :

Soient f et g deux fonctions d'ensemble de définitions respectifs Df et Dg.

$D_{fog} = \{ x \,/\, x \in D_g \; et \; g(x) \in \mathrm{D_f} \}$

$D_{gof} = \{ x \,/\, x \in D_f \; et \; f(x) \in \mathrm{D_g} \}$

Exemple

Soit les applications f ; g et h définies par :
$f(x) = \sqrt{-x+2}$; $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ et $h(x) = -x^2 + 1$

a- Calculer : $fog(x)$; $gof(x)$; $foh(x)$ et $hog(x)$.
b- Déterminer : D_f ; D_g ; D_h D_{fog} ; D_{gof} ; D_{foh} ; et D_{hog}

EXERCICES

Fonctions polynômes

1- Fonctions polynômes :

Activité1 :
Développe et ordonne suivant les puissances décroissantes de x l'expression
$A(x) = (x+2)(2x-1)(x+3)$.

a- Définition :
On appelle fonction polynôme, toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}$. (avec $a_n \neq 0$)

- $\mathbf{a_n}$; $\mathbf{a_{n-1}}$; $\mathbf{a_2}$; $\mathbf{a_1}$; $\mathbf{a_0}$ Sont des réels appelés coefficients du polynôme $f(x)$.
- $\boldsymbol{n}$ est le degré du polynôme et $\mathbf{a_n}$ est le coefficient dominant du polynôme.

Exemple 1:

$f(x) = -2x^4 + 2x^3 - x + 2$: est un polynôme de degré **2 ($n = 4$).**

$\boldsymbol{a_4 = -2}$; $\boldsymbol{a_3 = 2}$; $\boldsymbol{a_2} = 0$; $\boldsymbol{a_1} = -1$; $\boldsymbol{a_0} = 2$.

Exemple 2:

$f(x) = (x^2+1)(x-1) - x^2$.
$= x^3 - 2x^2 + x - 1$.
$f(x)$ est un polynôme de degré **3 ($n = 3$).**
$\boldsymbol{a_3 = 1}$; $\mathbf{a_2} = -2$; $\boldsymbol{a_1} = 1$; $\boldsymbol{a_0} = -1$.

b- Egalité de deux polynômes :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :
- Les deux polynômes sont de même degré.
- Les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exemple :

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2.$$

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Déterminer les réels a ; b ; c et d pour que $f(x) = g(x)$

Solution :

Par identification on a :

a = 5 ; b = - 3 ; c = 0 ; d = 2.

c- Zéro d'un polynôme :

Activité 2 :

Soit p un polynôme définie par : p(x) = $x^3 - 4x^2 + 8$.

a- Calcule : p(− 2) ; p(−1) ; p(0) ; p(1) ; p(2) ; p(3) ; p(4) ; p(5) .

b- En déduis les valeurs qui annulent p. Ces valeurs sont donc appelées les zéros de p.

α est un zéro ou racine du polynôme p si et seulement si p(α) = 0

d- Condition pour que α = 1 ou α = −1 soit un zéro d'un polynôme p du second degré

Activité 3:

Soit P : $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$x \rightarrow p(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

Détermine la relation entre les réels a, b et c pour que :

a) α = 1 soit un zéro de p.

b) α = −1 soit un zéro de p.

Exemple 1 :

Soit p un polynôme définie par $p(x) = x^2 + 2x - 3$

Calcule p(1) puis factorise p(x) et en déduire la valeur du deuxième zéro de p.

Exemple 2 :

Soit p un polynôme définie par $p(x) = x^2 + 3x + 2$

Calcule p(-1) puis factorise p(x) et en déduire la valeur du deuxième zéro de p.

Ainsi pour un polynôme du second degré $p(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), on a :

- Si : $a + b + c = 0$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$
- Si : $a + c = b$ alors $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{-c}{a}$

Application 1 :

Soit p un polynôme définie par : p(x) = $x^2 + 2x + 1$.

Ici : a = 1 ; b = 2 ; c = 1

a + c = b alors : x_1 = -1 et $x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$.

Application 2:

Soit p un polynôme définie par : p(x) = $2x^2 - 3x + 1$.

Ici : $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$

$a + b + c$ alors : $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

e- Factorisation d'un polynôme P:

Activité 4:

Soit p le polynôme définie par : $p(x) = 2 - x + (4x - 8)(x^2 + 1)$.

Ecris $p(x)$ sous la forme d'un produit de facteur.

- **Définition :**
  Un polynôme écrit sous forme de produit de facteur de degré supérieur ou égale à 1 est dit factorisé.

- **Les identités remarquables :**

Soient a et b deux nombres réels non nuls ; on a :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
- $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.
- $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

NB :

En posant : $a + b = S$ (**Somme**) et $ab = P$ (**Produit**), on a :

$a^2 + b^2 = (S)^2 - 2P$ et $a^3 + b^3 = (S)^3 - 3PS$

Exemple1 :

Factoriser le polynôme $p(x) = x^3 - 27$.

Exemple 2 :

Factoriser le polynôme p(x) = $8x^3 + \frac{1}{27}$.

NB :

Pour le calcule de ($\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$**ou** ($\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$avec ($n \in \mathbb{N}$) on peut utiliser le triangle de **PASCAL** qui est la suivant :

Triangle de Pascal :

Puissance de n	**coef de** ($\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$					
0	**1**					
1	**1**	**1**				
2	**1**	**2**	**1**			
3	**1**	**3**	**3**	**1**		
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**

Pour calculer $(a - b)^n$, on utilise les mêmes coefficients obtenus à partir du triangle de Pascal, mais chaque fois que b apparait avec une puissance impaire on met le signe ≪ − ≫

Exemple : $(a - b)^3$, les coefficients sont : 1 , 3 , 3 et 1.

$(a - b)^3 = (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Evaluation:

En utilisant le triangle de **PASCAL**, développé les expressions suivantes :

$(x + 1)^3$; $(2x - 1)^4$; $(-x + 3)^5$; $(\frac{1}{3}x - 3)^3$

- **Factorisation par (x – α) :**

Théorème 1: Si **α est un zéro** du polynôme **p,** alors p($\boldsymbol{x}$) est divisible par **($\boldsymbol{x}$ – α).**

Théorème 2 : Si **α est un zéro** du polynôme **p,** alors il existe un polynôme q tel que $p(x) = (x - \alpha)\, q(x)$ où q est un polynôme de degré inferieure à celui de p.

NB : **q(x)** est appelé **quotient** dans la division de $p(x)$ par $(x - \alpha)$.

Détermination pratique du quotient q (division des polynômes):

Activité 5 :

Soit $p(x)$ un polynôme définie par p(x) = $-x^3 + 3x^2 + 16x + 12$.

a- Calcule p(-2).
b- Factorise p(x) en utilisant :

- **La méthode par identification :**
- **La méthode de la division euclidienne :**
- **La méthode d'Hörner :**

Solution

a- Calculons p(-2)
P $(-2) = -(-2)^3 + 3(-2)^2 + 16(-2) + 12 = 0 => \alpha = -2$ est un zéro de P
b- Factorisons p(x).

Méthode par identification :

Si $\alpha = -2$ est un zéro de p. Alors p est factorisable par : ($-\alpha$)
=> ($x - (-2)$) = ($x + 2$) est un facteur de p. Ainsi on peut écrire :

p(x) = ($x + 2$) ($ax^2 + bx + c$). (En développant p(x)), on a :

p(x) = $ax^3 + x^2(b + 2a) + x(c + 2b) + 2c$. Or:
p(x) = $-x^3 + 3x^2 + 16x + 12$.

p(x) = p(x)

Par identification on a : $\begin{cases} a = -1 \\ b + 2a = 3 \\ c + 2b = 16 \\ 2c = 12 \end{cases} => \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$

D'où p(x) = ($x + 2$) ($-x^2 + 5x + 6$).

Méthode de la division euclidienne :

$-x^3 + 3x^2 + 16x + 12$ | $x + 2$

$-x^3 + 2x^2$ ——————

$0 \quad 5x^2 + 16x + 12 \qquad -x^2 + 5x + 6$

$-5x^2 - 10x + 12$

$0 \qquad 6x + 12$

$-6x - 12$

D'où $p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

Méthode d'Hörner :

	-1	3	16	12
-2		2	-10	-12
	-1	5	6	0
	a	b	c	

α

Or: $p(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c) \Rightarrow p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

D'où $p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

Théorème :

Soit f une fonction polynôme. Le réel $\boldsymbol{\alpha}$ est un zéro de f d'ordre de multiplicité $\boldsymbol{n}$ si et seulement si dans la factorisation de f , il existe le **facteur** $\boldsymbol{(x - \alpha)^n}$.

Evaluation

Soit la fonction polynôme p définie par :

$P(x) = 2x^5 - 19x^4 + 69x^3 - 118x^2 + 92x - 24$

Montrer que 2 est un zéro triple de p, puis en déduire les autres zéros de p.

f- Cas particulier de factorisation des polynômes du second degré :

Forme canonique d'un polynôme du second degré :

Soit $\boldsymbol{f(x)} = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme du second degré.

On a : $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[x^2 + 2x\,\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \text{ on pose } \Delta = b^2 - 4ac$$

D'où $\boldsymbol{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$

D'où la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est :

$\boldsymbol{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$ ou $\boldsymbol{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$

avec : $\boldsymbol{\alpha = \frac{-b}{2a}}$ **et** $\boldsymbol{\beta = -a\alpha^2 + c}$

Evaluation

Ecrire sous forme canonique les polynômes suivants :

$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$; $g(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{5}$; $h(x) = -5x^2 + 2x - 4$ *

EXERCICES

Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :

a- la forme canonique de $p(x)$.
b- Les racines éventuelles de $p(x)$ puis étudier le signe de $p(x)$

1) $p(x) = x^2 + x - 1$; 2) $p(x) = -x^2 + x - 1$; 3) $p(x) = x^2 - 7x + 6$.

4) $p(x) = -5x^2 + x + 1$; 5) $p(x) = x^2 + 2x + 2$; 6) $p(x) = 4x^2 + 2x - 2$.

7) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$; 8) $p(x) = x^2 + x + 1$; 9) $p(x) = -5x^2 - 4x + 1$

2 Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :

les réels a ; b ; c ; d etc.....

1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ $\quad p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2) $q(x) = 2x^3 - 12x - 9$ $\quad q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ $\quad f(x) = (2ax + 1)(-bx - 1)(x + c)$
4) $g(x) = 2x^3 - 12x - 9$ $\quad g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
5) $i(x) = x^2 + x - 1$. $\quad i(x) = (2x + a)(x - b)$
6) $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$. $\quad k(x) = ax^2 + bx + c$
7) $l(x) = x^2 - 7x + 9$. $\quad l(x) = (\frac{-3a}{4}x - b)^2$

3 Parmi les fonctions numériques suivantes dire celles qui sont rationnelles puis en déduire leur ensemble de définition :

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$; 2) $g(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 7x + 9$; 3) $h(x) = (-x + 8)^3$
4) $p(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x + 5}$; 5) $q(x) = \left(\frac{7x + 1}{-x - 1}\right)^3$; 6) $k(x) = \sqrt{\frac{x + 2}{-x + 3}}$;

7) $i(x) = \frac{x + 2}{(2x + 1)(x^2 - 1)}$

4
1) Trouver deux fonctions polynômes f et g du premier degré telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 f(x) + (x - 1)^2 g(x) = 1$
2) Soit la fonction polynôme P : $x \to 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
Trouver deux nombres a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $p(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$.
En déduire une factorisation de P.

5
1) Développer $(x^2 + bx + c)^2$.
2) Montrer que $(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9)$ est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.

6 Déterminer les réels m, n et p pour que : $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$ soit factorisable par : $(x - 3)(x^2 - 1)$. Donner alors une factorisation.

7

Trouver le nombre réel k tel que la fonction polynôme suivante :
P : $x \rightarrow 4x^4 - 20x^3 + 53x^2 - 10kx + 7k$ soit le carré d'une fonction polynôme de degré 2.

8 Soit p le polynôme défini par $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

On suppose que $p(x)$ admet trois racines distinctes $x_1 ; x_2 ; et\ x_3$.

1) Calculer : $x_1 + x_2 + x_3$; $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$ et $x_1 x_2 x_3$ sans calculer les racines.
2) En déduire alors la valeur de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$
3) Résoudre $p(x) = 0$. Vérifier les résultats obtenus au 1).

9 Soit $p(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60$.

1) Déterminer les trois réels a , b et c tel que :
$p(x) = a(2x - 5)^3 + b(2x - 5)^2 + c(2x - 5)$.
2) En déduire une factorisation de $p(x)$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer le polynôme p(x) de degré 3 tel que :

1) $P(x)$ admet $-1, 1$ et 2 pour racines et $p(0) = 4$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x+1) - p(x) = x(x+1)$ et $p(1) = 0$.

11 Soit l'équation : $x^3 + 9x^2 + 51x + 155 = 0$.

Déterminer le réel h tel que, en posant $\mathbf{X} + h = x$, l'équation proposée s'écrive alors :

$\mathbf{X}^3 + p\,\mathbf{X} + q = \mathbf{0}$; où p et q sont des coefficients que l'on déterminera.

12 Dans chacun des cas suivants :

a- Déterminer l'ensemble de définition D_f.
b- Simplifier $f(x)$ sur D_f.
c- Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$

1) $f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{(-x+1)(x+2)}$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x - 3}$; 3) $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$

13 Soit les fonctions polynômes p et q définies par :
$P(x) = 2x^5 - 19x^4 + 69x^3 - 118x^2 + 92x - 24$ et
$q(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36$

1) a- Montrer que 2 est un zéro triple de p, puis en déduire les autres zéros de p.
b- Résoudre l'inéquation : $x \in [-5\,;5\,]\,;\ P(x) \leq 0$.

2) Calculer q(2) et q(3) puis en déduire les zéros de q.

3) Soit la fraction rationnelle h : $x \to \frac{p(x)}{q(x)}$

a- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis simplifier $h(x)$.
b- Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

14 Soit les fonctions polynômes f et g définies par :
$f(x) = x^3 - 7x^2 + 6 \quad et \quad g(x) = x^2 - x - 2$

1) Déterminer les zéros de f.

2) Soit la fraction rationnelle h : $x \to \frac{f(x)}{g(x)}$

c- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis simplifier $h(x)$.
d- Montrer qu'il existe trois réels a ; b et c tels que : $\forall\, x \in D_h$ on a :

$h(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

e- Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

15 Soit la fonction polynôme h définie par : $h(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que : $h(x) = (x^2 - 2)(ax^2 + bx + c)$.

3) Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{1}{h(x)} + \frac{3x}{x^4-4}$

a- Déterminer l'ensemble de définition de f.

b- Ecrire f sous forme $\frac{N(x)}{D(x)}$ où N et D sont deux polynômes.

c- Résoudre l'équation $f(x) = 0$

16 Soit la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a- l'équation $f(x) = x$
   b- l'inéquation $f(x) \leq x$

16 Soit le polynôme $p(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$.

1) Trouver un polynôme q tel que $p(x) = [q(x)]^2$
2) Résoudre $p(x) = 0$.
3) a- Trouver les réels a, b et c tels que $x^3+6x^2+6x+5 = (x+5)(ax^2+bx+c)$.

   b- Simplifier la fraction rationnelle : $f(x) = \frac{x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100}{x^3 + 6x^2 + 6x + 5}$

Equations – Inéquations – Systèmes

I- Rappels et compléments des propriétés dans IR

1) Ensemble des entiers naturels

0, 1, 2…. etc sont des nombres entiers naturels

$\mathbb{N}$: {0, 1, 2, 3, 4……} est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$ = {1, 2, 3, 4…….} l'ensemble des entiers naturels privé de zéro.

2) L'ensemble des entiers relatifs

$-2, 3, 0, -10$ sont des entiers relatifs. L'ensemble des entiers relatifs sera noté par $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ = {…… 4 ; -3 ; -2 ; 0, 1, 2, 3, 4,……}alors $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

NB :

$\mathbb{Z}_+^+$ L'ensemble des entiers relatifs positifs

L'ensemble des entiers relatifs négatifs

$\mathbb{Z}_+^*$ L'ensemble des entiers relatifs positifs privés de zéro

$\mathbb{Z}_-^*$ L'ensemble des entiers relatifs négatifs privés de zéro

3) L'ensemble des nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs

-1 ; 3,5 ; $\frac{7}{3}$ sont des nombres rationnels.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{P}{Q}, P \in \mathbb{Z} ; q \in \mathbb{Z}^*\right\}$ => $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$, π ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels forment l'ensemble des nombres réels et est noté par $\mathbb{D}$.

L'ensemble des nombres décimaux est noté par .

$\mathbb{D} = \{x/x, x \in \frac{P}{10^n}\ ;\ P \in \mathbb{Z}^* et\ n\ \in \mathbb{N}\}$

Exemple : $x\ =\ -2{,}741 \Rightarrow\ -2{,}741 = \frac{-2741}{10^3}$; $P = -2741$; $n = 3$

Remarque :

$x\ =\ -2{,}741 = \frac{-2{,}741}{10^3}\ \ n = 3$

II- RAPPEL ET REGLES DE CALCULS SUR LES QUOTIENTS – PUISSANCES ET RADIAUX

1) Calcule sur les quotients

Soit a ∈ ℝ ; b ∈ ℝ* le réel **q** = $\frac{a}{b}$ *est appelé* ***quotient*** *de a par b.*

Règle de calcul

$\frac{a}{-1} = -a$ $\qquad$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0$ $\qquad$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$; $(bd \neq 0)$

$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ $\qquad$ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ (bd ≠ 0)

$c \times \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b}$ $\qquad$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$ (bc ≠ 0)

$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ (a≠ 0) $\qquad$ $\frac{\frac{1}{a}}{b} = \frac{1}{ab}$ (ab≠0)

2) Les puissances entières

Soit a ∈ ℝ; $n \in \mathbb{N}^*$ $a^n = a \times a \times a \ldots\ldots \times a \times a\}$ n fois

$a^0 = 1$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

Règle de calcul

$(ab)^n = a^n \times b^n$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $(a^n)^m = a^{m \times n}$

Remarque :

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ c'est : la **racine $n^{ème}$** de a ; c'est le réel élevé à la **puissance n qui donne a.**

3) Les radicaux

Règles de calcul

Si $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$ on a :

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n = a$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

En particulier : $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$

Remarque :

Si a est positif : $\sqrt{a^2} = a$

Si a est négatif : $\sqrt{a^2} = -a$

Si $a \geq 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Evaluation

a- Calculer les nombres suivants en mettant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

$$\mathbf{A} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} \;;\; \mathrm{B} = \frac{4}{\frac{5}{2}+\frac{1}{3}} \;;\; \mathbf{C} = \frac{\frac{-2}{3}-4}{\frac{5}{3}+\frac{4}{3}} \quad \mathbf{D} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{5}}{-3+\frac{3}{10}} \times \frac{\frac{7}{2}-\frac{3}{5}}{\frac{1}{-3}+\frac{3}{10}} \;;\; \mathbf{E} = \frac{\frac{1}{4}-3}{\frac{5}{2}+\frac{1}{3}} \bullet \frac{1-\frac{1}{5}}{5-\frac{1}{2}}$$

b-

Calculer les nombres réels suivants à l'aide d'une puissance entière de nombres premiers :

$$\mathbf{A} = \frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} \;;\; \mathbf{B} = \left(\frac{\left(8^6 \times 5^4 \times 7^8\right)^{\frac{1}{2}}}{3^3 \times 4^5 \times 4^6} \right)^3 ;\; \mathbf{C} = \frac{\left((5)^3 \times \left(-2^{-1}\right)^2\right)^4}{8}$$

c- Soit a un nombre entier naturel.
Déterminer l'entier a satisfaisant aux conditions indiquées :

$$2^{4+a} = 64 \;;\; 3^{12} = 9^{3a} \;;\; 7^{4-a} = 1 \;;\; 5^a \times 25 = 125 \;;\; (7^a)^3 = 1 \;;\; \frac{13^{a-4}}{13} = 169$$

d- Mettre sous forme $a\sqrt{b}$ les expressions suivantes :

$$\mathrm{A} = 7\sqrt{20} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{5} \;;\; \mathrm{B} = 2\sqrt{54} - \sqrt{6} + \sqrt{24} + 3\sqrt{96}$$

e- Rendre rationnelle le dénominateur des fractions suivantes :

$$\frac{3}{\sqrt{7}} ;\; \frac{5}{\sqrt{3}+1} ;\; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} ;\; \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+2} ;\; \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}+5} ;\; \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{7}} ;\; \frac{5-3\sqrt{2}}{3\sqrt{7}-\frac{5}{2}}$$

f- On pose : $x = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$; $y = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$ .Vérifier que : $4x - y = 0$

g- Comparer les nombres réels suivants :

$$\frac{23}{99} \text{ et } \frac{231}{990} \;;\; \frac{99}{23} \text{ et } \frac{990}{231} \;;\; \frac{23}{99} \text{ et } \frac{239}{999}$$

A- EQUATIONS

1) Equations du premier degré :

Activité :

Ali a aujourd'hui 38 ans et son fils a 13 ans.

Dans combien d'années Ali aura-t-il le double de l'âge de son fils ?

a- Définition :

On appelle équation du premier degré toute équation pouvant se ramener sous la forme : $ax + b = 0$ **avec** $(a \neq 0)$ **.**

b- Résolution :

Pour résoudre de telles équations, on détermine la valeur de l'inconnue x tel que : $x = \frac{-b}{a}$ et sa solution est telle que **s** $= \left\{\frac{-b}{a}\right\}$

Evaluation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$-2x + 1 = 0 \quad ; \quad 5 + 3x = -5 \quad ; \quad \frac{x+2}{-x+3} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{x+2}{-5} = \frac{-3x+4}{2}$$

2) Equations du second degré :

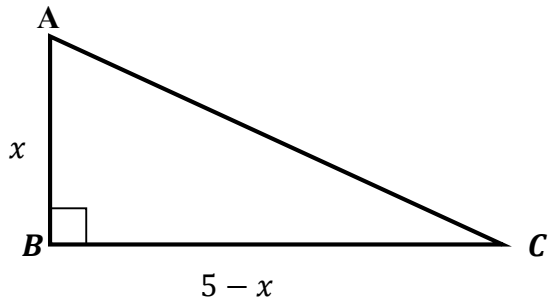
Activité1 :

Détermine les dimensions d'un champ rectangulaire dont l'aire vaut $1200m^2$ et dont la longueur dépasse de 10 m la largeur.

Activité 2 :

On dispose d'un triangle ABC rectangle en B dont les longueurs en centimètre sont :

AB = x et BC = $5 - x$ (avec : $0 < x < 5$)



- Détermine tous les réels x tels que $AC^2 = \frac{29}{2}$.
- Pour quelles valeurs de x a-t-on l'égalité $AC^2 = \frac{25}{2}$.

  $AC^2 = \frac{29}{2} <=> 2x^2 - 10x + 25 = \frac{29}{2}. <=> 4x^2 - 20x + 21 = 0$ est une équation du second degré en x.

  De même $2x^2 - 10x + 25 = \frac{25}{2} <=> 4x^2 - 20x + 25 = 0$ est aussi une équation du second degré en x.

a- Définition :

On appelle équation du second degré toute équation pouvant se ramener sous la forme :

$\boldsymbol{ax2 + bx + c = 0 \ \ avec\ (a \neq 0)}$.

Résolution :

Pour résoudre de telles équations, on calcule le discriminant associé Δ tel que **:**

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$. Ainsi la solution est obtenue en discutant suivant les valeurs de Δ.

- **Si $\Delta < 0$, on pas de solution**
- **Si $\Delta = 0$,** on a une solution double : **x_1 et x_2** telle que :

$$x_1 = x_2 = \frac{-(b)}{2(a)}$$

- **Si $\Delta > 0$** , on a deux solutions distinctes : **x_1 et x_2** telles que :

$x_1 = \frac{-(b)-\sqrt{\Delta}}{2(a)}$ **et** $x_1 = \frac{-(b)+\sqrt{\Delta}}{2(a)}$

Evaluation

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

$x^2 - x - 6 = 0$; $-3x^2 + x - 1 = 0$; $x^2 + 4x + 4 = 0$

Remarque :

- Si x_1 est **solution** d'une équation alors x_1 est appelée **racine** de l'équation.
- Si **b** est **pair** c'est-à-dire **(b = 2b')** alors on résous l'équation avec le discriminant réduit Δ' tel que $\Delta' = (b')^2 - (a)(c)$.

  Si $\Delta' < 0$, on pas de solution

  Si $\Delta' = 0$, on a une solution double : x_1 **et** x_2 telle que $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

  Si $\Delta' \geq 0$, on a deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-(b')-\sqrt{\Delta'}}{(a)}$ **et** $x_1 = \frac{-(b')+\sqrt{\Delta'}}{(a)}$

Si l'équation du second degré a deux racines distinctes, x_1 et x_2 alors :

S $= x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ **et** **P** $= x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Racine évidente d'une équation du second degré

- Si **a + b + c = 0** alors $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$
- Si **a + c = b** alors $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{-c}{a}$

Evaluation

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$7x^2 + 9x + 2 = 0$; $-3x^2 + x + 4 = 0$; $x^2 + 4x + 4 = 0$

B- INEQUATIONS

C-

1) Inéquations du premier degré :

a- Définition :

On appelle inéquation du premier degré toutes inéquations pouvant se ramener sous la forme : $\boldsymbol{ax + b < 0}$; $\boldsymbol{ax + b > 0}$; $\boldsymbol{ax + b \leq 0}$ **ou** $\boldsymbol{ax + b \geq 0}$ **avec** $\boldsymbol{(a \neq 0)}$ **.**

b- Résolution :

Pour résoudre de telles inéquations, on étudie le signe du binôme : $\boldsymbol{ax + b}$ dans un tableau appelé **tableau de signe** après avoir déterminé la valeur de x.
Puis on prend l'ensemble solution des x satisfaisant à l'inégalité proposée comme ensemble solution de l'inéquation.

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$signe\ de - a$	0	$signe\ de\ a$

Evaluation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$-2x + 1 \leq 0$; $5 + 3x \geq -5$; $\frac{x+2}{-x+3} < \frac{1}{2}$; $\frac{x+2}{-5} > \frac{-3x+4}{2}$

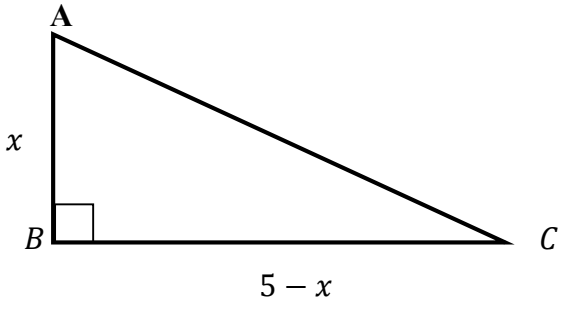
2) Inéquations du second degré à une inconnue :

a- Etude du signe du trinôme $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

Activité 1:

On dispose d'un triangle ABC rectangle en B dont les longueurs en centimètre sont :

AB = x et BC = $5 - x$ (avec : $0 < x < 5$)



1) Exprime AC^2 en fonction de x puis établis que : $AC^2 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$.

L'expression $2x^2 - 10x + 50$ est appelée un trinôme du second degré en x.

2) Détermine tous les réels x tels que $AC^2 \geq \frac{29}{2}$.

3) Détermine tous les réels x pour que l'on ait $AC^2 \geq \frac{25}{2}$.

Règle :

Pour étudier le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$, on calcule $\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$.

- **1er cas : Si $\Delta < 0$,** le trinôme n'a pas de solution dans IR et est du signe de **a.** D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe de a*	

- **2ème cas : Si $\Delta = 0$,** le trinôme a une solution double x_1 et x_2 avec $(x_1 = x_2 = x_0)$ et est du signe de **a** pour tout $x \neq \frac{-b}{2a}$. D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe de a*	0	*signe de a*

- **3ème cas : Si $\Delta > 0$,** le trinôme a deux solutions distinctes x_1 et x_2 avec $(x_1 < x_2)$ et est du signe de **a** pour les valeurs extérieurs aux racines x_1 et x_2 puis du signe contraire de **a** entre les racines x_1 et x_2. D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe de a*	0 *signe de* $-a$	0	*signe de* $-a$

b- Définition :

On appelle inéquation du premier degré toutes inéquations pouvant se ramener sous la forme : $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ avec $(a \neq 0)$.

c- Résolution :

Pour résoudre une inéquation du second degré, on étudie le signe du trinôme: $ax^2 + bx + c$. L'ensemble solution de l'inéquation proposée est la partie du tableau satisfaisant à l'inégalité donnée.

Evaluation

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

$x^2 - x - 6 \leq 0$; $-3x^2 + x - 1 \geq 0$; $x^2 + 4x + 4 < 0$; $\frac{2x^2 + 3x - 5}{-x^2 + 4x - 3} > 0$

D- EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES

1- Equations irrationnelles :

a- Définition :

On appelle équations irrationnelles toute équation dans la quelle l'inconnue figure sous un radical ou plusieurs radicaux.

b- résolution :

Pour résoudre de telles équations, on cherche le domaine de validité D_V tel que :
$D_V = \{x / x \in \mathbb{R}; ax + b \geq 0 \text{ et } cx + d \geq 0\}$.

Ainsi on résous l'équation en élevant les deux membres de l'égalité au carrée.

c- Méthode pratique :

Si $\sqrt{ax + b} = cx + d$, alors on a la forme $\sqrt{A(x)} = B(x)$ **et l'ensemble solution est tel que**

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 & (S1) \\ A(x) = (B(x))^2 & (S2) \end{cases}$$

Alors on a : $S = S_1 \cap S_2$

Si $\sqrt{ax+b}=\sqrt{cx+d}$, alors on a la forme $\sqrt{A(x)}=\sqrt{B(x)}$ **et l'ensemble solution est tel**

que : $\begin{cases} A(x) \geq 0 & (S_1) \\ B(x) \geq 0 & (S_2) \\ A(x) = B(x) & (S_3) \end{cases}$

Alors on a : $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$

Evaluation

Résoudre dans $\mathbb{R}$les équations irrationnelles suivantes :

a- $\sqrt{x+4}=x+1$; **b-** $2x-\sqrt{x}-1=0$; **c-** $\sqrt{1-2x}=\sqrt{4x-8}$

2- Inéquations irrationnelles :

a- Définition :

On appelle inéquations irrationnelles toute inéquation dans la quelle l'inconnue figure sous un radical ou plusieurs radicaux.

b- résolution :

Pour résoudre de telles inéquations, on cherche le domaine de validité D_V tel que :
$D_V = \{x/x \in IR; ax+b \geq 0 \text{ et } cx+d \geq 0\}$.

Ainsi on résout l'inéquation en élevant les deux membres de l'égalité au carrée.

c- Méthode pratique :

Si $\sqrt{ax+b} \geq cx+d$, alors on a la forme $\sqrt{A(x)} \geq B(x) <=> \begin{cases} B(x) \leq 0 & (S1) \\ A(x) \geq 0 \end{cases}$

ou $\begin{cases} B(x) > 0 & (S2) \\ A(x) \geq (B(x))^2 \end{cases}$

Alors on a : $S = S_1 \cup S_2$

Si $\sqrt{ax+b} \leq \sqrt{cx+d}$, alors on a la forme $\sqrt{A(x)} \leq \sqrt{B(x)}$ **et l'ensemble solution est tel Que :** $\begin{cases} A(x) \geq 0 & (S_1) \\ B(x) \geq 0 & (S_2) \\ A(x) \leq B(x) & (S_3) \end{cases}$

Alors on a : $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$

Exemple :

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation irrationnelle $\sqrt{x+4} \geq x + 1$

Solution

$\sqrt{x+4} \geq x + 1$

$$=> \begin{cases} x+1 \geq 0 & (1) \\ x+4 \geq 0 & (2) \\ \left(\sqrt{x+4}\right)^2 \geq (x+1)^2 & (3) \end{cases}$$

(1) $x+1 \geq 0$ => $x \geq -1$ => $S_1 = [-1 ; +\infty[$.

(2) $x+4 \geq 0$ => $x \geq -4$ => $S_2 = [-4 ; +\infty[$.

(3) $\left(\sqrt{x+4}\right)^2 \geq (x+1)^2 \Leftrightarrow x+4 \geq x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+x-3 \leq 0$ =>

$S_3 = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

Alors S = $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left[-1 ; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

Evaluation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations irrationnelles suivantes :

a- $2x - \sqrt{x} - 1 < 0$; **b-** $\sqrt{1-2x} > \sqrt{4x-8}$

III- RESOLUTION DE SYSTEMES DANS $\mathbb{R}^2$ PUIS DANS $\mathbb{R}^3$

1- Résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$:

a- Définition :

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues, tout système de la forme : $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$

Où : a , b , c , a' , b' , c' sont tous des réels.

b- <u>Résolution :</u>

Pour résoudre de tels systèmes, nous disposons des méthodes suivantes :

- **Méthode d'addition :**

  Qui consiste à déterminer les valeurs de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ par addition des équations **(1)** et **(2)** après avoir multiplié respectivement les équations **(1)** et **(2)** par des réels de signe opposé pour éliminé $\boldsymbol{x}$ ou $\boldsymbol{y}$.

- **Méthode de substitution :**

  Qui consiste à déterminer les valeurs de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ en tirant la valeur d'une inconnue dans l'une des deux équations afin de la remplacé par sa valeur dans l'autre.

- **Méthode de comparaison :**

  Qui consiste à déterminer les valeurs de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}$ en tirant $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}$ **(**respectivement$\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{y}$**)** simultanément dans les deux équations afin de les égalisés.

- **Méthode des déterminants :**

  Qui consiste à déterminer les valeurs de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}$ en utilisant :

- Le déterminant $\mathbf{D_P} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \mathbf{(a \times b') - (a' \times b)}$

<u>1er Cas :</u> Si $D_P \neq 0$, le système admet une solution unique (x ; y).

On cherche les déterminants secondaires $\mathbf{D_x}$ **et** $\mathbf{D_y}$

- Le déterminant $\mathbf{D_x} = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = \mathbf{(c \times b') - (c' \times b)}$

- Le déterminant $\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \mathbf{(a \times c') - (a' \times c)}$

Ainsi $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{D_x}}{\boldsymbol{D_p}}$ **et** $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{D_y}}{\boldsymbol{D_p}}$ **d'où** $\mathbf{S} = \left\{ \frac{\boldsymbol{D_x}}{\boldsymbol{D_p}} ; \frac{\boldsymbol{D_y}}{\boldsymbol{D_p}} \right\}$

2ème Cas : Si $D_P = 0$, on revient au système.

NB :

- $\mathbf{D_P}$ est appelé déterminant **principal**
- $\mathbf{D_x}$ est appelé déterminant **associé à x**
- $\mathbf{D_x}$ est appelé déterminant **associé à y**

Evaluation

En utilisant les trois (03) méthodes données si déçus, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

a- $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b- $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + \frac{1}{2}y + 3 = 0 \end{cases}$ c- $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$

2- Résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^3$:

a- Définition :

On appelle système de trois équations du premier degré à trois inconnues,

tout système de la forme : $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

où $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a'}$, $\boldsymbol{b'}$, $\boldsymbol{c'}$ $\boldsymbol{d'}$, $\boldsymbol{a''}$, $\boldsymbol{b''}$, $\boldsymbol{c''}$, $\boldsymbol{d''}$ sont tous des réels

b- Résolution :

Pour résoudre de telles systèmes, on utilise la méthode du **PIVOT DE GAUSS** ou encore appelé méthode **triangulaire.**

Cette méthode consiste à trouver une écriture triangulaire du système.

Pour cela on élimine **une** inconnue dans l'équation **(2) ; deux** inconnues dans l'équation **(3)** etc ... Jusqu'avoir **une** inconnue dans la dernière équation.

Evaluation

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

a- $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -4x - 3y + 2z = 4 \\ -3x - y + z = 0 \end{cases}$ b- $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7 \end{cases}$ c- $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ x + y + 3z = -6 \end{cases}$

3- <u>Programmation linéaire</u>:

L'étude des problèmes pratiques de résolution des systèmes linéaires des inéquations du premier degré à deux inconnues x et y , nous conduis souvent à étudier si l'ensemble S solution du système d'inéquation à deux inconnues admet un maximum (ou un minimum) de la forme $\alpha x + \beta y$ (avec α et β) des réels données.

Remarque : les inéquations ou les équations d'un système sont appelés des contraintes de Programmation linéaire.

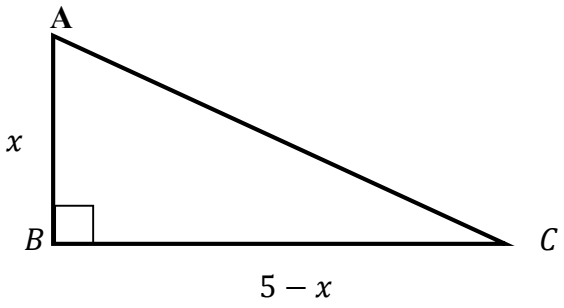
IV- MISE EN EQUATIONS DE PROBLEMES PRATIQUES

La mise en équation est un système très pratique en Mathématique qui permet de mettre en évidence l'importance des équations dans la vie courante telle que les calculs d'aire, de surface, etc.…….

Evaluation

On dispose d'un triangle ABC rectangle en B dont les longueurs en centimètre sont :

AB = x et BC = $5 - x$ (avec : $0 < x < 5$)



a- Exprimer AC^2 en fonction de x puis établir que : $AC^2 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$

b- Déterminer tous les réels x tels que $AC^2 = \frac{29}{2}$.

c- Déterminer tous les réels x tels que $AC^2 \geq \frac{29}{2}$.

d- Pour quelles valeurs de x a-t-on l'égalité $AC^2 = \frac{25}{2}$.

EXERCICES

1 1) Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a- $|x-2|=3$; **b-** $|x+1|=\frac{3}{5}$; **c-** $|3x-6|=3$; **d-** $\left|4x+\frac{1}{2}\right|=8$

e- $\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2}$; **f-** $|x-2|=-3$; **g-** $|x|=1$

2) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a- $|x-5|\geq 3$; **b-** $|x+4|\leq\frac{1}{2}$; **c-** $|3x-9|>6$; **d-** $|4x+1|<8$

e- $|x-7|\geq\frac{-1}{2}$; **f-** $|x+9|\leq -3$; **g-** $2\leq|x-3|\leq 4$

3 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a- $3x+1=-x+4$; **b-** $\frac{1}{x+2}=\frac{-3}{-x+5}$; **c-** $x+1+\frac{x+4}{4}=\frac{x+2}{2}+\frac{x+3}{3}$

d- $\frac{x+3}{4}-\frac{x-10}{6}=\frac{x+1}{12}+1$; **e-** $-3(x+1)=\frac{1}{2}(-3-x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $-x+1\leq -x+4$; **b)** $\frac{-3}{x-1}>\frac{3}{-x+2}$; **c)** $x-1+\frac{-3x+4}{3}<-\frac{x-2}{2}+\frac{x}{6}$

d) $\frac{2x+3}{4}-\frac{x-5}{2}\geq\frac{5x+1}{4}-x$; **e)** $-3(x+1)\leq\frac{1}{2}(-3-x)$

4 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3x^2+5x-8=0$; b) $2-x=4-x^2$; c) $-x^2+x+6=0$; d) $4x^2+1=0$

e) $x^2 + x + 1 = 0$; **f)** $x^2 - 4x + 4 = 0$; **g)** $x^2 - (3+\sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 16x + 2(x-4) \leq 0$; **b)** $2 - x \geq 4 - x^2$; **c)** $-x2 + x + 6 < 0$;
d) $4x^2 + 1 > 0$; **e)** $x^2 + x + 1 < 0$; **f)** $x^2 - 4x + 4 \geq 0$; **g)** $\frac{5x^2+3x-2}{-3x^2-7x+10} \geq 0$

5 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $x + y + 1 < 0$; **b)** $y \geq -2x + 3$; **c)** $-3x + 2y - 1 \leq 0$; **d)** $-x + y - 1 > 0$

e) $\frac{-1}{2}x + y - 1 \leq 0$ **f)** $y \geq -x + 2$; **g)** $x + \frac{3}{4}y + 2 \leq 0$; **h)** $-x + y > 0$

1) Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivantes :

a) $\begin{cases} 4x - 5y = 5 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x - 2y = 3 \\ -2x + \frac{2}{3}y = -1 \end{cases}$; **e)** $\begin{cases} x - 5y = 5 \\ \frac{-2}{3}x + y = -1 \end{cases}$; **f)** $\begin{cases} 4x - y = \frac{-5}{3} \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$

2) Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivantes :

a) $\begin{cases} 6x - y \leq 3 \\ -6x - 7y > -2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ x + 2y \geq -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y < 3 \\ -x + y < -2 \end{cases}$; **e)** $\begin{cases} 5x - 10y \geq 2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$; **f)** $\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x + y \leq 0 \end{cases}$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants en utilisant la méthode du déterminant :

a) $\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ 6x - 2y = -3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 10x + 4y = 1 \\ -5x + 20y - 4 = 0 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 4x - y = 21 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 4y + 6 = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -1 \end{cases}$; **e)** $\begin{cases} x - 5y = 5 \\ \frac{-2}{3}x + y = -1 \end{cases}$; **f)** $\begin{cases} 4x - y = \frac{-5}{3} \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$

7 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants en utilisant la méthode du Pivot de Gauss :

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -4x - 3y + 2z = 4 \\ -3x - y + z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ x + y + 3z = -6 \end{cases}$

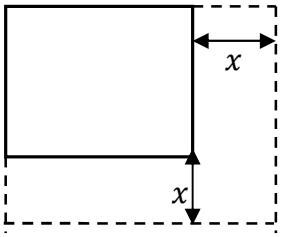
d) $\begin{cases} x+2y-z=8 \\ -x+3y+4z=-7 \\ 2x-y+2z=-6 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x+10y-3z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x-y+2z=-6 \\ x+2y-z=8 \\ -x+3y+4z=-7 \end{cases}$

8

1) Calculer les cotés d'un rectangle, sachant que si l'on augmente la largeur de 3 m et si l'on diminue d'autant la longueur, l'aire ne change pas ; mais si en augmentant la largeur de 5 m, on diminue la longueur de 3 m, l'aire augmente de 16 m^2 .

2) Trois moutons et une chèvre coutent 57 euros. cinq moutons et trois chèvres coutent 107 euros.
Quel est le prix d'un mouton et d'une chèvre ?

3) Dans une feuille carrée de 10 cm de coté, on enlève sur deux cotés une bande de largeur x cm.



Quel est l'ensemble des valeurs possibles de x ?

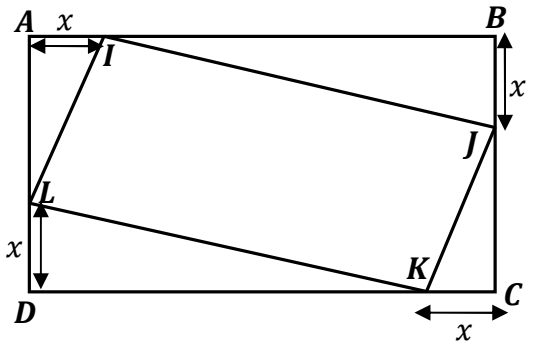
9

Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire d'aire 1200 m^2 , sachant que sa longueur dépasse sa largeur de 10 m.

10

On considère un rectangle ABCD tel que AB = CD = 5 cm et BC = DA = 3 cm.
On place sur le contour de ce rectangle quatre points I ; J ; K ; L tels que :

AI = BJ = CK = DL = x cm (avec $x \in [0\,;3]$).



a- Exprimer les longueurs : BI, CJ, DK et LA en fonction de x.
b- Montrer que la somme des aires des triangles AIL, LDK, KJC, et JIB est égale à

$f(x) = -2x^2 + 8x.$

c- Déterminer les variations de la fonction f.

Calculer $f(1)$ et $f(3)$ puis en déduire la valeur de l'extremum de f. en quelle valeur de x ce dern

Trigonométrie

I- Cercle trigonométrique.

1) Définition :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) de sens directe.

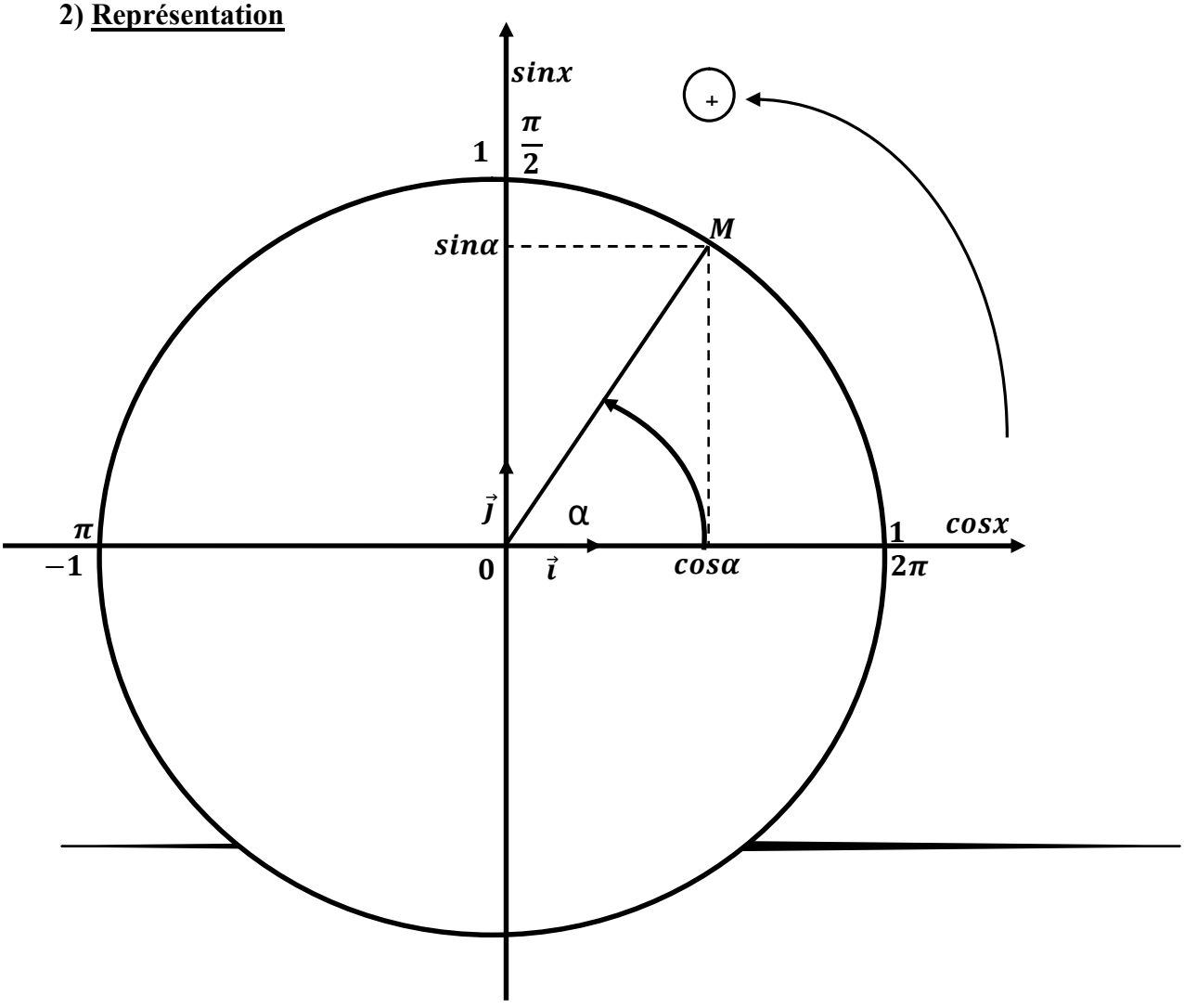
On appelle cercle trigonométrique, tout cercle orienté dont le rayon **r = 1 =** $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\imath}\|$.
Le sens positif du cercle trigonométrique est le sens contraire de parcourt des aiguilles d'une montre.

A tout point du plan correspond un point M du cercle dont les coordonnées dans (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) désigne respectivement le cosinus et le sinus de l'angle ($\overrightarrow{Oi}$; $\overrightarrow{OM}$) = α.

A tout point du plan, il correspond un point M du plan et un réel x désignant la mesure de l'angle ($\overrightarrow{Oi}$; $\overrightarrow{OM}$).

C'est pour quoi on verra toujours $Cosx$; $Sinx$; $Tangx$ et $Cotangx$

2) Représentation



$$\frac{3\pi}{2} \quad -1$$

Evaluation

En utilisant le cercle trigonométrique, déterminé : le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente des nombres réels suivants :

a) 2π ; b) 3π ; c) $\frac{4\pi}{3}$; d) $\frac{3\pi}{2}$; e) -5π ; f) $\frac{5\pi}{6}$

3) Présentation des angles remarquables compris entre 0° et 180°

a- Détermination du Sinus et du Cosinus de 45°:

Activité 3 :

Construis un triangle ABC rectangle et isocèle en A de coté AB = AC = **a** et BC = **c**.

Où **a** et **b** sont tous des réels positifs donnés.

- Détermine en degré la mesure de chacun des angles $\widehat{ABC} = \hat{B}$ et de $\widehat{ACB} = \hat{C}$.
- Détermine la longueur de BC en fonction de **a**.
- Calcule Sin45°, Cos45°, puis en déduire les valeurs exactes de Tang45° et Cotang45°.

b- Détermination du Sinus et du Cosinus de 30° et de 60°:

Activité 4 :

Construis un triangle ABC équilatéral de base AB tel que AB = AC = BC = a.

Soit H le pied de la hauteur issue de C, on pose CH = b.

Ainsi, considérons le triangle rectangle AHC.

- Déterminer b en fonction de a.
- Détermine en degré la mesure de chacun des angles aigus du triangle ABC.
- Déduire de ce qui précède, la valeur de chacun des angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{HCB}$, puis Calcule les valeurs exactes de : Sin30°, Cos30°, Tang30° et Cotang30°.
  De même Calcule les valeurs exactes de : Sin60°, Cos60°, Tang60° et Cotang60°.

Que constates – tu ?

Ainsi nous pouvons résumer les angles remarquables dans un tableau appelé :
tableau des angles remarquables.

4) <u>Rapports trigonométriques des angles remarquables.</u>

Degrés	Radians	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente
0°	**0**	**0**	**1**	**0**	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**1**	**1**
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	**1**	**0**	∞	**0**
180	π	**0**	**-1**	**0**	∞
360°	2π	**0**	**1**	∞	∞

<u>Evaluation</u>

En utilisant le tableau des angles remarquables trigonométriques, déterminer l'angle α en radian puis en degré dans chacun des cas suivants :

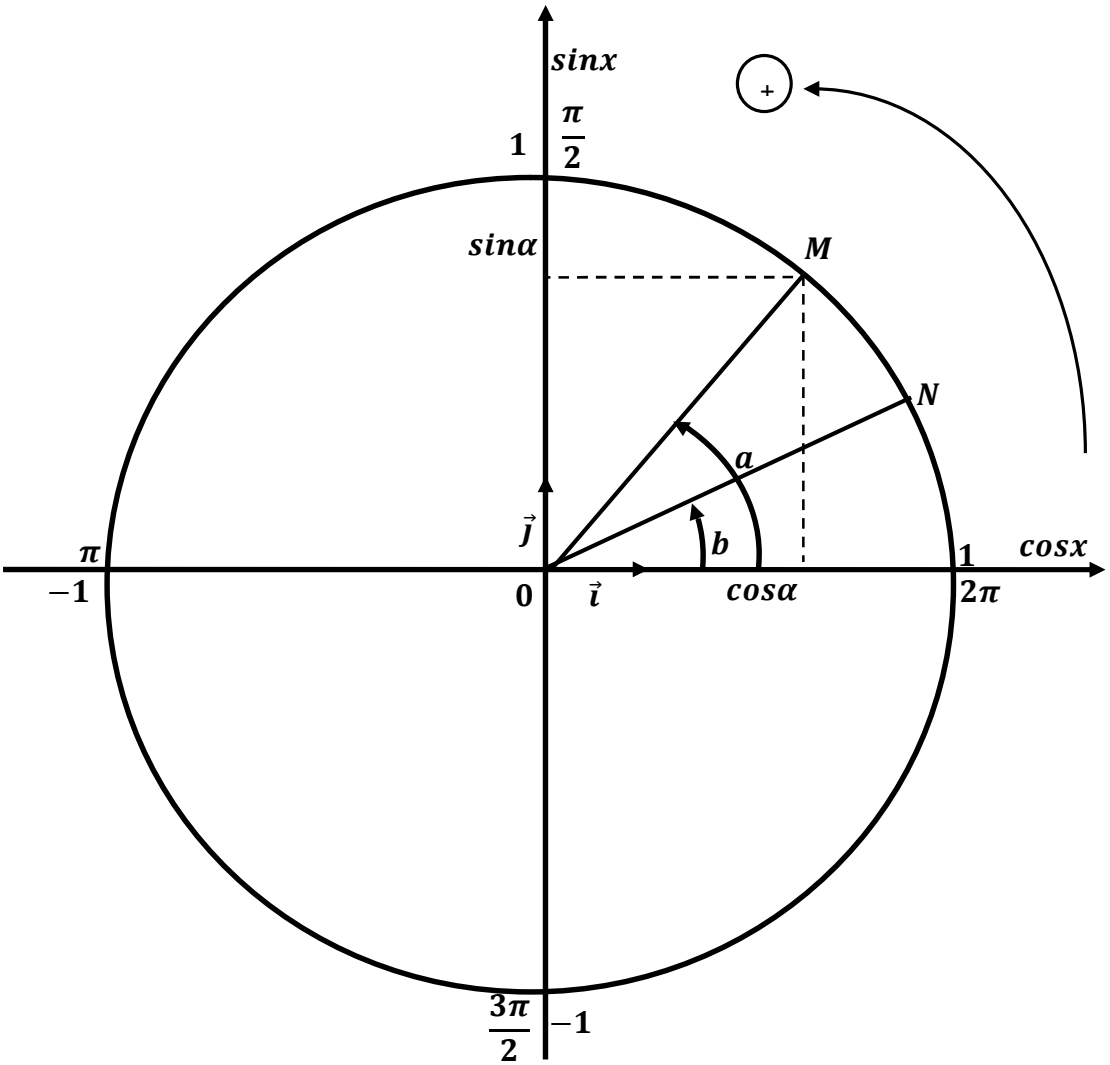
a) $\begin{cases} Cos\alpha = \frac{1}{2} \\ Sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} Cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} Cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} Cos\alpha = 0 \\ Sin\alpha = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} Cos\alpha = -1 \\ Sin\alpha = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} Cos\alpha = 1 \\ Sin\alpha = 0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} Tang\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ Cotg\alpha = \sqrt{3} \end{cases}$ h) $\begin{cases} Cotg\alpha = 1 \\ Tang\alpha = 1 \end{cases}$

II- <u>Formules de transformation trigonométrique.</u>

1) <u>Formules d'addition</u> :

Considérons le cercle trigonométrique (**C**) suivant et deux points **M** et **N** de coordonnées respectifs **M(Cosa ; Sina)** et **N(Cosb ; Sinb)** appartenant à (**C**) comme indiqué sur la figure ci-dessous :



a- <u>Expression de Cos (a – b)</u>

D'après le cercle ci-dessus, l'angle ($\overrightarrow{ON}$; $\overrightarrow{OM}$) = ($\overrightarrow{ON}$; $\overrightarrow{OA}$) + ($\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OM}$) = - b + a.

D'autre part $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = 1$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OM}\| \bullet \|\overrightarrow{ON}\| \times \text{Cos}(\widehat{ON ; OM}) = 1\text{x}1\text{Cos}(a - b)$

=> $\boxed{\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{ON} = \text{Cos (a – b)}}$ **(1)**

En considérant toujours le cercle, on a sait que **M(Cosa ; Sina)** ; **N(Cosb ; Sinb) et O$\binom{0}{0}$,**

On a : $\overrightarrow{OM}\binom{Cosa}{Sina}$ et $\overrightarrow{ON}\binom{Cosb}{Sinb}$ dans la base ($\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Ainsi $\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{ON} = \binom{Cosa}{Sina} \bullet \binom{Cosb}{Sinb} = Cosa \bullet Cosb + Sina \bullet Sinb.$

=> $\boxed{\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{ON} = Cosa \bullet Cosb + Sina \bullet Sinb}$ **(2)**

Par identification entre les relations **(1)** et **(2)** , on a : $\overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{ON}$ <=>

$\boxed{Cos(a - b) = Cosa \bullet Cosb + Sina \bullet Sinb}$ **(3)**

b- <u>Expression de Cos(a + b)</u>

Dans la relation **(3)** remplaçons (**b**) par (**- b**) , alors on a :

$\boxed{Cos(a + b) = Cosa \bullet Cosb - Sina \bullet Sinb}$ **(4)**

c- <u>Expression de Sin(a + b)</u>

On sait que Sin(a + b) = $Cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right]$ = $Cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right)$ = $Cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$

= $Cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$Cos (b) + $Sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) Sin(b)$

= SinaCosb + CosaSinb

=> $\boxed{\textbf{Sin (a + b) = SinaCosb + CosaSinb}}$ **(5)**

d- <u>Expression de Sin (a - b)</u>

Dans la relation **(5)** remplaçons (**b**) par (**- b**) ainsi , on a :

$\boxed{\textbf{Sin (a - b) = SinaCosb - CosaSinb}}$ **(6)**

2) <u>Formules de multiplication par 2</u> :

a- <u>Expression de Cos(2a)</u>

Dans la relation **(4)** remplaçons (**b**) par (**a**) ainsi , on a :

$\boxed{\textbf{Cos (a + a) = Cos(2a) = CosaCosa - SinaSina = Cos}^2\textbf{a – Sin}^2\textbf{a}}$ **(7)**

b- <u>Autre expression de Cos(2a)</u>

D'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a :
$Cos^2a + Sin^2a = 1 => Sin^2a = 1 - Cos^2a$. Ainsi remplaçons Sin^2a par sa valeur dans la relation (7), ainsi on auras : $Cos2a = Cos^2a - (1 - Cos^2a) = Cos^2a - 1 + Cos^2a$

=> $\boxed{\mathbf{Cos2a = 2\,Cos^2a - 1}}$ **(8)**

Ainsi de la relation (8), on en déduit :

$\mathbf{Cos^2a = \frac{1 + Cos2a}{2}}$ **et** $\mathbf{Sin^2a = \frac{1 - Cos2a}{2}}$

c- Expression de Sin(2a)

Dans la relation **(5)** remplaçons (**b**) par (**a**) ainsi , on a :

$\boxed{\mathbf{Sin\,(a + a) = Sin\,(2a) = SinaCosa + SinaCosa = 2SinaCosa}}$ **(9)**

3) Formules des tangentes :

a- Expression de tan(a + b)

On sait que $\tan(a + b) = \frac{Sin(a+b)}{Cos(a+b)} = \frac{SinaCosb + CosaSinb}{CosaCosb - SinaSinb} = \frac{CosaCosb\left(\frac{Sina}{Cosa} + \frac{Sinb}{Cosb}\right)}{CosaCosb\left(1 - \frac{SinaSinb}{CosaCosb}\right)}$

En simplifiant par CosaCosb, on obtient :

=> $\boxed{\mathbf{\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}}}$ **(10)**

b- Expression de tan(a - b)

Dans la relation **(10)** remplaçons (**b**) par (**- b**) ainsi , on a :

=> $\boxed{\mathbf{\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \cdot \tan(b)}}}$ **(11)**

c- Expression de tan(2a)

Dans la relation **(10)** remplaçons (**b**) par (**a**) ainsi , on a :

$\tan(a + a) = \tan(2a) = \frac{\tan(a) + \tan(a)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(a)} = \frac{2\tan(a)}{1 - tan^2(a)}$

=> $\boxed{\mathbf{\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - tan^2(a)}}}$ **(12)**

4) Formules de transformation du produit en somme :

a- Expression de CosaCosb

Effectuons la somme des relations (3) et (4)

$Cos(a - b) = CosaCosb + SinaSinb$ (3)

$Cos(a + b) = CosaCosb - SinaSinb$ (4)

(3) + (4) => Cos(a – b) + Cos(a + b) = 2 CosaCosb

$$=> \boxed{\textbf{CosaCosb} = \frac{1}{2}[\,\boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\,) + \boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\,)]} \qquad \textbf{(13)}$$

b- <u>Expression de SinaSinb</u>

Effectuons la différence des relations (3) et (4)

Cos(a – b) = CosaCosb + SinaSinb (3)

Cos(a + b) = CosaCosb - SinaSinb (4)

---

(3) - (4) => Cos(a – b) - Cos(a + b) = 2 SinaSinb

$$=> \boxed{\textbf{SinaSinb} = \frac{-1}{2}[\,\boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\,) - \boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\,)]} \qquad \textbf{(14)}$$

c- <u>Expression de SinaCosb</u>

Effectuons la somme des relations (5) et (6)

Sin(a + b) = SinaCosb + CosaSinb (5)

Sin(a - b) = SinaCosb - CosaSinb (6)

---

(5) + (6) => Sin(a + b) + Sin(a - b) = 2 SinaCosb

$$=> \boxed{\textbf{SinaCosb} = \frac{1}{2}[\,\boldsymbol{Sin}(\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\,) + \boldsymbol{Sin}(\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\,)]} \qquad \textbf{(15)}$$

d- <u>Expression de CosaSinb</u>

Effectuons la différence des relations (5) et (6)

Sin(a + b) = SinaCosb + CosaSinb (5)

Sin(a - b) = SinaCosb - CosaSinb (6)

---

(5) - (6) => Sin(a + b) - Sin(a - b) = 2 CosaSinb

$$=> \boxed{\textbf{CosaSinb} = \frac{1}{2}[\,\boldsymbol{Sin}(\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\,) - \boldsymbol{Sin}(\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\,)]} \qquad (16)$$

5) <u>Formules de transformation de la somme en produit</u> :

a- <u>Expression de Cosp + Cosq</u>

Posons $\begin{cases} a+b=p & (1) \\ a-b=q & (2) \end{cases}$ => $\mathbf{a} = \frac{p+q}{2}$ et $\mathbf{b} = \frac{p-q}{2}$

Remplaçons ainsi **a + b** ; **a – b** ; **a** et **b** par leur valeurs dans la relation **(13) , on a :**

$$\textbf{Cos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\textbf{Cos}\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}[\,\boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{p}\,) + \boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{q}\,)\,]$$

$$=> \boxed{\boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{p}\,) + \boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{q}\,) = 2\textbf{Cos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\textbf{Cos}\left(\frac{p-q}{2}\right)} \qquad (17)$$

b- <u>Expression de Cosp - Cosq</u>

Posons $\begin{cases} a+b=p & (1) \\ a-b=q & (2) \end{cases}$ => $\mathbf{a} = \frac{p+q}{2}$ et $\mathbf{b} = \frac{p-q}{2}$

Remplaçons ainsi **a + b** ; **a – b** ; **a** et **b** par leur valeurs dans la relation **(14) , on a :**

$$\textbf{Sin}\left(\frac{p+q}{2}\right)\textbf{Sin}\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{-1}{2}[\,\boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{p}\,) - \boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{q}\,)\,]$$

$$=> \boxed{\boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{p}\,) - \boldsymbol{Cos}(\,\boldsymbol{q}\,) = -2\textbf{Sin}\left(\frac{p+q}{2}\right)\textbf{Sin}\left(\frac{p-q}{2}\right)} \qquad (18)$$

c- <u>Expression de Sinp + Sinq</u>

Posons $\begin{cases} a+b=p & (1) \\ a-b=q & (2) \end{cases}$ => $\mathbf{a} = \frac{p+q}{2}$ et $\mathbf{b} = \frac{p-q}{2}$

Remplaçons ainsi **a + b** ; **a – b** ; **a** et **b** par leur valeurs dans la relation **(15) , on a :**

$$\textbf{Sin}\left(\frac{p+q}{2}\right)\textbf{Cos}\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}[\,\boldsymbol{Sin}(\,\boldsymbol{p}\,) - \boldsymbol{Sin}(\,\boldsymbol{q}\,)\,]$$

$$=> \boxed{\boldsymbol{Sin}(\,\boldsymbol{p}\,) + \boldsymbol{Sin}(\,\boldsymbol{q}\,) = 2\textbf{Sin}\left(\frac{p+q}{2}\right)\textbf{Cos}\left(\frac{p-q}{2}\right)} \qquad (19)$$

d- <u>Expression de Sinp - Sinq</u>

Posons $\begin{cases} a+b=p & (\mathbf{1}) \\ a-b=q & (\mathbf{2}) \end{cases}$ => $\mathbf{a} = \frac{p+q}{2}$ et $\mathbf{b} = \frac{p-q}{2}$

Remplaçons ainsi **a + b** ; **a – b** ; **a** et **b** par leur valeurs dans la relation **(16) , on a :**

$\mathbf{Cos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathbf{Sin}\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}[\,\boldsymbol{Sin}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{Sin}(\boldsymbol{q})\,]$

=> $\boxed{\boldsymbol{Sin}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{Sin}(\boldsymbol{q}) = 2\mathbf{Cos}\left(\frac{p+q}{2}\right)\mathbf{Sin}\left(\frac{p-q}{2}\right)}$ **(20)**

Evaluation

1) Calculer les expressions suivantes :

a- A = Cos($\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$) - 2Sin($\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$) + Sin($3\pi - \frac{\pi}{4}$).

b- B = Cos($\pi - \frac{\pi}{4}$) - Sin($-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$) + Cos($-5\pi + \frac{\pi}{4}$).

2) Transformer en somme les produits suivants :

a- Cos3x•Cos2x ; b- Sinx•Sin3x ; c- Sin2x•Cos3x.

3) Transformer en produit les sommes suivantes :

a- Cos3x + Cos$x$; b- Cox – Cos4x ; c- $\mathrm{Sin}\frac{3}{2}x - \mathrm{Sin}\frac{1}{2}x$

III- Résolution d'équations trigonométriques.

1) Equations du type Cosα = a (a ∈ ℝ):

Résoudre de telles équations revient à déterminer tout angle **β** qui vérifie cette relation.

- Si a ∈ $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ alors S = { }.
- Si a ∈ $[-1 ; 1]$ alors on résous l'équation telle que si Cosα = a <=>

$$\textbf{Cos}\alpha = \textbf{Cos}\beta \quad <=> \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

Cas partculiers:

- Si $\textbf{Cos}\alpha = -\textbf{Cos}\beta \quad <=> \begin{cases} \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\pi + \beta + 2k\pi \end{cases}$
- Si $\textbf{Cos}\alpha = \textbf{Sin}\beta \quad <=> \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} + \beta + 2k\pi \end{cases}$
- Si $\textbf{Cos}\alpha = -\textbf{Sin}\beta \quad <=> \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} + \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} - \beta + 2k\pi \end{cases}$

Evaluation

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a- $\text{Cos}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b- $\text{Cos}2x = \frac{-1}{2}$; c- $\text{Cos}x = 0$; d- $\text{Cos}\frac{x}{2} = -1$

2) Equations du type Sinα = a (a ∈ ℝ):

Résoudre de telles équations revient à déterminer tout angle **β** qui vérifie cette relation.

- Si a ∈ $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ alors S = { }.
- Si a ∈ $[-1 ; 1]$ alors on résous l'équation telle que si Sinα = a <=>

$$\textbf{Sin}\alpha = \textbf{Sin}\beta \quad <=> \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

Cas partculiers:

- Si $\textbf{Cos}\alpha = -\textbf{Sin}\beta \quad <=> \begin{cases} \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$
- Si $\textbf{Cos}\alpha = \textbf{Sin}\beta \quad <=> \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} + \beta + 2k\pi \end{cases}$
- Si $\textbf{Cos}\alpha = -\textbf{Sin}\beta \quad <=> \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} + \beta + 2k\pi \\ ou \\ \alpha = -\frac{\pi}{2} - \beta + 2k\pi \end{cases}$

Evaluation

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a- $\text{Sin}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b- $\text{Sin}(-3x) = \frac{-1}{2}$; c- $\text{Sin}x = 1$; d- $\text{Sin}\frac{x}{2} = -1$

3) Equations du type Tangα = a (a ∈ ℝ):

Résoudre de telles équations revient à déterminer tout angle **β** qui vérifie cette relation.

- Si a ∈ $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ alors S = { }.

- Si a $\in$ $[-1\ ;\ 1]$ alors on résous l'équation telle que si Tangα = a <=>

Tangα = Tangβ <=> $\alpha = \beta + k\pi$

Cas partculiers :

❖ Si **Tangα = − Tangβ <=> $\alpha = -\beta + k\pi$**

Evaluation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a-Tang$x$ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b- Tang$(-3x) = -\sqrt{3}$; c- Tang$x$ = 1 ; d- Tang $\frac{x}{4}$ = 0.

4) Equations du type aCos$x$ + bSin$x$ + c =0 :

Résoudre de telles équations revient à mettre en évidence trois cas de résolution :

- **Premier cas :** si a = 0 et b = 0 alors on a : $\begin{cases} S = \mathbb{R}\ si\ c = 0 \\ S = \emptyset\ si\ c \neq 0 \end{cases}$

- **Deuxième cas :** si a = 0 et b $\neq$ 0 alors l'équation devient :
  bSin$x$ = − c <=> Sin$x$ = $\frac{-c}{b}$

  - Si $\left|\frac{-c}{b}\right| > 1$ alors $S = \emptyset$.

  - Si $\left|\frac{-c}{b}\right| \leq 1$ alors l'équation se ramène sous la forme : **Sinα = a** .

- **Troisième cas :** si a $\neq$ 0 et b $\neq$ 0 alors on calcule :

  - **Le module r tel que** : **r = $\sqrt{a^2 + b^2}$**

  - **L'angle θ tel que :** $\begin{cases} Cos\theta = \frac{a}{r} \\ et \\ Sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

Ainsi on résous l'équation **Cos(x − θ) = $\frac{-c}{r}$**

<u>NB</u> : Si $a^2 + b^2 < C^2$ alors $S = \emptyset$.

<u>Evaluation</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a- $\sqrt{3}\text{Cos}x - \text{Sin}x - 1 = 0$; $\text{Cos}2x - \text{Sin}2x + \sqrt{3} = 0$

IV- <u>Résolution d'inéquations trigonométriques :</u>

Résoudre une inéquation trigonométrique, revient à déterminer tous les réels x solutions de

cette inéquation cherchant l'angle figuré par un point M de l'arc $\overset{\frown}{M_1AM_2}$ du cercle trigonométrique.

<u>Evaluation</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a- $\text{Cos}x \leq \frac{1}{2}$; b- $\text{Sin}x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; c- $\text{Sin}x \leq \frac{-1}{2}$

Fonctions numériques

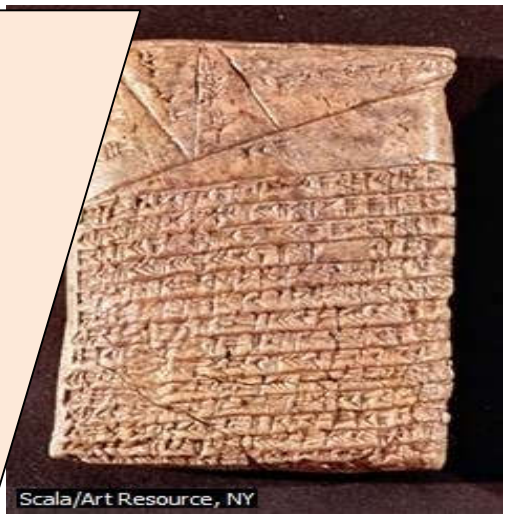


Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716)
Physicien, ingénieur et philosophe.
philosophe et savant allemand



Euler Leonhard (1707-1783)
Mathématicien suisse,

Depuis longtemps, l'homme a utilisé la notion de fonction à partir des objets anciens tels que la tablette de calcul babylonienne. Cependant une fonction fut une formule permettant d'obtenir un résultat. Il a fallut donc attendre le XVIIème siècle pour que le mot fonction et la notion $y = f(x)$ soit introduit par Leibniz et approfondie par Euler.



Tablette babylonienne

Sommaire

1- Limites……..79
2- Continuité……91
3- Dérivation…….....95
4- Etudes de fonctions…….103

I- Généralité sur les fonctions

1) Définition d'une fonction :

On appelle fonction toute relation de **A vers B** qui à chaque élément de **A** on associe **au plus un élément de B**.

2) Ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f :

On appelle ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction numérique f, **l'ensemble des éléments qui ont une image par f**. On le note **Df.**

Exemple

- $Si\ f(x) = u(x)\ (fonction\ polynôme)\ ;\ alors\ Df = \mathbb{R} =]-\infty\ ;+\infty[$

- $Si\ f(x) = \sqrt{u(x)}\ (fonction\ irrationnelle)\ ;\ alors\ Df = \{x/x \in \mathbb{R};\ u(x)\ 0\}$

- $Si\ f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}(fonction\ rationnelle), alors\ Df = \{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ v(x) \neq 0\}.$

Evaluation

Déterminons l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3}$; 2) $f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-3x+2}$;

3) $f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-2x+1}}$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$

5) $f(x) = \frac{tg(2x)}{Cos(x)}$; 6) $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Synthèse

1) $f(x) = \frac{-3x^2+5x+1}{x+3}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ x + 3 \neq 0\}$

$x + 3 \neq 0 => x \neq -3 => \mathbf{D_f} = \mathbb{R} - \{-\mathbf{3}\} =]-\infty\ ;\ -\mathbf{3}[\cup]-\mathbf{3}\ ;\ +\infty[$

2) $f(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}\ ; x^2 - 3x + 2 \geq 0\}$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Posons $x^2 - 3x + 2 = 0 => x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

x	$-\infty$		1		2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	$+$	$\|$	0	$-$	0	$+$

$=>\mathbf{D_f} =]-\infty\ ;\mathbf{1}\ ] \cup [\ \mathbf{2}\ ;\ +\infty[$

3) $f(x) = \frac{x+2}{x-\sqrt{x^2-3x+2}}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad et\ x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq 0\ \}$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Posons $x^2 - 3x + 2 = 0 => x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

x	$-\infty$		1		2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq 0 <=> \sqrt{x^2 - 3x + 2} \neq x <=> x^2 - 3x + 2 \neq x^2$

$=> -3x + 2 \neq 0 => x \neq \frac{-2}{3}$

$=>D_f =$ $-\infty$ $\quad \frac{-2}{3} \quad$ 1 $\quad$ 2 $\quad +\infty$

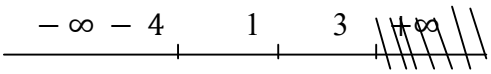
$=>\mathbf{D_f} = [\ \mathbf{1}\ ;\mathbf{2}\ ]$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{-x^2-2x+4}$

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}; -x^2 - 3x + 4 \neq 0 \ et - x + 3 \geq 0\}$

(1) : $-x^2 - 3x + 4 \neq 0 \ => x_1 \neq 1$ et $x_2 \neq -4$

(2) : $-x + 3 \geq 0 \ => x \leq 3$



$=>\mathbf{D_f} =]-\infty\ ;\mathbf{-4}\ [\cup\ ]\mathbf{-4}\ ;\ \mathbf{1}\ [\cup\ ]\mathbf{1}\ ;\ \mathbf{3}\ ]$

5) $f(x) = \frac{tg(2x)}{Cos(x)}$

$D_f = \left\{x/x \in \mathbb{R};\ 2x \neq \frac{\pi}{2}\ et\ Cos(x) \neq 0\right\}$

(1) : $2x \neq \frac{\pi}{2} => x \neq \frac{\pi}{4}$

(2) : $Cos(x) \neq 0 <=> Cos(x) \neq Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) <=> \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{2} = 2k\pi \end{cases}$

$=>D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\}$

$=>\mathbf{D_f} = \left]-\infty\ ;-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ +\infty\ \right[$

6) $f(x) = \frac{8}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$D_f = \{x\ /x \in \mathbb{R}\ ; x^2 + 1\ \geq 0 \quad etx + \sqrt{x^2+\ 1} \neq 0\ \}$

$x^2 + 1\ \geq 0$ (Vraie)

$x + \sqrt{x^2+\ 1} \neq 0 <=> \sqrt{x^2+\ 1} \neq x <=> x^2 + 1 \neq x^2 => 1 \neq 0$ (Vraie)

$=>D_f = \mathbb{R} = \ ]-\infty\ ;\ +\infty\ [$

3) <u>Opération sur les fonctions</u> :

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur leur ensembles de définition Df et Dg.

a- **<u>Somme</u>** :

$\forall x \in Df$ et $\forall x \in Dg\ ;\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

b- <u>Produit :</u>

$\forall x \in Df$ et $\forall x \in Dg\ ;\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

c- <u>Quotient :</u>

$\forall x \in Df$ et $\forall x \in Dg\ ;\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $g(x) \neq 0$

II- Limites

Objectifs

Ce chapitre vise à :

• Compléter l'étude de la limite d'une fonction engagée en classe de première par :

- L'introduction de la limite d'une fonction composée ;
- La limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.

• Introduire la continuité d'une fonction sur un intervalle et utiliser quelques théorèmes usuels liés à la continuité de cette fonction.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Limites - Limite d'une fonction composée. - Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert • Branches paraboliques de direction (OI) et (OJ) dans un repère (O, I, J). • Continuité sur un intervalle : - Opérations, composée (propriétés admises). - Image d'un intervalle.	• Déterminer la limite d'une fonction : - en utilisant les limites de référence ou une expression conjuguée ; - en ayant recours à la définition d'un nombre dérivé. • Déterminer la limite d'une fonction composée. • interpréter graphiquement : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (resp. $-\infty$) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ (resp. $-\infty$) • Démontrer qu'une courbe admet une branche

• Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle : **Théorème 1 :** *si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur f(I). sa bijection réciproque* f^{-1} est continue et de même sens de variation que la fonction *f*	parabolique de direction (OI)(reps. (OJ)) • Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue : - en utilisant le tableau de variations ; - en utilisant une méthode algébrique. • Démontrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J dans le cas où f est donnée par une formule explicite, déterminer f^{-1} (x).
Théorème 2 : si *f* est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout m de *f*(I), l'équation *f*(*x*) = m admet une unique solution dans I. Corollaire : soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Si *f*(a) et *f*(b) sont des signes contraires, alors l'équation *f*(*x*) = 0 admet une unique solution dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. • Fonctions du type : - $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, ($n \in$ IR $*$) - $x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$, $x \in$ IR+*). Définitions ; notons $x^{p/q}$ Propriétés des puissances d'exposants rationnels	• Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation : f(x) = m sur un intervalle I.

Activité 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^3}$

a- Complète le tableau suivant

x	-3000000	-2000000	-1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Donne la valeur de x pour la quelle f n'est pas définie.

c- Que peux-tu conclure quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?

Activité 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

a- Complète le tableau suivant

x	-3000000	-2000000	-1000000	0	1000000	2000000	3000000
$f(x)$							

b- Que peux-tu conclure quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$?

1) <u>Propriétés sur les limites</u> :

a) Propriété 1

$lim \quad x = +\infty$; $lim \quad x^2 = +\infty$; $lim \quad x^3 = +\infty$; $lim \sqrt{x} = +\infty$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$lim\ x = -\infty$; $lim\ x^2 = +\infty$; $lim\ x^3 = -\infty$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

b) Propriété 2

$lim\ \frac{1}{x} = 0$; $lim\ \frac{1}{x^2} = 0$; $lim\ \frac{1}{x^3} = 0$; $lim\ \frac{K}{x^n} = 0\ (K \in \mathbb{R})$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$lim\ \frac{1}{x} = 0$; $lim\ \frac{1}{x^2} = 0$; $lim\ \frac{1}{x^3} = 0$; $lim\ \frac{K}{x^n} = 0\ (k \in \mathbb{R})$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

c) Propriété 3 :

Si k est un réel non nul alors :

$lim\ \frac{k}{x} = \infty$ (le signe de ∞ dépend du signe du zéro et du signe de k).

$x \to 0$

2) <u>Opération sur les limites</u>

a) <u>Somme</u> :

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f + g$	$l + l'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) <u>Produit</u> :

f	l	$l \neq 0$	0	∞
g	l'	∞	∞	∞
$f \bullet g$	$l \bullet l'$	∞ règle des signes	Forme indéterminée	∞ règle des signes

c) <u>Quotient</u>:

f	l	l	0	l	∞	∞
g	$l' \neq 0$	$l' = 0$	0	∞	l	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	+/− ∞ à gauche / à droite	Forme indéterminée	0	∞ règle des signes	Forme indéterminée

<u>NB</u> :

On remarque ainsi que l'on a quatre (4) formes indéterminées qui sont :

$-\infty + \infty$; $0\times\infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.

3) <u>Limite des fonctions polynômes et rationnelles à l'infini</u>.

a) <u>Limite d'une fonction polynôme à l'infini</u>

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme du plus haut degré.

Exemple : $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - 2x^2 + 3x = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2 = -2\,(-\infty)^2 = -\infty.$

b) <u>Limite d'une fonction rationnelle à l'infini</u> :

La limite d'une fonction du rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$est égale à la limite du quotient des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple : $\lim\limits \frac{-3x + 4x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1 + x} = \lim\limits \frac{4x^3}{x^2} = \lim\limits 4x = +\infty$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

N.B : La propriété sur les limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$.

En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.

4) Limite de la composée de deux fonctions :

Soient f et g deux fonctions et fog leur composée définie sur un intervalle I contenant « a » où a est une borne.

Si : $\lim g(x) = l$ et $si \lim f(x) = l'$ $alors$ $\lim fog(x) = l'$

$x \to a$ $x \to l$ $x \to a$

5) Limite des fonctions circulaires :

Si a est un nombre réel non nul, on a :

$\lim \frac{Sinx}{x} = 1$ et $\lim \frac{sinax}{ax} = 1$

$x \to 0$ $x \to 0$

$\lim \frac{tgx}{x} = 1$ et $\lim \frac{tgax}{ax} = 1$

$x \to 0$ $x \to 0$

$\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim \frac{1-\cos(a\,x)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$

$x \to 0$ $x \to 0$

6) Limite à gauche – Limite à droite de x_o

a) Limite à gauche de x_o

On appelle limite à gauche d'un réel x_o d'une fonction f, la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_o par valeurs inferieures on note : $\boldsymbol{\lim f(x)}$.

$$x \to x_0^-$$

b) Limite à droite de x_0

On appelle limite à droite d'un réel x_0 en une $fonction\ f$, la limite lors qu'elle existe quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures on note : $\boldsymbol{lim}\quad \boldsymbol{f(x)}$.

$$x \to x_0^+$$

NB :

Une fonction admet une limite en un point x_0 si sa limite à gauche est égale à sa limite à droite.

$lim\ f(x) \quad = \quad lim\ f(x)$

$x \to x_0^-$ $\qquad$ $x \to x_0^+$

Exemple

Calculer la limite des fonctions suivantes :

a) $lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$; b) $lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$; c) $lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

d) $\frac{\sin 5x}{2x}$; e) $lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{x^2-3x^3+2}$ f) $lim_{x \to +\infty}\ x - \sqrt{x^2 + x + 2}$

Solution

a) $lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ **(Forme .Indéterminée)**

Levons l'indétermination.

$lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} =$ $\qquad$ $lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)} = \frac{1}{2}$

b) $lim\ \frac{x^2-5}{x^2-x-2}$

$x \to -1^+$

Puisque la limite est étudiée à droite de -1, alors cherchons le signe du dénominateur $x^2 - x - 2$ à droite de -1

Posons : $x^2 - x - 2 = 0 => x_1 = -1\ ou\ x_2 = 2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	O	$-$	O	$+$	

$=> lim\ \frac{x^2-5}{x^2-x-2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

$x \to -1^+$

NB : **Le signe du zéro (0^-) provient de l'étude du signe du dénominateur à droite de -1**

c) $lim\ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{0}{0}$ (**Forme Indéterminée**)

$x \to 0$

Levons l'indétermination.

$lim \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = lim \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \bullet \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = lim \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$

$x \to 0$ $x \to 0$ $x \to 0$

$= lim \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = lim \frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = lim \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = lim \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{0}{1} = 0$

$x \to 0$ $x \to 0$ $x \to 0$ $x \to 0$

d) $lim \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{0}{0}$ **(forme indéterminée)**

$x \to 0$

Levons l'indétermination.

$lim \frac{\sin 5x}{2x} = lim \frac{5}{5} \bullet \frac{\sin 5x}{2x} = lim \frac{5}{2} \bullet \frac{Sin5x}{5x} = \frac{5}{2}$

$x \to 0$ $x \to 0$ $x \to 0$

e) $lim \frac{1-x}{x^{2-}3x^3+2} = \frac{1}{2}$

$x \to 0$

f) $lim\ x - \sqrt{x^2 + x + 2} = +\infty - \infty$ **(forme indéterminée)**

$x \to +\infty$

Levons l'indétermination.

$lim \frac{\left(x-\sqrt{x^2+x+2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x+2}\right)}$

$x \to +\infty$

$= lim \frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+x+2}} = lim \frac{x^2-\left(x^2+x+2\right)}{x+\sqrt{x^2+x+2}} = lim \frac{x^2-x^2-x-2}{x+\sqrt{x^2+x+2}}$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$lim \frac{-x-2}{x+\sqrt{x^2+x+2}} = lim \frac{-x-2}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}} = lim \frac{-x-2}{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-2}{x\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

7) Théorème sur les limites

a- Théorème des gendarmes :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si $f(x)$ Répond à l'inégalité :$A(x) \leq f(x) \leq B(x)$.

$$et\ si \begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} A(x) = l \\ et \\ \lim\limits_{x \to \infty} B(x) = l \end{cases} \quad alors \lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

Exemple

En utilisant le théorème des gendarmes, calculé $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 + Sinx}{x + 1}$

Solution

On sait que : $-1 \leq Sinx \leq 1$

En ajoutons 2 à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$1 \leq 2 + Sinx \leq 3$$

En divisant chaque membre de l'inégalité par $x + 1$, on a :

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{2 + Sinx}{x+1} \leq \frac{3}{x+1}$$

En appliquant la limite à chaque membre de l'inégalité, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1}$$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \\ et \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \end{cases}$

Ainsi en appliquant le théorème des Gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1} = 0$

b- **Théorème de l'Hôpital :**

Soit f et g deux fonctions continues et dérivables en un point x_0.

Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et $g'(x_0) \neq 0$, alors : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Exemple

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-3x+2}$ et $g(x) = x^2 - 5x + 4$

a) Etudier la continuité de f et g en $x_0 = 1$

b) Calculer $g'(1)$ et $f'(1)$ puis en déduire $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

Solution

a) Etudions la continuité de f et g en $x_0 = 1$

- Etude de la continuité de f en $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$ = F.I

Levons l'indétermination :

$\lim \frac{(x-1)^2}{x^2-3x+2} = \lim \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim \frac{x-1}{(x-2)} = \frac{0}{-1} = 0$

$x \to 1$ $x \to 1$ $x \to 1$

$=>$ $limf(x) = 0$

$x \to 1$

- Etude de la continuité de g en $x_0 = 1$

$lim\ g(x) = lim\ x^2 - 5x + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$

$x \to 1$ $x \to 1$

Alors $f(1) = g(1) = 0$ d'autre part $f'(1) = -1$ et $g'(1) = -3 \neq 0$

Alors $lim\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

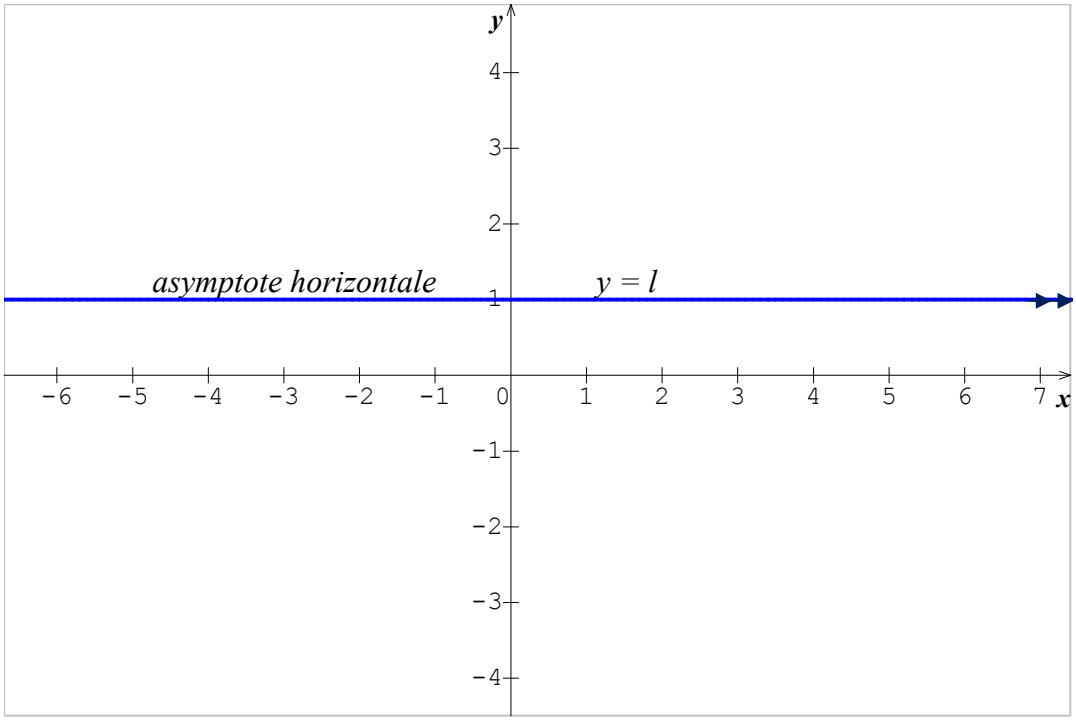
$x \to 1$

6) <u>Interprétation graphique de la limite d'une fonction :</u>

- Si $lim\ f(x) = l$ ou $lim\ f(x) = l$ (**alors la droite d'équation y = *l***) est asymptote

  $x \to -\infty$ $x \to +\infty$

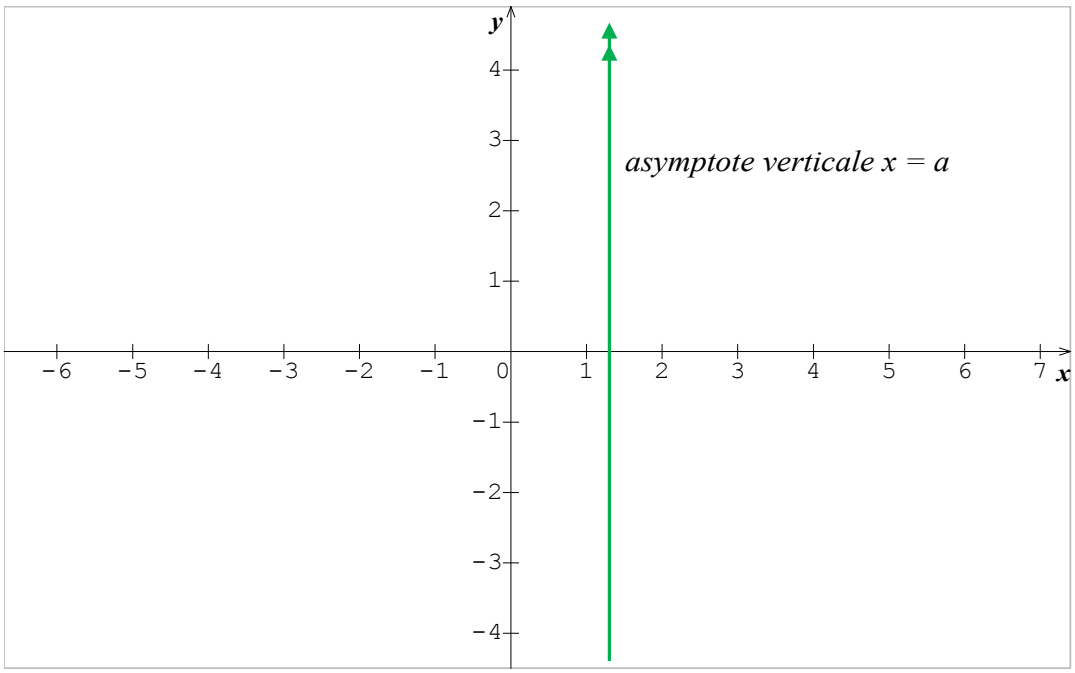
Horizontale à la combe représentative de f.



- *Si* $lim\ f(x) = +\infty$ *ou* $lim\ f(x) = -\infty$(**alors la droite d'équation *x* = a**) est

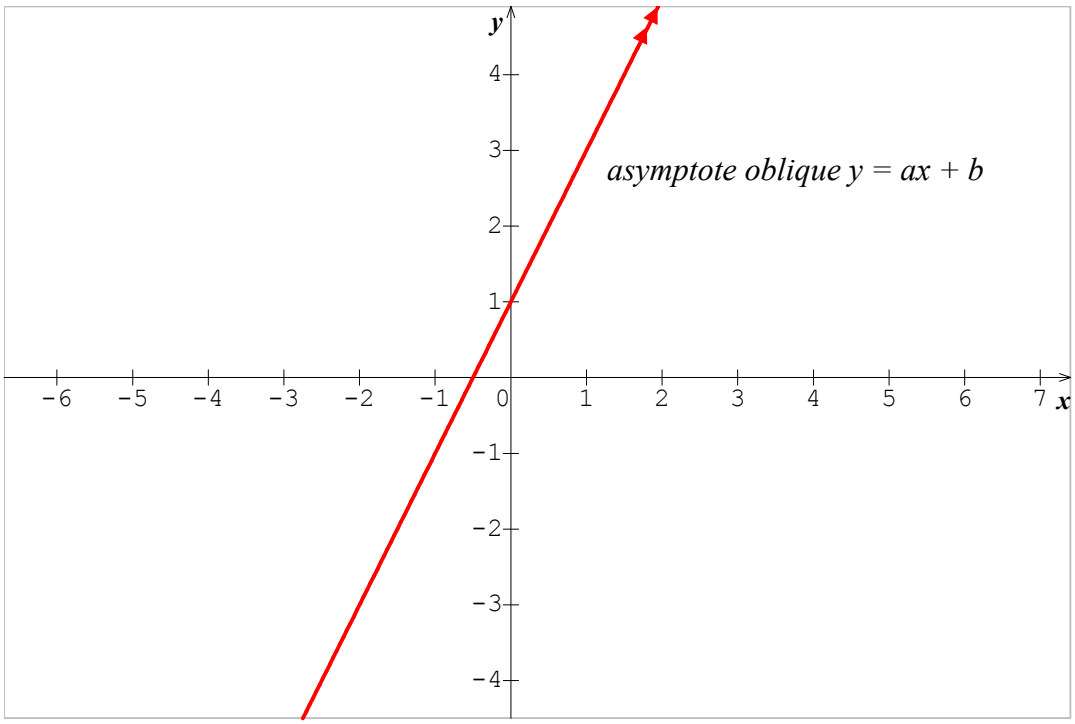
$x \to a$ $x \to a$

asymptote **verticale** à la combe représentative de f.



- $Si\ lim\ [\ f(x) - (ax + b)\ ] = 0$ $x \to +\infty$ ou $lim\ [\ f(x) - (ax + b)\ ] = 0$ $x \to -\infty$

(**alors la droite d'équation $y = ax + b$** est asymptote **oblique** à la combe représentatives de f).



III- Continuité

1) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit x_o un réel appartenant à I.

On dit que $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{x}_o$ si et seulement si $\boldsymbol{f}$ est définie en $\boldsymbol{x}_o$ et si la limite de $\boldsymbol{f(x)}$ quand $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x}_0$ est égale à $\boldsymbol{f(x_0)}$
Une fonction f est continue en $\boldsymbol{x_0}$si et seulement si :

$\boldsymbol{f(x_0)}$ existe et $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(\boldsymbol{x_0}) = l$ $(l\ fini)$.

Remarque : les fonctions non continues en $\boldsymbol{x_0}$ sont les fonctions non définies en $\boldsymbol{x_0}$et les fonctions n'admettant pas de limite en $\boldsymbol{x_0}$

2) Continuité sur un intervalle :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I = $[\ a\ ;\ b]$ ou I = $]\ a\ ;\ b\ [$. On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.

3) Continuité à gauche – continuité à droite

a- <u>Continuité à gauche</u> :

Une fonction f est continue à gauche de x_o si $\lim f(x) = f(x_o)$.

$x \to x_0^-$

b) <u>Continuité à droite</u> :

Une fonction f est continue à droit de x_o si $\lim f(x) = f(x_0)$

$x \to x_0^+$

<u>NB :</u>

Une fonction est continue en un point de x_o si elle est **gauche** et à **droite** de $\boldsymbol{x_o}$

4) <u>Prolongement par continuité</u>

Soit f une fonction numérique non définie en $\boldsymbol{x_0}$; mais admettant une limite $\boldsymbol{l}$ en ce point. La fonction g définie par : $\boldsymbol{g(x)}=\begin{cases} \boldsymbol{f(x)} & \boldsymbol{si\ \ x \neq x_0} \\ \boldsymbol{l} & \boldsymbol{si\ \ x = x_0} \end{cases}$

est appelée le prolongement de la fonction f par continuité au point $\boldsymbol{x_0}$

<u>N B</u> : Si $\boldsymbol{f}$ n'est pas définie en $\boldsymbol{x_0}$ mais admet une limite en ce point, alors on dit que $\boldsymbol{f}$ est prolongeable par continuité au point $\boldsymbol{x_0}$.

<u>Exemple</u>

1) Etudions la continuité de la fonction f au point x_o donné dans chacun des cas suivant:

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \\ f(2) = 4 \end{cases}$; $x_o = 2$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \\ f(1) = 5 \end{cases}$; $x_o = 1$

2) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f puis dire si elle est prolongeable par continuité au point x_o

$\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

Solution

1) Etudions la continuité de la fonction f au point x_o donné dans chacun des cas suivant:

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \quad si\ x_0 = 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$

f est continue en $x_o = 2$, si $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = f(2)$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = f(2) = \frac{0}{0}$(**Forme .Indéterminée**)

Levons l'indétermination.

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} x+2 = 2+2 = 4$

Puisque $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = f(2)}$

Alors f est continue en $x_0 = 2$

b) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|+2}{x+3} \quad x_0 = 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue :

Posons $x - 1 = 0 => x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$|x-1|$ $-x+1$ $x-1$

$$=>\begin{cases} f(x)=\frac{(-x+1)+2}{x+3} & si\ x\in\ ]-\infty\ ;\ 1\ ] \\ f(x)=\frac{(x-1)+2}{x+3} & si\ x\in\ ]1\ ;\ +\infty\ [\end{cases}$$

$$=>\begin{cases} f(x)=\frac{-x+3}{x+3} & si\ x\in\ ]-\infty\ ;\ 1\ ] \\ f(x)=\frac{x+1}{x+3} & si\ x\in\ ]1\ ;\ +\infty\ [\end{cases}$$

Ainsi étudions la continuité de f à gauche et à droite de $x_0 = 1$

f est continue en $x_0 = 1$ si $f(1) existe\ et\ si\ \lim f(x) = \lim f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$

$x \to 1^-$ $x \to 1^+$

Continuité à gauche :

$\lim f(x) = \lim \frac{-x+3}{x+3} = \frac{1}{2}$

$x \to 1^-$ $x \to 1^-$

Continuité à droite :

$\lim f(x) = \lim \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2}$

$x \to 1^+$ $x \to 1^-$

Puis que $\boldsymbol{\lim f(x) = \lim f(x) = f(1) = \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{x \to 1^-}$ $\boldsymbol{x \to 1^+}$

Alors f est continue en $x_0 = 1$.

2) Dans chacun des cas suivants, précisons l'ensemble de définition de la fonction f et voyons si f est prolongeable par continuité au point x_0

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- $D_f =]\,0\,;\,+\infty\,[$
- Etudions la continuité de f en $x_0 = 0$

f n'est pas définie en $x_0 = 0$ donc elle n'est pas continue en $x_0 = 0$

Voyons si f admet une limite finie $x_0 = 0$

Levons l'indétermination.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{x(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{x(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 1}{(x + \sqrt{x})} = \infty$$

Alors f n'est pas continue en $x_0 = 0$.

Par conséquent f n'est pas prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

b) $\begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\,;k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Etudions la continuité de f en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$$

Par conséquent f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$

et son prolongement par continuité en $x_0 = 0$ est la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

IV- Dérivation :

Objectifs

Ce chapitre vise à :

• consolider les notions abordées en classe de première telles que la détermination du sens de variation d'une fonction et la recherche de tangentes à une courbe en des points donnés ;

• consolider la notion de dérivé et l'étendre à la composée de deux fonctions dérivables ;

• compléter les théorèmes concernant la dérivabilité par les notions de dérivabilité à gauche et de dérivabilité à droite ;

• utiliser des propriétés des fonctions dérivables pour démontrer des inégalités ou établir des encadrements.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Dérivées successives ; nouvelle notations. $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2f}{dx^2}$ • Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle continue sur cet intervalle. • Dérivée d'une fonction composée (admise) ; application à la dérivation des fonctions de la forme : u^n ($n \in \mathbb{Z}^*$) ; $\sqrt{u}$ • Existence de la dérivée d'une fonction réciproque (admise), formule de la dérivée de la fonction réciproque. • Dérivée des fonctions puissances d'exposants rationnels. • Inégalité des accroissements finis (2 formes) • nombre dérivé à droite (à gauche) d'une fonction en un point. • Demi-tangente	• Démontrer qu'une fonction composée est dérivable en un point et savoir calculer le nombre dérivé en ce point. • Préciser l'ensemble des éléments où la fonction réciproque d'une fonction donnée est dérivable. • Déterminer le nombre dérivé de la fonction réciproque en un point x_0 •Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour : - démontrer une inégalité ; - établir un encadrement. • Etudier la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement. • Interpréter graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0.

1) Nombre dérivé en un point x_0 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est appelée **nombre dérivé en x_0 et est noté $f'(xo)$**. C'est-à-dire :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

N.B : f est dérivable en x_0 est équivalente que la quantité $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro ; il suffit de poser $h = x - x_0$

f est dérivable en x_0 si elle admet un nombre dérivé $\boldsymbol{f'(x_o)}$

2) <u>Lien entre la notion de limite et de continuité</u> :

Toute fonction dérivable en un point x_o est continue en $\boldsymbol{x_o}$.

<u>N.B</u> : La réciproque est inexacte.

3) <u>Nombre dérivé à gauche – Nombre dérivée à droite</u>

a) <u>Nombre dérivé à gauche</u> :

$Si\ lim \quad \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à gauche en x_o

$\boldsymbol{x \to x_0^-}$

On la note $\boldsymbol{f'_g(x_0)}$

b) <u>Nombre dérivé à droite</u> :

$Si\ \lim \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ Existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite en x_o.

$\boldsymbol{x \to x_o^+}$

On la note $\boldsymbol{f'_d(x_0)}$

<u>Théorème</u> :

si f est dérivable à gauche et à droite en x_o et si les deux nombres dérivés sont égaux alors f est dérivable en x_o et on a **:**

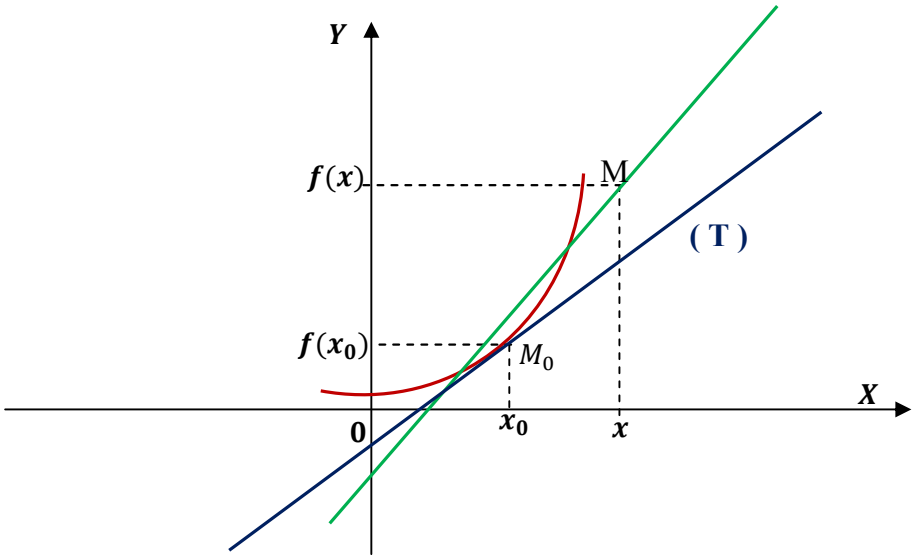
$$\boldsymbol{lim \quad \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = lim\ \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o)}$$

$\boldsymbol{x \to x_o^-}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x \to x_o^+}$

4) <u>Interprétation graphique d'un nombre dérivé</u>

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J)

Soit $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point fixé de (C). $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point courant de (C) ; construisons la droite (M_0M) . Lorsque x tend vers x_0 la droite (M_0M) vient occuper une position limite (M_0T) appelée tangente à la courbe (C) au point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$; $f\,'(xo)$ est appelé pente ou coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$



a) <u>Equation de la tangente au point d'abscisse x_0</u> : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi – tangentes en M_o de coefficients respectifs les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 et fait un angle en ce point.

Si la courbe (C). de la fonction f admet en un point x_0 , une tangente parallèle à l'axe des abscisses alors $f'(xo) = 0$

5) <u>Utilisation des dérivées</u> :

Sens de variation d'une fonction.

Soit f une fonction définie par : $x \mapsto f(x)$. On appelle dérivée de f, la fonction f' définie par : $f' : x \mapsto f'(x)$ nombre dérivé de la fonction f au point x

<u>Formules sur les dérivées</u> :

<u>Dérivées usuelles</u> :

Fonctions	Dérivées	Domaines de dérivabilité
a (constante)	O	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
ax^n	nax^{n-1}	$\mathbb{R}$

$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-nax^{n-1}}{x^{2n}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\mathbb{R}_+$
Cos x	$-$Sin x	$\mathbb{R}$
Sin x	Cos x	$\mathbb{R}$
Tgx	$\frac{1}{Cos^2x} = 1 + tg^2x$	$\mathbb{R}$ - $\left\{\frac{k\Pi}{2}\right\}$
Cos $(ax + b)$	$-$aSin $(ax + b)$	$\mathbb{R}$
Sin $(ax + b)$	a Cos $(ax + b)$	$\mathbb{R}$
tg $(ax + b)$	$\frac{a}{Cos^2\,(ax+b)} = 1 + t^2g(ax+b)$	$\mathbb{R} - \{ax + b \neq \frac{k\ \Pi}{2}\}\ k \in \mathbb{Z}$

Opérations sur les dérivées :

Fonctions	**Dérivées**
$u + v$	$U' + v'$
au ($a \in \mathbb{R}$)	au'
(u) (v)	$u'v + v'u$
$\frac{a}{u}(a \in \mathbb{R})$	$\frac{-au'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{(u')(v) - (v')(u)}{(v)^2}$

$(u)^n$	n(u') $(u)^{n-1}$
$\frac{a}{u^n}$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{-nau'u^{n-1}}{u^{2n}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Cos (u)	$-u'Sin\ (u)$
Sin (u)	$u'Cos(u)$
tg (u)	$\frac{u'}{Cos^2u}$
$u\ =\ (gof)\ (x)$	$u'\ =\ f\ '\ (x)$ □ $g'\ (f(x))$

6) <u>Dérivée de la réciproque d'une fonction f</u> :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

Alors f réalise une bijection de I sur sur $f\ (\ I\ )$ et admet une bijection f^{-1} de $f(I)$ dans I

Ayant même sens de variation que f

Pour calculer $(f^{-1})'(x_o)$, on peut procéder comme suite :

- On détermine la solution de l'équation $f(x) = x_o$
- On calcule $f\ '(x)$ et on vérifie que $f\ '(x)$ □ 0
- On conclue $(f^{-1})'\ (x) = \frac{1}{f'(x)}$

7) <u>Sens de variation d'une fonction</u>.

<u>Théorème :</u>

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si $f\ '(x) < 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall\ x\ \in$ I, f est strictement décroissante.
- Si $f\ '(x) > 0$ pour tout $x\ \in$ I, alors $\forall\ x\ \in$ I, f est strictement croissante.
- Si $f\ '(x) = 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\forall\ x\ \in$ I, f est constante ou stationnaire

<u>N.B :</u>

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de f. Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Domaine de définition
- Valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule
- Des flèches croissantes et décroissantes montrant les variations de f.

- Une courbe (C_f) admet en un point **A(x_0 ; y_0)** une tangente horizontale ou une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si : $f'(x_0) = 0$.
- Une courbe (C_f) admet en un point **A(x_0 ; y_0)** une tangente de coefficient directeur **a** si et seulement si : $f'(x_0) = a$.

8) <u>Extremum d'une fonction</u> :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $passant\ par\ x_0$, alors f admet un extremum en x_0.

Si $f'(x)$ passe du signe négatif au signe positif on dit que f présente un minimum

Si $f'(x)$ passe du signe positif au signe négatif on dit que f présente un maximum

Ainsi on dit que **: (Cf) admet une tangente horizontale en $M_o(x_o ; f(x_o))$**

<u>Exemple</u>

1) Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 donné :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+x-6} & ; \quad x_o = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

2) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$:

$$f(x) = \frac{-x^2+3x-5}{x^3-2}$$

3) Ecrire une équation de la tangent (T) à la courbe (C) de f aux points x_0 :

$f(x) = Cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right)$; on donne $x_0 = 2$

4) Dresser le tableau de variation de la fonction suivante : $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$

<u>Solution</u>

1) Etudions la dérivabilité de la fonction f au point x_o :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+x-6} & ; \quad x_o = 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

f est dérivable en $x_0 = 2$ si $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = l$ avec ($l \in \mathbb{R}$)

$$\lim \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim \frac{f(x)-0}{x-2} = \lim \frac{f(x)}{x-2} = \lim \frac{\frac{(x-2)^2}{x^2+x-2}}{x-2}$$

$x \to 2$ $x \to 2$ $x \to 2$ $x \to 2$

$= lim \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+x-2)} = lim \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-2)(x-1)} = lim \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}$

$x \to 2$ $x \to 2$ $x \to 2$

$= lim \frac{1}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}$

$x \to 2$

Alors f est dérivable en $x_0 = 2$ et son nombre dérivé est $f'(2) = 1$

2) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x) = \frac{-x^2+3x-5}{x^3-2}$.

$f(x) = \frac{-x^2+3x-5}{x^3-2}$. | $U(x) = -x^2 + 3x - 5 => U'(x) = -2x + 3$

$V(x) = x^3 - 2 => V'(x) = 3x^2$

$=> f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(-2x+3)(x^3-2) - (3x^2)(-x^2+3x-5)}{(x^3-2)^2}$

$=> f'(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 4x - 6}{(x^3-2)^2}$

3) Ecrivons une équation de la tangent (T) à la courbe (C) de f aux points x_o :

$f(x) = Cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right)$; on donne $x_o = 2$

L'équation de la tangent (T) à la courbe (C) de f aux points $x_o = 2$ est :

$\boldsymbol{y = f'(2)(x-2) + f(2)}$

$U(x) = \text{Cos}\left(\frac{x\pi}{6}\right) =>$ | $U'(x) = -\frac{\pi}{6}\text{Sin}\left(\frac{x\pi}{6}\right)$

$f(x) = Cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right)$

$n = 2 => U^{n-1}(x) = \text{Cos}\left(\frac{x\pi}{6}\right)$s

$=>f'(x) = n\big(U'(x)\big)\big(U^{n-1}(x)\big)$

$=>f'(x) = 2\left[\left(-\frac{\pi}{6}\,Sin\left(\frac{x\pi}{6}\right)\right)\left(Cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)\right)\right]$ $=>f'(2) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ et $f(2) = \frac{1}{4}$

D'où : $y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}(x-2) + \frac{1}{4}$ $=>\boldsymbol{y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}x + \frac{2\pi\sqrt{3}+3}{12}}$

4) Dressons le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty\ ;\ -1[\cup]-1\ ;\ +\infty[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	O	$+$	

$lim\, f(x) = lim\ \frac{x^2+2x+2}{x+1} = lim\frac{x^2}{x} = lim\, x = -\infty$

$x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$ $x \to -\infty$

$lim\ \ f(x) = lim\ \frac{x^2+2x+2}{x+1} = lim\ \frac{x^2}{x} = lim\ x = +\infty$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

$lim\ \ f(x) = lim\ \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x \to -1^-$ $x \to -1^-$

$lim\ f(x) = lim\ \frac{x^2+2x+2}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x \to -1^+$ $x \to -1^+$

$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$. $U(x) = x^2 + 2x + 2 => U'(x) = 2x + 2$

$V(x) = x + 1$ $=> V'(x) = 1$

$$=>f'(x)=\frac{\left(U'(x)\right)\left(V(x)\right)-\left(V'(x)\right)\left(U(x)\right)}{\left(V(x)\right)^2}=\frac{(2x+2)(x+1)-(1)(x^2+2x+2)}{(x+1)^2}$$

$$=>f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \quad \text{or } \forall\ x\in Df,(x+1)^2>0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur x^2+2x.

Posons $x^2+2x=0=>x=0 \quad ou \quad x=-2$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(-2)=-2$ et $f(0)=2$

V- Etude de fonctions :

3) Parité et périodicité d'une fonction :

a) Fonction paire :

Une fonction f est dite paire si et seulement si :

$$\forall x\in Df \text{ et } -x\in Df\ ;f(-x)=f(x)$$

b) Fonction impaire :

Une fonction f est dite impaire si et seulement si :

$$\forall x\in Df \text{ et } -x\in Df\ ;f(-x)=-f(x)$$

c) Fonction Périodique :

Une fonction f est dite périodique de période T s'il existe un nombre réel T tel que

$\forall\, \boldsymbol{x \in Df \quad et \quad x + T \in Df \quad ; f(x + T) = f(x)}$.

Remarque :

- La fonction Cos$x$ est paire car $Cos\,(-x) = Cos\,x$
- La fonction Sin$x$ est impaire car $Sin\,(-x) = -Sin\,x$
- Les fonctions Cos $(ax + b)$ et Sin $(ax + b)$ sont périodique et de période T = $\frac{2\Pi}{|a|}$

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1+\cos 3x}{\cos^3 x}$ et (C) sa courbe.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Etudier la périodicité la parité de f puis en déduire que D_f peux se réduire à $[\,0\,;\ \pi\,]$

3) Montrer que $\forall x \in Df$ on a : $f'(x) = \dfrac{3(1-2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$

4) Dresser le tableau de variation de f sur $[\,0\,;\ \pi\,]$.

Solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1+Cos3x}{Cos^3 x}$ et (C) sa courbe

1) Déterminons l'ensemble de définition Df

Df = $\{\, x \,/\, x \in \mathbb{R}\,;\ Cos^3 x \neq 0\}$

$Cos^3 x \neq 0 \Leftrightarrow Cosx \neq 0 \Leftrightarrow Cosx \neq Cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

=>**D_f** = $\left]-\infty\ ; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\ ; +\infty\right[$

2) Etude de la parité et de la périodicité de f

- Partie : $f(-x) = \dfrac{1+Cos(-3x)}{Cos^3(-x)} = \dfrac{1+Cos3x}{Cox^3x} = f(x)$

Alors f est paire et admet donc l'axe $y'oy$ comme axe de symétrie.

- Périodicité : $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ et $T_2 = \frac{2\pi}{1}$ => T = $T_1 \cap T_2 = 2\pi$

Alors l'étude peut donc se fait sur le domaine $\left[-\frac{T}{2}\ ;\ \frac{T}{2}\right]$

$\Leftrightarrow Df = \left[-\frac{2\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{2}\right] => D_f = [-\pi\ ;\ \pi]$

Et puisque la fonction f est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à $[0\ ;\ \pi]$.

D'où $Df = [0\ ;\ \pi]$

3) Montrons que $\forall x \in Df$, on a : $f'(x) = \dfrac{3(1-2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$

$$f(x) = \frac{1+Cos3x}{Cos^3x}\left\| \begin{matrix} u = 1+Cos3x => u' = -3Sin3x \\ v = Cos^3x => v' = -3SinxCos^2x \end{matrix} \right.$$

$$f'(x) = \frac{-3Cos^3x \bullet Sin3x + 3Sinx\ Cos^2x(1+Cos3x)}{Cos^6x}$$

$$=> f'(x) = \frac{3Cos^2x(-Cosx\ Sin3x + Sinx + Sinx\ Cos3x}{Cos^6x}$$

$$=> f'(x) = \frac{3(Sinx \bullet Cos3x - Sin3x\ Cosx + Sinx)}{Cos^4x}$$

$$=> f'(x) = \frac{3(Sin(x-3x) + Sinx)}{Cos^4x} = \frac{3(-2Cosx+1)Sinx}{Cos^4x}$$

$$=> f'(x) = \frac{3(-2Cosx\ Sinx + Sinx)}{Cos^4x} = \frac{3(-2Cox+1)Sinx}{Cos^4x}$$

$$=> f'(x) = \frac{3(1-2Cosx)\sin x}{Cos^4x}$$

4) Etude du signe de $(1 - 2\cos x)$ sur D_E puis de variations de f.

$1 - 2\text{Cos}x = 0 \Rightarrow \text{Cos}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Cos}x = \text{Cos}\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

D'autre par $\forall x \in [0 ; \pi]$; $\text{Sin}x > 0$ et $\text{Cos}^4 x > 0$

Donc le signe dépend de $1 - 2\,\text{Cos}x$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
	$-$	$\|$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f'(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0

$f(-2) = -2$ et $f(0) = 2$

4) <u>Courbes symétriques</u> :

a) <u>Axe de symétrie</u> :

La droite **d'équation $x = a$ est dite axe de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si :

- $f(2a - x) = f(x)$
  ou
- $f(a + x)$ est paire
  ou
- $f(a + x) = f(a - x)$

b) <u>Centre de symétrie</u> :

Le **point I$\binom{a}{b}$ est dit centre de symétrie** pour la courbe (Cf) de f si

- $f(2a - x) + f(x) = 2b$

ou

- $f(a + x) - b$ est paire

ou

- $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

N.B :

- **Toute fonction paire admet l'axe (y' o y) comme axe de symétrie.**
- **Toute fonction impaire admet le point O $\binom{0}{0}$ (origine du repère) comme centre de symétrie.**

c) Recherche de centre de symétrie et d'axe de symétrie :

- **Centre de symétrie :**

Soit f une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{\gamma x+\beta}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\imath}$) où : a ; b ; c ; γ ; β sont tous des réels avec : $a \neq 0$ et $\gamma x + \beta \neq 0$.

Si f peux ce mettre sous la forme : $f(x) = a'x + b' + \frac{c'}{\gamma x + \beta}$

Alors le centre de symétrie à la courbe (C) de f à pour coordonnée :

$$I\binom{x_0 = \frac{-\beta}{\gamma}}{y_0 = a'x_0 + b'}$$

- **Axe de symétrie :**

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec ($a \neq 0$)

Si f peux ce mettre sous la forme : $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Alors l'axe de symétrie à la courbe (C) de f à pour équation $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$.

Exemple

1) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si la droite d'équation x = a est un axe de symétrie pour la courbe (C) de f.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3 \; et \; a = -1$

b) f(x) = $3x^2 - 2x + 3$ et a = $\frac{1}{2}$

2) Pour chacune des fonctions données, vérifiez si le point I $\binom{a}{b}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C) de f.

a) $f(x)$= $\frac{3x^3 - x^2 + 4}{3x^2 - 12}$ et $I \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ et $I\binom{-1}{0}$

Solution

1) Pour chacune des fonctions données, vérifions si la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) de f.

a) $f(x) = x^2$+2x+3 et $a = -1$

$\boldsymbol{a = -1}$ *est un axe de symétrie si* $\boldsymbol{f(2a - x) = f(x)}$

$f(2(-1) - x) = f(-2 - x) = (-2 - x)^2 + 2(-2 - x) + 3$

$= (2 + x)^2 + 2(-2 - x) + 3$

$= 4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 3$

$= x^2 - 2x + 3 = f(x)$

Puisque $f(-2 - x) = f(x)$ alors $\boldsymbol{a = -1}$ est un axe de symétrie pour la courbe (C) de f.

$f(x)= 3x^2 - 2x + 3$ et $a = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$ est un axe de symétrie si $\boldsymbol{f(2a - x) = f(x)}$

$f(2(\frac{1}{2}) - x) = f(1 - x) = 3(1 - x)^2 - 2(1 - x) + 3$

$= 3 - 6x + 3x^2 - 2 + 2x + 3$

$= 3x^2 - 4x + 4 \neq f(x)$

Puisque $f(1-x) \neq f(x)$ alors $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}$ n'est pas un axe de symétrie pour la courbe (C) de f.

2) Pour chacune des fonctions données, vérifions si le point I $\binom{a}{b}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C) de f.

a) $f(x) = \frac{3x^3 - x^2+4}{3x^2-12}$ et I $\binom{0}{\frac{-1}{3}}$

Le point I $\binom{0}{\frac{-1}{3}}$ est dit centre de symétrie si $f(2(0)-x) + f(x) = 2\binom{-1}{3}$

$<=>f(-x) + f(x) = \binom{-2}{3}$

$f(-x) = \frac{3(-x)^3-(-x)^2+4}{3(-x)^2-12} = \frac{-3x^3 - x^2+4}{3x^2-12}$

$=>f(-x) + f(x) = \frac{-3x^3 - x^2+4}{3x^2-12} + \frac{3x^3 - x^2+4}{3x^2-12} = \frac{-2x^2+8}{3x^2-12} \neq -\frac{2}{3}$

Puisque $f(-x) + f(x) \neq -\frac{2}{3}$ alors $\mathbf{I}\binom{\mathbf{0}}{\frac{-1}{3}}$ n'est pas un centre de symétrie pour la courbe (C) de f.

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ et I $\binom{-1}{0}$

Le point $I\binom{-1}{0}$ est dit centre de symétrie si $f(2(-1)-x) + f(x) = 2(0)$

$<=>f(-2-x) + f(x) = 0$

$f(-x-2) = \frac{(-2-x)^2 + 2(-2-x) + 2}{(-2-x)+1} = \frac{4 + 4x + x^2 - 4 - 2x + 2}{-2-x+1} = \frac{x^2+2x}{-x-1}$

$=>f(-x-2) + f(x) = \frac{x^2+2x+2}{-x-1} + \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1} = \frac{-x^2-2x-2}{x+1} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} = 0$

Puisque $f(-x-2) + f(x) = 0$ alors I $\binom{-1}{0}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C)

5) <u>Maximum - Minimum - Extremum - Point d'inflexion</u>

a) <u>Minimum</u> :

Soit f une fonction définie en un point x_o. S'il existe un intervalle I centré en x_o tel que $\forall\, x \in$ I on a : $f(x) \geq f(x_o)$ alors f présente un minimu

m en x_o. Ce minimum est $m = f(x_o)$.

b) <u>Maximum</u> :

f admet un maximum relatif au point x_o, s'il existe un intervalle I centré en x_o tel que $\forall\, x \in$ I on a : $f(x) \leq f(x_o)$. Le maximum est $M = f(x_o)$.

<u>Théorème</u> :

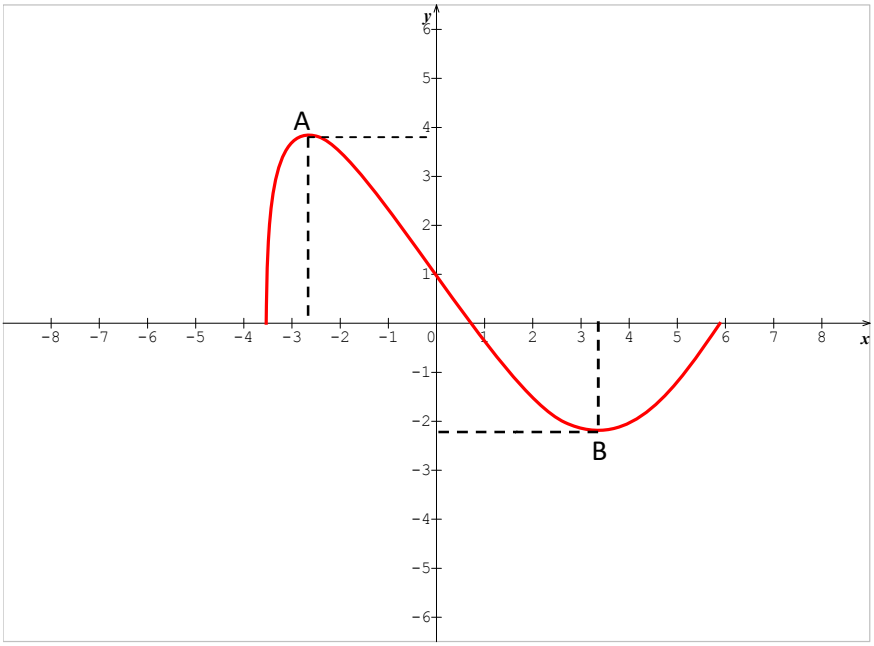
Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et si $f'(x)$ s'annule en x_o et change ce signe en passant par x_o, on dit alors que f présente un extremum en x_o. Cet extremum est égal à $f(x_o)$. Il est le minimum si f' passe du signe négatif au signe positif. Il est le maximum si f' passe du signe positif au signe négatif.

<u>NB :</u>

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert] a ; b[, tel que la dérivée s'annule en changeant de signe au point x_o, alors la fonction f admet un extremum relatif en x_o.

c) <u>Extremum</u> :

Le système (Maximum-Minimum) est appelé Extremum.



- A représente le maximum relatif,
- B représente le minimum relatif,

d) <u>Point d'inflexion</u> :

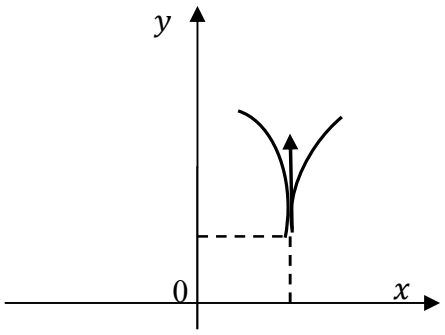
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle] a ; b[. On appelle point **d'inflexion**, tout point où la **dérivée seconde f ''(x) s'annule en changeant de signe.**

e) <u>Point de reboursement</u> :

$Si \lim f\,'(x) = \pm\infty \quad ou \quad limf\,'(x) = \pm\infty$

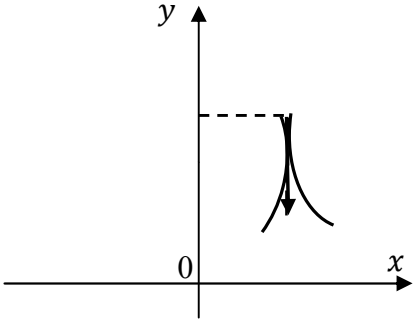
$x \to x_o^{+} \qquad\qquad x \to x_o^{-}$

Alors on dit que f admet un point de reboursement x_o à tangente parallèle à l'axe des abscisses ou des ordonnées :



a) $lim \quad f\,'(x) = +\infty$

$x \to +\infty$



b) $limf\,'(x) = -\infty$

$x \to -\infty$

6) <u>Fonction réciproque</u>

<u>Bijection</u> :

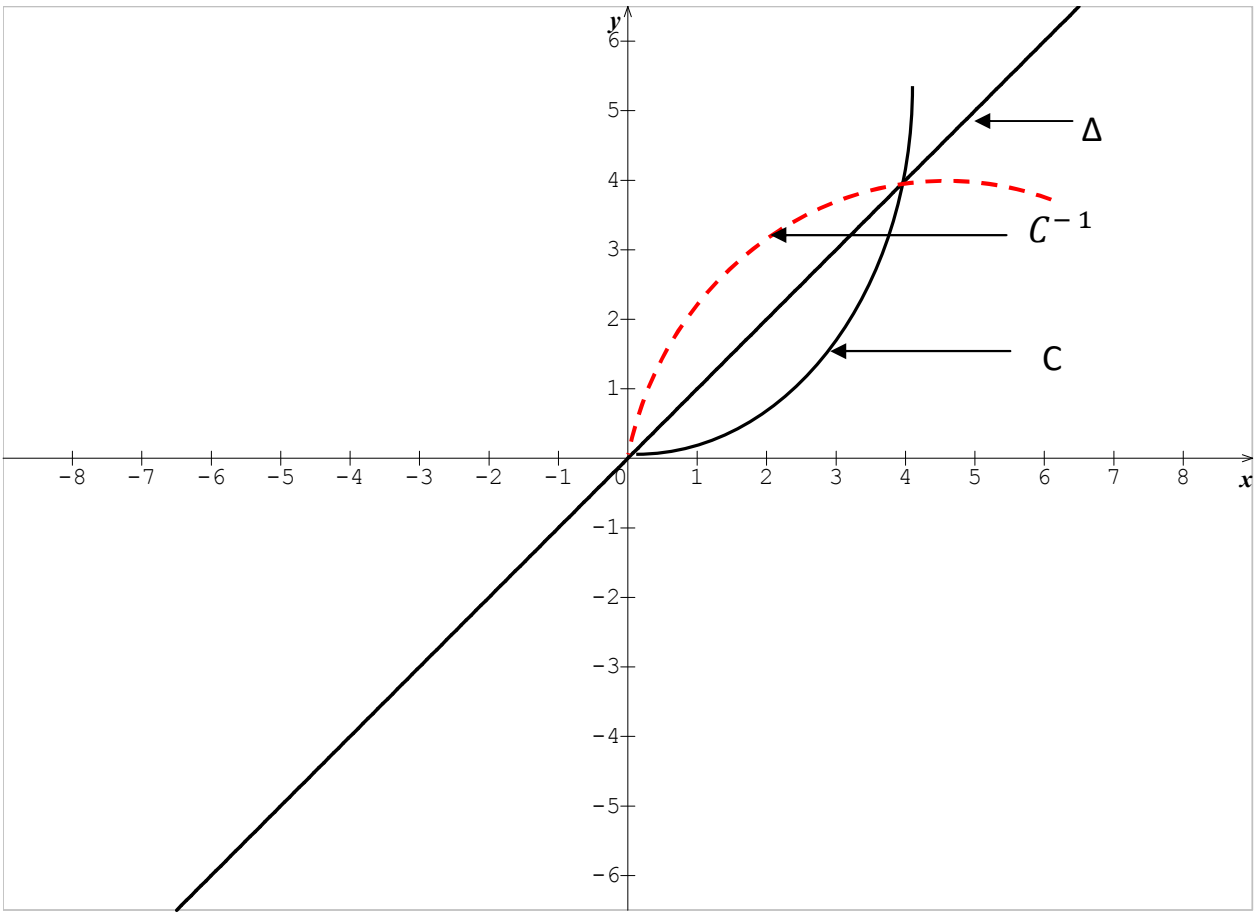
Une fonction f de E vers F est dite bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivé F admet un et un seul antécédent dans l'ensemble de départ E.

- **En Pratique :**

Une application f est bijective si et seulement si $\forall\, y \in F\ \exists!\, x \in E$ on a **: $f(x) = y$**

- **Graphiquement**

Les courbes représentatives d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice**(Δ)** d'équation $y = x$.



Théorème :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de **I sur $f(I)$. et admet une bijection réciproque f^{-1} de f (I) sur I ayant même sens de variation que f**

Les courbes C_f et C_f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$

Si M (x ; y) $\in C_f$ alors N (y ; x) $\in C_f^{-1}$

Si $x = a$ est asymptote à C_f alors y = a devient asymptote pour C_f^{-1}

7) Théorème de valeurs intermédiaires :

L'image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème 1 :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit I = [a ; b] ou I =] a ; b [un intervalle de D_f . Si f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle

Théorème 2:

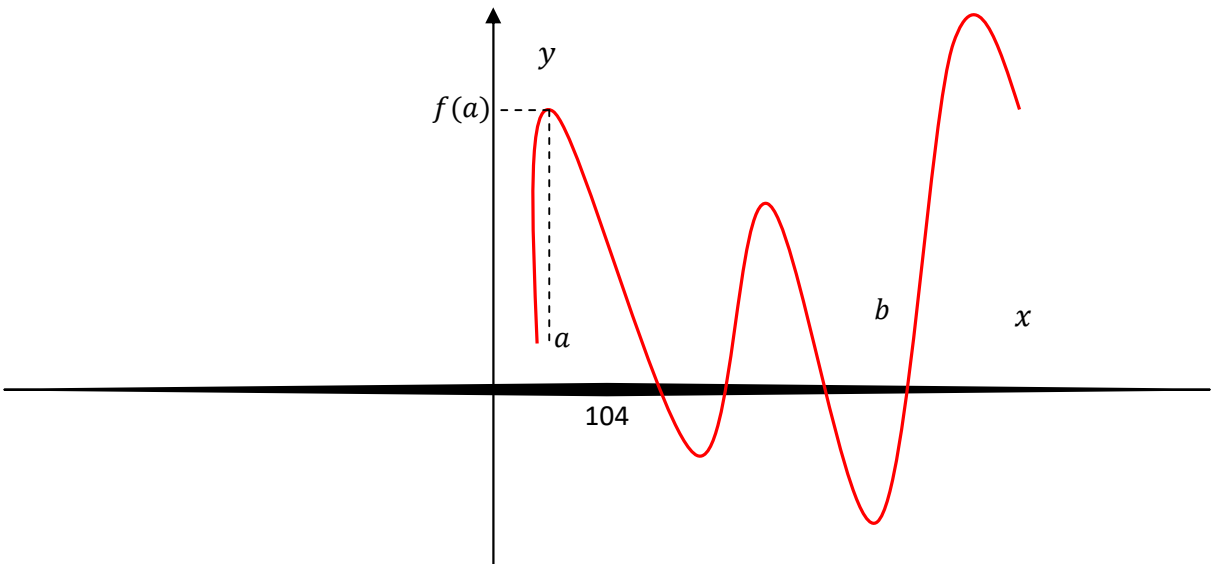
L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.

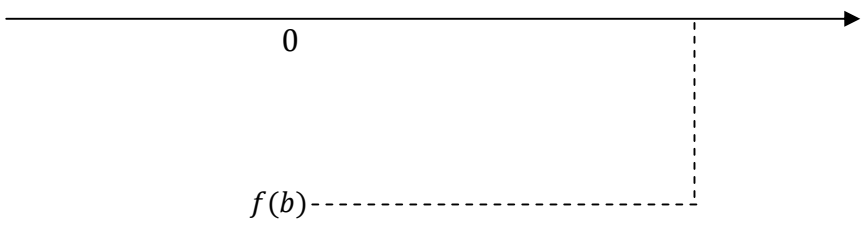
1ère forme :

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit D_f son ensemble de définition. Soit I = [a ; b] ou I =] a ; b [un intervalle de D_f . Si f est continue sur I alors f (I) est aussi un intervalle.

2ème forme :

Si f est continue sur I et que $f(a) \times f(b) < 0$, alors il existe un réel α ∈ I tel que $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$





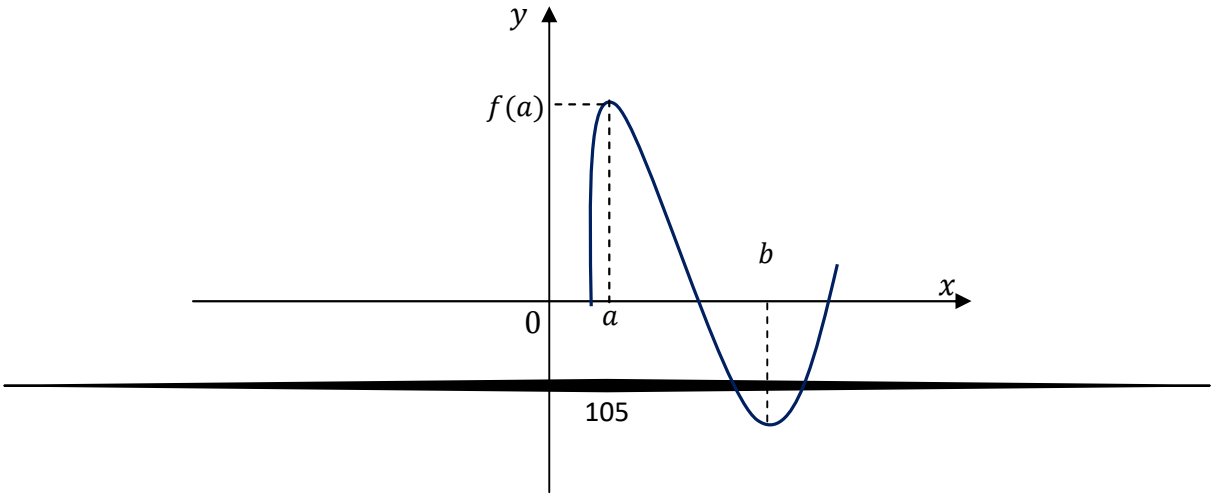
8) Théorème relatif aux fonctions continues et strictement monotones

1ère forme :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b] et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe un unique point x_0 élément de $]a; b[$ tel que $f(x_0) = 0$

2ème forme :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle[a ; b] et si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [\ a\ ;\ b\ ]$



$f(b)$ ----------

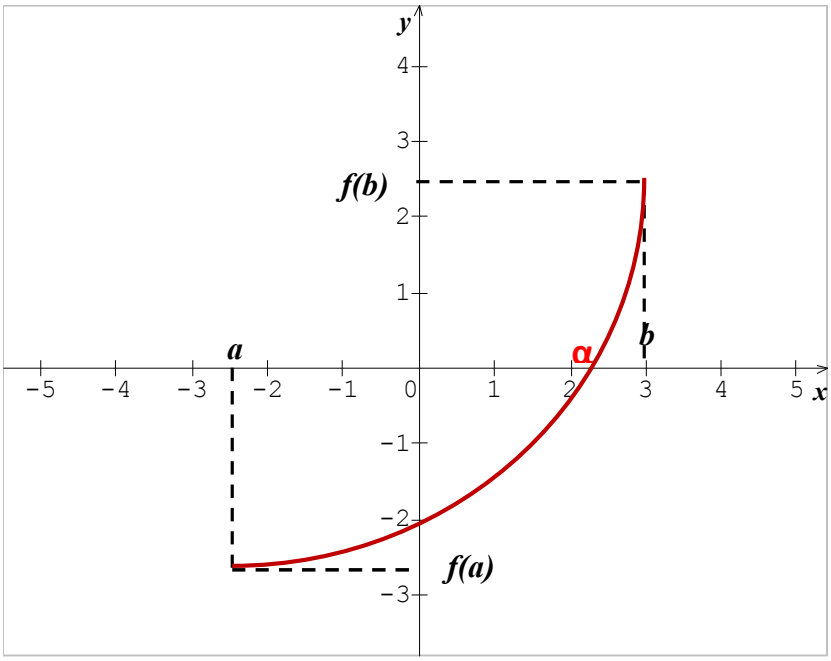
8) <u>Approximation d'une solution α de l'équation $g(x) = 0$</u> :

a- <u>Méthode de dichotomie</u> :

Soit g une fonction définie sur un intervalle [a ; b] tel que $g(a) \times g(b) < 0$.

Posons $a_0 = b$ et $b_0 = b$.

- **Si g est strictement croissante sur [a ; b]**



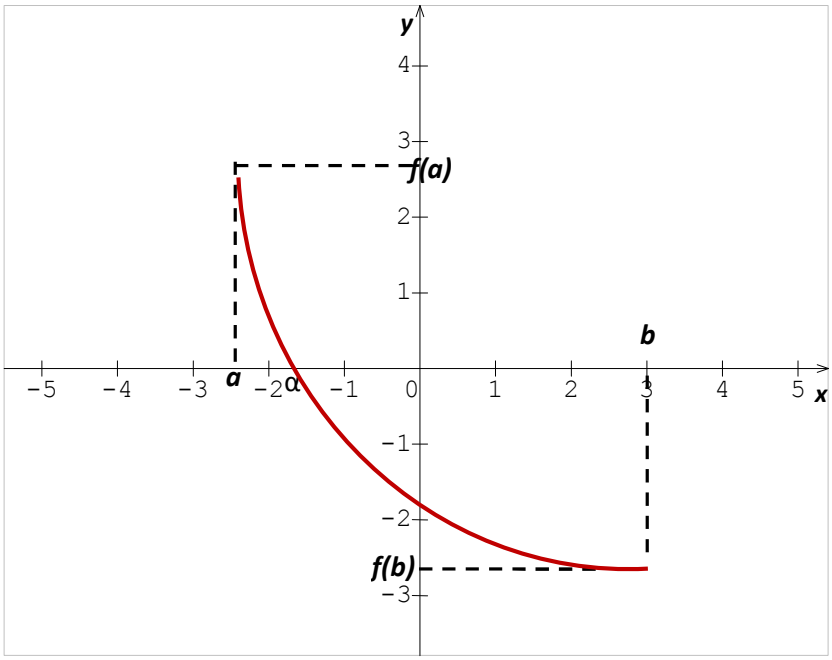
Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que α ∈ [a_n ; b_n].

On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors α ∈ $\left[\frac{a_n + b_n}{2} ; b_n\right]$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$ alors α ∈ $\left[a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.

- **Si g est strictement décroissante sur [a ; b]**



Ainsi on a deux suites numériques de termes généraux a_n et b_n tel que α ∈ [a_n ; b_n].

On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$alors α ∈ $\left[a_n \ ; \ \frac{a_n + b_n}{2}\right]$.
-
- Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$alors α ∈ $\left[\frac{a_n + b_n}{2} \ ; \ b_n \right]$.

b- <u>Méthode des balayages</u> :

C'est une méthode qui consiste à déterminée une approximation de α à partir d'un tableau de valeur où la valeur de α est obtenue en encadrant la valeur de x à partir du changement de signe obtenue entre l'antécédent positif et négatif.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	.....	x_n

$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$f(x_6)$	$f(x_7)$	.....	$f(x_n)$

Si par exemple $f(x_5)\times f(x_5) < 0$ alors $\alpha \in [\, x_5 \,;\, x_6\,]$ et par conséquent $\alpha = \frac{x_5 + x_6}{2}$

Exemple

A) Soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1- Calculer $f\,'(x)$.
2- Etudier le sens de variation de f.
3- Dresser le tableau de variation de f.
4- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in\ ]1\ ;\ 2[$.
5- Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

B) Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1- Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
2- Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

C) Soit $f(x) = Cosx$ une fonction définie sur $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

1- Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$
2- Trouver une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $f(x) = x$

Solution

A) Soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1- $Calculons\ f\,'(x)$.

D$f = \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 + 3x - 7 \Rightarrow\ f\,'(x) = 3x^2 + 3$$

2- Etudions le sens de variation de f.

$\forall\ x \in Df, f\,'(x) > 0$. D'où $\forall\ x \in Df,\ f$ est strictement croissante.

3- Dressons le tableau de variation de f.

$$lim\, f(x) = lim\ x^3 + 3x - 7 = lim\ x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$$
$$x \to -\infty \qquad x \to -\infty \qquad x \to -\infty$$

$$lim\, f(x) = lim\ x^3 + 3x - 7 = lim\ x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

$x \to +\infty$ $x \to +\infty$ $x \to +\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
		+	
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

4- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $\alpha \in]1\,;\,2[$
D'après le tableau de variation, f est définie, continue et strictement croissante de $]-\infty\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty\,;\,+\infty[$ alors l' équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

De plus : $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f(2) = 7 \end{cases} => f(1) \bullet f(2) < 0$

1- Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]1\,;\,2[$

2- Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
Pour cela utilisons la méthode des balayages

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$f(x)$	-2,36	-1,67	-0,90	-0,05	0,87	?	?	?	?

Ainsi d'après le tableau, l'image par f des différentes valeurs de x commences à changé de signe à partir des valeurs de x comprises entre 1,4 et 1,5.

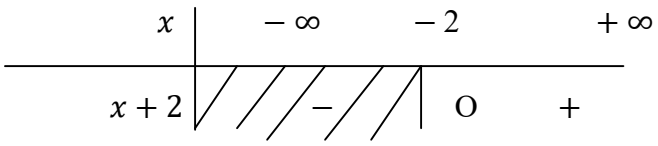
Alors : $\boldsymbol{\alpha = \frac{1,4 + 1,5}{2} = 1,45}$

B) $Soit\ f(x) = \sqrt{x+2}$.

3- Déterminons l'ensemble de définition Df de f.

$D_f = \{x/x \in IR\,;\, x + 2 \geq 0\}$

$x + 2 \geq 0$. Posons $x + 2 = 0 => x = -2$



$=>D_f=[-2\ ;\ +\infty\ [$

4- Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
Pour cela, dressons le tableau de variation de f :
$f(-2) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$f(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-2		$+\infty$
	‖	+	
$f'(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variation , f est définie, continue et strictement croissante de $]-2\ ;\ +\infty\ [$ vers $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ alors f réalise une bijection de $]-2\ ;\ +\infty\ [$ vers l'intervalle $J =]\ 0\ ;\ +\infty\ [$

8) <u>Théorème de l'inégalité des accroissements finis</u>

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $a\ et\ b$ deux réels appartenant à I tel que (a < b).

-Si m et M sont deux réels tel que $m \leq f'(x) \leq$ M, alors on a :
(b – a) $\boldsymbol{m \leq f(b) - f(a) \leq}$ **(b – a) M.**

-Si f est dérivable sur I, alors il existe un réel k appartenant à I tel que $|f'(x)| \leq k$.

Ainsi par conséquent $\forall\, a \in$ I et $b \in$ I, on a : $|f(x) - f(a)| \leq$ k $|x - a|$.
(qui est le théorème de l'inégalité des accroissements fins).

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

1) Montrer que $\forall x \in [4\ ;\ 5]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$
2) En déduire que $\forall x \in [4\ ;\ 5]$, on a : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x - 5|$

Solution

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$

1) Montrons que $\forall\ x \in [4\ ;\ 5]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$. | $U(x) = x^2 - x - 5 \Rightarrow U'(x) = 2x - 1$; $V(x) = x - 3 \Rightarrow V'(x) = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x - 1)(x - 3) - (1)(x^2 - x - 5)}{(x - 3)^2} =$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$$

Or $x \in [4\ ;\ 5] \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$

En appliquant la fonction dérivée f' à l'inégalité, on a :

Or $f'(4) = 0$ et $f'(5) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$

En appliquant la valeur absolue à l'inégalité, on a :

$=>|0| \leq |f'(x)| \leq \left|\frac{3}{4}\right|$

$=> \quad 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

D'où $\forall x \in [4\,;5\,],\ |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

2) En déduisons que $\forall x \in [\,4\ ;\ 5\,]$, on a : $\left| f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

D'après la question 1) , on a :

$\forall x \in [4\,;5\,],\ |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

Or si $|f'(x)| \leq k$, on a : d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

$|f(x) - f(a)| \leq k\,|x-a|$

Ainsi puisque $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements

Finis on a : $|f(x) - f(5)| \leq \frac{3}{4}|x-5|$. Avec $k = \frac{3}{4}$ et a = 5

Or $f(5) = \frac{15}{2}$

$=>\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

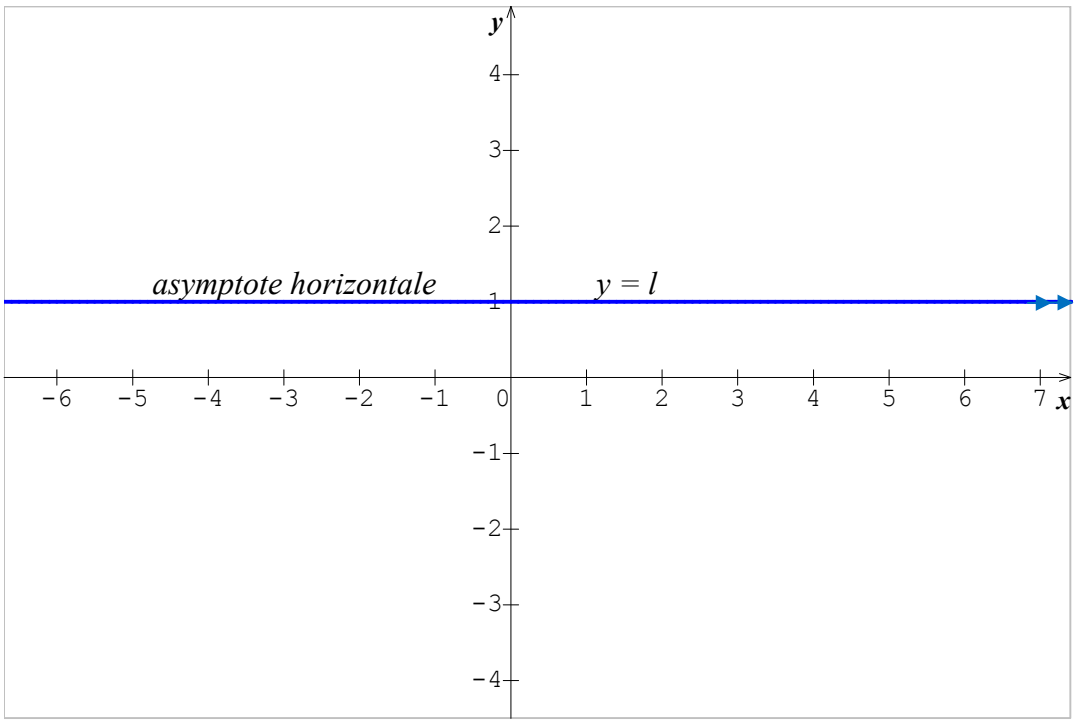
D'où $\forall x \in [\,4\ ;\ 5\,]$, on a : $\left|f(x) - \frac{15}{2}\right| \leq \frac{3}{4}|x-5|$

9) <u>Etude des branches infinies</u> :

<u>Notion d'asymptotes</u> :

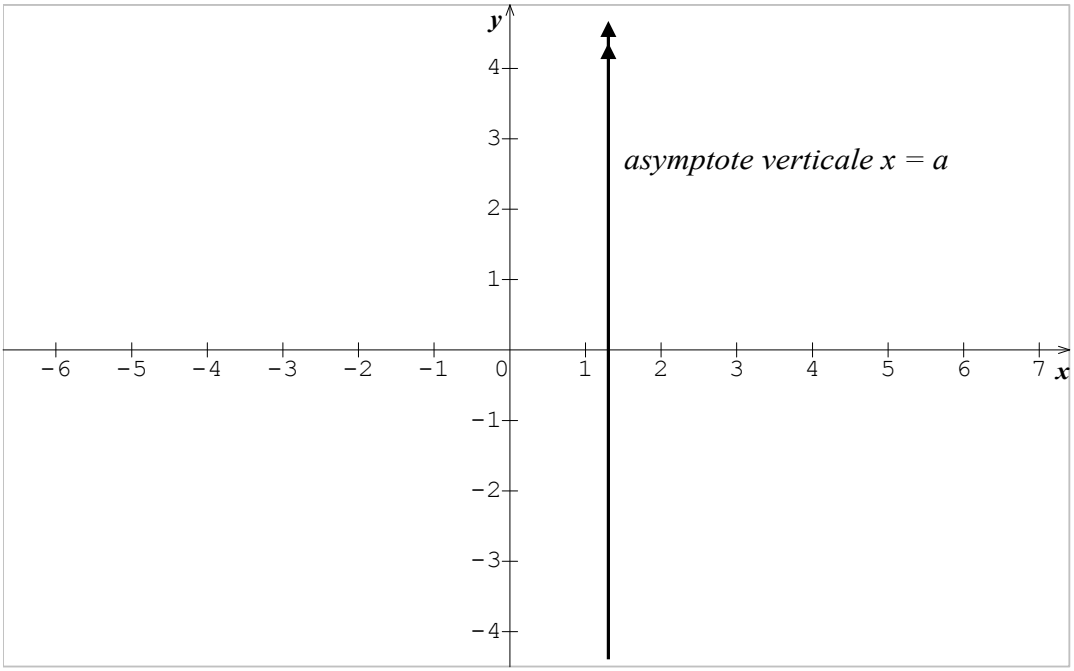
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (**alors la droite d'équation y = l**)

est asymptote **horizontale** à la combe représentative de f.



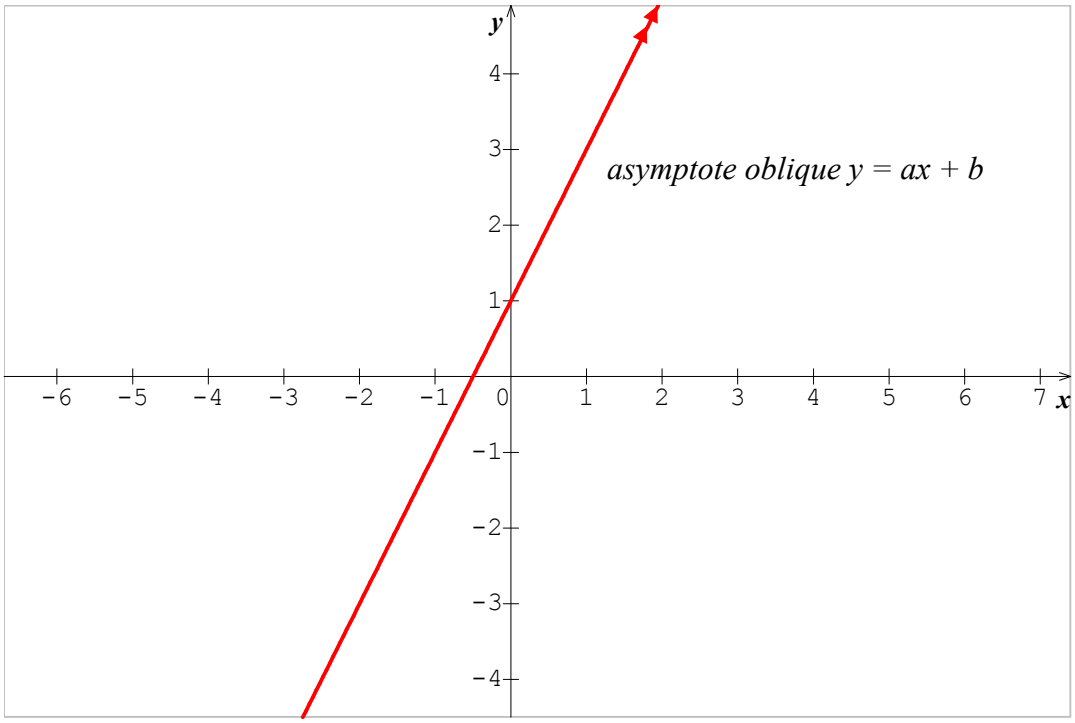
- $Si\ lim\ f(x) = +\infty\ ou\ lim\ f(x) = -\infty$(**alors la droite d'équation x = a**)
  $x \to$ a $\quad\quad$ $x \to$ a

est asymptote **verticale** à la combe représentative de f.



- $Si\ lim\ [\ f(x) - (ax + b)\ ] = 0$ $\quad\quad$ ou $\quad\quad$ $lim\ [\ f(x) - (ax + b)\ ] = 0$
  x$\to +\infty$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $x \to -\infty$

(**Alors la droite d'équation $y = ax + b$** est asymptote **oblique** à la combe représentatives de f).



Recherche d'asymptote oblique :

Il est évident de dire que si : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, alors on a une possibilité d'asymptote oblique.

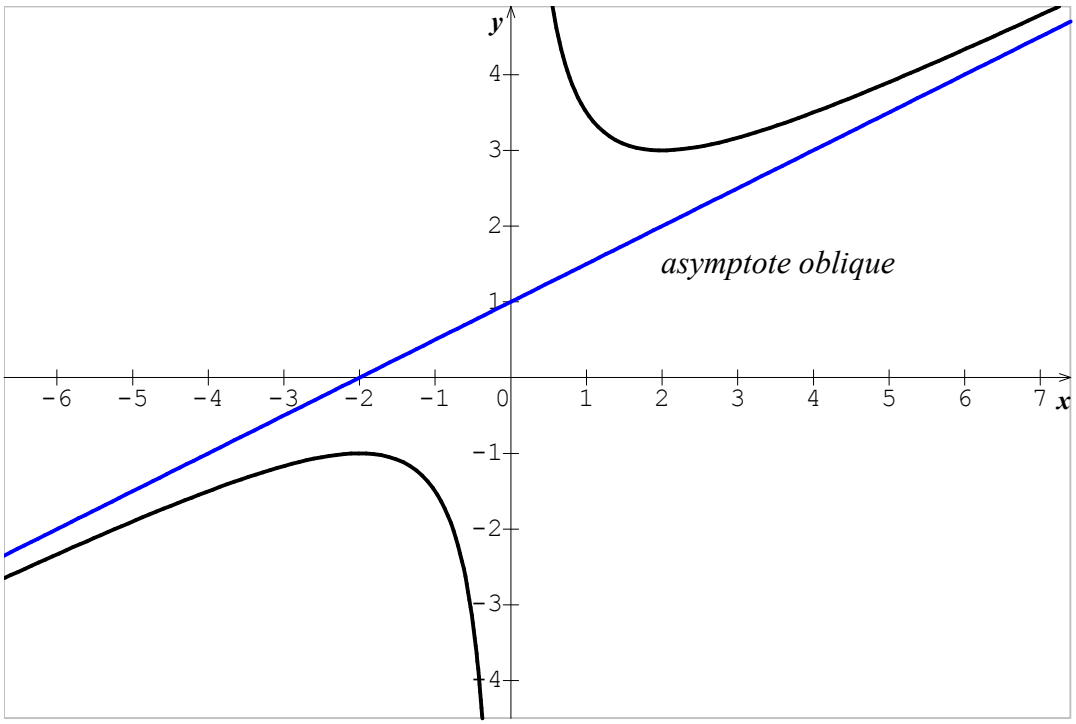
Ainsi pour chercher l'asymptote oblique, on procède comme suite :

- Si $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

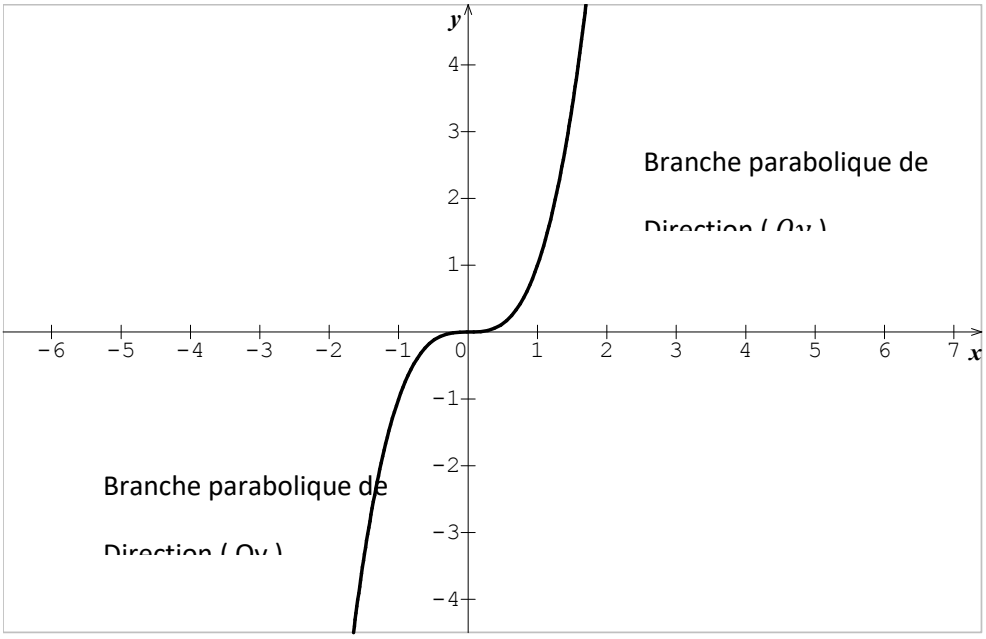
et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est

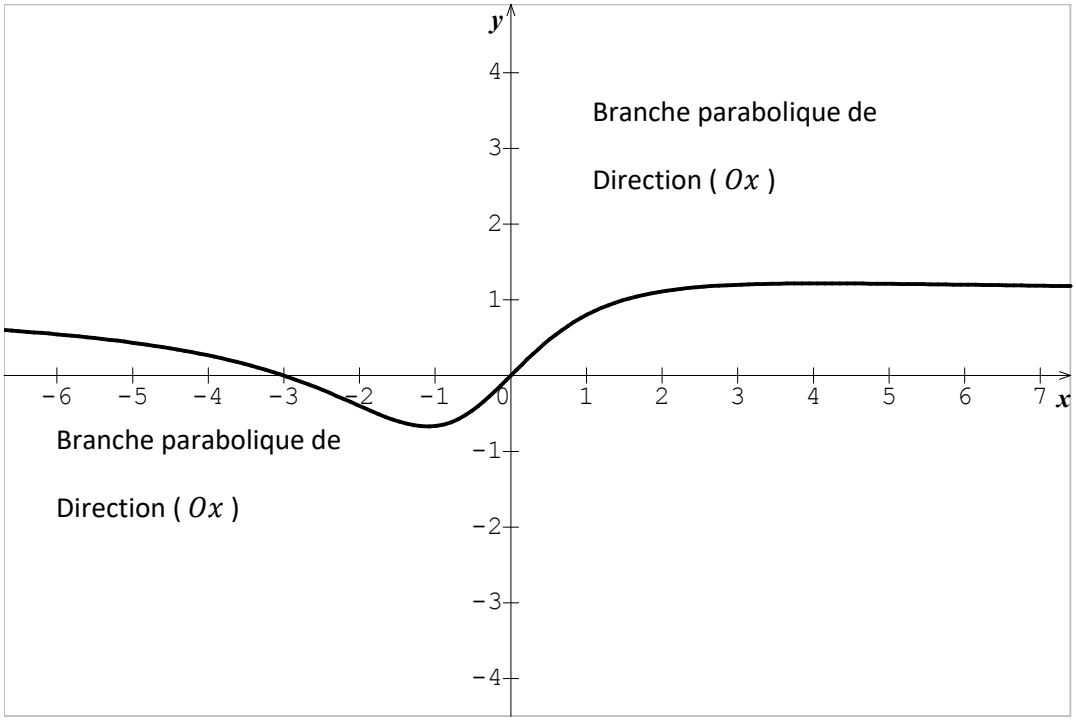
Asymptote oblique à la courbe (C) de f.



• $Si \quad lim \quad \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ $x \to \pm\infty$	alors la courbe (C) de f admet l'axe $(y'oy)$ comme branche parabolique.



Si $lim \quad \frac{f(x)}{x} = 0$ $x \to \pm\infty$	alors la courbe (C) de f admet l'axe $(x'ox)$ comme branche parabolique.



N.B :

Si f est une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur d'une seule unité, alors on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$f(x) = Q(x) + \frac{R}{D(x)}$ **(en effectuant une division euclidienne) .**

$Q(x) = y$ **est le quotient et est aussi appelé Asymptote oblique.**

$D(x)$ **= est le diviseur**

R = est le reste.

Cas Particulier d'asymptote

Toutes fonctions de la forme :

$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ **ou** $f(x) = \sqrt{|ax^2 + bx + c|}$ **; (avec** $a \neq 0$ **et** $a > 0$)

Admet deux asymptotes :

- L'une en $-\infty$ d'équation : $y = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)$

- L'une en $+\infty$ d'équation : $y = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right)$

10) Position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique.

Pour déterminer la position relative d'une courbe (Cf) et de son asymptote oblique (Δ), on étudie le signe de : $f(x) - y$. Ainsi :

- Si $f(x) - y < 0$, alors la courbe (Cf) est en dessous de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y > 0$, alors la courbe (Cf) est au dessus de la droite (Δ).
- Si $f(x) - y = 0$, alors la courbe (Cf) et la droite (Δ) sont confondues.

Exemple

1- On donne $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

a) Démontrer que la droite (Δ) : $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe(Cf) de f en $+\infty$.

b) Etudier la position de la courbe (Cf) et (Δ).

2- On donne $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de Df.

c) En déduire l'équation des asymptotes à la courbe (Cf).

Solution

1- On donne $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

a) Démontrons que la droite (Δ) : $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$.

la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$ si :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3}{x-2} - (x + 2) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2-3) - (x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$=> \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$Puisque \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

Alors la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$ e st asymptote oblique à la courbe (Cf) de f en $+\infty$

b) Etudions la position de la courbe (Cf) et de la droite (Δ).

Pour cela étudions le signe de $f(x) - y$.

Posons $f(x) - y = 0 <=> \frac{1}{x-2} = 0 => x - 2 = 0 => x = 2$

D'où le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$	(Δ)	╱ (C)		(C) ╱	(Δ)

$Alors \forall\ x \in]-\infty\ ;\ 2\ [\ ;\ f(x) - y < 0 =>$

$\forall\ x \in]-\infty\ ;\ 2\ [$; la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) .

Et

$\forall\ x \in]2\ ;\ +\infty\ [\ ;\ f(x) - y > 0 =>$

$\forall$ x $\in$] 2 ; $+\infty$ [; la courbe (C) est au dessus de la droite (Δ) .

2- On donne $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$

a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

$D_f = \{x/x \in \mathbb{R}\ ; x - 3 \neq 0\}$ =>$D_f = D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty\ ;\ 3[\cup]3\ ;\ +\infty\ [$

b) Calculons les limites aux bornes de D_f

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

$lim \quad f(x) = lim \ \frac{2x-4}{x-3} = lim \ \frac{2x}{x} = 2$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$lim \quad f(x) = lim \ \frac{2x-4}{x-3} = lim \ \frac{2x}{x} = 2$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$lim \quad f(x) = lim \ \frac{2x-4}{x-3} = lim \ \frac{2}{0^-} = -\infty$

$x \to 3^- \quad x \to 3^-$

$lim \quad f(x) = lim \ \frac{2x-4}{x-3} = lim \ \frac{2}{0^+} = +\infty$

$x \to 3^+ \quad x \to 3^+$

c) En déduisons les asymptotes à la courbe (C) de f.

Puisque $\begin{cases} lim\, f(x) = 2 \\ x \to -\infty \\ et \\ lim\, f(x) = 2 \\ x \to +\infty \end{cases}$ Alors la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à (Cf) .

Puisque $\begin{cases} lim\, f(x) = -\infty \\ x \to 3^- \\ et \\ lim\, f(x) = +\infty \\ x \to 3^+ \end{cases}$ Alors la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à (Cf).

Puisque $lim \quad [f(x) - (x + 2)] = 0$ Alors la droite d'équation $y = 3$ est asymptote

$x \to +\infty$

oblique à (Cf).

11) Intersection de la courbe avec les axes du repère :

a) Intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (ox)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des abscisses, on résous l'équation $f(x) = 0$. Ainsi la courbe passe par les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'axe (ox).

b) Intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées (oy)

Pour trouver le ou les points d'intersection de la courbe (Cf) avec l'axe des ordonnées, on calcule l'ordonnée $y = f(o)$. Ainsi la courbe passe par $y = f(o)$ sur l'axe des (oy).

12) Plan d'étude d'une fonction :

Pour étudier une fonction f et représenter graphiquement sa courbe (Cf) dans le repère on adopte le plan suivant :

- On donne le domaine de définition ou ensemble de définition noté D_f
- On calcule les limites aux bornes de D_f
- On étudie la parité et la périodicité de f
- On étudie la continuité de f
- On étudie le sens de variation de f qui consiste à calculer la dérivée et à étudier Son signe
- On dresse le tableau de variation qui est le résumé de toutes les études précédentes
- On peut chercher les points d'intersections éventuels avec les axes de coordonnées

Exemple

Etudier et représenter la courbe (C) de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x+1}$

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1+Cos3x}{Cos^4x}$ et (C) sa courbe.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Etudier la parité et la périodicité de f . En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction f sur un nouvel ensemble d'étude D_E

c) Montrer que $\forall x \in Df$ on a : $f'(x) = \frac{3(1-2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$

d) Etudier le signe de $(1-2cosx)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E.

e) Tracer la courbe (C).

Solution

1) Etudions et représentons la courbe (C) de la fonction $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	O	$+$	

$lim \quad f(x) = lim \ \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = lim \ \frac{x^2}{x} = \quad lim\, x = -\infty$

$x \to -\infty \quad x \to -\infty \qquad x \to -\infty \quad x \to -\infty$

$lim \quad f(x) = lim \ \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = lim \ \frac{x^2}{x} = lim\, x = +\infty$

$x \to +\infty \quad x \to +\infty \qquad x \to +\infty \quad x \to +\infty$

$lim \quad f(x) = \ lim \ \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \ \frac{1}{0^-} = -\infty$

$x \to -1^- \quad x \to -1^-$

$lim \quad f(x) = \ lim \ \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \ \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x \to -1^+ \quad x \to -1^+$

$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

$U(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow U'(x) = 2x + 2$

$V(x) = x + 1 \qquad \Rightarrow V'(x) = 1$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{\left(U'(x)\right)(V(x)) - \left(V'(x)\right)(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (1)(x^2 + 2x + 2)}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ or $\forall\ x \in Df, (x + 1)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $x^2 + 2x$.

Posons $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ou \quad x = -2$

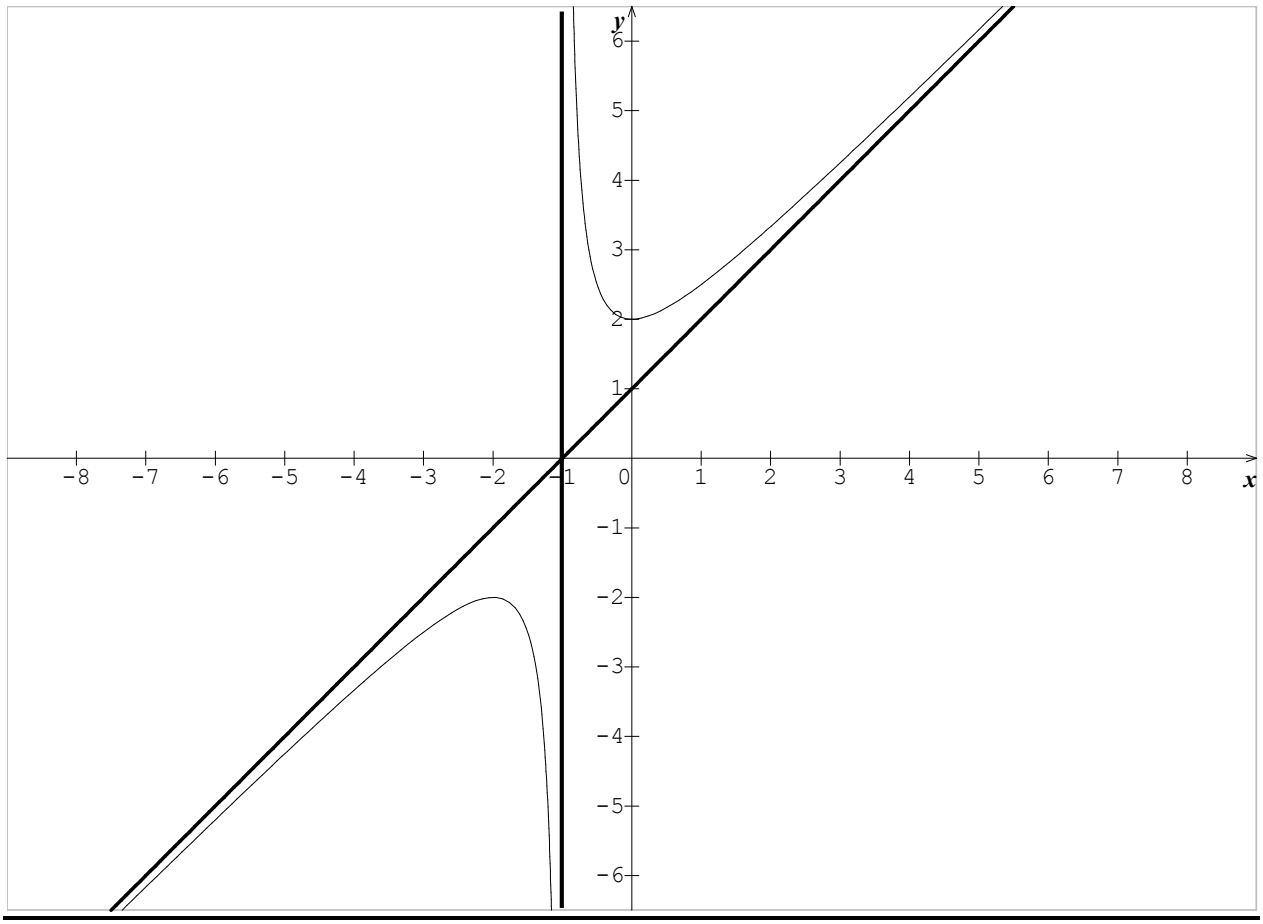
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$x = -1$ est asymptote verticale à (C).

$y = x + 1$ est asymptote oblique à (C) car $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$.

Ainsi on a la représentation suivante :



Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + Cos3x}{Cos^3 x}$ et (C) sa courbe

a) Déterminons l'ensemble de définition Df

Df = $\{x/x \in \mathbb{R}\ ;\ Cos^3 x \neq 0\}$

$Cos^3 x \neq 0 <=> Cosx \neq 0 <=> Cosx \neq Cos\frac{\pi}{2} <=> x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\boldsymbol{\pi}$ ou $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\boldsymbol{\pi}$

$=> \boldsymbol{D_f} = \left]-\infty\ ;\ -\frac{\pi}{2} + 2k\boldsymbol{\pi}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + 2k\boldsymbol{\pi}\ ;\ +\infty\right[$

b) Etude de la parité et de la périodicité de f

- Partie : $f(-x) = \frac{1+Cos(-3x)}{Cos^3(-x)} = \frac{1+Cos3x}{Cox^3 x} = f(x)$

Alors f est paire et admet donc l'axe $y'oy$ comme axe de symétrie.

- Périodicité : $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ et $T_2 = \frac{2\pi}{1} => T = T_1 \cap T_2 = 2\pi$

Alors l'étude peut donc se fait sur le domaine $\left[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}\right]$

$\Leftrightarrow D_E = \left[-\frac{2\pi}{2} ; \frac{2\pi}{2}\right] => D_E = [-\pi ; \pi]$

Et puisque la fonction est paire alors nous pouvons résumer le domaine d'étude à $[0 ; \pi]$

D'où $D_E = D \cap [0 ; \pi]$

c) Montrons que $\forall x \in Df$, on a : $f'(x) = \frac{3(1-2Cosx)Sinx}{Cos^4 x}$

$$f(x) = \frac{1+Cos3x}{Cos^3 x} \left\| \begin{matrix} u = 1+Cos3x => u' = -3Sin3x \\ v = Cos^3 x => v' = -3SinxCos^2 x \end{matrix} \right.$$

$$f'(x) = \frac{-3Cos^3 x \bullet Sin3x + 3Sinx\, Cos^2 x(1+Cos3x)}{Cos^6 x}$$

$$=> f'(x) = \frac{3Cos^2 x(-Cosx\, Sin3x + Sinx + Sinx\, Cos3x}{Cos^6 x}$$

$$=> f'(x) = \frac{3(Sinx \bullet Cos3x - Sin3x\, Cosx + Sinx)}{Cos^4 x}$$

$$=> f'(x) = \frac{3(Sin(x-3x) + Sinx)}{Cos^4 x} = \frac{3(-2Cosx+1)Sinx}{Cos^4 x}$$

$$=> f'(x) = \frac{3(-2Cosx\, Sinx + Sinx)}{Cos^4 x} = \frac{3(-2Cox+1)Sinx}{Cos^4 x}$$

$$=> f'(x) = \frac{3(1-2Cosx)\sin x}{Cos^4 x}$$

d) Etude du signe de $(1 - 2cosx)$ sur D_E puis de variations de f.

$1 - 2Cosx = 0 => Cosx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow Cosx = Cos\frac{\pi}{3} => x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

D'autre par $\forall x \in [0 ; \pi]$ on a : $Sinx > 0$ et $Cos^4 x > 0$

Donc le signe dépend de $1 - 2\,Cosx$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
	$-$	0 $+$	$+$	
$f'(x)$	2 ↘	0 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗	0

Détermination des coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses puis construction de la courbe (C) de f.

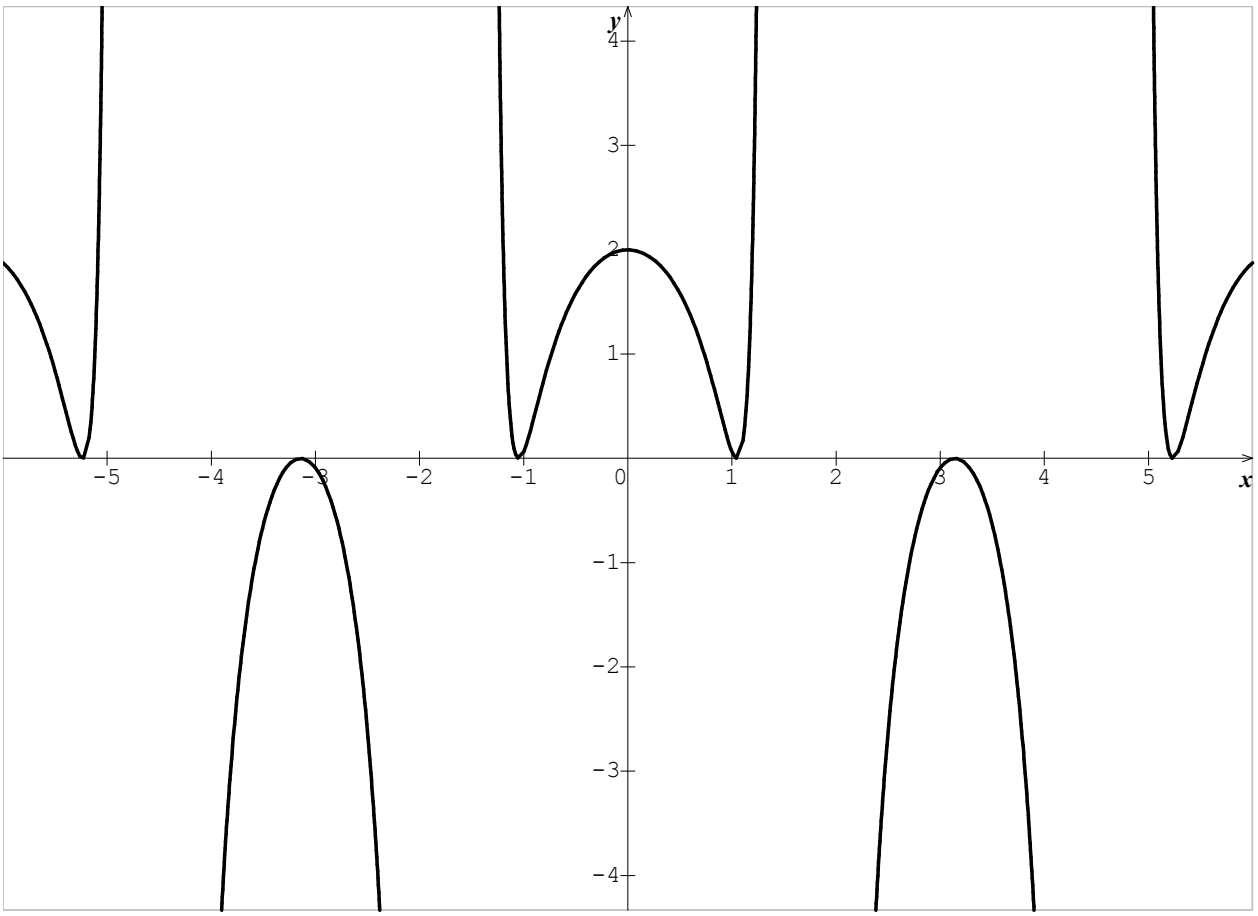
. (C)∩ (ox) => $f(x) = 0$ ⇔ 1 + Cos3x = 0 ⇔ = Cos 3x = - 1

⇨ Cos 3x = Cos π ⇔ 3x = π ou 3x = $-\pi$ =>
Donc (C) coupe l'axe (ox) en $-\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$

- (C) ∩ (oy) => = 0 ; et $y = 2$

Donc (C) coupe l'axe oy en 2

Ainsi on a la représentation suivante :


y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

EXERCICES

Limites

1 Limites en un point x_0

Calculer les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 8}{-x+2}$; b- $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$; c- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2x+5}{x^2 - x - 2}$; d- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$

e- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$; f- $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$; g- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{x + \sqrt{x}}$

2 Calculer les limites suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin2x}{3x}$; b- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{Cos2x}{1 - Sinx}$; c- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin5x}{Sin3x}$; d- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{Sin3x}{1 - 2Cosx}$

e- $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{Sinx}{\pi - x}$; f- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sin4x}{tangx}$; g- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{Sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3x - \pi}$; h- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tang4x - Sin2x}{5x}$

i- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 + x^2)Sinx - x}{x^3}$; j- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Sinx - xCosx}{x^3}$

3 On se propose d'étudier la limite en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{Cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ pour $x \neq \frac{\pi}{2}$.

1) Vérifier que l'on ait en présence d'une forme indéterminée.

En considérant l'accroissement moyenne de la fonction Cosinus en $\frac{\pi}{2}$, déterminer la limite ci-dessus.

2) Par une méthode analogue, étudier les limites des fonctions en x_0 dans les cas suivants :

a- $g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ en $x_0 = 0$; **b-** $h(x) = \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Limites à l'infinie

4 Calculer les limites suivantes à l'infinie :

a- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-8}{x+1-x^2}$; b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}-1}{x+2}$; c- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2+2}{5x^2-x}$; d- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

e- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+x-5}}$; f- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$; g- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x-|x|}{2x-2}$

h- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1-x+\sqrt{x^2+x+1}$; i- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2+Sinx}{x+1}$ (*théorème des gendarmes*)

5 Limites et asymptotes

Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous (on donnera ci-possible les éventuelles asymptotes ou possibilité d'asymptotes)

a- $f(x) = \frac{x^2+5}{-x+2}$;b-$f(x) = \frac{-x^2+5}{x^2+5x-6}$;c-$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{-x}$;d-$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$

e- $f(x) = \sqrt{3x^2-2x-1}$; f-$f(x) = \frac{\sqrt{-x+2}}{-x^2+2x-1}$;g-$f(x) = \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$

6 Soit la fonction f dénie par : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$.

On note (Cf) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

a- Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. La courbe (Cf) admet – elle une asymptote horizontale ?

b- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$.

7 Soit la fonction f dénie par : $g(x) = ax + b - \sqrt{x^2+1}$.

On note (Cg) sa courbe dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

a- Etudier la limite de$g$ en $-\infty$. ($Ondiscuterasuivantlesvaleursdea$).
b- Déterminer les réels a *et* b pour que la droite (D) d'équation $y = 2x+2$ soit asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Continuités

8 Continuité en un point x_0

Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a- $\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases}$ et $x_0 = 2$; **b-** $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \\ f(1) = 2 \end{cases}$ et $x_0 = 1$

c- $\begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \ si \ x \in [0\ ;\ 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} \quad si \ x \in]1\ ;\ 3] \end{cases}$ et $x_0 = 1$ **d-** $\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \ si \ x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$

e- $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2Cosx}-1}{2Cos2x+1} \ si \ x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \ x_0 = 1 \end{cases}$

f- $\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 \ si \ x \in]-\infty\ ;\ 1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3} \ \ x \in [1\ ;3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3} \ \ x \in [3\ ;\ +\infty[\end{cases}$

9 Continuité et condition de faisabilité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \ si \ x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2) = a \end{cases}$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en $x_o = 2$

10 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + ax \quad si\ x \in]-\infty\ ;\ -1[\\ f(x) = 2x - 1 \quad si \quad x \in]-1\ ;\ 1[\\ f(x) = b(x^2 - 1) \quad si\ x \in]1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

a) Déterminer a pour que f soit continue au point $x_o = -1$
b) Pouvez – vous déterminer la valeur de b pour que f soit continue au point $x_o = 1$?

11 Prolongement par continuité

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_o.

$\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ x_0 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{tgx}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$;

12 Soient f et g deux fonctions définies respectivements par :

$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

a- Déterminer les ensembles de définitions Df et Dg respectivement des fonctions f et g.

b- Vérifier que la fonction g est le prolongement par conitinuité de la fonction f en $x_0 = 0$.

13 On considère la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$

1) Déterminer son ensemble de définition Dg.
2) Montrer que g admet en 2 un prolongement par continuité que l'on notera par h.
3) Montrer que h est dérivable en 2 puis donner l'équation de la tangente à la courbe(C) de h au point d'abscisse 2.

Dérivabilité

Dérivabilité en un point x_0

14 Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 donnés :

a – $\begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \\ f(2) = 0 \end{cases}$ et $x_0 = 2$; **b-** $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \\ f(1) = 2 \end{cases}$ et $x_0 = 1$

c- $\begin{cases} f(x) = x^2 - x + 1 \ si \ x \in [0\ ;\ 1] \\ f(x) = \frac{2x-1}{x} \quad si \ x \in]1\ ;\ 3] \end{cases}$ et $x_0 = 1$ **d-** $\begin{cases} f(x) = \frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2} \ si \ x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases}$

e- $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2Cosx}-1}{2Cos2x+1} \ si \ x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x_0 = 1 \end{cases}$

f- $\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 \ si \ x \in]-\infty\ ;1] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3} \ \ x \in [1\ ;3] \\ f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3} \ \ x \in [3\ ;\ +\infty[\end{cases}$

Dérivabilité et condition de faisabilité

15 Déterminer les réels a, et b pour que f soit continue et dérivable aux points x_0 donnés :

a – $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + ax - 3 \ si \ x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2x+b}{x} \ \ si \ \ x > 1 \end{cases}$ b- $\begin{cases} f(x) = 2ax^2 - x + b \ \ si \ x \leq -2 \\ f(x) = \frac{3b}{x+3} \ \ si \ \ x > -2 \end{cases}$

c- $\begin{cases} f(x) = ax^2 - 3x + 4 & si\ x \leq -2 \\ f(x) = \frac{x+b}{x+3} & si\ x > -2 \end{cases}$

16 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

c- $\begin{cases} f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} & si\ x \geq -1 \\ f(x) = 2x + a & si\ x < -1 \end{cases}$

Pour quelle valeur de a la fonction f est – elle continue au point -1 ?

Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction f au point – 1.

Application de la dérivée

17 Déterminer une équation de la tangente en $M_o(xo\ ;\ f(xo))$ à la courbe (C) de f dans les cas suivants :

$a)\ f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3\ \ et\ \ x_o = -2$; $b) f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $x_o = 0$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ $et\ x_o = 3$; d) $f(x) = \frac{tangx}{x}$ et $x_o = 0$

18 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$a)\ f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$; $b)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$; c) $f(x) = (-x^2 + 2x)^3$

d) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}$; e) $f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1)$; f) $f(x) = \text{Cos}^3 x$

g) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^3 - x^2}$; h) $f(x) = \text{Sin}(3x - 1)^4$; i) $f(x) = Sin^4(3x - 1)$

19 Soit la fonction numérique f définie par :

$\begin{cases} f(x) = -x^2 - 2x + 5 & si\ x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|} & si\ x > 1 \end{cases}$

1) Prouver que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$
2) a) Dresser le tableau de signe du trinôme $x^2 - 2x - 3$ en y plaçant le réel 1
   b) En déduire pour tout $x \geq 1$ une écriture de $f(x)$ sous le symbole de la valeur absolue.

3) a) Etudier la dérivabilité de f au point $x_o = 3$. Que dira – t – on pour la dérivabilité de f au point 3 ?
   b) Donner une équation de la tangente à gauche et à droite de 1. Que peut – on conclure quant à la dérivabilité de f en 1 ?

4) a) Etudier le signe de f' sur chacun des intervalles sur lequel f est dérivable.
   b) Préciser les ordonnés de chaque extremum de f.

5) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Etudes de fonctions

Analyse et interprétation d'un tableau de variation.

20 Analyser puis interpréter chacun des tableaux de variations suivants afin de préciser :

a- les domaines de définition.
b- les limites aux bornes du domaine de définition tout en mettant en évidence les éventuelles asymptotes et possibilités d'asymptotes.
c- Donner l'allure de la courbe (C_f) dans chaque cas.

1) *f* est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

De plus :

- La courbe (C_f) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

- La courbe (C_f) admet l' axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

2) *g* est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

De plus : La courbe (Cg) admet l' axe $(y'Oy)$ comme branche parabolique.

3) *h* est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$h'(x)$	+	+	0	−	−
$h(x)$	-1 ↗	$+\infty$ || $-\infty$ ↗	0 ↘	$-\infty$ || $+\infty$ ↘	3

4) *p* est la fonction donnée par son tableau de variation ci-dessous :

X	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$p'(x)$	−	0 +	|| −	0 +	
$p(x)$	2 ↘	0 ↗ $+\infty$	|| $+\infty$ ↘	1 ↗	2

21

Dresser le tableau de variation de la fonction numérique donnée partant de ses renseignements fournis dans les cas suivants :

1) Pour *f* :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f'(x) = 0$ admet les solutions $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$
- f n'est croissante qu'entre les zéros de sa dérivée f' et les points $E_1\left(\frac{3}{2}\ ; 4\right)$ et $E_2\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$ sont ses extremums
- les droites $y = -2$ et $y = 3$ sont ses asymptotes respectives en $-\infty$ et $+\infty$

2) Pour g :

- g est définie sur $]-\infty\ ;\ 0\,] \cup \left[\frac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et admet des demi tangentes verticales aux points d'abscisses 0 et $\frac{5}{2}$
- g est strictement décroissante sur son ensemble de dérivabilité.
- la droite y = $-x$ est à la fois asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0\ ;\ -3)$ et $\left(\frac{5}{2}\ ;\ 1\right)$ sont sur la courbe de g.

3) Pour h :

- h est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\ ;\ 2\}$ et continue sur $\mathbb{R}$.
- le point de coordonnées $(0{,}3\ ;\ 0{,}4)$ est l'extremum maximum absolue de la courbe (C_h) et h est croissante sur $[\,0\ ;\ 0{,}3\,] \cup [\,2\ ;\ +\infty[$
- les droites d'équations $y = -1\ et\ y = -2x + 1$ sont asymptotes de (C_h) respectivement en $-\infty$ et $+\infty$
- les points de coordonnées $(0\ ;\ 0)$; $(1\ ;\ 0)$; et $(2\ ;\ -2)$; appartiennent à (C_h)

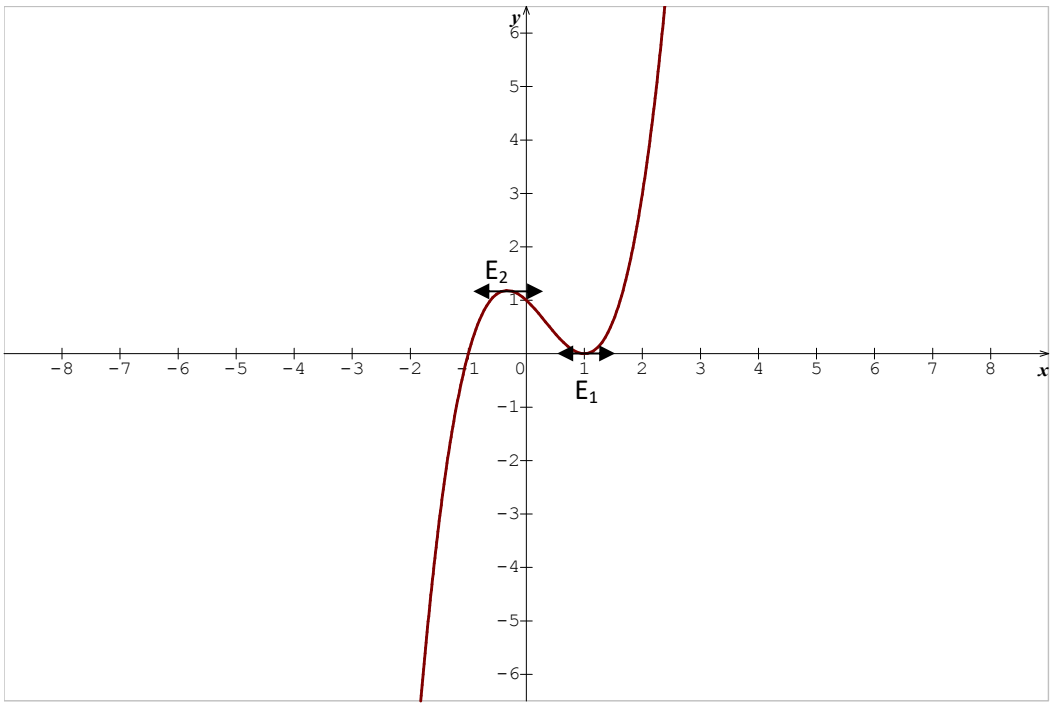
Analyse et interprétation d'un graphique.

22

a- Analyser chacune des courbes représentatives données dans un repère orthonormé du plan afin d'établir son tableau de variation.

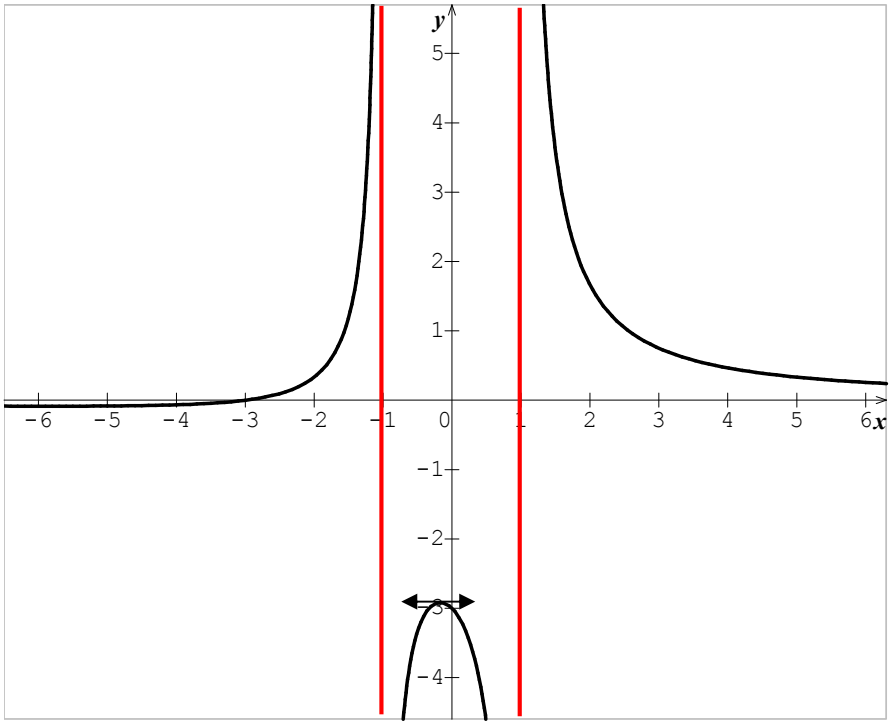
b- Déterminer les réels a ; b ; c….. en utilisant le graphique.

1) f est la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

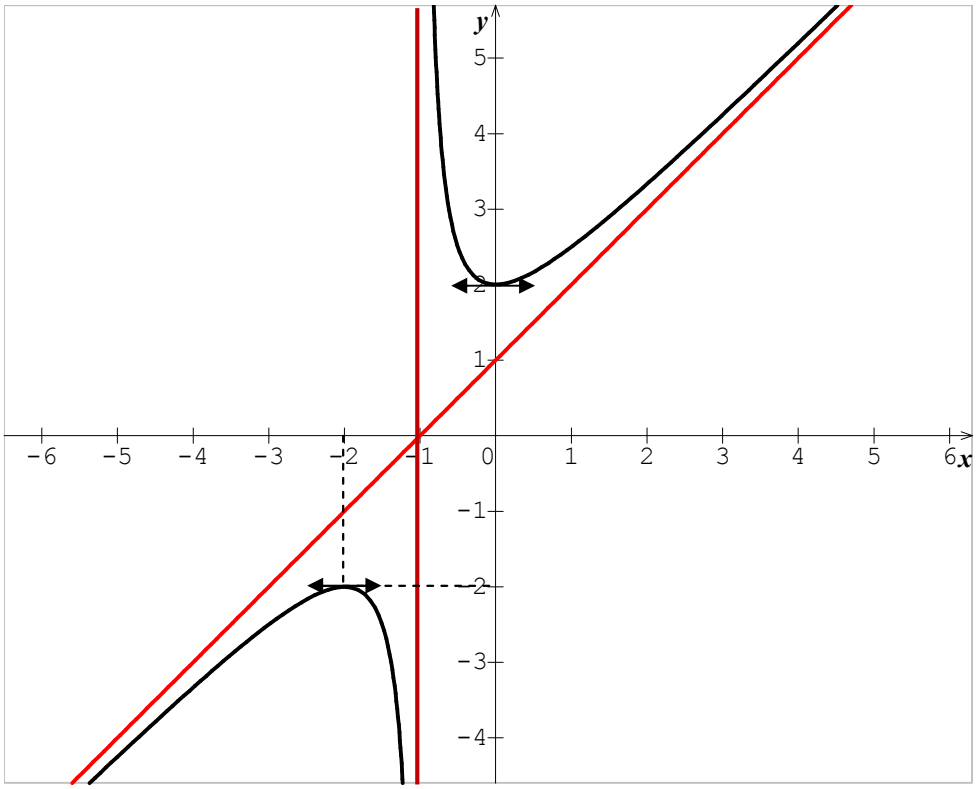


De plus : $E_1(1\ ;\ 0)$ et $E_2\left(\frac{-1}{3}\ ;\ \frac{32}{27}\right)$ sont les sommets de la courbe (Cf)

2) La fonction donnée est g telle que : $g(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + d}$



3) La fonction donnée est h telle que : $h(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$



Fonctions d'initialisations.

23 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition Df.
2) Calculer les limites aux bornes de Df.
3) Déterminer les réels a ; b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$
4) a- Montrer que la droite (D) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe Cf .
   b- Déterminer la position de la courbe Cf et de la droite (D).

5) Montrer que le point $I\binom{-1}{0}$ est centre de symétrie pour la courbe C_f.
6) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -2
7) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f au point d'abscisse nul.
8) Calculer la dérivée f' de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.
9) Construire la courbe C_f et la droite (D) dans le même repère.

24 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer les réels a ; b ; c et d tel que :
   a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.
   b- La courbe C_f passe par le point $A\binom{1}{-2}$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -5.
2) Etudier la fonction f puis représenter sa courbe C_f dans le repère.

25 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer les réels a ; b ; c et d tel que :
   a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $= 2$.
   b- La courbe C_f n'admet pas d'asymptote parallèle à l'axe (ox).
   c- La courbe C_f passe par le point $A\binom{1}{-1}$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2.
2) Etudier la fonction f puis représenter sa courbe C_f dans le repère.

26 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$

Soit C_f sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer les réels a ; b c ; m ; n et p tel que :
   a- La courbe C_f admet comme asymptote les droites $x = 2$ et $x = -1$.
   b- La courbe C_f passe par le point $A\binom{0}{3}$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -3.
2) Etudier la fonction f puis représenter sa courbe C_f dans le repère.

27 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{2(x^2 - 1)}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Etudier les variations de f.
2) Préciser les asymptotes à la courbe Cf.
3) Soit Δ l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées, déterminer la position de Cf par rapport à Δ dans l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$.
4) Construire Cf.

28 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Etudier et construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
2) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est un centre de symétrie de (Cf)
3) Discuter graphiquement suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 + 2(1 - m)x + 4 = 0$
4) Montrer que la restriction h de f à l'intervalle I = [2 ; $+\infty$ [est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. Construire la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} de h dans le repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). puis calculer $(h^{-1})'\left(\frac{7}{2}\right)$.

Fonctions dans les cas pratiques.

29 Une entreprise fabrique et commercialise chaque mois x objets dont le coût total de production, exprimé en milliers de francs est donnée par $C(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 200$ avec $x \in [5\ ;\ 60]$.

On admet que toute la production est vendue chaque mois. On rappelle que le coût moyen unitaire de fabrication d'un objet est donné par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1) Calculer $C_m'(x)$ puis en déduire le tableau de variation de $C_m(x)$.
2) Pour quel nombre d'objets le coût moyen unitaire est il minimum ?

30 La production exprimée en tonne d'une entreprise sur les cinq dernières années est donnée par la fonction suivante $t \to f(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 36$ où t s'exprime en années.

1) Calculer la dérivée $f'(t)$ de la fonction $f(t)$ puis en déduire les varitions et le tableau de variation de f. Donner une interprétation commerciale en utilisant le tableau.
2) Tracer la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
3) La production totale sur les cinq années est donnée par $\int_0^5 f(t)dt$.
   Calculer la production totale.

31 Une entreprise produit du décapant liquide. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par $f(x) = 0{,}5x + \frac{8}{x}$ où > 0.

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers de francs CFA et la quantité produite x en hectolitres.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\ )$ d'unité graphique 1cm.

1) Etudier les variations de cette fonction dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = 0{,}5x$.
3) Pour combien d'hectolitres le coût de production est il minimum ?
4) Déterminer les coûts de production pour 4 hectolitres ; 8 hectolitres et 16 hectolitres.
5) Construire la courbe (C) et la droite (D) dans le même repère.

32 Une entreprise fabrique des objets. On estime que le bénéfice, en centaine d'euros, réalisé par la production et la vente de x centaines d'objets est : $B(x) = 3x^3 + 33x - 54$ où $1 \leq x \leq 10$

1) a- Calculer $B'(x)$. En déduire le tableau de variations de B sur $[1\ ;10]$.

b - Quel est le nombre d'objets à produire, et à vendre, pour réaliser un bénéfice maximum ? Préciser la valeur de ce bénéfice.

2) a- Résoudre l'équation $B(x) = 0$. En déduire les points morts de la production.

b-Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 0$. En déduire la marge de bénéfice de la production.

33 On note $f(x)$ la population (en milliers) d'une ville fondée en 1960, où x désigne la durée écoulée depuis le début de l'année 1960, exprimée en années.

On donne $f(x) = \frac{60x + 40}{x + 10}$ où $x \in [0\ ;\ +\infty[$.

1) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x + 10}$ pour $x \in [0\ ;\ +\infty[$.
2) a- Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.
   b- Justifier que la population est croissante.
3) a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 52$.
   b- En déduire à partir de quelle année la population de cette ville sera supérieur à 52.000 habitants.
4) a- Quelle set la limite de f en $+\infty$?
   b- En déduire une interprétation quant à la population de cette ville ;
5) Tracer la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
   Echelle : 1 cm → 10 ans sur l'axe des abscisses

1 cm → 10.000 habitants sur l'axe des ordonnées.

34 Une entreprise produit d'un certain nombre x de crayons de couleur par jour où :
(x exprimé en millier).

Lorsque la quantité x est comprise entre 3 et 10, on admet que le coût de production journalier, exprimé en euro est donné par : $C(x) = x^3 - 48x + 600$

L'entreprise vend chaque millier de crayons à 99 euros.

1) En supposant que toute la production du jour est vendue, déterminer la recette journalière en fonction de x que l'on notera $R(x)$.

2) Montrer que la bénéfice $B(x)$, exprimé en euro, est donnée par :
$B(x) = -x^3 + 147x - 600$ avec $\in [3\ ;10]$. ($On\ rappelle\ que\ R(x) - C(x) = B(x)$).

3) Calculer $B'(x)$ où désigne la fonction dérivée de B.

4) Etudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[3\ ;10]$.
Dresser le tableau de variation de la fonction B.

5) En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

6) a- Montrer qu'il existe $\alpha \in]3\ ;\ 7[$ et $\beta \in]7\ ;\ 10[$ tel que $B(\alpha) = B(\beta) = 0$.

b- Calculer $B(4)$; $B(8)$; $B(5)$; $B(9)$ puis en déduire les valeurs entières minimale et maximale à l'extérieur des quelles $(x) < 0$.

7) Quelles sont les productions qui assurent à l'entreprise un bénéfice positif ?

35 Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 1 à 45kg de truffes par semaine durant la période de production de la truffe. Chaque kilo de truffes est vendu 950 FCFA.

On désigne par $f(x)$ le coût moyen, en euro par kg, pour x kg de truffes traités en une semaine.

On estime que la fonction f est définie sur $[1\ ;45]$ par : $f(x) = x^2 - 60x + 1250$.

1) Justifier que le coût de production total $C(x)$ pour x kg de truffes est donné, en FCFA, par :
$C(x) = x^3 - 60x^2 + 1250x$..

2) Exprimer le bénéfice $B(x)$, en euro, réaliser par ce producteur pour x kg de truffes conditionnés et vendus.

3) a) Calculer $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de B sur $[1\ ;45]$.

b) Pour quelles quantité de truffes de bénéfice du producteur est-il maximal ? Arrondir le résultat à 100g près. Quel est alors ce bénéfice maximal, à 100 FCFA près ?

36 Une entreprise fabrique entre 1000 et 4000 chats en porcelaine par mois. Ils sont tous identiques. On estime que le coût total de fabrication de x milliers de bibelots, en millier d'euros, est, pour $1 \leq x \leq 4$; $C(x) = 2x - 14\sqrt{x}$

1) Montrer que, pour tout réel x de $[1 ; 4]$, on a : $C'(x) = \frac{4\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$

2) a- Résoudre l'inéquation $4\sqrt{x} - 1 \geq 0$

b- En déduire le sens de variation du coût total C sur l'intervalle $[1 ; 4]$. Interpréter économiquement.

37 Le coût, en euro, de x repas préparés dans un restaurant peut s'écrire :

$C(x) = 0{,}1x^2 - x + 640$ avec $x \in [40 ; 160]$.

On note $C_m(x)$ le coût moyen de x repas, en euro par repas.

1) Justifier que C est croissante sur $[40 ; 160]$. .

2) a- Calculer le coût moyen de 40 repas, puis de 100 repas.

b- Exprimer le coût moyen $C_m(x)$ par repas en fonction du nombre x de repas préparés.

3) a- Etudier le sens de variation du coût moyen C_m

b- Quel est le nombre de repas à servir pour que le coût moyen par repas soit minimal ?

38 La société EDM désire mesurer la satisfaction de ces consommateurs par une « fonction de satisfaction » f, dont la valeur se situe dans l'intervalle$[0 ; 100]$. Si la satisfaction vaut 0,

les consommateurs ne sont pas satisfaits et quant elle vaut 100 les consommateurs sont pleinement satisfaits : on parle alors de « satisfaction ».

On définit la fonction « envie » v comme étant la dérivée de la fonction f *tel que* $v = f'$.

On dit qu'il y a « envie » lorsque v est positive. Sinon on dit qu'il y a « rejet ». Ainsi l'EDM propose différents types de formules pour la consommation de l'électricité et décide d'étudier la satisfaction de ses clients concernant la durée en jours d'une consommation.

La fonction de satisfaction f est définie sur l'intervalle [1 ; 21] par :
$f(t) = 0{,}02t^3 - 1{,}4t^2 + 22t + 640$ où t est la durée en jour de la consommation.

1) Calculer $f'(t)$, puis en étudier le signe sur [0 ; 21].

2) Dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 21].

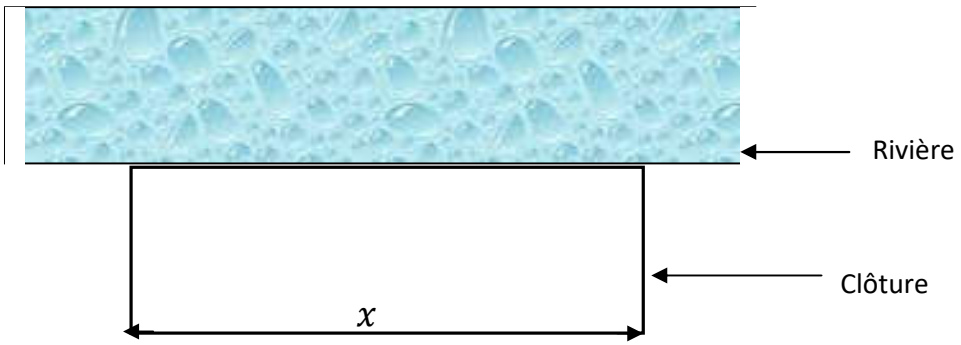
3) Quelle doit être la durée, en jour, de la consommation pour qu'il y ait saturation ?

4) Sur quel(s) intervalle(s) y a-t-il envie ? rejet ?

39 On veut construire le long d'une rivière un enclos rectangulaire d'aire 200 m^2.

Soit x la dimension exprimée en mètres du côté parallèle au cours d'eau.

On désigne par $f(x)$ la longueur totale, exprimée en mètres de clôture nécessaire à la réalisation de l'enclos.



1) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
2) On suppose que $f(x) = x + \frac{400}{x}$ où $x > 0$
   a- Etudier les variations de f sur l'intervalle[5 ; 50].
   b- Pour quelle valeur de x la longueur de la clôture est-elle minimale ?
   c- En déduire ce minimal.
   d- Tracer la courbe (Cf) de f dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) et sur l'intervalle[5 ; 50].
3) On dispose de 50 m de clôture. Quelle sont les dimensions des enclos que l'on peut construire en utilisant toute la clôture ?

40 On considère, dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.

Soit A le point de coordonnées (1 ; 0) et A' le point de coordonnées (-1 ; 0) .

1) Pour tout point H du segment[AA'], distinct de A et A', on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite (AA'). La droite (Δ) coupe le cercle (Γ) en M et M'.
On pose $\overline{OH} = x$. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM'.
2) Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ 1[$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
   a- Etudier les variations de f.
   b- Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.

Fonctions circulaires.

41 Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{Sin3x}{Cos^3x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Déterminer Df
2) Etudier la périodicité et la parité de f puis en déduire un intervalle d'étude D_E.
3) Etudier les limites aux bornes de D_E.
4) Montrer que $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{3Cos2x}{Cos^4x}$ puis dresser le tableau de variation de f.
5) Tracer (Cf).

42 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1+Cos3x}{Cos^3x}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition Df.
2) Etudier la périodicité et la parité de f puis en déduire un intervalle d'étude D_E.
3) Montrer que $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{3(1-2Cosx)Sinx}{Cos^4x}$
4) Etudier le signe de $(1-2cosx)$ sur D_E puis en déduire les variations de f sur D_E.
5) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
6) Tracer la courbe Cf.

43 On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = Sin2xCosx$.

Soit Cg sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) a- Prouver que la verticale $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe Cg et étudier la parité de g.

b- Justifier que l'on peut étudier g sur $D_E = \left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ puis décrire les étapes à suivre pour avoir la courbe Cg sur $\mathbb{R}$.

2) a- Déterminer $g'(x)$ et justifier que son signe est celui de $3\text{Cos}^4x - 2$ pour tout $x \in D_E$

b- En admettant que Cos(0,45) = 0,9 et que Cos(2,69) = $-0{,}9$ et en exploitant les résultats obtenus en 1), établir le tableau de variation de g sur D_E

3) a- Tracer (Cg) sur $\left[\ 0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

b- En déduire le tracer de (Cg) sur $[-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$.

44 **Partie A** : On considère la fonction numérique h de variable réelle u définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par : $h(u) = 2u^3 + 8u^2 - 4$.

1) Déterminer l'arrondi d'ordre zéro de $h(-0{,}79)\ et\ de\ h(0{,}66)$.
2) Etablir le tableau de variation de h et donner les signes de $h(u)$ pour $\in [-1\ ;\ 1]$.

Partie B : On donne la fonction numérique g telle que $g(x) = \frac{Sin2x}{Cosx + 2}$.

Soit Cg sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition Dg.
2) En étudiant la périodicité et la parité de g puis montrer que l'on peut étudier g sur un nouvel ensemble d'étude $DE = [\ 0\ ;\ \pi\ ]$ d'amplitude 2π.
3) Déterminer $g'(x)$ et prouver $g'(x)$ dépend en signe et en racine de : $2cos^3x + 8cos^2x - 4$ pour tout $x \in D_E$
4) En admettant que Cos(0,85) = 0,66 et que Cos(2,49) = $-0{,}79$, établir le tableau de variation de g sur D_E.
5) a- Tracer Cg sur D_E.

b- En déduire le tracer de Cg sur I.

45 **Partie A** :

1) Déterminer l'arrondi d'ordre quatre de Sin$(-0{,}1396)$.

2) A l'aide d'un changement de variable convenable, résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation

$-2sin^2x - 8sinx - 1 \geq 0$.

Partie B :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{Cos2x}{Sinx + 2}$.

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Quel est le domaine de définition Df de f ?

2) Prouver que les droites $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ sont des axes de symétrie pour Cf.

3) Après avoir étudié la périodicité de f, justifier que l'on peut étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ puis donner le processus à suivre pour compléter l'étude de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

4) (On rappelle que $Sin2x = 2CosxSinx$ et que $Co2x = 1 - Sin^2x$)

a- Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in D_E$ puis établir que $f'(x)$ dépend en signe et en racine de $-2sin^2x - 8sinx - 1$

b- Comment sont les tangentes à Cf aux points d'abscisses $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$?

5) Déterminer l'arrondi d'ordre quatre de $f(-0{,}1396)$ puis dresser le tableau de variation de f sur l'ensemble D_E.

6) Tracer Cf sur D_E en mettant en évidence les points d'intersection de Cf avec les axes de coordonnées.

En déduire le tracé de Cf sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

Fonctions paramétriques.

46 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = (2m - 1)\,x^4 - (m + 4)\,x^2 - m + 5$.
Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2) Etudier les fonctions $f_0$et f_1 puis représenter leur courbe respectives (C_0) et (C_1).

47 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 + 3x + 4m}{x^2 + (5m + 1)x + 3}$.

Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par trois points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2) Déterminer m pour que le point d'intersection I de (C_m) et l'asymptote parallèle à $(x'ox)$ ait pour abscisse $\frac{3}{2}$.

3) Etudier les fonctions $f_0$et f_1 puis représenter leur courbe respectives courbe (C_0) et (C_1).

48 Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 1}$.

Où x est la variable et m est un paramètre réel.
Soit (C_m) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Donner le tableau de variation de la fonction f_m suivant les valeurs de m.
(On distinguera les cas où $m \neq 1$ et $m \geq 0$).
2) Comparer $f_m(x)$ et $f_{-m}(-x)$ puis donner la position relative des courbes (C_m) et (C_{-m}).
3) Quelle sont les coordonnées des points de (C_m) à tangentes parallèles à (ox) quand ceux-ci existent ?
4) Montrer que ces points sont sur une même courbe fixe.
5) Etudier les fonctions f_0 et f_1 puis représenter leur courbe respectives (C_0) et (C_1).

Fonctions auxiliaires.

49 **Partie A :** On considère le polynôme P définie : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) Donner le tableau de variation de P.
2) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle$]1{,}6\ ;\ 1{,}7\ [$.
3) Donner le signe de $P(x)$ dans l'intervalle$]-1\ ;\ +\infty\ [$.

Partie B : On considère la fonction $f :]-1\ ;\ +\infty\ [\to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{1-x}{1+x^3}$$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) a) Justifier la dérivabilité de f sur $]-1\ ;\ +\infty\ [$.
b) Calculer $f'(x)$ puis établir que $f'(x) = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$

2) Donner le tableau de variation de f.

3) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe Cf de f.

4) Placer α puis tracer Cf.

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle$[2\ ;\ +\infty\ [$.

Montrer que g réalise une bijection de $[2\ ;\ +\infty\ [$ sur un intervalle J que l'on précisera.

6) On désignera g^{-1} sa bijection réciproque.

a) Donner le tableau de variation de g^{-1}

b) Tracer la courbe Cg^{-1} de g^{-1}

50 **Partie A :** On donne la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que 2,19 < α < 2,20
3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$, on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$
3) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f puis son tableau de variation de la fonction f.
4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe Cf . Etudier la position de Cf et (D).
5) Tracer Cf.

51 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ – {-1, 1} par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Etudier la fonction g (limites et sens de variation)

2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que g(α) = 0, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel α.
3) Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$

Partie B :

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df.
Montrer que $\forall x \in Df$ on a : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$ puis déduire le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que $\forall x \in Df$; $f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$ et $+\infty$.

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3) Tracer la courbe (C) et la droite (D).

Partie C :

1) Déterminer l'abscisse des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.

2) Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.

3) En déduire graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solution de l'équation $f(x) = m + x$.

52

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

a) Etudier les variations de la fonction g.
b) Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.
c) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$.

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

On note (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y = -3x$ et $y = x$.

a) Etudier les limites de f en +∞ et -∞
b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
c) En déduire le tableau de variation de f.
d) Déterminer la limite en -∞ de $f(x) - (-3x)$. Quelle conséquence graphique peut – on déduire de ce résultat ?
e) Montrer la droite (D') est asymptote à la courbe (C) en +∞
f) Etudier la position de (C) par rapport aux deux droites (D) et (D').
g) Tracer la courbe (C), les droites (D) et (D').

53

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^3}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 1$

1) Etudier la fonction g (limites et sens de variation)

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$, puis en déduis l'arrondi d'ordre 2 de l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses.

3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenues.

2) a- Prouver que le signe de la fonction dérivée f' de f dépend en signe et en racine de la fonction g étudier dans la **partie A.**

b- Déterminer $g(x_0)$ où x_0 est l'abscisse x_0 du point d'intersection I de la courbe de g avec l'axe des abscisses obtenu dans la **partie A 2)**.

c- Dresser le tableau de variation de f.

3) tracer la courbe (Cf) dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

4) Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation paramétrique :

(E_m) : $mx^3 + x - m$ où m est un paramètre réel.

Fonction irrationnelle –fonction avec valeur absolue.

54 Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Donner l'ensemble de définition Df de f .
2) Etudier les variations de f, puis tracer avec soins sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On donne : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6$ et $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -0{,}3$

55 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) a) Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $x - \sqrt{x^2 + 8} < 0$
b) Etudier les limites de f aux bornes de Df. En déduire que la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale dont on précisera une équation.

c) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en -∞

2) a) Calculer $f'(x)$. Puis en déduire de 1) a) le sens et le tableau de variation de f.
b) Tracer (C) et (D) dans un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm)

56 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

1) Déterminer le domaine de définition de f et écrire $f(x)$ sans les symboles "valeur absolue"

2) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0, puis interpréter géométriquement les résultats
3) Etudier les variations de f
4) Montrer que les droites d'équations $y = -x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à la courbe (C) et f
5) Tracer (C)

57 Soit la fonction numérique f définie par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue
3) Etudier la dérivabilité de f en $x_o = -1$ et en $x_o = 3$ puis interpréter graphiquement vos résultats.
4) Montrer que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de -∞ et une asymptote oblique (D) au voisinage de +∞.
5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec (Δ) et (D)
6) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
7) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) de f.

58 Soit la fonction f définie de ℝ vers ℝ par $f(x) = |x|\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Déterminer l'ensemble de définition Df de f
2) a) Etudier la dérivabilité de f au point $x = 0$, en déduire l'ensemble de dérivabilité de f.
b) Calculer $f'(x)$ pour x élément des intervalles de dérivabilité.

c) Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de Df et préciser les équations des asymptotes à la courbe (C) de f.

d) Dresser le tableau de variation de f

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle I =]-∞, 0]

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g et (Cg^{-1}) sa courbe.
b) Calculer $f(0), f(-1), f(2), f(3)$
c) Construire dans le même repère orthonormé les courbes (C) et (Cg^{-1})
d) Calculer $(g^{-1})'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

59 Soit la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = \sqrt{|\ x^2 - 6x + 5\ |}$

Soit Cf sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

1) Etudier suivant les valeurs de x, le signe du polynôme et l'expression de $f(x)$ sans le symbole "valeur absolue".
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f, en particulier en 1 et en 5. La courbe admet – elle des tangentes en ces points ?
3) Etudier les variations de f.
4) Démontrer que la droite d'équation $x = 3$ est axe de symétrie pour la courbe (C).
5) Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à la courbes (C).
6) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de la courbe (C) avec ses deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.
7) Soit I le point de coordonnées $(3 ; 0)$. Démontrer que $\forall x \in [1 ; 5]$ le point M de coordonnées $(x, f(x))$ est une distance constante du point I. En déduire la nature géométrique de la courbe (C), lorsque $1 \leq x \leq 5$
8) Tracer (C) et ces asymptotes. Faire figurer les points A et B.

Perfectionnement.

60

La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation.

On sait de plus que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie pour la courbe C de f.

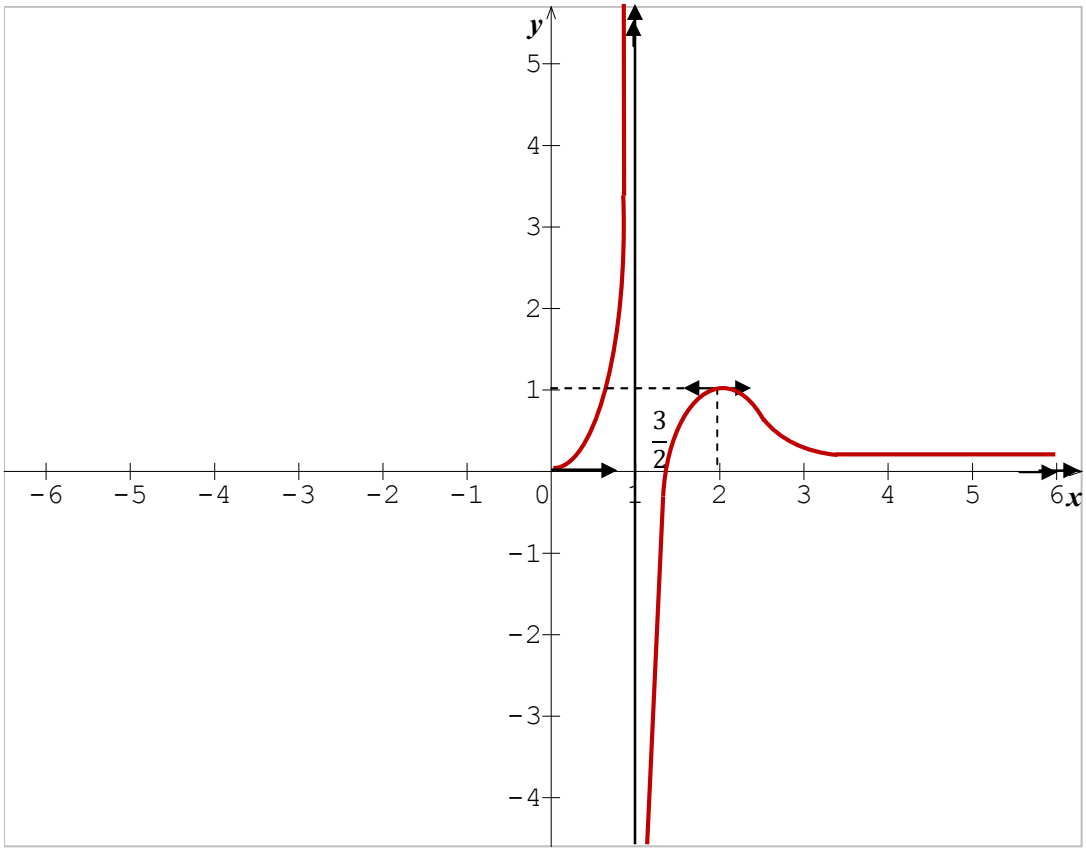
x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$			0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

1) Tracer la courbe C de f
2) Compléter le tableau de variation de f
3) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + \beta x + \alpha}$

a- Déterminer les réels $a ; b ; c ; \beta$ et α

b- Montrer que la restriction g de f à $I =]2 ; 4]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
c- Donner l'équation de la tangente à la courbe C' de g^{-1} au point d'abscisse 1
d- Tracer C'
e- Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre m, du nombre et des signes des solutions de $l'équation\ (3 - m)x^2 - (12 - 4m)x + 8 = 0$

60 On donne la figure ci-dessous qui représente une partie de la courbe d'une fonction g.



1) Compléter la courbe de la fonction g sachant que g est impaire.

2) Donner les équations des asymptotes à (Cg)
3) Quel est le domaine de définition de g sous forme de réunion d'intervalles
Donner les limites de g aux bornes de Dg.

4) Dresser le tableau de variation de g.

61 Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ où a, b, c, d sont des réels et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) Trouver les réels a ; b ; c et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et (Cf) passe par les points A(2 ; 3) , B(4 ; 7) et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.

2) Dans la suite du problème on prendra $a = 1$; $b = -1$; $c = -5$ et $d = -3$

a- Etudier la fonction f

b- Etudier la position de (Cf) par rapport à son asymptote oblique

c- Montrer que la restriction g de f à l'intervalle [4 ; $+\infty$[réalise une bijection de [4 ; $+\infty$[sur un intervalle J que l'on précisera.

d- Calculer $g(5)$; $g(6)$; $(g^{-1})'\left(\dfrac{15}{2}\right)$

3) Montrer que (Cf) admet un centre de symétrie que l'on déterminera

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β

5) a- Montrer que $\forall x \in [4,5]$ on a $|f'(x)| \leq \dfrac{3}{4}$

b- En déduire que $\left|f(x) - \dfrac{15}{2}\right| \leq \dfrac{3}{4}|x-5|$

6) Tracer (Cf) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ ainsi que (Cg^{-1}) la courbe de g^{-1}

62 **Partie A** : Soit f la fonction numérique définie sur Df =] 1 ; $+\infty$[par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur Df.
2) Etudier les variations de f (limite et sens de variation)
3) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle] 1 ; 2[

Partie B: On se propose de résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans] 1 ; 2[.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, a même ensemble de solution que l'équation $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x$

2) On appelle g la fonction définie sur] 0 ; $+\infty$[par : $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ (On a donc g(α) = α et $1 \leq \alpha \leq 2$)

a) Montrer que si x est élément de] 1 ; 2[alors $g(x)$ est aussi élément de] 1 ; 2[.

b) Justifier la dérivabilité de g sur [0 ; $+\infty$[Calculer la dérivée de g puis montrer que pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En déduire que pour tout x de [1, 2], on a $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

63 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier la fonction f (limites, variations).

2) a- Déterminer les réels a ; b ; c et d tel que $\forall x \neq 1$ on a : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x-1)^2}$

b- En déduire que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (C)

c- Préciser la position de la courbe (C) et la droite (D) et les coordonnées du point commune I à la courbe (C) et (D).

3) Tracer (C) et (D)

4) a- Déterminer l'abscisse du point J de la courbe (C) où la tangente est parallèle (D) ; puis l'équation de cette tangente. Tracer cette tangente (T).

b- En déduire graphiquement suivant les valeurs de m, le nombre de solution de l'équation $f(x) = x + m$.

5) On se propose de retrouver par calcul le résultat trouvé en 4)

a) Montrer que les abscisses des points d'intersection de (C) et de la droite d'équation

$y = x + m$ sont les solutions de l'équation :
(E) : $(m + 2)x^2 + (-2m - 7)x + m + 4 = 0$

b) Trouver suivant les valeurs de m, le nombre de solution de l'équation (E).

c) Pour quelles valeurs de m la courbe (C) et la droite d'équation $y = x + m$ ont – elles deux points communs M et N ?

d) Dans ce cas, calculer en fonction de m, l'abscisse du milieu I de [M N].

e) Montrer que lorsque m varie, le point I appartient à la courbe (C') d'équation :

$y = x + \dfrac{7-4x}{2x-2}$

64 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et (C) sa courbe.

1) a- Démontrer que la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est au dessus de sa tangente en tout point.

b- En déduire que $\forall \alpha \in [0 ; +\infty[$, on a : $\dfrac{1}{1+\alpha} \geq 1-\alpha$ (1)

2) Soit la fonction g définie sur [0, +∞[, par g (x) = $\sqrt{x+1}$ et soit a un réel strictement positif.

3) Déterminer la dérivée première et seconde de g sur $[0 ; +\infty[$

4) Vérifier que $\forall x \in [0 ; a[$ on a : $\dfrac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \dfrac{1}{2}$

5) En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $[0 ; a]$, démontré que $1 + \dfrac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1+\dfrac{a}{2}$ (2)

6) a) Déduire des relations (1) et (2) que :

$\forall \alpha \in [0 ; +\infty[$, on a : $1+\dfrac{a}{2}-\dfrac{a^2}{4} \leq \sqrt{1+a} \leq 1+\dfrac{a}{2}$

b) Etablir alors l'inégalité suivante : $1{,}0475 \leq \sqrt{1{,}1} \leq 1{,}05$

c) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1{,}1}$ tout en précisant la marge d'incertitude.

7) Etudier la fonction f puis tracer la courbe (C).

Suites Numériques

Objectifs

Ce thème vise à :

• étudier le comportement global d'une suite numérique (majoration, minoration, convergence, variations) ;

• mettre en œuvre le raisonnement par récurrence ;

• donner des outils pour traiter des problèmes d'approximation.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Suites monotones • Suites majorées, minorées, bornées • Suites convergentes : - Notion de convergence. - Unicité de la limite (admise) - Toute suite croissante et majorée converge - Toute suite décroissante et minorée converge. - Si f est une fonction numérique telle que $\lim_{n\to+\infty} f(x) = l$ alors la suite définie par $u_n = f(n)$ converge vers l. • si (u_n) est une suite convergeant vers a et f une fonction continue en a alors la suite	• Démontrer qu'une suite est monotone : - Par comparaison de deux termes généraux consécutifs ; - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontrer qu'une suite est majorée et/ou minorée : - Par un calcul direct ; - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontrer qu'une suite est convergente ou divergente par :

$v_{n=f(u_n)}$converge vers f(a). • Convergence des suites géométriques (suites du type (a^n)). • Suites divergentes • Convergence des suites géométriques et des suites du type n^α • Suites divergentes • Théorèmes de comparaison : Soient les suites (v_n) et (u_n) 1) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$. 2) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (u_n) tend vers $-\infty$, alors (v_n) tend vers $-\infty$. 3) Si à partir d'un certain rang, $\lvert v_n - l \rvert \leq u_n$ et si (u_n)tend vers 0, alors (v_n) tend vers *l*. 4) Si a partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) tend vers *l*, alors (u_n) tend vers *l*. 5) Si à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$ et (u_n) tend vers *l* et (v_n) tend vers *l'*alors $l' \leq l$. •suites (a^n) et (n^α). Croissance comparée Limites et comportements asymptotiques comparés des suites (In n) ; (a^n), $a > 0$ et (n^α), $\alpha > 0$. Suites récurrentes définies par une relation du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers *l* et si f est continue en *l* alors $f(l) = l$.	- L'étude du comportement d'une fonction ; - L'utilisation des opérations sur les limites ; - L'utilisation des théorèmes de comparaison. •conjecturer à partir d'une représentation graphique et comportement d'une suite récurrente.

Suites Numériques

Objectifs

Ce thème vise à :

• étudier le comportement global d'une suite numérique (majoration, minoration, convergence, variations) ;

• mettre en œuvre le raisonnement par récurrence ;

• donner des outils pour traiter des problèmes d'approximation.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Suites monotones • Suites majorées, minorées, bornées	• Démontrer qu'une suite est monotone : - Par comparaison de deux termes

• Suites convergentes : - Notion de convergence. - Unicité de la limite (admise) - Toute suite croissante et majorée converge - Toute suite décroissante et minorée converge. - Si f est une fonction numérique telle que $\lim_{n\to+\infty} f(x) = l$ alors la suite définie par $u_n = f(n)$ converge vers *l*. • si (u_n) est une suite convergeant vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_{n=f(u_n)}$converge vers f(a). • Convergence des suites géométriques (suites du type (a^n)). • Suites divergentes • Convergence des suites géométriques et des suites du type n^α • Suites divergentes • Théorèmes de comparaison : Soient les suites (v_n) et (u_n) 6) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$. 7) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (u_n) tend vers $-\infty$, alors (v_n) tend vers $-\infty$. 8) Si à partir d'un certain rang, $\lvert v_n - l\rvert \leq u_n$ et si (u_n)tend vers 0, alors (v_n) tend vers *l*. 9) Si a partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) tend vers *l*, alors (u_n) tend vers *l*. 10) Si à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$ et (u_n) tend vers *l* et (v_n) tend vers *l'*alors $l' \leq l$. •suites (a^n) et (n^α). Croissance comparée Limites et comportements asymptotiques comparés des suites (In n) ; (a^n), $a > 0$ et (n^α), $\alpha > 0$. Suites récurrentes définies par une relation du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers *l* et si f est continue en *l* alors f(*l*) = *l*.	généraux consécutifs ; - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontrer qu'une suite est majorée et/ou minorée : - Par un calcul direct ; - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontrer qu'une suite est convergente ou divergente par : - L'étude du comportement d'une fonction ; - L'utilisation des opérations sur les limites ; - L'utilisation des théorèmes de comparaison. •conjecturer à partir d'une représentation graphique et comportement d'une suite récurrente.

I- Généralité :

1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note

U : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \to U(n) = u_n$

Exemple :

Soit une suite $u_n$définie par : $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Calculer : u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4

$u_0 = \frac{1}{2}$; $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{5}{4}$; $u_3 = \frac{7}{5}$; $u_4 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

2) Mode de définition d'une suite :

- Une suite peut être définie par 1 formule explicite c'est-à-dire : u_n en fonction de n $u_n = f(n)$.

Exemple : $u_n = n + 3$; $v_n = \frac{2n - 4}{n + 1}$; $w_n = 4n^2 - 3n + 1$

- Une suite peut être définie par son 1er terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n.

Exemple : soit la suite : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$ .Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4

Solution :

Pour $n = 0, u_1 = \frac{3}{2}u_0 + 4 = \frac{3}{2}(2) + 4 = 7$

Pour $n = 1$, $u_2 = \frac{3}{2}u_1 + 4 = \frac{29}{2}$

Pour $n = 2, u_3 = \frac{3}{2}u_2 + 4 = \frac{103}{4}$

Pour $n = 3, u_4 = \frac{3}{2}u_3 + 4 = \frac{341}{8}$

u_0 est le 1er terme de la suite et u_n est le terme général.

2) Sens de variation d'une suite

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est croissante
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est décroissante
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est constante

Exemple :

Etudier le sens de variation de chacune des suites :

$u_n = \frac{2n+3}{n+2}$; $v_n = -\frac{3}{2}n + 4$

Solution :

$u_n = \frac{2n+3}{n+2}$ => $u_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+2} = \frac{2n+5}{n+3}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{n+3} - \frac{2n+3}{n+2} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$

D'où u_n est croissante

$v_n = -\frac{3}{2}n + 4$ => $v_{n+1} = -\frac{3}{2}(n+1) + 4 = -\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$

$v_{n+1} - v_n = \left(-\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}n + 4\right) = -\frac{3}{2} < 0$

$v_{n+1} - v_n = -\frac{3}{2} < 0$ D'où v_n est décroissante

3) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite u_n sur l'axe de abscisses, on trace la 1ère bissectrice (D) d'équation $= x$. Puis on trace la fonction associée à la suite u_n en posant $u_n = x$ et $u_{n+1} = f(x)$. On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

Exemple

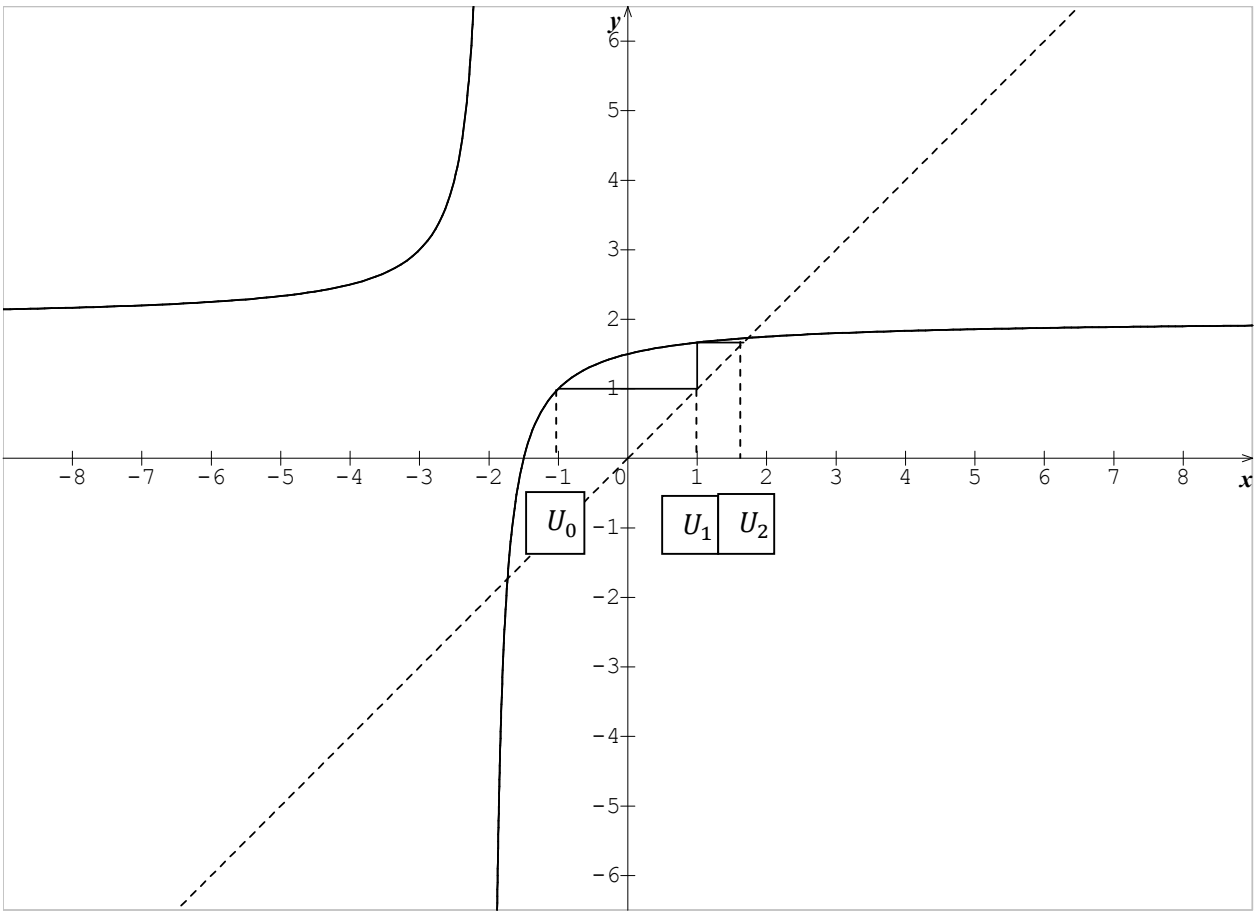
Soit (u_n) définie Par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3 + 2U_n}{2 + U_n} \end{cases}$

Représenter sur l'axe (ox) les 3 premiers termes de la suite u_n.

Solution

Désignons par f la fonction définie sur $]-2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$

En suivant les règles de constructions ci-dessous , on a la représentation suivante :



II- Convergence d'une suite

1) Activités :

Activité1 :

Soit la suite $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

1) Calculer u_1 ; u_2 ; u_{1000} ; $u_{100000000}$.

2) En déduire le sens de variation de u_n

3) Que peut – on conclure ?

Solution :

1) Calculons : u_1 ; u_2 ; u_{1000} ; $u_{100000000}$.

Pour $n = 1$ alors $u_1 = 1$

Pour $n = 2$ alors $u_2 = \frac{1}{2}$

Pour $n = 1000$ alors $u_{1000} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Pour n = 100000000 alors $u_{100000000} = \frac{1}{100000000}$ = 0,00000001

En déduisons le sens de variation de u_n

Puis que : $u_1 > u_2 > u_{1000} > u_{100000000}$ alors u_n est une suite décroissante.

2) Conclusion : on remarque que lors que n tend vers $+\infty$ alors u_n tend vers 0.

On note : $lim\ u_n = lim\ \frac{1}{n} = 0$

$n \to +\infty$ $n \to +\infty$

On dit alors que la valeur limite de la suite u_n est 0, quand n tant vers $+\infty$.

Activité 2 :

Soit $v_n = n + 2$. Calculer v_1 ; v_2 ; v_{1000} ; $v_{100000000}$. Puis conclure.

Solution :

1) Calculons : v_1 ; v_2 ; v_{1000} ; $v_{100000000}$

Pour n = 1 alors $v_1 = 3$

Pour n = 2 alors $v_2 = 4$

Pour n = 1000 alors $v_{1000} = 1002$

Pour n = 100000000 alors $v_{100000000} = 100000002$

2) Définition :

Une suite u_n est dite convergente si et seulement si son terme général u_n a une limite finie l. on note :

$lim\ u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$

$n \to +\infty$

Remarque :

Si $lim\ u_n = +\infty$ ou $lim\ u_n = +\infty$

$n \to -\infty$ $n \to +\infty$

Alors u_n est dite divergente.

Si $lim\ u_n = l$ alors la suite u_n converge vers l.

$n \to +\infty$

Evaluation :

Etudier la convergence de chacune des suites suivantes :

$u_n = \frac{n+2}{n+3}$; $v_n = \frac{2-3n}{n+4}$; $w_n = 2^{-n}$

III- Suite majorée – minorée –bornée :

1) Définitions :

- Une suite u_n est majorée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq a$.

- Une suite u_n est minorée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n \geq a$.

- Une suite u_n est bornée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $b \leq u_n \leq a$

2) Théorèmes :

a) Théorème 1 :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exemple :

Soit la suite u_n définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2n}$

Montrer que la suite $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2n}$ est décroissante et minorée.

En déduire qu'elle est convergente.

Solution :

On remarque tous les termes de la suite u_n sont positifs.
Donc cette suite est minorée par 0. Etudions maintenant sa décroissance.

$u_{n+1} - u_n = -\frac{(3n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$. Donc la suite Un est décroissante.

Déduction : u_n étant à la fois positive et décroissante, alors elle est convergente.

b) Théorème 2 :

Tout sous-ensemble non vide E de nombres réels a une borne supérieure A : c'est-à-dire
$\forall\, x \in E$; $x \leq$ A

3) Propriétés :

Soient u_n et v_n deux suites tel que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l'$

On a les propriétés suivantes :

P_1 : Si $u_n \leq v_n$: alors $l \leq l'$

P_2 : $lim\ (u_n + v_n) = l + l'$

$n \to +\infty$

P_3: Si (u_n) est bornée et si (v_n) est divergente, alors :

a) $lim\ (u_n + v_n) = +\infty$ $n \to \infty$

b) $lim\ (u_n \times v_n) = \infty$ $n \to \infty$

IV- <u>Relations entre les limites</u> :

<u>Théorème</u> : (**Théorème des gendarmes).**

Considérons les trois suites u_n ; v_n et w_n $(n > n_o)$

Tel que : $u_n \leq v_n \leq w_n$

u_n et w_n Si converge vers la même limite l ; alors v_n converge vers l.

<u>Preuve</u> :

A partir de la relation donnée entre les suites on a :

$$\lim_{n \to \infty} u_n \leq \lim_{n \to \infty} v_n \leq \lim_{n \to \infty} w_n$$

$$\Leftrightarrow \quad l \leq \lim_{n \to \infty} v_n \leq l$$

Alors $\lim_{n \to \infty} v_n = l$

V- Suites Adjacentes :

Définition :

Une suite (u_n) est adjacente à une autre suite (v_n) si l'une des deux suites est décroissante tandis que l'autre est croissante et si

Alors $\lim_{n \to \infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 1 :

Si les suites u_n et v_n sont adjacentes ($u_n$croissante et $v_n$décroissante) alors :
$\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leq v_n$.

Preuve :

Supposons que le contraire de la conclusion du théorème soit vrai pour $n = k$, c'est-à-dire : $u_k \geq v_k$.

Pour $n > k$, puisque u_n est décroissante et que v_n est décroissante, on a :

$u_n \geq u_k \geq v_k \geq v_n$

$\Rightarrow \ (u_n - v_n) \geq (u_k - v_k)$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (U_n - V_n) \neq 0$

<u>Théorème 2</u> : si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent à une même limite.

<u>Preuve</u> :

Puis que les suites sont adjacentes et que u_n est croissante et v_n décroissante, le **théorème 1** implique : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

On note alors que :

a) u_n est croissante et elle est majorée par v_0 , donc elle converge vers l.
b) v_n est décroissante et elle est minorée par u_0 donc elle converge vers l'.

Ainsi

$\lim_{n \to \infty} (U_n - V_n) = l - l'$

$\Rightarrow$ 0 = l – l' <=> l = l'

Ce qu'il fallait prouver.

<u>Exemple :</u>

Considérons les deux suites suivantes : $U_{n+1} = \sqrt{U_n \bullet V_n}$ (moyenne géométrique)

Et ($0 \leq U_0 \leq V_0$)

$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$ (moyenne arithmétique)

1) Calculer $V_n^2 - U_n^2$ puis en déduire qu'il est non négatif, donc que $V_{n+1} \geq U_{n+1}$

(Pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2) Utiliser les résultats de la question 1) pour montrer que $U_{n+1} > U_n$ et $V_{n+1} < V_n$.

C'est-à-dire que u_n est croissante et que v_n est décroissante.

3) Montrer que les suites $u_n$et v_n sont adjacentes.

Solution :

1) $V_{n+1}{}^2 - U_{n+1}{}^2 = \frac{(U_n + V_n)^2}{4} - (\sqrt{U_n \bullet V_n})^2$

$= \frac{U_n{}^2 + 2U_n \bullet V_n + V_n{}^2}{4} - U_n \bullet V_n$

$= \frac{U_n{}^2 + 2U_n \bullet V_n + V_n{}^2 - 4U_n \bullet V_n}{4}$

$V_{n+1}{}^2 - U_{n+1}{}^2 = \frac{(U_n - V_n)^2}{4}$

Puis que $\frac{(U_n - V_n)^2}{4} > 0$ alors $V_{n+1}{}^2 - U_{n+1}{}^2$ est non négatif.

$u_{n+1} = \sqrt{U_n \bullet V_n} \geq \sqrt{U_n \bullet U_n}$ puis que $u_n \leq v_n$) => $v_{n+1} \geq u_n$

$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \leq \frac{U_n + V_n}{2}$ puis que $U_n \leq V_n$ => $u_{n+1} \leq v_n$.

3) A partir de la définition des suites, nous avons :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n \bullet V_n} \leq \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n \bullet V_n}$$

$$\Rightarrow \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{U_n + V_n}{2} - U_n$$

$$\Rightarrow \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$$

Cette dernière relation étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par récurrence.

$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$ ce qui donne à la limite

$0 \leq lim \quad (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq lim \left(\frac{1}{2^n}\right)(v_0 - u_0) = 0$

$n \to \infty$ $\qquad$ $n \to \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (V_n - U_n) = 0$$

Donc les deux suites sont adjacentes.

VI- Suites Arithmétiques

1) <u>Activité</u> :

Au 1er Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.

Sachant que le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1er Janvier de chaque année, quel serait le prix du kilo de sucre au 1er Janvier 2013 ? Au 1er Janvier 2014 ?

On désigne par p_n le prix du kilo du sucre au 1er Janvier $+ n$.

Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et p_n.

Calculer $p_{n+1} - p_n$.

Solution

Soit P_0 le prix d'un kilo de sucre au 1er Janvier 2012 tel que $P_0 = 550$.

Calculons le prix d'un kilo de sucre :

- **Au 1er Janvier 2013** , le prix d'un kilo de sucre serait $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- **Au 1er Janvier 2014** , le prix d'un kilo de sucre serait $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.

Soit P_n le prix d'un kilo de sucre au 1er Janvier $+ n$.

Calculons : P_1 ; P_2 ; P_3 et p_n.

- $P_0 = 550$.
- $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- $P_2 = P_1 + 50 = 660 + 50 = 650$.
- $P_3 = P_2 + 50 = 650 + 50 = 700$.
- $p_n = P_0 + 50n = 550 + 50n$.

Calculons $p_{n+1} - p_n$.

$p_n = 550 + 50n$ => $p_{n+1} = 550 + 50(n + 1) = 550 + 50 + 50n = 600 + 50n$

=> $p_{n+1} - p_n = (600 + 50n) - (550 + 50n) = 600 + 50n - 550 - 50n = 50$

Alors on a : une suite arithmétique de raison $r = 50$.

2) Définition :

Une suite u_n est dite arithmétique si et seulement si : $\forall n \in N$; $u_{n+1} - u_n = r$.
r est appelé la raison de la suite u_n .

Exemple :

Soit une suite u_n définie par : $u_n = \frac{2}{3}n + 4$.

Démontrer que u_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme U_0.

Solution :

$u_n = \frac{2}{3}n + 4$

$U_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1) + 4 = \frac{2}{3}n + \frac{14}{3}$ =>

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}$ d'où U_n est une suite arithmétique de raison $r = \frac{2}{3}$ et de 1er terme $u_0 = 4$

3) Expression du terme général :

Soit U_n une suite de 1er de terme U_0 et de raison r.

U1 – U0 = r

U2 – U1 = r

U3 – U2 = r

$\vdots$

$$\frac{U_n - U_{n-1} = r}{U_n - U_0 = nr}$$

=> $u_n = u_0 + nr$

D'une façon générale si u_p est le 1er terme l'expression du terme général est :

$u_n = u_p + (n-p)r$

Exemple :

Soit la suite réel définie par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in N; U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

a) Démontrer que u_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme.
b) Exprimer u_n en fonction de n.

Solution :

a) u_{n+1}= u_n – 3 => u_{n+1} – u_n = – 3
D'où Un est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de 1er terme $u_0 = -1$.

b) $U_n = U_0 + nr = -1 + n(-3) => u_n = -3n - 1$

4) Termes équidistants d'une suite :

Soit (u_n) $n \in \mathbb{N}$ une suite arithmétique p un entier naturel tel que $p \leq n$ les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes u_0 et u_n car il ya p termes avant le terme u_p et p termes après le terme u_{n-p} on a :

5) Somme des termes équidistants d'une suite arithmétique

Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$

Les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes

$u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_0 + (n-p)r) = u_0 + (u_0 + nr)$ d'où

$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$ d'où le théorème

Théorème : la somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes

6) Propriétés :

En application du théorème on a :

P_1 : Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique si :

2b = a + c.

Preuve :

Soit

a, b et c trois réels

$b = a + r$

$c = b + r$

$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2(a + r). Alors : \boldsymbol{a + c = 2b}$

P_2 : Trois nombres $\boldsymbol{a, b, c}$ forment une progression arithmétique de raison r si :

$$\boldsymbol{b = a + r \quad et \quad c = a + 2r}.$$

P_3 : Quatre nombres $\boldsymbol{a, b, c, d}$ forment une progression arithmétique de raison r si :

$$\boldsymbol{3b - d = 2d}$$

P_4 : Soit u_n une suite arithmétique de 1er terme u_0. La somme de deux termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes

$u_0 , u_1 , u_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots u_{n-2}; u_{n-1}; u_n$

$u_1; u_{n-1}$ sont équidistants

$u_0 + u_n = u_p + u_{n-p}$

Exemple

Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant que

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

Solution :

Trouvons 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant

que $\begin{cases} a+b+c=3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases}$

On sait que pour une progression arithmétique de 3 termes a ; b ; c , on a : a + c = 2b

Ainsi l'équation dévient :

$\begin{cases} 2b+b=3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases} => \begin{cases} 3b=3 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases} => \begin{cases} b=1 \\ 3a-6b+c=6 \end{cases}$

D'autre part a + b + c = 3 = > a + 1 + c = 3 = > a + c = 2

$\begin{cases} a+c=2 \\ 3a-6+c=6 \end{cases} => \begin{cases} a+c=2 \\ 3a+c=12 \end{cases} => \begin{cases} -a-c=-2 \\ 3a+c=12 \end{cases}$

= > 2a = 10 = > a = 5 et c = -3

D'où les nombres a ; b et c sont tels que a = 5 ; b = 1 et c = -3

7) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit u_n une suite arithmétique de raison r. On a :

$u_{n+1} - u_n$ = r d'où :

- Si $r > 0$ alors u_n est croissante
- Si $r < 0$ alors u_n est décroissante
- Si $r = 0$ alors u_n est constante

8) Somme des termes d'une suite arithmétique :

Soit u_n une suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r.

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$

$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U_2 + U_1 + U_0$

$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + (U_2 + U_{n-2}) + \ldots\ldots\ldots + (U_n + U_0)$

$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (U_0 + U_n)$

$=> 2S_n = (n + 1)(U_0 + U_n)$

$\boxed{S_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)}$ <= > $S_n = \frac{nombre\ de\ termes}{2}$ (1er terme + dernier terme)

ou $\boxed{S_n = \frac{(n-P+1)}{2}(U_p + U_n)}$

Remarque : une suite arithmétique est toujours divergente

VII- Suites géométriques

Situation problème

Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants.

On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.

Calcule la population de cette commune :

a) Au 1er Janvier 2005 ;

b) Au 1er Janvier 2006

c)Au 1er Janvier 2012

Solution

Soit U_n la population de cette commune au 1er Janvier de l'année n.

Soit $U_1 = 3000$ la population initiale de cette commune.

On a :

$U_1 = 3000$.

$U_2 = U_1 - 4\,\%U_1 \Rightarrow U_2 = U_1(1 - 4\,\%) = U_1(1 - \frac{4}{100}) = U_1(0{,}96)$

$U_3 = U_2(0{,}96)$

. .

. .

. .

$U_{n+1} = U_n(0{,}96)$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0{,}96.$

Alors on a : une suite géométrique de raison q = 0,96.

D'où son expression est : $U_n = U_1(q)^{n-1} = 3000(0{,}96)^{n-1}$

Déterminons ainsi la population :

- **Au 1er Janvier 2005**

On sait que : $U_n = 3000(0{,}96)^{n-1}$ et $n = 2005 - 1999 = 6$

D'où la population au 1er Janvier 2005 est : $U_6 = 3000(0{,}96)^{6-1} = 3000(0{,}96)^5$

$=> U_6 = 2446{,}11 \approx 2446$

Ainsi la population au 1er Janvier 2005 est : 2244 habitants.

- **Au 1er Janvier 2006**

On sait que : $U_n = 3000(0{,}96)^{n-1}$ et $n = 2006 - 1999 = 7$

D'où la population au 1er Janvier 2006 est : $U_7 = 3000(0{,}96)^{7-1} = 3000(0{,}96)^6$

$=> U_7 = 2348{,}27 \approx 2348$

Ainsi la population au 1er Janvier 2006 est : 2348 habitants.

- **Au 1er Janvier 2012**

On sait que : $U_n = 3000(0{,}96)^{n-1}$ et $n = 2012 - 1999 = 13$

D'où la population au 1er Janvier 2005 est : $U_{13} = 3000(0{,}96)^{13-1} = 3000(0{,}96)^{12}$

$=> U_{13} = 1838{,}12 \approx 1838$

Ainsi la population au 1er Janvier 20012 est : 1838 habitants.

1) <u>Définition</u> :

U_n est une suite géométrique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N} \ \frac{U_n + 1}{U_n} = q$ ou $U_{n+1} = qU_n$.

q est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

<u>Exemple</u> :

1, 2, 4, 8, 16, 32……. 2^n sont les termes d'une suite géométrique de raison q = 2 et de 1er terme $U_0 = 1$

L'expression de terme général est $U_n = 2^n$

2) <u>Expression du 1er terme générale</u>

Soit u_n une suite géométrique de raison q et de 1er terme u_0

$U_1 = qU_0$

$U_2 = qU_1$

$U_3 = qU_2$

$U_4 = qU_3$

⋮

$U_n = qU_{n-1}$

Multiplions membre à membre les termes de l'égalité.

$U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4 \times \ldots\ldots\ldots \times U_n = (qU_0)\ (qU_1)\ (qU_2) \ldots\ldots\ldots (qU_{n-1})$

$u_n = q^n \times U_0$ ou d'une manière générale $U_n = U_p.q^{n-p}$ (après simplification des facteurs semblables dans les deux membres)

Où Up désigne le 1er terme.

3) <u>Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :</u>

<u>Théorème</u> : Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire $U_p \times U_{n-p} = U_0 \times U_n$

<u>Propriétés :</u>

P_1 : Trois nombres $\boldsymbol{a, b, c}$ forment une progression géométrique si :

$\boldsymbol{b^2 = ac}$. **(en application du théorème précédent)**

P_2 : Trois nombres $\boldsymbol{a, b, c}$ forment une progression géométrique de raison q si :

$\boldsymbol{b = qa}$ **et** $\boldsymbol{c = q^2 a}$.

P_3 : Quatre nombres $\boldsymbol{a, b, c, d}$ forment une progression géométrique de raison q si :

$$\boldsymbol{b = qa \quad ; \quad c = q^2 a \quad et \quad d = q^3 a}$$

<u>Exemple</u>

Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant que

$$\begin{cases} a \bullet b \bullet c = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

On sait que pour une progression géométrique de 3 termes a ; b ; c , on a : $a \times c = b^2$

Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{cases}(a \bullet c) \bullet b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1\end{cases} => \begin{cases}(b^2) \bullet b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1\end{cases} => \begin{cases}b^3 = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1\end{cases} => \begin{cases}b = 3 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1\end{cases} => \begin{cases}b = 3 \\ a = -4 \\ c - a = 1\end{cases}$$

$$=> \begin{cases}b = 3 \\ a = -4 \\ c = -3\end{cases}$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que $a = -4$; $b = 3$ et $c = -3$

4) <u>Sens de variation d'une suite géométrique :</u>

Soit u_n suite géométrique de raison et de 1er terme u_0 :

- **<u>1er cas</u>** $U_0 > 0$: si

- q> 1 => u_n est croissante
- 0 < q < 1 => u_n est décroissante

- q = 1 alors u_n constante

- **<u>2è Cas</u>** $U_0 < 0$: si

- q > 1 => u_n est croissante

- 0 < q< 1 => u_n est décroissante

- q = 1 => u_n est constante

9) Con vergence d'une suite géométrique :

La limite d'une suite étant la limite de son terme général une géométrique est convergente si $-1 < q \leq 1$

La suite est divergente si q∈ $]-\infty; -1]u]1; +\infty[$

5) <u>Somme des termes d'une suite géométrique</u> :

Soit U_n une suite géométrique de raison q et de 1er terme U_0

$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$ (1)

$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + qU_3 \ldots\ldots\ldots + qU_n$ (2)

En effectuant la différence des équations (1) et (2) , on a :

$S_n - qS_n = U_0 - qU_n$ or $U_n = U_0 \times q^n$

$S_n (1 - q) = U_0 - q(q^n \times U_0)$

$S_n (1 - q) = U_0 (1 - q^{n+1})$

$$S_n = \frac{U_0(1-q^{n+1})}{1-q}(q \neq 1)$$

$$S_n = \frac{1er\ terme\ (1 - raison^{nombre\ de\ terme})}{1 - raison}$$

D'une manière générale si Up est le 1er terme alors l'expression de la somme est :

$$S_n = \frac{U_p(1-q^{n-p+1})}{1-q} \quad \text{Avec } (q \neq 1)$$

11) Cas d'une suite géométrique :

Soit u_n une suite géométrique de raison q

- Si $|q| < 1$ alors U_n converge vers 0

- Si $|q| > 1$ alors U_n est divergente

- Si $|q| = 1$ alors U_n converge vers U_0

VIII- Suites économiques :

1) Les intérêts :

L'intérêt est la rémunération d'un placement pendant une période donnée,
(c'est-à-dire entre un temps $\mathbf{T_1}$ et un temps $\mathbf{T_2}$).
Ainsi les intérêts sont classés en deux catégories: (**intérêts simples et intérêts composés).**

NB :

- L'intérêt simple est utilisé pour des placements à court et moyen terme.
- L'intérêt composé est utilisé pour des placements à long terme.

a- Intérêts simples :

Un placement est fait à intérêt simple, lorsque, à des époques fixées d'avance celui qui prête ou place son argent en touche les intérêts de façon que le capital placé reste le même jusqu'à l'époque du remboursement.

Sa formule est :

$$I = \frac{C \bullet t \bullet n}{P} = \frac{(\ Capital\ plac\acute{e}\ ) \bullet \left(\ Taux\ d'int\acute{e}r\hat{e}t\right) \bullet (\ Dur\acute{e}e\ du\ placement\ )}{P\acute{e}riode}$$

NB :

- **Si :** n est en **jours**, alors la **période** $P = 36.000$.
- **Si :** n est en **mois**, alors la **période** $P = 1.200$.
- **Si :** n est en **année**, alors la **période** $P = 100$.

b- Intérêts composés :

Un placement est fait à intérêt composé, lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital pour produire un intérêt à son tour, pendant l'unité de temps suivante.

Sa formule est :

$$I_n = C_0\left[(\ 1\ +\ i\ )^n - 1\ \right] = (\ Capital\ initial\ )\left[(\ 1\ +\ taux\ d'int\acute{e}r\hat{e}t\ )^{Dur\acute{e}e} - 1\ \right]$$

NB :

- **1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois.**
- **1 semestre = 2 trimestres = 6 mois = $\frac{1}{2}$an.**
- **1 trimestre = $\frac{1}{2}$semestre = 3 mois = $\frac{1}{4}$an.**

- **1 bi - an = 4 semestres = 8 trimestres = 24 mois = 2 ans.**

c- <u>Valeurs acquises :</u>

$$C_n = C_0(1 + i)^n = (Capital\ initial)(1 + Taux\ d'intérêt)^{Durée}$$

<u>NB :</u>

Le taux d'intérêt s'exprime toujours en pourcentage (%)

2) <u>Taux de décroissance –Taux d'accroissement d'une population</u> :

a-<u>Notion de population et d'individu :</u>

L'ensemble sur le quel porte une étude statistique est appelé **population** et un élément de cet ensemble est **l'individu**.

<u>NB :</u>

Dans une étude statistique, les mots : population et individu peuvent désignés des **êtres**, des **objets animés** ou **inanimés**.

b-<u>Taux de décroissance d'une population :</u>

Définition :

Soi**t (en** $\%$ **)** est le taux de décroissance d'une population et $\mathbf{U_P}$ la population initiale à l'année n, alors le taux de décroissance de cette population représente une progression géométrique de premier terme $\mathbf{U_P}$ et de raison **q = 1 – t.**

Ainsi le taux de décroissance d'une population à l'année n est donné par l'expression :

$U_n = U_P(1 - t)^{n-P}$ ou $U_n = U_P(q)^{n-P}$ avec q = 1 – t.

NB :

Si la population initiale est $\mathbf{U_P}$ à l'année $\boldsymbol{n_1}$,alors la population à l'année $\boldsymbol{n_2}$est :

$\boldsymbol{U_{n_2-n_1} = U_P(1 - t)^{(n_2-n_1)-p}}$ ou $\boldsymbol{U_{n_2-n_1} = U_P(q)^{(n_2-n_1)-p}}$ **avec q = 1 - t**

c-Taux de d'accroissement d'une population :

Définitions :

Définition 1 : Soi**t (en** $\%$ **)** est le taux d'accroissement d'une population et $\mathbf{U_P}$ la population initiale à l'année n, alors le taux d'accroissement de cette population représente une progression géométrique de premier terme $\mathbf{U_P}$ et de raison **q = 1 + t.**

Ainsi le taux d'accroissement d'une population à l'année n est donné par l'expression :

$U_n = U_P(1+t)^{n-P}$ ou $U_n = U_P(q)^{n-P}$ **avec q = 1 + t.**

NB :

Si la population initiale est U_P à l'année n_1,alors la population à l'année $n_2$est :

$U_{n_2-n_1} = U_P(1+t)^{(n_2-n_1)-p}$ ou $U_{n_2-n_1} = U_P(q)^{(n_2-n_1)-p}$ **avec q = 1 + t**

Définition 2 : Si r exprimé **(en FCFA)** est la raison d'accroissement d'une population et u_p la population initiale à l'année n, alors la raison d'accroissement de cette population représente une progression arithmétique de premier terme u_p et de raison r.

Ainsi la raison d'accroissement d'une population à l'année n est donnée par l'expression :

$u_{n+1} - u_n = r$

Evaluation1

Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.
Après réception, il dépose cette somme à la banque le 1er Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

1. A partir de quelle année pourra-t-il acheter sa moto sachant qu'il ne dispose que de cette somme ?
2. Quelle serrait la nouvelle valeur acquise par Ali s'il place un capital de 100.000 FCFA au bout de 30 semestres au taux de 2 % par semestre ?

Evaluation2

Le premier Janvier 2011, le nombre d'élève d'une école était de 6000 .

Le nombre d'élève de cette école diminue chaque année de 5 % faute de performence.

Quelle sera le nombre d'élève de cette école au 1er Janvier 2015 ?

Evaluation3

Le premier Janvier 2012, le prix d'essence au Mali était de 690 FCFA.

a-Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1er Janvier de chaque année, calculer le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?

b-Soit p_n le prix du litre d'essence au premier Janvier $+ n$, calculer : P_n et $p_{n+1} - p_n$ puis en déduire la nature et la raison de la suite p_n

Synthèse 1 :

a-Déterminons le temps au bout du quel Ali pourra acheter sa moto.

Soient :

- $C_0 = 100.000$ FCFA : le capital initial.
- $C_n = 300.000$ FCFA : la valeur acquise.
- $i = 5\ \% = \frac{5}{100} = 0{,}05$: le taux d'intérêt.

Calculons ainsi la durée n pour que Ali puisse acheter sa moto.

On a : $C_n = C_0(1+i)^n <=> (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} => (1+0{,}05)^n = \frac{300000}{100000}$

$=> (1{,}05)^n = 3$ (**or** $\boldsymbol{a^n = e^{nlna}}$)

$(1{,}05)^n = 3 <=> e^{nln(1{,}05)} = 3$ (**or** $\boldsymbol{e^a = b <=> a = lnb}$)

$e^{nln(1{,}05)} = 3 <=> nln(1{,}05) = ln3 => n = \frac{ln3}{ln(1{,}05)}$

$=> n = \frac{1{,}09}{0{,}04} => n = 27{,}25 \approx 27.$

Donc Ali pourra acheter sa moto au bout de 27 ans.

b-Déterminons la nouvelle valeur acquise par Ali au bout de 30 semestres au taux de 2 %.

$C_n = C_0(1+i)^n => C_{30} = 100.000(1+2\%)^{30} <= > C_{30} = 100.000(1+0{,}02)^{30}$

$=> C_{30} = 100.000(1{,}02)^{30} = 181.136$ FCFA.

Donc Ali aura une valeur acquise de 181.136 FCFA au bout de 30 semestres.

<u>Synthèse 2</u>

Soit U_n le nombre d'élève de cette école au 1er Janvier de l'année n .

Soit $U_1 = 6000$ le nombre d'élève de cette école au 1er Janvier 2011 .

On a :

$U_1 = 6000$.

$U_2 = U_1 - 5\%U_1 => U_2 = U_1(1-5\%) = U_1(1-\frac{5}{100}) = U_1(0{,}95)$

$U_3 = U_2(0{,}95)$

. .

. .

. .

$U_{n+1} = U_n(0{,}95)$

= >$\frac{U_{n+1}}{U_n}$ = 0,96.

Alors on a : une suite géométrique de raison q = 0,95.

D'où son expression est : $U_n = U_1(q)^{n-1}$ = 6000(0,95)$^{n-1}$

Déterminons ainsi le nombre d'élève de cette école au 1er Janvier 2015 :

- **Au 1er Janvier 2015**

On sait que : U_n = 6000(0,95)$^{n-1}$ et n = 2015 − 2011 = 4

D'où la population au 1er Janvier 2015 est :U_4 = 6000(0,95)$^{4-1}$ = 6000(0,95)^3

= > U_4 = 5144,25 ≈ 5144

Ainsi l'effectif de l'école serrait de 5144 élèves au 1er Janvier 2015.

Synthèse 3 :

a-Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1er Janvier de chaque année, calculons le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?

Soit P_0 = 690 FCFA le prix initial de l'essence au 1erJanvier 2012.

Au 1er Janvier 2013, on a : $P_1 = P_0 + 5$ = > P_1 = 690 + 5 = 695 FCFA.

Au 1er Janvier 2014, on a : $P_2 = P_1 + 5 \Rightarrow P_2 = 695 + 5 = 700$ FCFA.

b-Si p_n est le prix du litre d'essence au premier Janvier $+ n$, calculons : p_n et $p_{n+1} - p_n$ puis en déduisons la raison et la nature de la suite p_n .

On sait que :

$P_0 = 690$.

$P_1 = P_0 + 5$.

$P_2 = P_1 + 5$.

$P_3 = P_2 + 5$.

. . .

. . .

. . .

. . .

$p_n = p_{n-1} + 5n$

Alors $p_n = P_0 + 5n$

Calculons $p_{n+1} - p_n$

On sait que $p_n = P_0 + 5n \Rightarrow p_{n+1} = P_0 + 5(n + 1) = P_0 + 5n + 5$.

Alors $p_{n+1} - p_n = (P_0 + 5n + 5) - (P_0 + 5n) = P_0 + 5n + 5 - P_0 - 5n = 5$

= > $p_{n+1} - p_n$ **= 5.**

Déduction :

p_n est une suite arithmétique de raison r = 5 et de premier terme p_0 = 690.

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit Un une suite géométrique décroissante U tel que $\begin{cases} U_o x U_3 = 32 \\ U_o + U_3 = 18 \end{cases}$

1) Calculer U_o et U_3
2) Déterminer la raison de la suite U.
3) Donner l'expression de la suite U en fonction de n.
4) On pose $S_n = U_o + U_1 + \ldots + U_n$. Calculer S_n en fonction de n puis en déduire la somme des 20 premiers termes de la suite U_n

Exercice 2 :

Soit la suite Un définie par :

$\begin{cases} U_1 = -2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 - U_n} \end{cases}$ et la suite V_n définie

Par Vn = $\frac{U_n + 1}{U_n}$

1) Calculer V_{n+1} en fonction de U_n puis en fonction de V_n.
2) En déduire que V_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme V_1.
3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
4) On pose $S_n = V_1 + V_2 + ... + V_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Calculer la somme de 30 premiers termes de la suite V_n

Exercice 3 :

Soit la suite $(U_n)_n \in$ N* à termes positifs tel que :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ (U_{n+1})^2 = eU_n \end{cases}$$

1) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4

   (on donnera les résultats sous forme de e^{v})

2) On pose $V_n = l_n U_n - a$; où ($a \in R_+^*$ et $n \in N^*$)

a) Déterminer le réel a pour que V_n soit une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_1.
b) Calculer la limite de V_n pui celle de U_n en + ∞
3) Soit a = 1, on désigne par S_n la somme des n premiers termes de la suites U_n. Déterminer Sn et P_n en fonction de n.

Exercice 4 :

On donne deux suites (U_n) et (V_n) telles que, $\forall n \in N$

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 3V_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} Uo = 1 \\ Vo = 2 \end{cases}$$

1) Calculer U_1 ; V_1 ; U_2 ; V_2 ; U_3 et V_3.
2) On définit deux suites (X_n) et (Y_n) par : $X_n = U_n + V_n$ et $Y_n = U_n - V_n$

a) Montrer que (X_n) est une suite géométrique et (Y_n) une suite constante.
b) Exprimer U_n puis V_n en fonction de n
3) Calculer la somme des n premiers termes de la suite X_n.

Exercice 5 :

Quatre (4) entiers strictement positifs a, b, c, et d forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison est un entier premier avec a.

Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

Exercice 6 :

Soit (U_n) une suite dans laquelle les dix premiers termes de la suite sont en progression arithmétique de raison r et à partir de U_{10} les termes sont en progression géométrique de raison q.

On donne : $U_1 = 0$; $U_{16} = \frac{-1}{27}$ et rq = 1

1) Calculer q ; r ; U_{10} et U_{11}
2) Calculer deux cas suivants : a) $n \leq 10$
b) n > 10

Exercice 7 :

Soit la suite (Un) définie par son premier terme U_o et par la relation de récurrence

$U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} (n \in N)$

1) a) Déterminer U_o pour que U_n soit constante.
b) Démontrer que si $U_n < 2$ alors

$U_n < U_{n+1} < 2$ ($n \in N$) . En déduire que si $U_o < 2$ alors pour tout entier naturel on a :
$U_n < 2$ et que la suite est monotone.

2) On suppose maintenant que $U_o = -1$

a) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3.

b) Soit la suite V_n définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$. Démontrer que V_n est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

c) Calculer U_n en fonction de n puis étudier sa limite en + ∞.

Exercice 8 :

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel m, les restes de la division euclidienne par 16 des entiers 5^m et 6^m.
2) Soit (U_n) la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $U_o = 9$ et V_p la suite géométrique de raison S et de premier terme $V_o = 1$. Démontrer que ces deux suites ont une infinité de termes égaux dont on calculera les deux premiers.
3) Soit (U'_n) la suite arithmétique de raison 16 et de premier terme $U'_o = 8$ et (V'_p) la suite géométrique de raison 6 et de premier terme $V'_o = 9$. Démontrer que ces deux suites n'ont qu'un seul terme en commun que l'on déterminera. /.

Exercice 9 :

On considère la suite numérique (U_n) définie par $\forall \in N$; $U_n = e^{2n-1}$

1) a) Calculer U_o, U_1 ; U_2 ; U_3 et U_{n+1}

b) Démontrer que la suite Un est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Exprimer en fonction de n la somme

$S_n = U_o + U_1 + U_2 + \ldots\ldots\ldots U_n$.

d) Calculer lim S_n

$n \rightarrow +\infty$

e) Trouver la valeur minimum de n telle que $S_n \geq 10$

NB : On donne e ≈ 2,7 ; $e^3 \approx 19,7$

$e^2 \approx 7,3$ et ln 171 ≈ 5,14

2) Soit la suite Vn définie par $\forall n \in N$, Vn = l_n (U_n).

a) Exprimer la somme

$S'_n = V_o + V_1 + \ldots\ldots\ldots + V_n$

b) Exprimer le produit

$P_n = U_o \times U_1 x \ldots\ldots\ldots x U_n$

Exercice10 :

Soit U_n la suite définie par :

$$\begin{cases} U_o = 4 \\ U_{n+1} = \ln(1 + U_n) \end{cases}$$

1) Tracer la courbe représentation de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ puis en déduire une représentation graphique des 4 premiers termes de la suite U_n.
2) Démontrer que la suite (U_n) est convergente et démontrer qu'elle converge vers 0.

Exercice11:

Un commerçant place en banque une somme de 200 000 F CFA le 02/01/2008. La banque lui propose un intérêt de 5% par mois.

a) Calculer l'intérêt perçu le 31/01/2008
b) Quel montant aura – t – il le 31/12/2008.

Exercice12

Un capital A est placé à intérêts composés au taux de 3 $\%$ l'an. On appelle C_o le capital initial et C_n le capital après n années.

1) Expliquer la relation $C_1 = 1.03C_0$ et écrire le capital C_n en fonction de C_0 et de n en justifiant soigneusement cette relation.

2) Au bout de combien d'années le capital est il doublé ?
3) Au bout de combien d'années le capital est il triplé?

Exercice13 (non corrigé)

On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par $U_o = 1$;

$U_{n+1} = 2U_n + 1$ et $V_n = U_{n+1} - U_n$.

a) Montrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de n.

c) Soit la somme $S_n = V_o + V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots + V_{n-1}$

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $S_n = U_n - U_o$.

e) Calculer S_n en fonction de n, puis Un en fonction de n.

Exercice14

1) soient a et b deux réels tel que (a ; a + 4b ; 5a + 2b) et (b + 3 ; 3a + 1 ; 6a + b) soit des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouver a et b.

2) Quatre entiers strictement positifs a ; b ; c et d , forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison q est un entier premier avec a. Trouver ces nombres sachant qu'is vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

3) soient Z_1 ; Z_2 et Z_3 trois nombres complexes dont le produit est $3i\sqrt{3}$, les arguments respectifs a_1 ; a_2 et a_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et les modules r_1 ; r_2 et r_3 une suite géométrique de raison 2. Sachant que $0 < a_1 < \frac{2\pi}{3}$.

Déterminer : Z_1 ; Z_2 et Z_3.

Dénombrements – Probabilités

Ce thème vise à :

• consolider les acquis sur le dénombrement.

• calculer la probabilité d'un événement ;

• calculer les probabilités d'événement indépendants.

Savoirs et savoir-faire

1. PROBABILITES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE

• Vocabulaire. • Définition d'une probabilité dans le cas d'une équiprobabilité. • Propriété. • Evénements indépendants - Définition ; - Propriétés.	• Dénombrer, dans le cas d'une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités : - Les cas possibles d'une expérience ; - Les cas favorables d'un événement • Calculer la probabilité d'un événement. • Démontrer que deux événements sont indépendants.

2. VARIABLES ALEATOIRES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Définition • Loi de probabilité. • Fonction de répartition. • Espérance mathématique. •Variance ; écart type	• Une variable aléatoire étant donnée : - Déterminer sa loi de probabilité et sa fonction de répartition ; - Construire sa fonction de répartition ; - Calculer son espérance mathématique ; - Calculer sa variance et son écart type.

3. LOI BINOMIALE

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves Bernoulli • $E(X) = np$. • $V(X) = np(1-p)$.	• Calculer la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli. $(0 \leq k \leq n)$.

Dénombrement :

1) Théorie des ensembles :

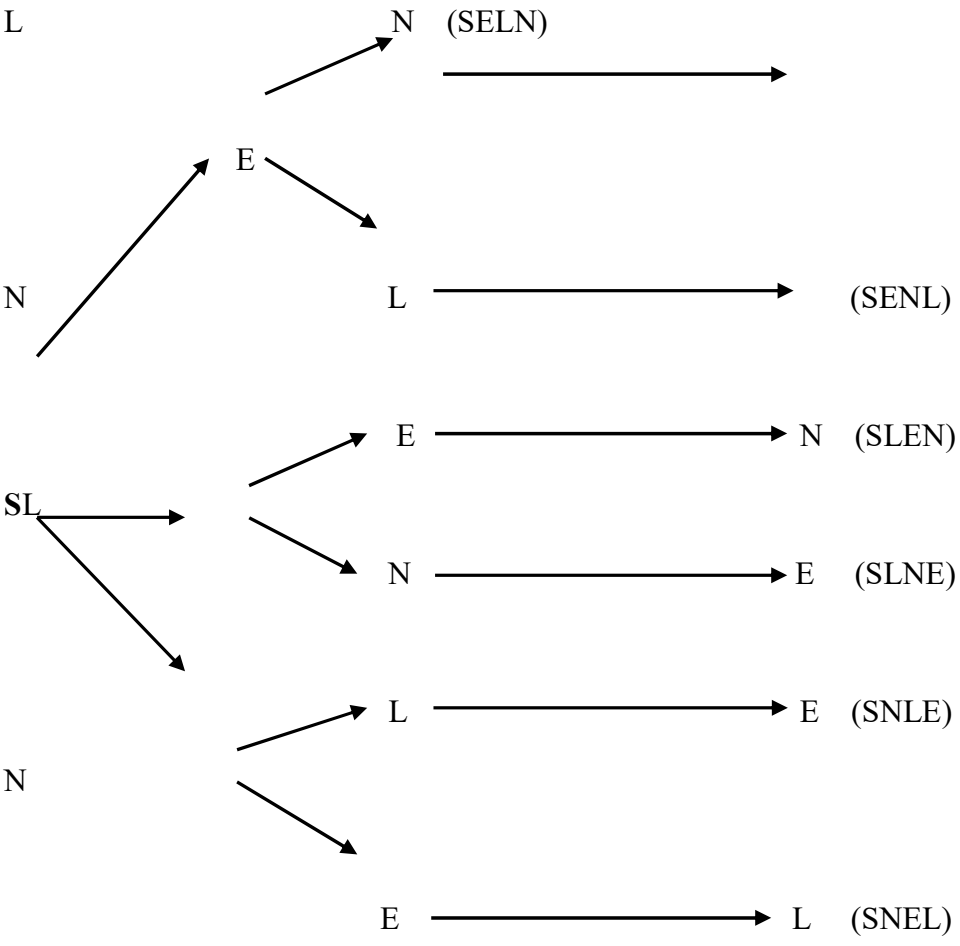
a) Activité 1 :

Combien de mot peut-on former avec 4 lettres et sans répétition avec le mot : SELN ?

SELN ;	ESLN ;	LESN ;	NELS ;
SENL ;	…… ;	…….. ;	…….. ;
SLNE;	…… ;	…….. ;	…….. ;
SLNE;	……. ;	…….. ;	…….. ;
SLEN;	……. ;	…….. ;	…….. ;
SNLE;	……. ;	…….. ;	…….. ;
SNEL;	……. ;	…….. ;	……... ;
Pour S en 1ère	Pour E en 1ère	Pour L en 1ère	Pour N en 1ère

Position Position Position Position

Ainsi on aura donc formé au total 6×4 = 24 mots. Ceci peut être résumé par l'arbre ou le diagramme suivant :



On a donc fait un arrangement de 4 lettres pour 4 places et d'une manière symbolique on écrit : 4×3×2×1 = 24

b) <u>activité 2</u> :

Former un bureau de 3 personnes (un directeur, un secrétaire et un commis) ; combien de bureau peut on former ? Sachant que le bureau n'admet pas de doubles postes.

<u>Solution</u> :

D		S		C	
45	×	44	×	43	= 85140

On a donc fait un arrangement de 45 personnes pour 3 élèves. On la note ainsi A_{45}^{3} tel que

A_{45}^{3} = 45×44×43 = 85140

c) <u>Activité 3</u> :

Dans un jeu de 32 cartes ordinaires, on tires successivement 3 cartes.

1) Quel est le nombre de tirage possible ?
2) Quel est le nombre de tirage contenant 1 seule carte cœur ?
3) Quel est le nombre de tirage possible contenant 1 seule carte noire ?

<u>Solution</u> :

1) On a A_{32}^{3} = 32×31×30 = 29760
2) On a : A_{8}^{1}×A_{24}^{2}
3) On a : A_{16}^{1}×A_{13}^{2}

2) Probabilité sur un ensemble fini :

a- Vocabulaire :

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE = n**: ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Evénement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Evénement élémentaire :** événement réduit à un seul élément.
- **Union de 2 ensembles**: Soit A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B l'ensemble des éléments de A ou B. On note : **AUB = {x/x** $\in A \quad ou \quad x \in B$ **}**
- **Intersection de 2 ensemble :** L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs aux deux ensembles A et B. On note : $\mathbf{A} \cap B = \{x / x \in A \; et \; x \in B\}$

N.B :

$A \cap \phi = \phi$

$A \cup \phi = A$

$Card\phi = 0$

Exercices d'application :

Soit E et F deux ensembles tels que :

E = {0, 1, 2, 3} , F= {1, 2, 0, a, b, c 4, 8}

1) Déterminer E $\cup$ F et E $\cap$ F
2) Déterminer cardE, cardF, card (E $\cup$ F), card (E $\cap$ F)

Solution :

1) E $\cup$ F = {0, 1, 2, 3, 4, 8, a, b, c}
   E $\cap$ F = {0, 1, 2}

2) Card E = 4, Card F = 8
   Card (E $\cup$ F) = 9, Card (E $\cap$ F) = 3

b- <u>Propriétés</u> :

P_1 : Card ϕ = 0

P_2 : Soient A et B deux univers finis :

- Card (A $\cup$ B) = Card A + Card B – Card (A $\cap$ B)
- Card (A $\cap$ B) = Card A + Card B – Card (A $\cup$ B)

P_3 : Soient A et B, deux ensembles distinctes de B, on appelle produit cartésien A x B l'ensemble défini par : $\{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$

<u>Exemple</u>:

Soient A et B deux ensembles tel que :

A = {1, 2} ; B = {a, b, c}

a) Donner les éléments de A×B
b) Déterminer Card (A×B)

<u>Solution</u> :

a) A x B = {(1, a) ; (1, b) ; (1, c) ; (2, a) ; (2, b) ; (2, c)}
b) Card (A×B) = Card A×Card B = 3×2 = 6.

N.B :

- A×B ≠ B×A (le produit cartésien n'est pas commutatif)
- Card (A×B) = Card A×Card B.

P_4 : Complémentarité : On appelle complémentaire de A dans B l'ensemble des éléments de B n'appartenant pas à A on la note $\overline{A} = C_B^A = \{x / x \in B \text{ et } x \notin A\}$

Exemple :

Soit E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} ; F = {0, 3, 4, 5}

a) Déterminer $\overline{F} = C_E^F$
b) Déterminer Card $\overline{F}$

Solution

a) $\overline{F} = C_E^F \{1,2,6,7,8\}$

b) Card $\overline{F}$ = Card E – Card F = 9 – 4 = 5

N.B : Card $\left(C_E^F\right)$ = Card E – Card F

3) Permutation−Arrangement − combinaison

a) Permutation :

- **Définition** :

On appelle permutation d'un ensemble fini F de cardinal n ; toute bijection de $[1\ ;\ n\ ]$dans F.
Le nombre de permutation d'un ensemble fini de cardinal n.
On la note : $\boldsymbol{n}!$ **(et se lit Factorielle n).**

$$\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)\ldots\times 2\times 1}$$

- **Propriétés** :

$\mathbf{P_1}$: 1! = 1 ; $\mathbf{P_2}$: 0! = 1

b) Arrangement :

- **Définition**:

Soit **E** un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments, et **P** un ensemble fini tel que : **($\boldsymbol{n \geq P}$).** On appelle arrangement de **P** éléments de **E**, toute injection de **P** dans **E**.

On le note : $\boldsymbol{A_n^P}$ et on lit : ≪ **A , n , P**≫.

$$\boldsymbol{A_n^P = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)} \quad \textbf{ou} \quad \boldsymbol{A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}}$$

- **Propriétés**:

P_1 : $\boldsymbol{A_n^0 = 1}$ P_3 : $\boldsymbol{A_n^n = n!}$

P_2 : $\boldsymbol{A_n^1 = n}$ P_4 : $\boldsymbol{A_n^{n-1} = n!}$

c) Combinaison :

- **Définition** :

Soit **E** un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments, et **P** un ensemble fini tel que : **($\boldsymbol{n} \geq$ P)**. On appelle combinaison de **p** éléments de **E** tout sous ensemble de **E** ayant **p** éléments.

On le note : $\boldsymbol{C_n^P}$ et on lit : ≪ **C , $\boldsymbol{n}$, P**≫.

$\boldsymbol{C_n^P} = \frac{\boldsymbol{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}}{\boldsymbol{n(n-1).....2\times 1.}}$ ou $\boldsymbol{C_n^P} = \frac{\boldsymbol{A_n^P}}{\boldsymbol{p!}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{p!(n-p)!}}$

- **Propriétés** :

P_1 : $\boldsymbol{C_n^0 = 1}$ P_3 : $\boldsymbol{C_n^n = 1}$

P_2 : $\boldsymbol{C_n^1 = n}$ P_4 : $\boldsymbol{C_n^{n-1} = n}$

N.B : Pour calculer le $\boldsymbol{C_n^P}$, on utilise le triangle de Pascal qui est le suivant :

P \ N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	**1**													
1	**1**	**1**												
2	**1**	**2**	**1**											
3	**1**	**3**	**3**	**1**										
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**									
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**								
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**							

d) Nombre d'application d'un ensemble fini dans un ensemble fini (P- liste)

- **Définition** :

Soit **E** et **F** deux ensembles finis ; on appelle application de l'ensemble **E** dans **F**, toute relation qui permet d'associer à tout élément de **E**, un élément unique de **F**. Le nombre d'application distincte d'un ensemble fini de cardinal **p** dans un ensemble fini de **Cardinal n** est noté : $\boldsymbol{A_n^{\widehat{P}}}$tel que : $\boldsymbol{A_n^{\widehat{P}} = n^P}$

- **Propriétés**:

P_1 :$\boldsymbol{A_n^{\widehat{0}} = n^0 = 1}$;

P_2 :$\boldsymbol{A_n^{\widehat{1}} = n^1 = n}$;

4) Les différents types de tirages

a) Tirages successif et sans remise :

Si l'énoncé contient les mots : **successif et sans remise,** cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (**ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments**).

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement.**

$$A_n^P = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \quad \text{ou} \quad A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$$

b) Tirages successif et avec remise :

Si l'énoncé contient les mots : **successif et avec remise,** cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste.**

$$A_n^{\widehat{P}} = n^P$$

c) Tirage simultané :

Si l'énoncé contient le mot : simultanément**,** cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison.**

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots\bullet 2\bullet 1} \text{ ou } C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

d) Tirage successif :

Si l'énoncé contient le mot : successif**,** il faut en tenir compte de tous les ordres dans les quels on peut obtenir un événement donné.

On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

Application :

Une boite contient 11 boules rouges, 4 boules bleues, 9 boules jaunes, et 6 boules noires.

Dénombrer les cas possible à cette épreuve si l'on tire 3 boules de la boite et que :

a) le tirage est simultané

b) le tirage est successif et sans remise

c) le tirage est successif et avec remise

Solution :

Ici : - le nombre d'élément qui constitue l'univers est : $\boldsymbol{n = 30}$

- le nombre d'élément tiré est : $\boldsymbol{p = 3}$

a) le tirage est simultané :

Alors le nombre de cas possible est : $\boldsymbol{C_{30}^{3}} = \frac{\mathbf{30\,!}}{\mathbf{3!(\,30-3\,)!}} = \mathbf{4060}$

b) le tirage est successif et sans remise :

Alors le nombre de cas possible est : $\boldsymbol{A_{30}^{3}} = \frac{\mathbf{30\,!}}{\mathbf{(\,30-3\,)!}} = \mathbf{24360}$

c) le tirage est successif et avec remise :

Alors le nombre de cas possible est : $\boldsymbol{A_{30}^{\hat{3}} = 30^3 = 2700}$

I- Probabilité simple :

1) Définition :

Dans une épreuve où tous les évènements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A est le nombre réel défini par le rapport entre le Nombre de Cas Favorable à l'évènement A et le Nombre de Cas Possible. On note P_A ou P(A).

$$\mathbf{P(A)} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{NombredeCasFavorables\ \text{à}\ laréalisationdeA}{NombreTotaldeCasPossibles\ \text{à}\ laréealisationdeA}$$

Exemple:

On jette un dé ordinaire non piqué. Soit Ω l'ensemble des résultats possibles tel que : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ω est appelé univers ou population.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre paire ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 ?
c) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 ?
d) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 ?

Solution :

Le nombre de cas possible est : 6.

a) La probabilité d'obtenir 1 chiffre paire est $P = \frac{3}{6} = 0{,}5$
b) La probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 est : $P = \frac{1}{6}$
c) La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 est $P = \frac{0}{6} = 0$
d) La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égale à 6 est $P = \frac{6}{6} = 1$

2) Propriétés :

Soit Ω l'univers ou l'évènement certain et A et B deux évènement élémentaires de Ω.

On a :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\phi) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + (P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- Si A et B sont disjoints $(A \cap B) = \phi$ alors on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple :

Une urne contient 7 boules indiscernables au touché dont 3 blanches et 4 noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.

1) Quelle est la probabilité d'avoir : "A" exactement 2 boules blanches.
2) Quelle est la probabilité d'avoir "B" au plus 1 boule noire.
3) Quelle est la probabilité d'avoir "C" 2 boules de même couleur.
4) Quelle est la probabilité d'avoir "D" des boules de même couleur.

Solution :

Tirage simultané : on utilise $C_n^P avec \begin{cases} n = 7 \\ P = 3 \end{cases}$

Désignons par NCP : le **N**ombre de **C**as **P**ossible

et

par NCF : le **N**ombre de **C**as **F**avorable

1) $Nombre\ de\ cas\ possible\ C_7^3 = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$
$Nombre\ de\ cas\ favorable\ C_3^1 \times C_4^1 = 12$
$\Big| P(A) = \dfrac{12}{35}$

2) $N.C.P = C_7^3 = 35$

$N.C.F = C_4^0 \times C_3^3 + C_3^2 = 12 + 1 = 13$ $\Big| P(B) = \frac{13}{35}$

3) $N.C.P = C_7^3 = 35$

$N.C.F = C_3^2 \times C_4^1 + C_4^2 \times C_3^1 = 13 + 18 = 30$ $\Big| P(C) = \frac{6}{7}$

4) $N.C.P = C_7^3 = 35$

$N.C.F = C_3^3 \times C_4^0 + C_4^3 \times C_3^0 = 5$ $\Big| P(D) = \frac{5}{35}$

3) **Equiprobabilité**:

On parle d'équiprobabilité si la probabilité de réalisation de chaque évènement élémentaire est le même.

- Le lancé du dé est un évènement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est $\frac{1}{6}$
- Le lancé d'une pièce de monnaie est aussi un évènement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est de $\frac{1}{2}$.

EXERCICES

Exercice 1 :

1) calculer les expressions suivantes :

a) $5!$; $7!$; $(2^3)!$; $3(4!)$; $\frac{8!}{6!}$

b) A_8^3 ; A_{10}^4 ; A_{10}^{10} C_5^2 ; C_8^3 ; C_{10}^{10}

c) $\frac{C_{10}^5}{C_{10}^3}$; $\frac{A_8^5}{A_8^1}$; $C_{15}^{14} + C_3^0$

2) Résoudre dans N* les équations suivantes :

a) $C_n^2 = 5n$; $A_{n+1}^3 = n(n^2 - 1)$

b) $A_n^2 = n(2n + 5)$; $A_n^2 = C_n^3$

c) $C_n^2 = 45$; $C_n^3 = 2n$; $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 475n$

d) $C_n^1 + C_n^2 = 10$; $n^2 + 3C_n^2 = 1$

Exercice 2 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes ordinaires

1) combien de "mains" différentes de 8 cartes peut – on constituer ?
2) combien de "mains" différentes de 8 cartes comprenant 2as peut – on constituer ?
3) combien de "mains" de 8 cartes ayant au moins 2 cœurs peut – on constituer ?

Exercice 3 :

Une association comprenant 20 personnes dont 12 hommes et 8 femmes désirent

former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes. Trouver de combien de façon l'on peut former ce comité dans chaque cas :

1) chaque membre de l'association accepte de faire partir du comité
2) deux des hommes refusent d'en faire partir
3) monsieur x et madame y refusent de siéger ensemble

Exercice 4 :

Un sac contient 25 boules dont 9 rouges, 6 vertes et 10 jaunes. On tire 5 boules du sac.

I) Dénombrer les cas possible à cette épreuve si :

1) le tirage est simultané
2) le tirage est successif sans remise
3) le tirage est successif avec remise.

II) Dénombrer les cas favorables ainsi que la probabilité dans chaque cas si :

1) le tirage est successif sans remise et le résultat contient au plus 3 jaunes
2) le tirage est simultané et le résultat contient 2 rouges, 2 vertes et 1 jaune.
3) Le tirage est successif avec remise et le résultat contient au moins 7 rouges.
4) Le tirage est simultané et le résultat contient au plus 1 verte
5) Le tirage est successif sans remise et le résultat est unicolore.

Exercice 5 :

Dans une classe de 40 élèves :

- 25 aiment la mathématique

- 30 aiment le français

- 17 aiment la mathématique et le français

Trouver le nombre d'élève :

a) qui aiment uniquement le français
b) qui aiment uniquement la mathématique
c) qui aiment la mathématique ou le français
d) qui n'aiment aucune des deux matières

Exercice 6 :

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, on tire simultanément et au hasard 3 boules.

1) calculer la probabilité de chacune des évènements suivants :

a) aucune boule rouge n'est tirée
b) une boule rouge et une seule est tirée
c) deux boules rouges et deux seulement sont tirées
d) une boule rouge au moins est tirée
e) deux boules blanches au plus sont tirées

2) soit x la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de boules rouges qui se trouvent parmi les 3 boules tirées.

a) Donner la loi de probabilité de x
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de x

c) Calculer la probabilité de l'évènement $1 \leq x \leq 2$

Exercice 7 :

Dans tout l'exercice on suppose les tirage équiprobables ($n \in N_+^*$)

1) Une urne contient (n + 1) boules vertes et (n – 1) boules rouges

Le jeu suivant consiste à tirer une boule de l'urne :

- Si la boule est rouge, le joueur perd
- Si la boule est verte, le joueur gagne

a) Quelle est la probabilité P_1 que le joueur gagne ?
b) Quelle est la probabilité P_2 que le joueur perd ?

2) Lorsque le joueur gagne, il reçoit 200 F CFA, s'il perd il doit verser 300 F FCFA. On définit la variable aléatoire x qui à chaque tirage associe le gain en FCFA.

(le gain pouvant être négatif).

a) Déterminer la loi de probabilité de x
b) Calculer l'espérance mathématique de x
c) Pour quelle valeur de n, le jeu est – il équitable ? (le jeu est équitable si l'espérance mathématique de la variable x est nulle).

Exercice 8 :

Une étude statistique faite an le nombre de vente de voiture en une journée par un de ses représentants a conduit à la loi de probabilité suivante pour la variable aléatoire x prenant pour valeurs le nombre de ces ventes.

n	0	1	2	3	4	5 et plus
P(x=n)	0,15	0,40	0,30	0,10	0,05	0

1) Dresser le tableau de la fonction de répartition F de la variable aléatoire x et représenter cette fonction dans le plus rapporté à un repère orthogonal convenable
2) Calculer l'espérance mathématique E(x) et la variance V(x) de la variable x.

Exercice 9 :

Un établissement scolaire comporte 55% de filles et 45% de garçons.20% des filles et 40% des garçons utilisent un moyen de transport individuel pour se rendre à l'établissement ; les autres utilisent des cars de ramassage scolaire qui arrivent tous à 8 heures à l'établissement.

1) Quel est le pourcentage des élèves de l'établissement utilisant un moyen de transport individuel ?
2) On aperçoit la silhouette d'un élève descendant d'un car. Quelle est la probabilité pour que ce soit :

a) une fille ;
b) un garçon.

Exercice 10 :

Des lycéens préparent le BAC blanc de mathématique. Trois professeurs X; Y et Z sont susceptibles de donner le sujet. D'après les statistiques des années précédentes et d'autres contraintes, les lycéens évaluent à :

* 0,35 la probabilité pour que ce soit X qui choisisse le sujet;

* 0,4 la probabilité pour que ce soit Y;

* 0,25 la probabilité pour que ce soit Z.

Par ailleurs, les lycéens redoutent qu'un certain chapitre noté r ne soit donné à l'examen. Ils pensent qu'ils ont 1 chance sur 10 que le sujet porte sur r si X le choisit, 2 chances sur 5 si c'est Y qui le choisit et enfin 41 chances sur 50 si c'est Z qui fait le choix du sujet.

1) Quelle est la probabilité que le sujet porte sur le chapitre r ?
2) Au BAC blanc, le sujet porte effectivement sur le sujet r. Quelle est alors la probabilité pour que le sujet ait été choisi par :
    a) par X ?
    b) par Y ?
    c) par Z ?

Exercice 11 :

On considère deux dés cubiques identiques non pipés, dont les faces sont marquées:(0;0), $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right)$.

On lance simultanément les deux dés, et on lit les résultats a et b de leurs faces supérieures. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des deux dés, associe la valeur sin(a + b)

1) Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variable V(X) de X.

Exercice12

1- On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$. Une famille a 5 enfants. Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

2- L'objectif de cet exercice est de déterminer les quels des avions à 2 ou 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Partie A :

Dans cette partie on prend p = 0,1

a) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

b) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
c) Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne
d) En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'crase.

Partie B :

On revient au cas général

a) Soit f(p) la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'crase. Démontrer que $f(p) = p^2$
b) Soit g(p) la probabilité pour qu'un avion à 4 moteur s'écrase. Démontrer que $g(p) = p^2 (- 3p^2 + 4 p)$

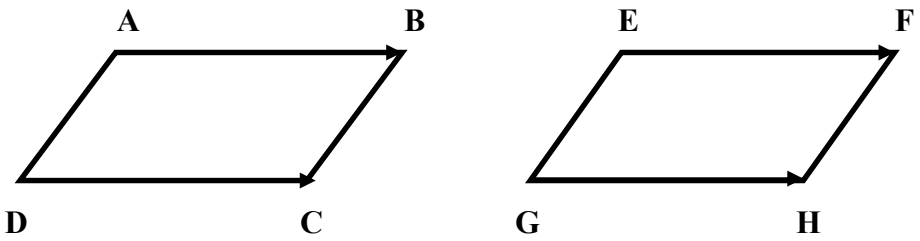
c) On pose h(p) = f(p) – g(p).

- Etudier le signe de h(p) en fonction de P.
- En déduire, suivant les valeurs de p dans quels avions il vaut mieux monter.

Géométrie plane

I- VECTEURS DU PLAN :

1- Vecteurs égaux :



Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Alors on peut écrire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.

Soient quatre (04) points **A , B , C , D.**

Si **ABCD** est un parallélogramme alors on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Si on pose $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont appelés représentants du vecteur $\vec{U}$.

2- Opérations dans: v

v Étant l'ensemble des vecteurs du plan, on a :

a- Addition :

Quel que soient **A, B** et **C** on a :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ **(Qui est appelé la relation de CHASLES)**

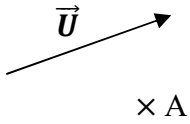
Activité1 :

En utilisant la relation de CHASLES, complète les égalités suivantes :

a- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \ldots\ldots$
b- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \ldots\ldots$
c- $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \ldots\ldots$

Activité 2 :

Soit P le plan ; $\boldsymbol{v}$ le plan vectoriel ; $\vec{U}$ un vecteur de $\boldsymbol{v}$ et A un point donné du plan P comme l'indique la figure suivante :



a- Construis le point B tel que : $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$.
b- Peut-tu trouver un point B' tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$. avec B ≠ B'
c- Que représente le vecteur $\overrightarrow{BA}$ pour $\overrightarrow{AB}$?
d- Calcule $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$.

Activité 3 :

Soient $\vec{U}$; $\vec{V}$; $\vec{W}$ trois vecteurs de $\boldsymbol{v}$. Construis un représentant de chacun des vecteurs :
a- $\vec{U} + \vec{V}$ et $\vec{V} + \vec{U}$.
b- $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W}$ et $\vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$.

Propriétés :

- $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$ **(l'addition des vecteurs est commutative)**
- $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$ **(l'addition des vecteurs est associative)**
- $\vec{U} + \vec{0} = \vec{U}$ **(le vecteur nul $\vec{0}$ est l'élément neutre de l'addition des vecteurs)**

b- Soustraction :

Activité 4 :

Soient $\vec{U}$ + $\vec{V}$ deux vecteurs de $\boldsymbol{v}$, A un point de P, B et D deux points tels que :
$\vec{U} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{V} = \overrightarrow{AD}$.
Représente $\vec{U}$ + $\vec{V}$ et $\vec{U}$ - $\vec{V}$

c- Multiplication d'un vecteur par un scalaire:

Activité 5 :

Dans le plan, place deux points A et B. Trace le vecteur $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$. Construis un représentant de chacun des vecteurs $\vec{v} = 2\vec{u}$; $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{u}$.

Soient $\vec{U}$ un vecteur de $\boldsymbol{v}$, A, B deux points de P tel que $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$.

a- Place les points C, D et E sur la droite (AB) de repère (A ; $\overrightarrow{AB}$).
On donne C(3) ; D (- 1) et E (-2,5).
b- Calcule : $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

Propriétés :

- $1\vec{U} = \vec{U}$
- $(a + b)\vec{U} = a\vec{U} + b\vec{U}$
- $a(\vec{U} + \vec{V}) = a\vec{U} + a\vec{V}$
- $k\vec{U} = 0$ alors $k = O$ ou $\vec{U} = \vec{0}$

Exercices d'applications :

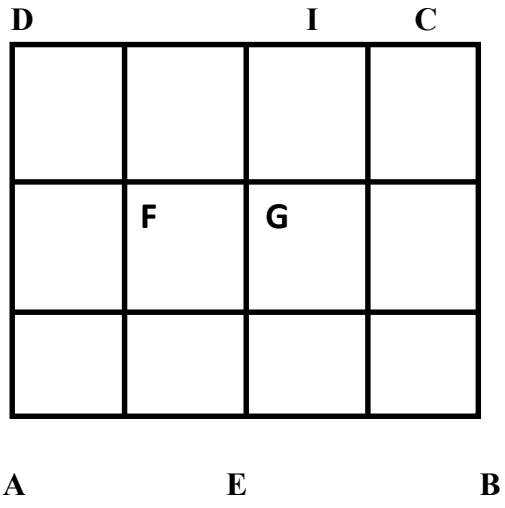
Simplifier les écritures suivantes :

$A = -3(\vec{U} + 5\vec{V}) + 4(\frac{1}{4}\vec{U} - 2\vec{V})$ et $B = -3(\frac{3}{2}\vec{U} - \vec{V}) + 5(-\vec{U} - 2\vec{V})$

3- Vecteurs colinéaires :

Activité 6 :

On considère la figure suivante :



1- En utilisant les points de la figure, donne :
   a- Deux vecteurs opposés.
   b- Deux vecteurs qui ont la même direction, le même sens et la même longueur.
   c- Deux vecteurs qui n'ont pas la même direction, mais la même longueur.

2- Complète par un nombre réel les pointillés des égalités suivantes :

a- $\overrightarrow{DI}$ =..... $\overrightarrow{GF}$ b- $\overrightarrow{DF}$ =..... $\overrightarrow{GB}$

3- Complète les pointillés par des vecteurs dont l'origine et l'extrémité sont des points de la figure.

a- $\overrightarrow{AE}$ + ... = $\overrightarrow{AG}$ b- $\overrightarrow{EH}$ + $\overrightarrow{DF}$ = ... c- $\overrightarrow{FH}$ + $\overrightarrow{GA}$ = ...

Définition :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires s'ils ont la même direction et s'il existe un réel k tel que : $\vec{V}$ = k$\vec{U}$.

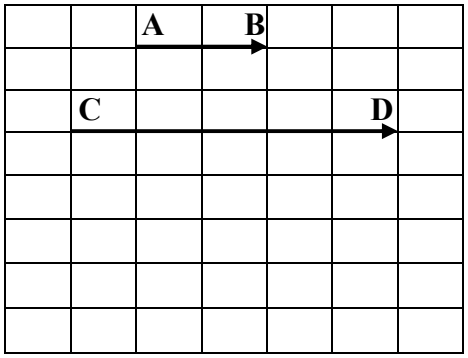
- Si k > 0 alors $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont de même sens.
- Si k < 0 alors $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont de sens contraires.

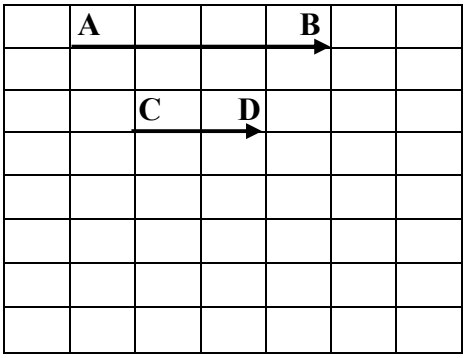
Remarque :

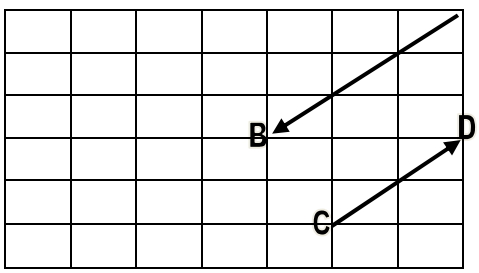
- Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur.
- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ne sont pas colinéaires revient à dire que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont de directions différentes.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de $\boldsymbol{v}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si les trois (03) points A, B, C sont alignés.

Activité 7 :

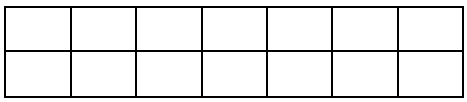
1) En utilisant les carreaux de ton cahier, reproduis les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

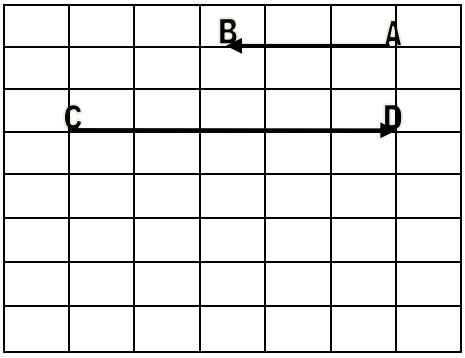






A



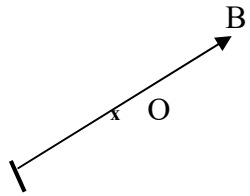


2) écris la relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Activité 8 :

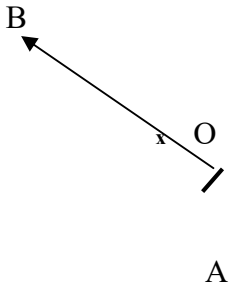
Construis à partir du point O un représentant du vecteur $\vec{w}$ = k $\overrightarrow{AB}$

(en utilisant la règle et le compas).



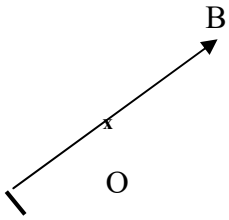
K = $\frac{1}{2}$

a)



K = 2

b)



K = -1

c)

4- Combinaisons linéaires :

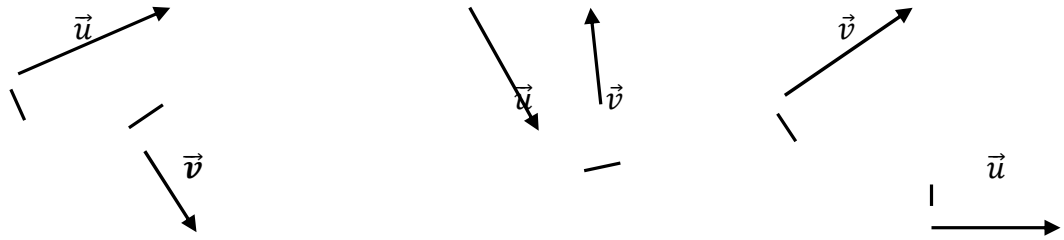
Activité 9 :

En se basant sur la construction d'un représentant du produit d'un vecteur par un réel et de la construction d'un représentant de la somme de deux vecteurs, construis un représentant de $\vec{W}$ dans chacun des cas suivants **:**

a) $\vec{W} = 2\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{W} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

c) $\vec{W} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$



Activité 10 :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de $\boldsymbol{v}$.
Construis Un représentant de $\vec{W}$ tel que : $\vec{W} = 3\,\vec{U} - 2\vec{V}$.

Définition :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de $\boldsymbol{v}$; soient α et β deux nombres réels.
Le vecteur $\vec{W}$ tel que $\boldsymbol{\vec{W} = \alpha\,\vec{U} + \beta\vec{V}}$ est appelé **combinaison linéaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.**

5- Base de $\boldsymbol{v}$ et coordonnées un vecteur :

a- Définition :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de $\boldsymbol{v}$ **.**

Le couple B = ($\vec{U}$; $\vec{V}$) est **une base** de $\boldsymbol{v}$ si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ **ne sont pas colinéaires.**

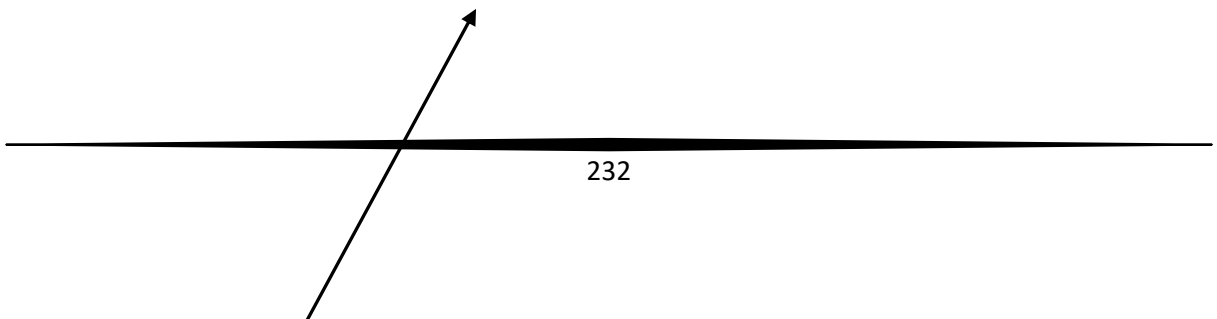
b- Propriétés :

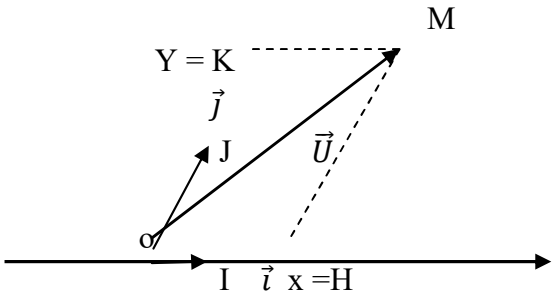
Soit B = ($\vec{U}$; $\vec{V}$) une base de $\boldsymbol{v}$ **.** Tout vecteur de $\boldsymbol{v}$ peut s'écrire de manière unique comme **combinaison linéaire** de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Soit $\vec{W}$ un vecteur de$\boldsymbol{v}$. On a : $\vec{W} = \alpha\,\vec{U} + \beta\vec{V}$ **.**

c- Coordonnées d'un vecteur:

Soit ($\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) une base de $\boldsymbol{v}$, et $\vec{U}$ un vecteur de $\boldsymbol{v}$ **,** O, I, J, M des points tels que :
$\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$; $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{U}$
H est le projeté de M sur la droite (OI) parallèlement à (OJ)
K le projeté de M de M sur la droite (OJ) parallèlement à (OI)





$\vec{U} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{OH} = x\vec{\imath}$

$\vec{U} = x\vec{\imath} + y\vec{j}$ $\overrightarrow{OK} = y\vec{j}$

Le couple (x ; y) est appelé **coordonnées du vecteur $\vec{U}$ dans la base ($\vec{\imath}$; $\vec{j}$)** et on écrit :

$\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **Ou** $\vec{U}(x ; y)$**.**

Le triplet (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{j}$) est appelé **repère du plan**.

Un repère est dit **orthogonal** si les deux vecteurs de la base sont orthogonaux.

d- <u>Calculs vectoriels et coordonnés :</u>

Soit ($\vec{\imath}$; $\vec{j}$) une base de $\boldsymbol{v}$, si $\vec{U}(x ; y)$ et $\vec{V}(x'; y')$ dans la base ($\vec{\imath}$; $\vec{j}$) alors on peut écrire :

$\vec{U} = x\vec{\imath} + y\vec{j}$ et $\vec{V} = x'\vec{\imath} + y'\vec{j}$. Ainsi on a les propriétés suivantes :

Propriété1 : (addition)

$\vec{U} + \vec{V} = (x\vec{\imath} + y\vec{j}) + (x'\vec{\imath} + y'\vec{j}) = (x + x')\vec{\imath} + (y + y')\vec{j}$

Alors on : $\boxed{(\vec{U} + \vec{V})\ (x + x' ;\ y + y')}$

- **Propriété 2 :** (égalité)

$\boxed{\vec{U} = \vec{V} <=> x = x' \text{ et } y = y'}$

- **Propriété 3 :** (vecteur nul)

$\boxed{\vec{U} = \vec{0} <=> x = 0 \text{ et } y = 0}$

- **Propriété 4 :** (multiplication d'un vecteur par un réel k)

$\boxed{k\vec{U} = k(x\vec{\imath} + y\vec{j}) = kx\vec{\imath} + ky\vec{j} = (kx ; ky)}$

- **Propriété 5 :** (calcul des **coordonnées d'un vecteur**)

Soit A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) deux points du plan .

On a: $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$

- **Propriété 6 :** (utilisation du calcul vectoriel pour montrer **l'alignement de 3 points**.)

Pour montrer que trois points sont alignés, on cherche à prouver que deux vecteurs (ayant un point en commun) sont colinéaires. Pour cela, on exprime ces deux vecteurs en fonction des points de la figure de base, en utilisant les relations vectorielles de l'énoncé et la relation de **CHASLES.**

- **Propriété 7 :** (utilisation du calcul vectoriel pour montrer **2 droites sont parallèles**.)

  Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Pour cela, on exprime ces deux vecteurs en fonction des points de la figure de base, en utilisant les relations vectorielles de l'énoncé et la relation de CHASLES.

6- <u>Traduction analytique de la colinéarité :</u>

Soit $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\,)$ une base de $\boldsymbol{v}$.Soient $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\boldsymbol{v}$ **.**

On appelle déterminant de ($\vec{U}$; $\vec{V}$) relativement à la base $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\,)$, le nombre réel noté :

$$\det(\vec{U}\ ;\ \vec{V}) \text{ tel que } \det(\vec{U}\ ;\ \vec{V}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = (xy') - (yx')$$

<u>Théorème :</u>

Etant donné une base $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath}\,)$ de $\boldsymbol{v}$ On dit que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ **sont colinéaires** si :

$$\mathbf{det(\vec{U}\ ;\ \vec{V}) = 0}$$

<u>Remarque :</u>

$\vec{U}$ et $\vec{V}$ **ne sont pas colinéaires** si **det($\vec{U}$; $\vec{V}$) $\neq$ 0**

EXERCICES

Exercice1 :

1) Simplifier les écritures suivantes :

a- $7\vec{U} - 4\vec{V} + 3(\vec{U} + 3\vec{W}) - 5(2\vec{W} - \vec{V})$.
b- $4(2\vec{U} - \vec{V}) - 4(3\vec{U} - \vec{V}) + 3\vec{U}$.
c- $\vec{U} + 2(\vec{V} + 3\vec{W}) - 5(2\vec{U} + 3\vec{V})$.
d- $-\vec{U} - 3(5\vec{V} - \vec{U}) + 4(\vec{W} + 2\vec{V})$.

2) Soient $\vec{U}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{V}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{W}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{-3}{4}\end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\boldsymbol{v}$.

a- Déterminer les coordonnées de :
$\vec{U} + \vec{V}$; $\vec{U} - \vec{V}$; $\vec{U} + \vec{V} + \vec{W}$; $\frac{5}{3}\vec{U} + \vec{W}$; $3\vec{U} - 2\vec{V}$

b- Construire un représentant des vecteurs :
$\vec{U}$; $\vec{V}$; $\vec{W}$; $\vec{U} + \vec{V}$; $\vec{U} - \vec{V}$; $\vec{U} + \vec{V} + \vec{W}$; $-\vec{U} - \vec{V} - \vec{W}$

Exercice2 :

Parmi les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ indiqués ci-dessous, dire ceux qui sont colinéaires puis préciser s'ils sont de même sens ou de sens contraires.

a- $\vec{U}= 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{V} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b- $\vec{U}= \frac{5}{3}\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = \frac{5}{2}\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

c- $\vec{U}= \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{V} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

d- $\vec{U}= 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{V} = 8\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$

e- $\vec{U}= \frac{-1}{2}\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = \frac{-2}{3}\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

f- $\vec{U}= -\vec{\imath}$ et $\vec{V} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

g- $\vec{U}= \sqrt{3}\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{V} = 3\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}$

h- $\vec{U}= (\sqrt{3} - 2)\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{V} = \vec{\imath} + (\sqrt{3} + 2)\vec{\jmath}$

i- $\vec{U}= -\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

j- $\vec{U}= 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{V} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

k- $\vec{U}= 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{V} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

l- $\vec{U}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

m- $\vec{U}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

n- $\vec{U}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$

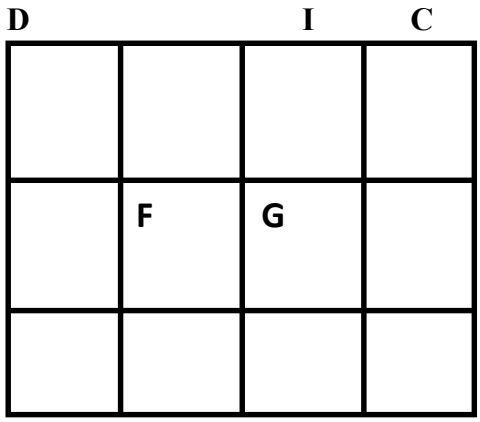
o- $\vec{U}\begin{pmatrix}-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

p- $\vec{U}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

q- $\vec{U}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Exercice3 :

On considère la figure suivante :



A **E** **B**

1) En utilisant les points de la figure, donnée :

a- Deux vecteurs opposés.

b- Deux vecteurs qui ont la même direction, le même sens et la même longueur.

c- Deux vecteurs qui n'ont pas la même direction, mais la même longueur.

2) Compléter par un nombre réel les pointillés des égalités suivantes :

b- $\overrightarrow{DI}$ =..... $\overrightarrow{GF}$ b- $\overrightarrow{DF}$ =..... $\overrightarrow{GB}$

3) Compléter les pointillés par des vecteurs dont l'origine et l'extrémité sont des points de la figure.

b- $\overrightarrow{AE}$ + ... = $\overrightarrow{AG}$ b- $\overrightarrow{EH}$ + $\overrightarrow{DF}$ = ... c- $\overrightarrow{FH}$ + $\overrightarrow{GA}$ = ...

Exercice4 :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux de $\boldsymbol{v}$ tel que : $\vec{U} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{3}\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

a- Donner les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
b- Montrer que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.

Exercice5 :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux de $\boldsymbol{v}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ tel que :

$\vec{U} = (2m + 1)\vec{\imath} + (m - 1)\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

1) a- trouver les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
   b – Trouver le réel m pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires. Préciser leur sens.
2) On suppose que m = 2. Trouver les coordonnées de $\vec{U}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
   Montrer que $(\vec{U}; \vec{V})$ est une base de $\boldsymbol{v}$ que l'on notera B' = $(\vec{U}; \vec{V})$.

3) a- on donne $\overrightarrow{W} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, trouver les coordonnées de W dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$
Puis dans la base B' = $(\vec{U}; \vec{V})$.
4) b - on donne $\overrightarrow{W'} = 5\vec{U} + \vec{V}$, trouver les coordonnées de W' dans la base B' = $(\vec{U}; \vec{V})$ Puis dans la base B = $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Exercice 6 :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux de $\boldsymbol{v}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ tel que :

$\vec{U} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = m\vec{\imath} - (m+2)\vec{\jmath}$.

1) a- trouver les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
b – Trouver le réel m pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires. Préciser leur sens.
2) On suppose que m = - 3.
a- Trouver les coordonnées de $\vec{V}$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
b-Montrer que $(\vec{U}; \vec{V})$ est une base de .
3) Trouver les coordonnées des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{U}; \vec{V})$.
4) a- Construire les représentants (A,B) et (A,C) respectivement des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ où A , B , C sont trois points quelconques du plan P .
b-Construire sur la même figure les représentants d'origine A des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{a} = -\vec{U} + 2\vec{V}$
c-Donner les coordonnées du vecteur $\vec{a}$ dans la base $(\vec{U}; \vec{V})$ puis dans la base$(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Exercice7 :

On considère deux droites (D) et (D') sécante en O.

I est un point de O distincte de O et J un point de (D') distincte de O.

1) montrer que les couples $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ est une base de $\boldsymbol{v}$.
2) Construire les points A ; B et C tels que :
a- $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$.
b- $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} - 3\overrightarrow{OJ}$.
c- $\overrightarrow{OC} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{OI} - 2\overrightarrow{OJ}$.
3) Donner les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$ dans la base $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$.
4) On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dont les couples de coordonnées dans la base $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ sont respectivement (2 ; 3) et $(-5; \frac{1}{2})$.
a- Montrer que $(\vec{U}; \vec{V})$ est une base de$\boldsymbol{v}$.
b- Un vecteur $\overrightarrow{W}$ a pour coordonnées (- 3 ; 2) dans la base $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$.
Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{W}$ dans la base $(\vec{U}; \vec{V})$.

Exercice8 :

Simplifier les expressions suivantes en utilisant la relation de CHASLES :

a- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; **b-** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$; **c-** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; **d-** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

e- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$; **f-** $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$; **g-** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

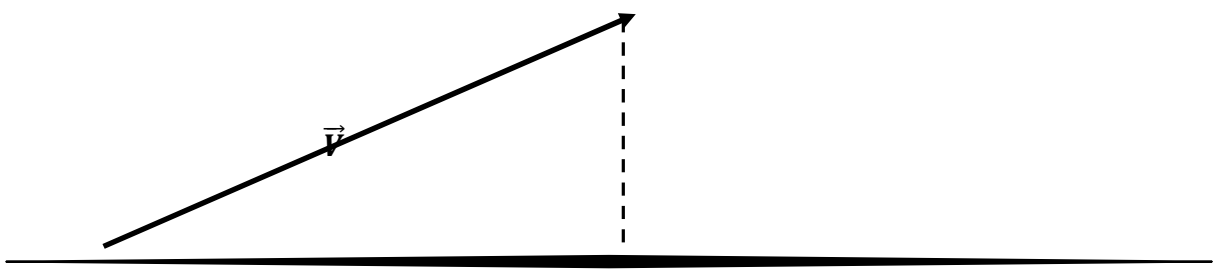
h- $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$; **i-** $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$; **j-** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.

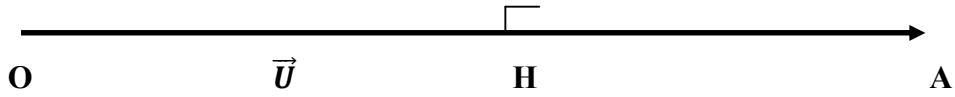
II- PRODUITS SCALAIRES

1- Expression algébrique du produit scalaire

a- Définition :

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls. Soient : O ; A et B trois points du plan tels que $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$.





On appelle produit scalaire de $\vec{U}$ par $\vec{V}$ le nombre réel noté : $\vec{U} \cdot \vec{V}$.

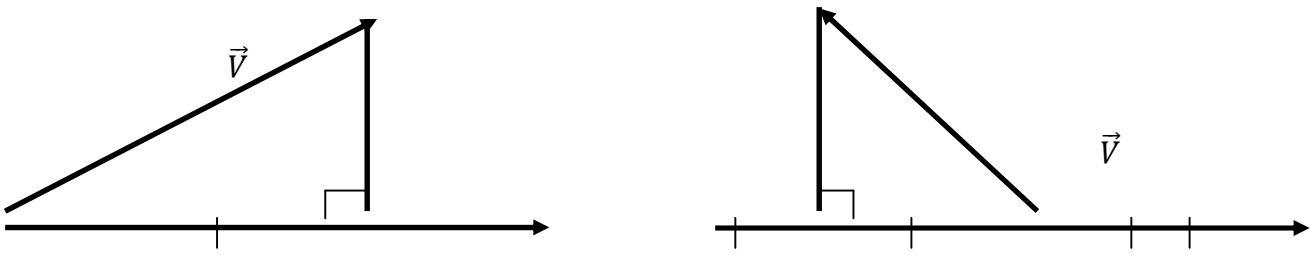
Le produit scalaire est donc défini par $\vec{U} \cdot \vec{V} = \overline{OA} \bullet \overline{OH}$ **Où H est le projeté orthogonal de B** sur la droite **(OA)**.

On écrit $\vec{U} \cdot \vec{V}$ Et on lit : $\vec{U}$ **scalaire** $\vec{V}$ ou **produit scalaire de** $\vec{U}$ **par** $\vec{V}$ **.**

Conclusion : $\boxed{\vec{U} \cdot \vec{V} = \overline{OA} \bullet \overline{OH}}$

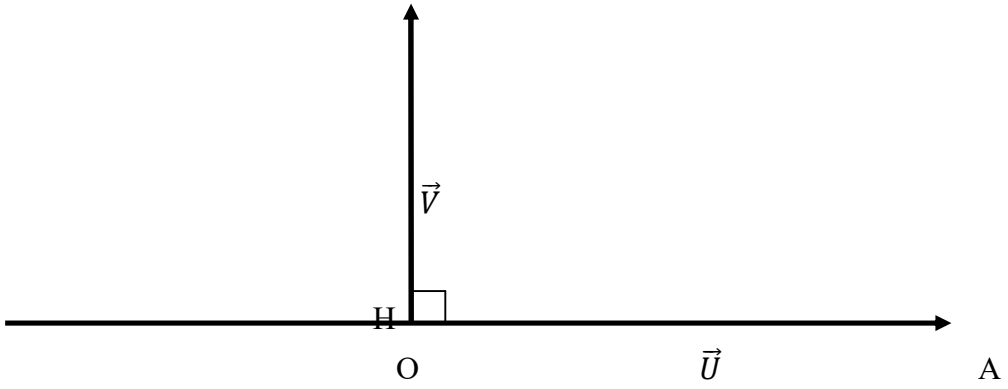
Exemple :

Calculer $\vec{U} \cdot \vec{V}$ dans chacun des cas suivants :



0 1 2 3 -1,5 -1 0

(a) **(b)**



(C)

Remarque

- Si H ∈ [OA), $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont de même sens.

  $\overline{OA}$ x $\overline{OH}$ = OA x OH et $\vec{U}$. $\vec{V}$ > O.
- Si H ∉ [OA), $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont de sens contraires.

  $\overline{OA}$ x $\overline{OH}$ = - OA x OH et $\vec{U}$. $\vec{V}$ < O.
- Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont perpendiculaires alors $\vec{U}$. $\vec{V}$ = 0

Exercice d'application

*S*oit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 et AC = 4.

Calculer : $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$. $\overrightarrow{CB}$

2- Expression trigonométrique du produit scalaire :

On sait que si $\vec{U}$ **et** $\vec{V}$ sont deux vecteurs du plan $\vec{U}$. $\vec{V}$ = $\overline{OA}$ x $\overline{OH}$.

On a Cosα = $\frac{OH}{OB}$ => OH = OBCosα.

Donc $\vec{U}$. $\vec{V}$ = OA x OB x cosα.

Mais on sait que OA = $\|\vec{U}\|$ **et** OB = $\|\vec{V}\|$ **.**

D'où : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \cos\alpha$ est **l'expression trigonométrique du produit scalaire.**

Conclusion :

$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \cos\alpha$ **qui est l'expression trigonométrique**

Exercice d'application

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs tel que $\|\vec{U}\| = 2$ et $\|\vec{V}\| = 1$.

Calculer $\vec{U} \cdot \vec{V}$ dans chacun des cas suivants :

a- Si $\alpha = 0$; **b-** Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$; **c-** Si $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; **d-** Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$

1. Propriétés :

Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ trois vecteurs et k un réel.

- $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$
- $(\vec{U} + \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{W}$
- $\vec{U}(k\vec{V}) = k(\vec{U} \cdot \vec{V})$

3- Carré scalaire :

a- Définition :

$\vec{U} \cdot \vec{U}$ est appelé carré scalaire de $\vec{U}$ et on le note $\vec{U}^2$.

$\vec{U}^2 = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{U}\| \cos\alpha$

$= \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{U}\| \cos 0$

$= \|\vec{U}\|^2$

Pour tout vecteur $\vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2$

$\vec{U}^2 \geq 0$; $\vec{U}^2 = 0 <=> \vec{U} = \vec{0}$

b- Produits scalaires remarquables

- $(\vec{U} + \vec{V})^2 = (\vec{U})^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V} + (\vec{V})^2$

- $\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + 2\ \vec{U}\,.\,\vec{V} + \|\vec{V}\|^2$
- $(\vec{U} - \vec{V})^2 = (\vec{U})^2 - 2\vec{U}\,.\,\vec{V} + (\vec{V})^2$
- $\|\vec{U} - \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 - 2\ \vec{U}\,.\,\vec{V} + \|\vec{V}\|^2$
- $(\ \vec{U} - \vec{V}\ )(\ \vec{U} + \vec{V}\ ) = \vec{U}^2 - \vec{V}^2$
- $\|\vec{U} + \vec{V}\|\ \|\vec{U} - \vec{V}\| = \|\vec{U}\|^2 - \|\vec{V}\|^2$

Exercice d'application

on donne : $\|\vec{U}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{V}\| = 3$ et $\vec{U}\,.\,\vec{V} = 6$.

Calculer : $(\vec{U} + \vec{V})^2$ et $(\vec{U} - \vec{V})^2$

4- Expression analytique du produit scalaire :

Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ une base de $\boldsymbol{v}$.

Dire que $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ est une base de orthonormé équivaut à : $\begin{cases} \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1 \\ \vec{\imath} \bullet \vec{\jmath} = 0 \end{cases}$

$\|\vec{\imath}\| = 1$ alors $\vec{\imath}$ est un vecteur **unitaire** ou **normé**.

$\vec{\imath} \bullet \vec{\jmath} = 0$ signifie que $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ sont **orthogonaux.**

a- Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormé :

Soit $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ est une base de orthonormé.

Soient $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.

$\vec{U} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$

$\vec{U}\,.\,\vec{V} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) \bullet (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}\,)$

$= xx'\,\vec{\imath}^2 + xy'\,\vec{\imath} \bullet \vec{\jmath} + yx'\vec{\imath} \bullet \vec{\jmath} + yy'\vec{\jmath}^2$

$= xx'\|\vec{\imath}\|^2 + (\,xx' + yx'\,)\,\vec{\imath} \bullet \vec{\jmath} + yy'\,\|\vec{\jmath}\|^2$

Alors $\boxed{\vec{U}\,.\,\vec{V} = xx' + yy'}$

NB :

Si $\vec{U}$ est perpendiculaire à $\vec{V}$ alors $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ c'est-à-dire xx' + yy' = 0

Soit un vecteur $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormé. Le carré scalaire de $\vec{U}$ es t donc

$\vec{U}^2 = x^2 + y^2$ qui est le carré scalaire de $\vec{U}$

b- Normes et distances :

- **Norme :**

Soit un vecteur $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Si $\vec{U}^2 = x^2 + y^2$ alors $\left\|\vec{U}\right\|^2 = x^2 + y^2$ et $\left\|\vec{U}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

- **Distance entre deux points A et B:**

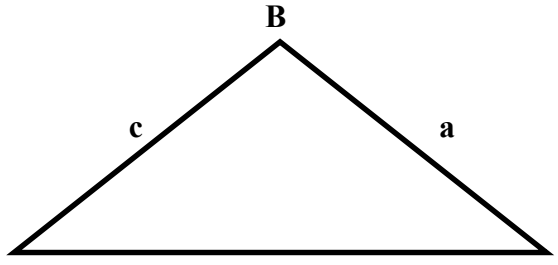
Soient $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

On appelle distance de A à B est le réel noté AB ou d(A ; B) tel que :

AB = d(A ; B) = $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

5- Application du produit scalaire :

Soit A ; B ; C un triangle quelconque :



A **b** **C**

a- <u>Expressions du produit scalaire :</u>

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 =>$

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 =>$

$BC^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} + AB^2 =>$

$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = \frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2}$ ou $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ et

$\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA} = \frac{BC^2+BA^2-CA^2}{2}$ ou $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}$

$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = \frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2}$ ou $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = \frac{b^2+a^2-c^2}{2}$

<u>Expressions du cosinus d'un angle :</u>

$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 =>$

$BC^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AC} \bullet AB \cos\hat{A} + AB^2 =>$

$\cos\hat{A} = \frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AB.AC}$ ou $\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c.b}$

$\cos\hat{B} = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB.BC}$ ou $\cos\hat{B} = \frac{c^2+a^2-b^2}{2c.a}$

$\cos\hat{C} = \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC.BC}$ ou $\cos\hat{C} = \frac{b^2+a^2-c^2}{2b.a}$

<u>En particulier</u>

Si ABC est un triangle rectangle en B et que $\hat{A} = 90°$ alors on a :

$BC^2 = AC^2 - 2AB \bullet AC \cos\widehat{90} + AB^2 = AC^2 + AB^2$ (Théorème de PYTHAGORE)

<u>Exercices d'application</u>

<u>Exercice1 :</u>

On donne les normes suivantes $\left\|\vec{U}\right\| = \sqrt{2}$; $\left\|\vec{V}\right\| = 2$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$

a- calculer : $\vec{U}$ et $\vec{V}$

b- En déduire les valeurs de :

$(\vec{U} + \vec{V})^2$; $(\vec{U} - \vec{V})^2$; $(\overrightarrow{2U} - 3\vec{V})$; $(\vec{U} + 2\vec{V}) \bullet (\overrightarrow{2U} - \vec{V})$; $\left\|\overrightarrow{2U} - 3\vec{V}\right\|$; $\left\|\vec{U} - \vec{V}\right\|$

<u>Exercice2 :</u>

On donne les normes suivantes $\|\vec{U}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{V}\| = 5$ et $\vec{U} \cdot \vec{V} = 7$.

On pose : $\vec{\imath} = 4\vec{U} - \vec{V}$ et $\vec{\jmath} = -3\vec{U} + \vec{V}$.

Montrer que $(\vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ est une base orthonormé du plan .

EXERCICES

Exercices 1 :

1) Calculer $\vec{U} \bullet \vec{V}$ dans chacun des cas suivants :

   a- $\vec{U}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{U}\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   b- $\vec{U}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{U}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

   c- $\vec{U}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$ et $\vec{U}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{3}-2 \end{pmatrix}$.

2) on donne $\|\overrightarrow{U}\| = 4$; $\|\overrightarrow{V}\| = 5$

Calculer : $\|\vec{U} + \vec{V}\|$; $\|\vec{U} - \vec{V}\|$ et $\left\|2\vec{U} - \frac{1}{2}\vec{V}\right\|$ si :

a- $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ sont orthogonaux.

b- $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ ont même sens et sont de même direction.

c- $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ n'ont pas même sens mais ont la même direction.

Exercices 2 :

1) Soient A , B , C trois points non alignés tel que : AB = 4 ; AC = 3 et l'angle ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) = $\frac{2\pi}{3}$.

a- Placer les points A ; B ; C dans le plan.

b- Calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$ et $\left\|2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|$.

c- Déterminer BC^2 puis en déduire la norme de $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

2) Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs d'angle θ et de produit P.

Calculer le produit P dans chacun des cas suivants :

a- $\left\|\overrightarrow{U}\right\|$ = 2 ; $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$ = 3 et θ = $\frac{\pi}{4}rds$; b- $\left\|\overrightarrow{U}\right\|$ = $\frac{5}{3}$; $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$ = $\frac{4}{5}$ et θ = 120°

$c-$ $\left\|\overrightarrow{U}\right\|$ = 5 ; $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$ = $\frac{3}{10}$ et θ = $\frac{5\pi}{6}rds$

3) Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs d'angle θ et de produit P.

Calculer l'angle θ en radians et en degrés dans chacun des cas suivants :

a- $\left\|\overrightarrow{U}\right\|$ = 7 ; $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$ = 8 et P = 25 ; b- $\left\|\overrightarrow{U}\right\|$ = $2\sqrt{3}$; $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$ = 6 et P = - 18

$c-$ $\left\|\overrightarrow{U}\right\|$ = $3\sqrt{2}$; $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$ = $2\sqrt{3}$ et P = - $9\sqrt{2}$

Exercices 3 :

1) on donne $\left\|\overrightarrow{U}\right\|$ = 2 ; $\left\|\overrightarrow{V}\right\|$ = 3 et $\vec{U} \bullet \vec{V}$ = - 4

Calculer les expressions suivantes :

$(\vec{U} + \vec{V})^2$; $(\vec{U} - \vec{V})^2$; $(\vec{U} + \vec{V}) \bullet (\vec{U} - \vec{V})$ et $(2\vec{U} - 3\vec{V}) \bullet (\vec{U} + 2\vec{V})$

2) déterminer le réel x de tel sorte que :

a- $(x\vec{U} - \vec{V}) \bullet \vec{V} = 0$; b- $(2\vec{U} - \vec{V}) \bullet (x\vec{U} + \vec{V}) = 25$

c- $(x\vec{U}+\vec{V})^2 = 25$; d- $(x\vec{U}+8\vec{V})\bullet\vec{V} = 5$

3) Déterminer les réels x et y de tel sorte que :
$(x\vec{U}-y\vec{V})\bullet\vec{U} = -2$ et $(x\vec{U}-y\vec{V})\bullet\vec{V} = 5$

Exercices 4 :

Le plan P est muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 4 et 5.

1) Déterminer le réel x pour que :

a- $(x\vec{U}+\vec{V})\bullet(\vec{U}+\vec{V}) = 13$; b- $(x\vec{U}+\vec{V})^2 = 34$; c- $(x\vec{U}-\vec{V})\bullet(x\vec{U}+\vec{V}) = 23$.

2) Démontrer que deux vecteurs $\vec{G}$ et $\vec{H}$ du plan sont orthogonaux si et seulement si :
$\|\vec{U}+\vec{V}\| = \|\vec{U}-\vec{V}\|$.

Exercices 5 :

On considère un parallélogramme ABCD et on appelle I le point d'intersection des segments $[AC]$ et $[BD]$. On pose : $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{AD}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{U}$ $et\ de$ $\vec{V}$.
2) Que représente le segment $[AI]$ dans le triangle ABD ?
Calculer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\vec{U}$ $et\ de$ $\vec{V}$.
3) Calculer : AB^2 ; AD^2 ; AC^2 et BD^2 en fonction de $\vec{U}$ $et\ de$ $\vec{V}$.
4) Montrer que $2(AB^2 + AD^2) = AC^2 + BD^2$.
5) Déduisez-en que : $AB^2 - AD^2 = 2AI^2 - \frac{BD^2}{2}$.

Exercices 6 :

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.

1) Montrer que $\overrightarrow{AH}^2 = \overrightarrow{CH}\bullet\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AB}$.
2) Déduisez-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si :

$AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC} = HB \times HC$.

Exercices 7 :

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.

1) Montrer que $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BA}$.
2) Déduisez-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si : $\overline{BC} \times \overline{BH} = BA^2$.

Exercices 8 :

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.

1) Démontrer que pour tout M du plan : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$.
   (Cette égalité s'appelle la relation d'Euler).
   Indication : utiliser la relation de CHASLES.
2) Les hauteurs issues de B et C se coupent en un point H.
   Vérifier que : $\overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{HC} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$.
3) Déduisez-en que $\overrightarrow{HA} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$ et donc que H est aussi sur la troisième hauteur.
   Indication : utiliser l'égalité du 1) avec un point M que vous choisirez judicieusement.
4) On donne dans le repère $(0 ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ les points $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a- Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point quelconque du plan.
   Calculer : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB}$.

b- Déterminer puis construire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = -1$.

III- BARYCENTRE DE POINTS PONDERES :

1) Système de points pondérés :

on appelle système de point pondérés tout ensemble du type :
$\{(A_1, \alpha_1), (A_2 ; \alpha_2); \ldots\ldots\ldots; (A_n \ \alpha_n)$ où chaque couple $(A_i ; \alpha_i)$ est appelé point pondéré avec A_i un point et α_i un réel. Chaque α_i est appelé coefficient de pondération.

2) Barycentre de 2 à 3 points pondérés

Activité 1 :

1) Place deux points A et B distincts du plan.

2) Soit G un point du plan tel que $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; En introduisant le point A dans cette relation, exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Activité 2 :

1) Place trois points A, B et C distincts du plan.

2) Soit G un point du plan tel que $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$; En introduisant le point A dans cette relation, exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Définition :

On appelle barycentre du système $\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta)\}$ l'unique point (s'il existe) G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

En fixant A on a : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \iff \overrightarrow{GA}(\alpha + \beta) = -\beta\overrightarrow{AB}$

Si **$\alpha + \beta \neq 0$, on a :**

$$\overrightarrow{GA} = -\frac{\beta\overrightarrow{AB}}{\alpha + \beta}$$

$$\iff - \overrightarrow{AG} = \frac{-\beta}{\alpha + \beta} \bullet \overrightarrow{AB} \ d'où \quad \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \bullet \overrightarrow{AB}$$

Ainsi les points A, B, et leur barycentre G sont alignés, G a pour abscisse $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ dans la graduation d'origine A et de point unitaire B.

3) Construction du barycentre de 2 et 3 points pondérés :

a- Construction de barycentre de 2 points :

Activité1 :

Construis le point G définie dans les deux activités précédentes.

Activité2 :

Détermine puis construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

b- $G_1 = Bar\ \{(A ; 5) ; (B ; 2)\}$
c- $G_2 = Bar\ \{(A ; 3) : B ; -8)\}$
d- $G_3 = Bar\ \{(A ; 1) ; (B ; 5)\}$

b- Construction du barycentre de 3 points :

Activité 3 :

Détermine puis construis le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

1- $G_1 = Bar\ \{(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 3)\}$

2- G_2 = Bar {(A ; 2) ; (B ; -3) ; (C ; 4)}
3- G_3 = Bar {(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 5)}

4- Coordonnées du barycentre de 3 points pondérés :

Dans l'espace affine, le repère (o, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) considérons le système

{(A_1, α_1) ; (A_2, α_2) ; (A_3, α_3)} tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$ alors $\exists$! G $\in \varphi$ tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\overrightarrow{OA_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\overrightarrow{OA_2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\overrightarrow{OA_3}$$

Or $\overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} x_G - x_O = x_G \\ y_G - y_O = y_G \\ z_G - z_O = z_G \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{OA_1} \begin{vmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{OA_2} \begin{vmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{vmatrix}$ $\overrightarrow{OA_3} \begin{vmatrix} x_{A_3} \\ x_{A_3} \\ x_{A_3} \end{vmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\begin{pmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \\ z_{A_1} \end{pmatrix} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\begin{pmatrix} x_{A_2} \\ y_{A_2} \\ z_{A_2} \end{pmatrix} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\begin{pmatrix} x_{A_3} \\ y_{A_3} \\ z_{A_3} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \alpha_3 x_{A_3}}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \\ \dfrac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \alpha_3 y_{A_3}}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \\ \dfrac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3}}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + \alpha_3 x_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ y_G = \dfrac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + \alpha_3 y_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ z_G = \dfrac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \end{cases}$

Exercice d'application :

Déterminer si possible les coordonnées du barycentre G dans chacun des cas suivants :

i. G_1 = Bar {(A ; 5) ; (B ; 2)} avec : A (1 ; 1) et B (-1 ; 2)
ii. G_2 = Bar {(A ; 3) : B ; -8)} avec : A (0 ; 3) et B (4 ; 5)
iii. G_3 = Bar {(A ; 1) ; (B ; 5)} avec : A ($\frac{2}{3}$; 1) et B (- $\frac{1}{3}$; 2)
iv. G_4 = Bar {(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 3)} avec : A(-1 ; 0) ; B(1 ; 2) et C(2 ; 3)
v. G_5 = Bar {(A ; 2) ; (B ; -3) ; (C ; 4)} avec : A(-5 ; 3) ; B(-2 ; 2) et C(2 ; 6)
vi. G_6 = Bar {(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 5)} avec : A(0 ; 0) ; B(1 ; 7) et C(-2 ; 3)

5- Propriétés du barycentre :

- Le barycentre G d'un système ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont choisis ces points pondérés.
  Exemple:

G = Bar $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

G = Bar $\{(B, \beta); (A, \alpha); (C, \gamma)\}$

G = Bar $\{(C, \gamma); (B, \beta); (A, \alpha)\}$

- Le barycentre G d'un système ne change pas en multipliant ou en divisant chaque coefficient de pondération par un constant non nul.

Exemple:

On a G = $\{A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$

$\forall k \in \mathbb{R}^*$; G = (A, $\frac{\alpha}{k}$) ; (B, $\frac{\beta}{k}$) ; (C, $\frac{\gamma}{k}$)

- Le barycentre G d'un système ne change pas lorsqu'on remplace dans le système un certain nombre de points pondérés par leur barycentre partiel G' à condition que ce dernier soit affecté de la somme partielle des coefficients de pondération partielle considérée.

Exemple : G = $\{(A, \alpha) ; (G', \beta+\gamma+\delta \neq 0)\}$

Remarque :

Le barycentre G d'un système du type $\{(A_1 ; \alpha) ; (A_2, \alpha) ; (A_3, \alpha) ;\ldots (A_n ; \alpha)$ avec $\alpha \neq 0\}$ est appelé isobarycentre.

6- Ensemble des barycentres d'un système

a) Ensemble de deux points :

On se rappelle que pour le système {(A, α) ; (B, β)} $\alpha + \beta \neq 0$ on a : en fixant A on a :

$$\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{AB}$$

⇨ G$\in (AB)$

Considérons les systèmes {A, α_i) ; (B, β)} $1 \leq i \leq n$

Si $\alpha_1 + \beta_1 \neq 0 \Rightarrow \exists ! G \in \varphi$ tel que en fixant A on a : $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1}\right)\overrightarrow{AB} \Rightarrow G \in (AB)$

Si $\alpha_2 + \beta_2 \neq 0 \Leftrightarrow \exists ! G_2 \in \varphi$ tel que en fixant A on a : $\overrightarrow{AG}_2 = \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2+\beta_2}\right)\overrightarrow{AB} \Rightarrow G_2 \in (AB)$

⋮

Si $\alpha_n + \beta_n \neq 0 \exists ! G_n \in \varphi$ tel que en fixant A on a : $\overrightarrow{AG}_n = \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right)\overrightarrow{AB}$ => $G_n \in (AB)$

D'où l'ensemble des barycentres des points A et B est engendré par le vecteur ($\overrightarrow{AB}$) donc cet ensemble est la droite affine passant par les deux points A et B.

b) Ensemble de trois points :

On a $\overrightarrow{AG}_n = \left(\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right)\overrightarrow{AB} \Rightarrow G_n \in (AB)$

Rappel : pour {(A, α) ; (B, β) ; (C, γ)} avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et en fixant A $\exists !$

$G \in \varphi / \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G \in$ au plan A, B, C

Considérons les systèmes $\{(A, \alpha_i) ; (B, \beta_i) : (C, \gamma_i)\}$ $1 \leq i \leq n$

Si $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_1 \in \varphi /$ en fixant A

On a : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} + \frac{\gamma}{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G_1 \in$ au plan A, B, C

Si $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_2 \in \varphi /$ en fixant A

On a $\overrightarrow{AG_2} = \frac{\beta_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G_2 \in$ au plan A, B, C

Si $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \neq 0 \Rightarrow \exists ! G_n \in \varphi /$ en fixant A on a :

$\overrightarrow{AG_n} = \frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n+\gamma_n}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma_n}{\alpha_n+\beta_n+\gamma_n}\overrightarrow{AC} \Rightarrow G_n \in$ Au plan A, B, C

D'où l'ensemble des barycentres des points A, B et C est engendré par le plan vectoriel de base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ donc cet ensemble est la droite affine passant par les 3 points A, B, C'est-à-dire le plan ABC.

7- Lignes de niveaux

a- Ligne de niveau de l'application :

P $\longrightarrow$ P

M $\longrightarrow$ $MA^2 + MB^2$

Activité1 :

Soient A et B deux points distincts du plan et I étant le milieu du segment [AB] , M un point quelconque du plan tel que : f(M) = $MA^2 + MB^2$

1) Exprime f(M) en fonction de MI et AB.

2) Détermine puis construis l'ensemble des points M du plan tels que f(M) = k.
(Tu discuteras suivant les valeurs de k où k est un réel non nul).

b- Ligne de niveau de l'application :

$f : M \longrightarrow MA^2 - MB^2$

Activité2 :

Soient A et B deux points du plan.

On considère la fonction f définie par $f(M) = MA^2 - MB^2$.

1) Exprime f(M) en fonction de MA et AB.

2) k étant un réel donné, détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$.

EXERCICES

Exercices 1 :

1) Déterminer puis construire le barycentre G (s'il existe) dans chacun des cas suivants :

1- G_1 = Bar {(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 3)}
2- G_2 = Bar {(A ; 2) ; (B ; -3) ; (C ; 4)}
3- G_3 = Bar {(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 5)}

2) Déterminer si possible les coordonnées du barycentre G dans chacun des cas suivants :

1- G_1 = Bar {(A ; 5) ; (B ; 2)} avec : A (1 ; 1) et B (-1 ; 2)
2- G_2 = Bar {(A ; 3) : B ; -8)} avec : A (0 ; 3) et B (4 ; 5)
3- G_3 = Bar {(A ; 1) ; (B ; 5)} avec : A ($\frac{2}{3}$; 1) et B (- $\frac{1}{3}$; 2)
4- G_4 = Bar {(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 3)} avec : A(-1 ; 0) ; B(1 ; 2) et C(2 ; 3)
5- G_5 = Bar {(A ; 2) ; (B ; -3) ; (C ; 4)} avec : A(-5 ; 3) ; B(-2 ; 2) et C(2 ; 6)
6- G_6 = Bar {(A ; -3) ; (B ; -2) ; (C ; 5)} avec : A(0 ; 0) ; B(1 ; 7) et C(-2 ; 3)

Exercices 2 :

Soit ABC un triangle de dimensions : AB = 9 cm ; AC = 6 cm et BC = 12 cm.

Soit I le milieu du segment$[BC]$ et G le point défini par $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

(On ne demande pas de faire la figure pour le moment).

1) Montrer que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GI}$.
2) En déduire que$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Faire la figure en plaçant le point G.
3) Placer le point D définit par$\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.
4) Justifier que (DG) est parallèle à (BI) et que DG = 4 cm.

Exercices 3 :

Le plan P est muni d'un repère (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). On donne les points A$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; C$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés.
2) G est le point du plan tel que $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
   Montrer que G est le barycentre des points pondérés : (A, a) ; (B, b) ; (C, c)
   où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.
3) On donne a = 2 ; b = - 1 et c = 2.
   a- Construire G ' barycentre des points pondérés : (A, 2) ; (B, - 1) ; (C, 2).
   b- Vérifier cette construction par le calcul des coordonnées de G ' dans le repère (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
4) Déterminer le centre de gravité du triangle ABC.
5) Que signifie I (isobarycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, 1)).
   On ferra une démonstration.

Exercices 4 :

Dans le plan affine euclidien ; on considère un triangle équilatérale A, B, C dont le côté mesure a.

1) Construire le barycentre G du système {(A, 4) ; (B, 1) ; (C, -1)}.
2) Soit f : E → R tel que : f(M) = $4MA^2 + MB^2 - MC^2$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tel que f(M) = $\frac{63a^2}{4}$

Exercices 5 :

Soit A, B, C trois points du plan P tel que AB = AC = 5 cm et BC = 6 cm.

1) Construire le triangle ABC puis calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$
2) Soit G le barycentre des points pondérés {(A, 2) ; (B, 3) ; (C, 3)}. Construire G puis calculer GA.
3) Soit f : P → R
   M→ $2\overrightarrow{MB}\bullet\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\bullet\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}$

a) Exprimer f(M) en fonction de f(G) et MG
b) Calculer f(G).

4) Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que : f(M) = f(A).

Exercices 6:

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives : A (3, 1) ; B (-2, 3) ; C (1, 0)

Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des points 2 ; 1 ; - 1

1) Trouver les coordonnées G
2) Trouver suivant les valeurs du nombre réel k l'ensemble des points M tel que : $2MA^2 + MB^2 - MC^2 = k$

3) Construire les points M du plan tel que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 8$

Exercices 7 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les 4 points A ; B ; C ; D tel que $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

1) Déterminer les coordonnées x et y de D sachant que : $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$
2) Déterminer les réels m et n tels que D soit barycentre des points (A, 1) ; B, m) ; (C, n)
3) Trouver l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 + 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 = k$
4) Déterminer le réel k tel que $A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ soit élément de (E) que l'on représentera.

I- HOMOTHETIE:

Activité :

Soit O un point du plan et k un réel. A partir d'un point quelconque M du plan, construis le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

1- Définition :

Soit O un point du plan et **k** un réel non nul ; on appelle **homothétie** de centre O et de **rapport k non nul**, l'application h du plan **p** dans **p,** qui à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}}$.

2- Notation :

Si h désigne l'homothétie de centre O et de rapport k ≠ 0, pour tout point M du plan, h(M) = M' signifie que $\boldsymbol{\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}}$.

Remarque :

- H(0) = 0, le point O est le seule point invariant par f.
- Si A' est l'image d'un point A dans une homothétie de centre O et de rapport k ≠ 1, les trois points O, A et A' sont alignés.

3- Théorème :

Si A' et B' sont les images respectives de deux points A et B par une homothétie de rapport k , alors on a :

$\boldsymbol{\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}}$.

4- Propriétés :

- l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
- l'image d'une demi- droite par une homothétie est une demi- droite parallèle, de même sens si k > 0 et de sens contraire si k < 0.
- L'image d'un segment par une homothétie est un segment.
- L'image d'un secteur angulaire par une homothétie est un secteur angulaire de même mesure.
- L'homothétie conserve l'alignement, le parallélisme, l'orientation, la nature, des figures et multiplie les distances par $|k|$ donc : (ne conserve pas la distance).

Exercice d'application

1) Soit un segment $[AB]$ non nul, et $[A'B']$ l'image du segment $[AB]$ par une homothétie de centre O et de rapport k = 2.

a- Construire les segments $[AB]$ et $[A'B']$.

b- Calculer $\frac{A'B'}{AB}$ pour k = - 2

2) Soit un triangle ABC quelconque et O un point situé en dehors de ce triangle.

Construire les images respectives A' ; B' ; C' des points A ; B ; C par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$

II- ISOMETRIES DU PLAN:

1- Translation :

Activité :

Soit $\overrightarrow{U}$ un vecteur du plan. A partir d'un point quelconque M du plan, construis le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$.

a- Définition :

On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}$, l'application du plan P dans P qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{U}}$.

b- Notation :

- La translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}$ est notée $t_{\vec{U}}$.
- M' = $t_{\vec{U}}$(M) signifie que $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{U}}$.
- M'est l'image de M par la translation $t_{\vec{U}}$.
- M est l'antécédent de M' par cette translation.
- Si le bipoint (A ; B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{U}}$, alors la translation $t_{\vec{U}}$ peut être noté $t_{\overrightarrow{AB}}$.
- M' = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (M) <=> $\overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

c- Théorème :

Tout point M du plan a un et un seul antécédent, ainsi on dit que $t_{\vec{U}}$ est une bijection du plan sur le plan.

d- Propriétés :

- l'image d'une droite par une translation est une droite parallèle.
- l'image d'une demi- droite par une translation est une demi- droite parallèle.
- L'image d'un segment $[AB]$ est un segment $[A'B']$ de même longueur.
- La translation conserve l'alignement, le parallélisme, la distance, la valeur et l'orientation du plan, la nature des figures et les angles.

Exercice d'application

1) Tracer une droite (Δ). Marquer sur cette droite et dans cet ordre les points A ; B ; C ; D et un point O tels que O est le milieu de $[AB]$ et $[BC]$.
Compléter les pointillés suivants :

a- $t_{\overrightarrow{BD}}$(A) =.....
b- $t_{\overrightarrow{DO}}$(O) =.....
c- $t_{\overrightarrow{CA}}$(D) =.....
d- $t_{\overrightarrow{OA}}$(D) =.....

2) Soit un triangle ABC.
Construire l'image de la droite (BC) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.
3) Construire un cercle (C) de centre O et marque un point A sur ce cercle .
Construire l'image (C') de (C) par la translation de vecteur $\vec{U}$ sachant que $\vec{U} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

2- Symétrie centrale :

Activité :

1) Soit O un point du plan. A partir d'un point quelconque M, construis le point M' tel que O soit le milieu du segment[MM'].

2) Vérifie que pour tout point M de P, on a $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

a- Définition :

On appelle symétrie centrale de centre O, l'application du plan P dans P qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\boldsymbol{\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}}$.

b- Notation :

- La symétrie de centre O est notée $\mathbf{S_O}$.
- M' = S_O(M) signifie que $\boldsymbol{\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}}$.
- M'est l'image de M par la symétrie de centre O.

c- Remarque :

Le point O a pour image lui-même, on dit qu'il est invariant par S_O.

d- Propriétés :

- l'image d'une demi- droite $[OA)$ par une symétrie centrale est une demi- droite $[O'A')$ parallèle et de centre contraire.(O' et A' étant les images respectives de O et de A).
- l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle.
- L'image d'un segment $[AB]$ par une symétrie centrale est un segment $[A'B']$ de même longueur.
- L'image d'un cercle de centre I par une symétrie centrale de centre O est un cercle de centre I' = S_O(I) et de même rayon.
- La symétrie centrale conserve les angles.

Exercice d'application

1) Construire un triangle ABC (AB = AC). Construire le symétrique D de A par rapport au milieu O du segment $[BC]$.
   Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
2) On considère les points A(3 ; 0) ; B(2 ; -3) ; D(0 ; 1) ; F(-1 ; 0)
   dans le repère (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) .
   a- Placer les points A ; B ; D ; F dans le repère (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) .
   b- Déterminer les coordonnées de E symétrique de A dans la symétrie de centre D puis montrer que les points E ; F et B sont alignés.

3- Symétrie orthogonale :

Activité :

Construis deux droites (D) et (D') perpendiculaire en H.

Place un point A et A' sur la droite (D') tel que la distance de A à H soit égale à la distance de A' à H.

a- Définition :

On appelle symétrie orthogonale par rapport à une droite (Δ), l'application du plan P dans P qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

- Si M ∈ Δ , M' est confondu avec M.
- Si M ∉ Δ , alors on projette orthogonalement M en H sur Δ et on prolonge MH d'une longueur HM'.
  La droite Δ est appelé axe de symétrie orthogonale. Elle est **l'ensemble des points invariants par la symétrie orthogonale.**

b- Notation :

- La symétrie orthogonale d'axe Δ est notée $\mathbf{S_\Delta}$.
- M' = S_Δ(M) signifie que M'est l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe Δ.

c- Propriétés :

- l'image d'une droite par une symétrie orthogonale est une droite.
- l'image d'une demi- droite par une symétrie orthogonale est une demi-droite.
- L'image d'un segment $[AB]$ par une symétrie orthogonale est un segment $[A'B']$ de même longueur.
- La symétrie orthogonale conserve les angles et les figures géométriques.

Exercice d'application

1) Tracer une droite Δ et un triangle ABC. Construire le symétrique de ce triangle par rapport à Δ.
2) Tracer une droite Δ et placer sur cette droite deux points A et A' tels que :
   AB = A'B et AC = A'C.

4- Rotation :

a- Définition :

On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ, l'application du plan P dans P qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : r (Ω ; θ) (M) = M'

b- Notation :

- La rotation de centre Ω et d'angle θ est noté **r (Ω ; θ) .**
- r (Ω ; θ) (M) = M' signifie que M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ.

c- Propriétés :

- l'image d'une droite par une rotation est une droite.
- l'image d'une demi- droite par une rotation est une demi-droite.
- L'image d'un segment $[AB]$ par une rotation est un segment $[A'B']$ de même longueur.
- La rotation conserve l'alignement, la nature des figures, l'orientation des angles et la distance.

Exercice d'application

Soient : A(1 ; 0) ; B(2 ; 1) deux points du plan

Tracer l'image A'B' de AB par une rotation de centre $\Omega(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$ et d'angle $\theta = \frac{-\pi}{2}$

EXERCICES

Exercices 1 :

Soit ABC un triangle quelconque et O un point n'appartenant pas au triangle.

1) Construire le triangle ABC puis les images A' ; B' ; C'des points A ; B ; C par l'homothétie de centre O et de rapport $k = \frac{1}{2}$.
2) Expliquer pourquoi l'image du triangle ABC est le triangle A'B'C'.

Exercices 2 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), on donne les points A$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

B$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; C$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les distances : d(A , B) ; d(A , C) ; d(B , C). En déduire la nature du triangle ABC.
2) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a- Calculer les coordonnées de son centre Ω puis son rayon R.
   b- Montrer que le point D$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient a ce cercle.
3) Calculer les coordonnées du point E, image de A dans l'homothétie de centre B et de rapport k = $\frac{1}{2}$.
4) Trouver une équation de la médiatrice du segment$[AB]$.

Exercices 3 :

Soit ABC un triangle quelconque et G son centre de gravité.

1) Faire la Construction puis placer le point G.
2) Construire l'image de ce triangle par l'homothétie de centre G et de rapport k = $\frac{-1}{2}$.
3) Quel est le centre de gravité du nouveau triangle ? Justifier votre réponse.

Exercices 4 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), on donne les points A , B, C et D tel que : $\overrightarrow{OA} = 6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\imath} + 7\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OC} = 12\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{OD} = 9\vec{\imath} + 7\vec{\jmath}$.

1) Montrer que le point C est l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport k = 2.
2) Calculer les distances AB ; AD et BD puis en déduire la nature du triangle ABD ?

Exercices 5 :

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment$[BC]$.

1) Construire le triangle ABC et le point I.
2) Construire le point D symétrique de A par rapport à I.
3) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.
4) Compléter les pointillés suivants :
   a- $t_{\overrightarrow{AB}}$(C) = …….
   b- $t_{\overrightarrow{AI}}$(I) = …….

Exercices 6 :

1) Tracer une droite (Δ) puis marquer sur cette droite et dans cet ordre les points A , B , C , D et un point O tels que O soit milieu des segments : $[AD]$ et $[BC]$.
2) Compléter les Compléter les pointillés suivants :

   a- $t_{\overrightarrow{BD}}$(A) = …….

   $b - t_{\overrightarrow{DO}}$(O) = …….

   c- $t_{\overrightarrow{CA}}$(D) = …….

   d- $t_{\overrightarrow{OA}}$(D) = …….

Exercices 7 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$), on donne les points :

A$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de la progression de l'énoncé.
2) Calculer les distances: AB ; BC et CA puis démontrer que le triangle ABC est rectangle.
3) Soit un point M milieu du segment $[AC]$ et D le symétrique de B par rapport à M.
   a- Déterminer les coordonnées du point M et celles de D.
   b- Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
4) Soit P l'image de O par la translation du vecteur$\overrightarrow{AC}$.

Déterminer les coordonnées du point P.

5) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a- Justifier que les points D et O appartiennent au cercle (C).
   b- Démontrer que la droite (OP) est tangente au cercle (C) .
   c- Trouver une équation de la droite (OP).

Exercices 8 :

1) Tracer une droite (Δ) et un triangle ABC. Construire le symétrique de ce triangle par rapport à (Δ).
2) Tracer deux cercles de centres O et O' sécants en A et B. Démontrer que A et B sont symétriques par rapport à (OO').

Exercices 9 :

Dessine une droite (Δ) et un segment $[AB]$ n'ayant aucun point commun avec (Δ).

Soit M le milieu de$[AB]$.

1) Construire les images respectives : A' ; B' ; C' de A ; B ; M par la symétrie d'axe (Δ).
2) Démontrer que M'appartient à (A'B').
3) Démontrer que A'M' = BM'. Que représente le point M' pour le segment $[A'B']$?

Exercices 10:

1) Soient : A(1 ; 0) ; B(2 ; 1) deux points du plan

Tracer l'image A'B' de AB par une rotation de centre Ω$(\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})$ et d'angle $\theta = \frac{-\pi}{2}$.

2) Soit ABC un triangle quelconque.

a- Faire la Construction.

b- Construire l'image de ce triangle par une rotation de centre Ω(1 ; 2) et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Exercices 11:

Soit un triangle isocèle ABC (AB = AC) et O le milieu du segment $[BC]$.

1) Construire le triangle ABC et marquer le point O.

2) Déterminer l'image du triangle ABC par la rotation de centre O et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Géométrie dans l'espace

I- Présentation d'un solide dans le plan

1) La perspective cavalière :

Définition :

On appelle perspective cavalière, toute représentation d'une figure géométrique dans l'espace dont :

- Les **faces frontales** sont perpendiculaires au regard.
- Les droites perpendiculaires aux faces frontales s'appellent les **fuyantes**.
- L'angle que fait toute fuyante avec l'horizon, noté **α**, s'appelle **l'angle de fuite.**
- Le rapport entre la dimension sur les fuyantes, noté **k**, s'appelle le **coefficient de fuite.**

Règles :

N^{0} 1 : les arêtes vues sont représentées en trait plein et les arêtes cachées en pointillés.

N^{0} 2 : Les faces frontales sont présentées en vraie grandeur (sans changer leurs formes).

N^{0} 3 : le parallélisme de deux droites est conservé sur la représentation en perspective cavalière.

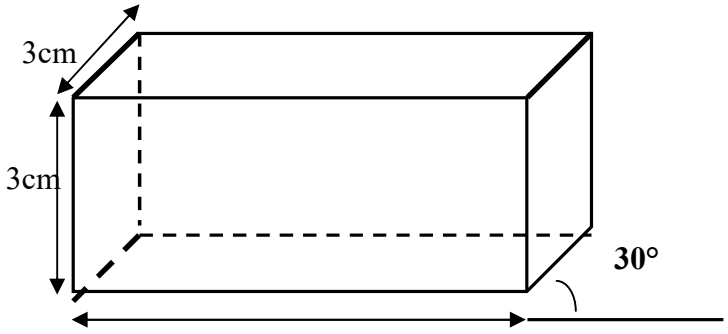
N^{0} 4 : des points alignés sont représentés par des points alignés (ou un seule point).

N^{0} 5 : le rapport des longueurs d'un même plan de fuite est conservé, en particulier le milieu d'un segment.

Remarque : sur les faces fuyantes, ni les angles, ni les longueurs ne sont conservés.

Activité :

Utilise les règles ci-dessus pour représenter en perspective cavalière, un parallélépipède rectangle de dimension : 3cm x 3cm x 3cm avec α = 30° et k = 0,5.



6 x k = 6 x 0,5 = 3cm

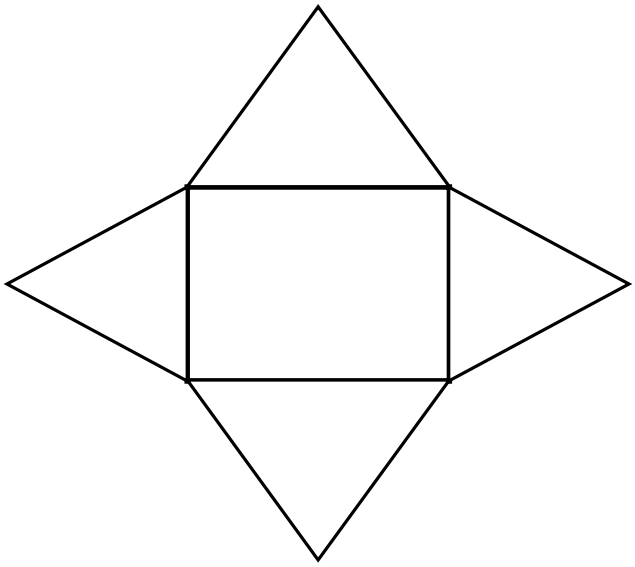
NB : les frontales sont représentés en trait foncés.

Les fuyants sont représentés en trait claire.

1- Le patron :

Définition :

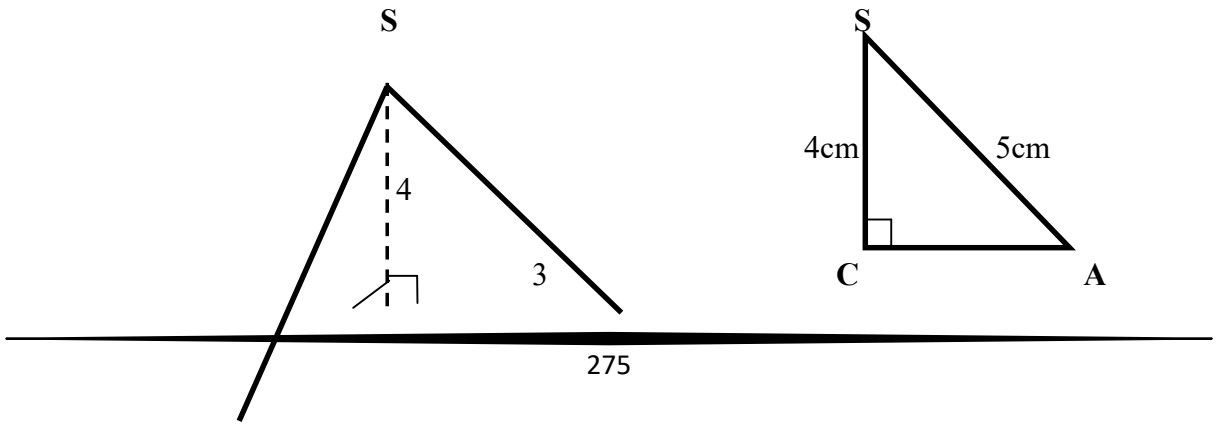
Le patron d'un solide, constitué de deux faces, est une représentation plane des faces de ce solide en vraie grandeur.

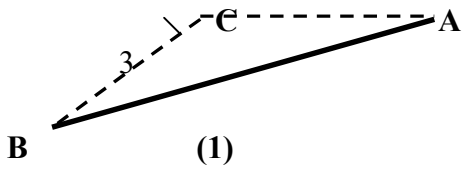


Remarque : pour réaliser le patron d'un solide, on découpe certaines **arêtes** pour déployer le patron dans un plan ; un solide peut être représenté par plusieurs patrons différents ; certains solides comme la sphère n'ont pas de patron.

Exemple :

On a représenté un tétraèdre ABCS en perspective cavalière.
SB = SA = 5cm ; SC AB = 4cm et CB = CA = 3cm **(1)**





(2)

(1)

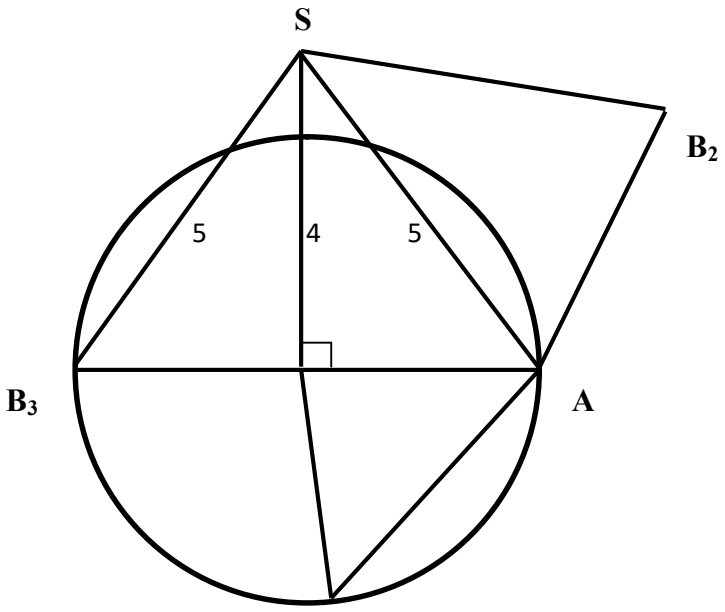
Recopie et complète, à la règle et au compas, le patron de cette pyramide en respectant les dimensions affichées.

On commencera par tracer le triangle SAC puis le segment $[CB]$ comme indiqué en **(2)**

Solution

Règle :

N^{0} 1 : on trace un premier cercle de centre A et de rayon 4.
N^{0} 2 : on trace un deuxième cercle de centre C et de rayon 3.
N^{0} 3 : on trace un troisième cercle de centre S et de rayon 5.
N^{0} 4 : les intersections des cercles déterminent les points manquants du patron.



B_1

NB : les points manquants étaient : B_1 ; B_2 ; B_3

II- Points, droites et plan

1) Les règles d'indice :

a- Définition

Des points sont dits **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan.

b- Propriétés

- Une seule droite passe par deux points **distincts** de l'espace.

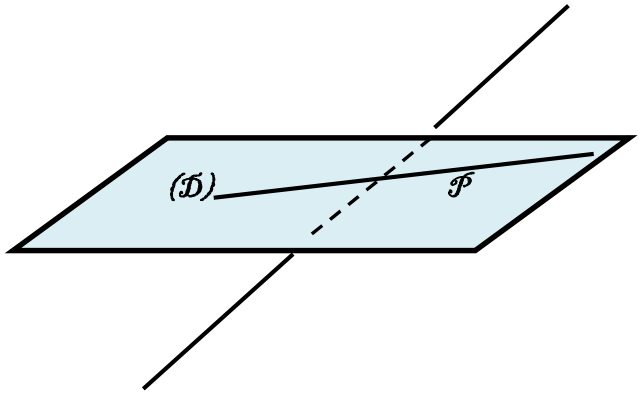
La droite qui passe par deux points est notée : ≪ **droite (AB)** ≫.

- Un seul plan passe par trois points non alignés de l'espace.
- Le plan qui passe par trois points **non alignés** A, B et C est noté : ≪ **plan (ABC)** ≫.
- Deux points d'un plan déterminent une droite qui est **contenue** dans ce plan.

2) Position relative de deux droites distinctes

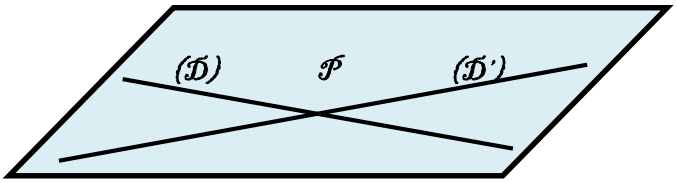
a- Définition

Deux droites contenues dans un même plan sont dites **coplanaires.**
S'il n'existe aucun plan contenant deux droites, elles sont dites **non coplanaires.**

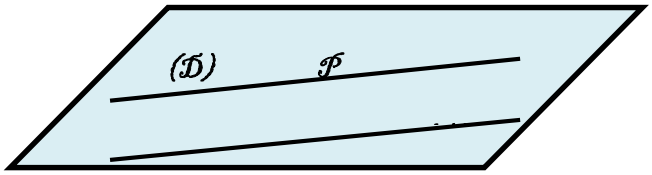


b- Propriétés :

- Deux droites sécantes sont coplanaires



- Deux droites parallèles sont coplanaires



- Deux droites sont strictement parallèles si elles sont coplanaires et si elles n'ont aucun point commun.

Remarque : deux droites confondues sont dites parallèles au sens large.

3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

a- Définition

- Une droite et un plan qui n'ont qu'un seule point commun sont dits **sécants.**

- Une droite et un plan qui n'ont aucun point commun sont dits **parallèles.**
- Si deux points distincts d'une droite sont dans un plan, la droite qui les joint est contenue dans ce plan.

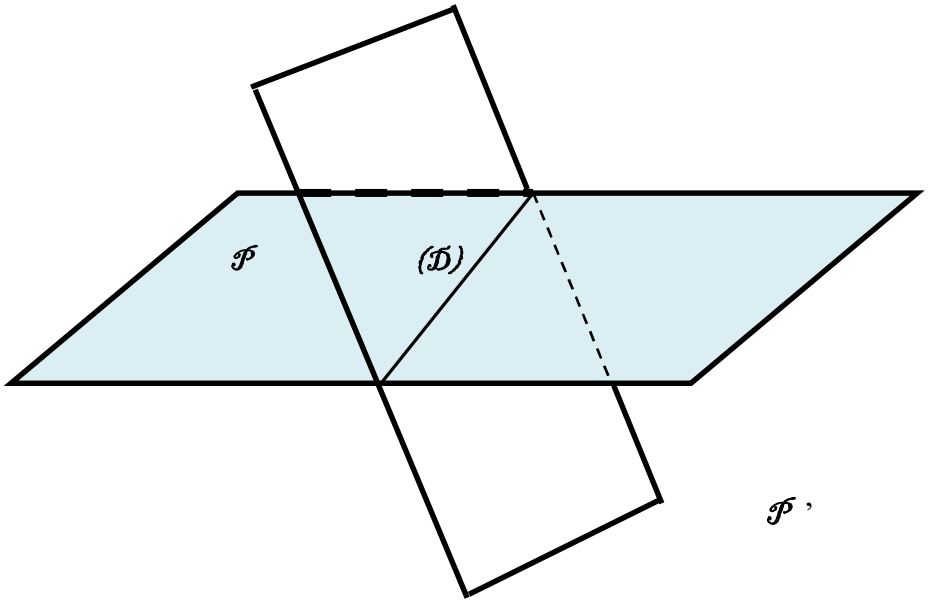
b- <u>Propriété</u>

Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan.

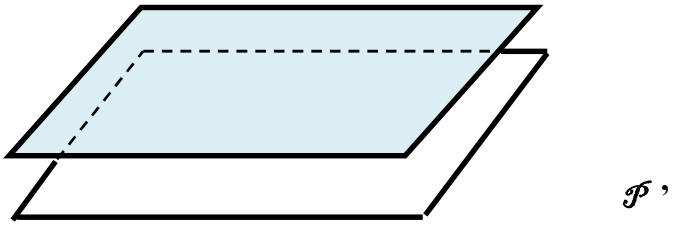
4) <u>Position relative de deux plans distincts :</u>

<u>Propriétés :</u>

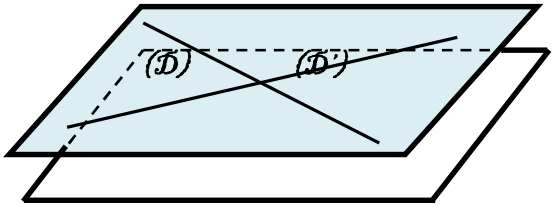
- Deux plans sécants ont pour intersection une droite.



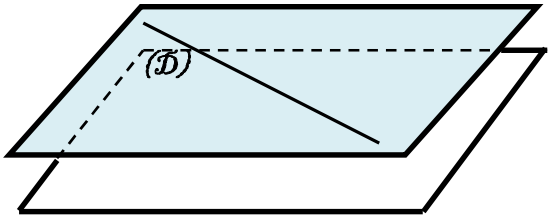
- Deux plans sans point commun sont parallèles.



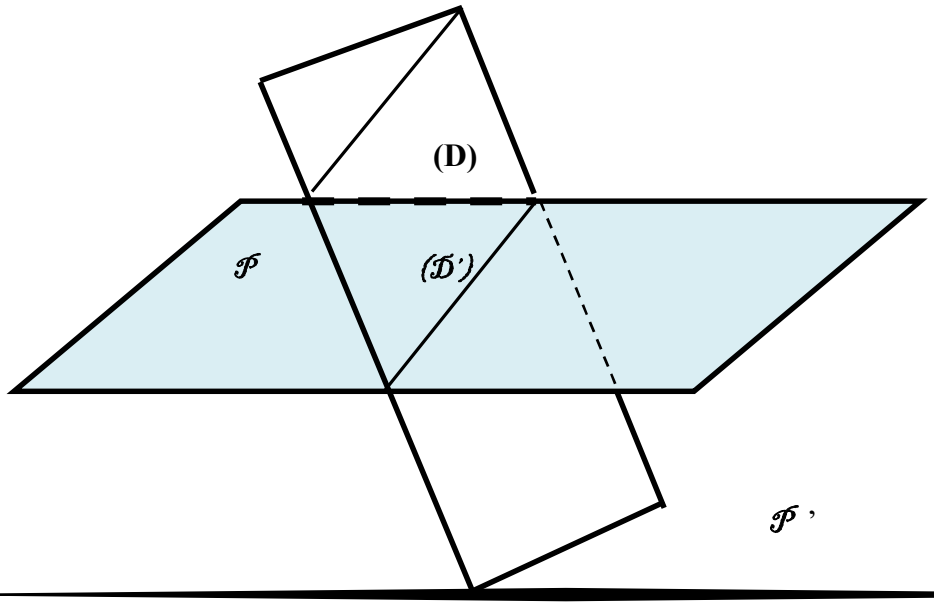
- Si deux droites sécantes sont parallèles à un plan, le plan qu'elles déterminent est parallèle à l'autre plan.



- Si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à l'autre plan.

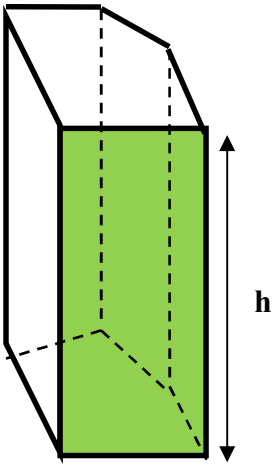


- Si une droite est parallèle à un plan, tout plan contenant cette droite et sécante à ce plan, coupe celui-ci suivant une droite parallèle.



III-FIGURES GEOMETRIQUES DANS L'ESPACE

1) Prisme droit :

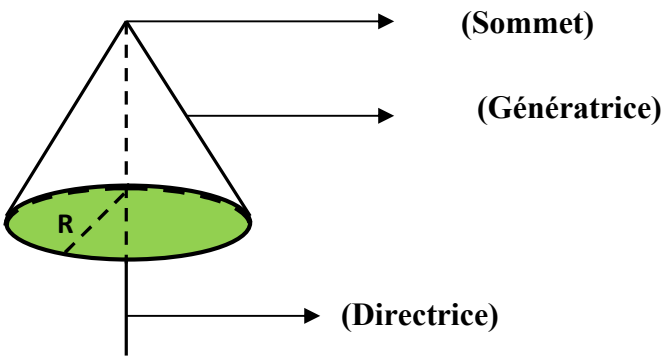


Prisme : polyèdre constitué par deux bases polygonales superposables situées dans deux plans parallèles et par des parallélogrammes (surface latérale) « joignant » les bases. On appelle aussi *prisme* le solide intérieur à cette surface.

La *hauteur* d'un prisme est la distance entre les plans des deux bases. Un prisme *tronqué* est la partie d'un prisme comprise entre l'une de ses bases et la section formée par un plan non parallèle à la base, mais coupant toutes les arêtes latérales, comme sur la figure. On obtient le volume V d'un prisme en multipliant l'aire B de la base par la hauteur h, soit $V = Bh$. Si a, b et c sont les longueurs des trois arêtes d'un parallélépipède rectangle qui se coupent en un sommet (la longueur, la largeur et la hauteur d'un pavé), le volume est donné par la formule : $V = abc$. En particulier, si a est la longueur de chacune des douze arêtes d'un cube, le volume du cube est $V = a^3$, et l'aire totale S des faces du cube est $S = 6a^2$.

Volume = aire de la base x hauteur < = > $V = Bh$

2) Cône :



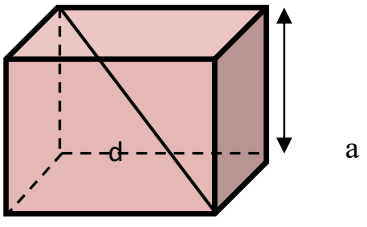
<u>Cône</u> : surface engendrée par le déplacement d'une droite, dont un point S est fixe, et qui s'appuie sur une courbe fermée située dans un plan ne contenant pas le point fixe S.

La droite est la génératrice, le point fixe **S** est le sommet et la courbe fermée est la directrice du cône (appelée aussi base). La génératrice étant de longueur infinie, elle engendre deux nappes infinies situées de part et d'autre du sommet. Si la directrice du cône est un cercle, le cône est un « cône à base circulaire ».

Les cônes circulaires obliques ont un axe qui n'est pas perpendiculaire au plan de la base. La surface appelée communément cône est en fait un cône droit à base circulaire, c'est-à-dire tel que le sommet **S** est sur la perpendiculaire à la base passant par le centre du cercle, droite appelée l'axe du cône. Il est aussi appelé cône de révolution, car il peut être engendré par la rotation d'une droite d'un plan autour d'un axe du même plan, la droite et l'axe se coupant en un point qui est le sommet du cône

Volume $= \frac{1}{3}$ **x** π **x (rayon)**^{2} **x (hauteur)** $<=>$ **V** $= \frac{1}{3}\pi R^2 h$

3) <u>Cube :</u>



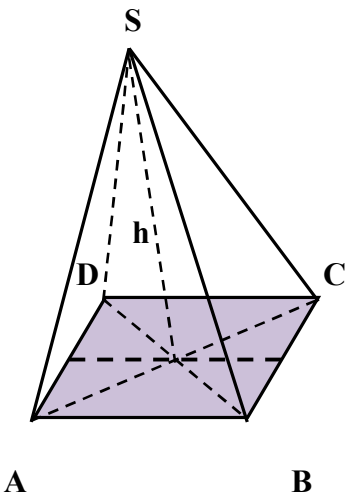
Cube : polyèdre régulier à six faces, chaque face étant un carré.

Si *a* est la longueur de l'une des **12** arêtes, l'aire totale de la surface du cube est $\mathbf{6}\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}$ et le volume est $\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}$. Le cube possède un centre de symétrie, **3** axes de symétrie et **5** plans de symétrie.

Volume = (longueur des arêtes)^3 < = > V = a^3 et d = a$\sqrt{3}$

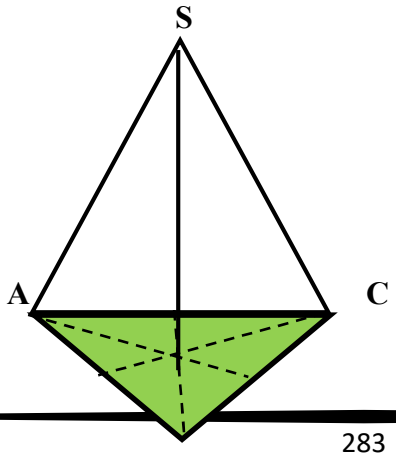
4) <u>Pyramide et tétraèdre :</u>

a- <u>Pyramide régulière à base carrée</u> (autres faces triangles isocèles)



(Fig 1)

b- <u>Pyramide régulière à base triangulaire ou tétraèdre</u>
(autres faces triangles équilatéraux)



B

(Fig 2)

Pyramide : polyèdre formé d'un polygone plan et de tous les triangles ayant pour sommet un même point extérieur au plan (sommet de la pyramide) et un côté commun avec les côtés du polygone. On appelle aussi pyramide le solide limité par ce polyèdre.

Le polygone est la base de la pyramide, et la pointe en est le sommet. La hauteur d'une pyramide est la distance du sommet au plan de la base.

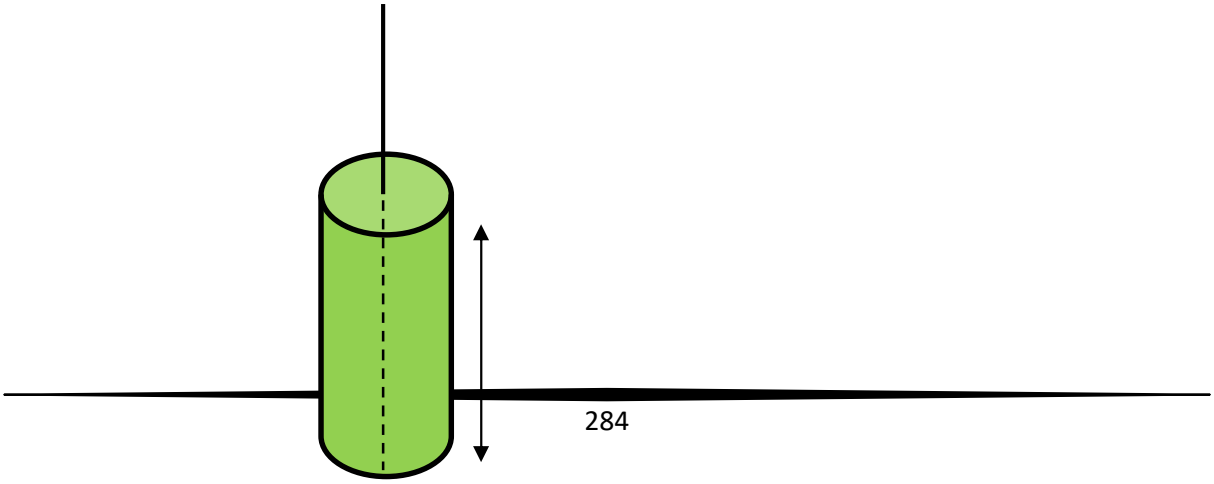
Le nom d'une pyramide dépend de la forme de sa base. Par exemple, une pyramide carrée a une base carrée **(voir figure 1)** et une pyramide triangulaire **(voir figure 2)** est également appelée **tétraèdre**. Elle est constituée de quatre triangles, chacun d'eux pouvant être à son tour considéré comme la base.

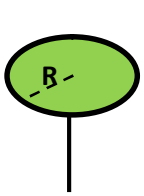
Une pyramide régulière a pour base un polygone régulier et un sommet situé sur la perpendiculaire à la base au centre du polygone. L'apothème d'une pyramide régulière est la distance du sommet à tout côté de la base.

L'aire latérale d'une pyramide est la somme des aires des faces latérales. L'aire latérale d'une pyramide régulière est égale à $\frac{ap}{2}$, où **a** est la longueur de l'apothème et **p** le périmètre de la base. Le volume d'une pyramide quelconque est $\frac{hk}{3}$, où **h** est la hauteur de la pyramide et **K** l'aire de la base. Ainsi, le volume d'une pyramide est égal à un tiers du volume d'un prisme de même base et de même hauteur.

Volume = $\frac{1}{3}$ x (aire de la base) x(hauteur) < = > V = $\frac{1}{3}$ k h

5) <u>cylindre :</u>





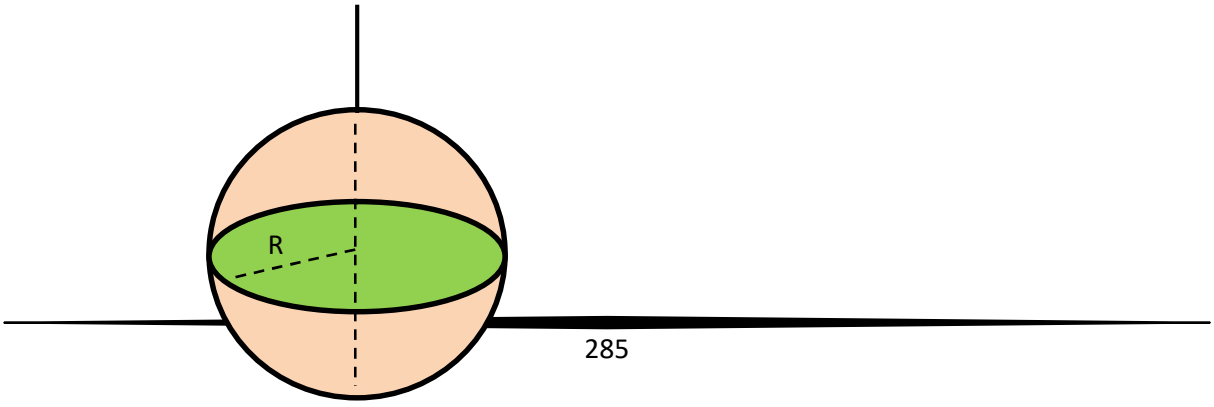
Cylindre : surface (appelée aussi surface cylindrique) engendrée par une droite (appelée génératrice) qui se déplace en gardant une même direction et en s'appuyant sur une courbe (appelée directrice).

On appelle aussi cylindre le solide limité par cette surface (appelée alors surface latérale) et par deux plans parallèles définissant, par leurs intersections avec la surface, deux bases. La directrice peut être une courbe quelconque. Si c'est une ellipse ou un cercle, le cylindre est dit *elliptique* ou *circulaire.* Le cylindre est dit *droit* si la génératrice est perpendiculaire à la directrice ; dans le cas contraire, il est dit *oblique.* Dans un cylindre circulaire droit délimité par deux plans parallèles, la surface latérale a pour aire $2\pi rh$ où r est le rayon des cercles constituant les bases et h la distance entre celles-ci. L'aire totale du cylindre (bases incluses) est donc $2\pi r(r+h)$. Le volume de ce cylindre est $\pi r^2 h$. De façon plus générale, le volume d'un cylindre ayant pour directrice une courbe fermée délimitant une surface d'aire **B** et dont les deux plans parallèles sont séparés par une distance h a un volume égal à Bh. (Voir figure).

- **Aire latérale = 2π(rayon)x(hauteur) < = > A = 2π Rh**

- **Volume = π (rayon)^2 (hauteur) < = > V = π R^{2}h**

6) Sphère :



Sphère : surface de l'espace à trois dimensions dont chaque point est à égale distance (appelée rayon) d'un point donné (appelé centre) ; sphère est également le nom donné au solide délimité par cette surface.

Une sphère présente le même aspect quel que soit l'angle d'observation. Une sphère peut être engendrée par la rotation dans l'espace d'un demi-cercle ou d'un cercle autour d'un de ses diamètres. Si ***r*** est le rayon de la sphère, son volume est égal à $\mathbf{p}r^3$ et sa surface est égale à $\mathbf{4p}r^2$.

La sphère a de nombreuses propriétés intéressantes. C'est aussi une figure qui intervient souvent dans la nature et dans l'Univers. C'est en effet la forme d'équilibre d'une substance fluide (bulles de savon, gouttelettes d'eau) soumise à des forces internes, ou de surfaces homogènes et isotropes (égales dans toutes directions). C'est, pour la même raison (à l'aplatissement près), la forme de la Terre, des planètes ou des étoiles (Soleil, par exemple). Sur la sphère, on peut définir comme dans le plan des triangles (dits sphériques), ce qui permet de développer toute une branche particulière de la trigonométrie, très utilisée en géodésie et en navigation.

- **Aire $= 4\pi(\text{ rayon})^2 <=> A = 4\pi R^2$**

- **Volume $= \frac{4}{3}\pi(\text{rayon})^3 <=> V = \frac{4}{3}\pi R^3$**

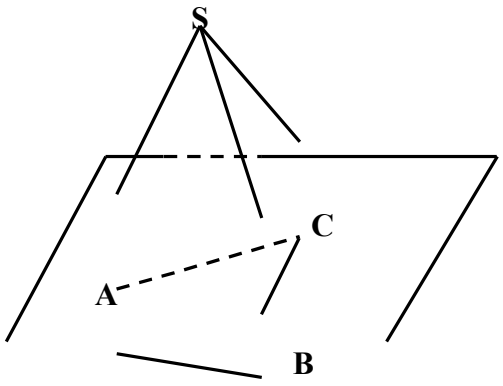
EXERCICES

Exercices 1 :

Dessiner en perspective cavalière, à la règle et au compas, un cube ABCDEFGH de coté 5 cm, d'angle de fuite 30° et de coefficient de fuite 0,5.

Exercices 2 :

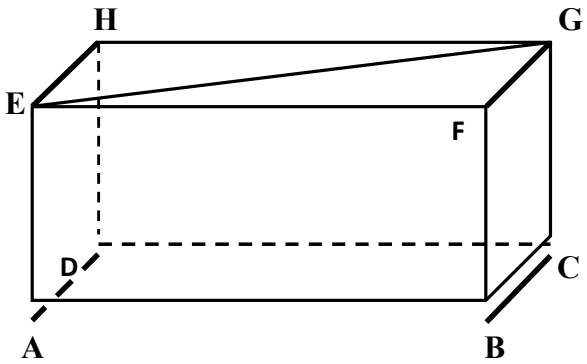
Soit ABCS une pyramide avec I un point du segment $[SA]$ distincts de A et S. Soit J un point du segment $[SB]$ distincts de B et S.



Tracer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).

Exercices 3 :

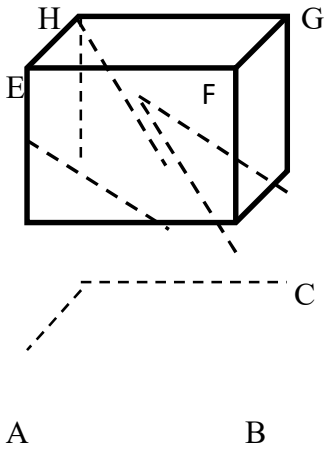
Soit ABCDEFGH un parallélogramme rectangle. Soit I le milieu du segment $[AD]$.



Déterminer l'intersection des plans (EDG) et (HGI).

Exercices 4 :

Soit ABCDEFGH un cube, K milieu du segment$[DC]$. Soit I le milieu du segment$[EF]$.



Démontrer que les plans (EHK) et (BCI) sont parallèles.

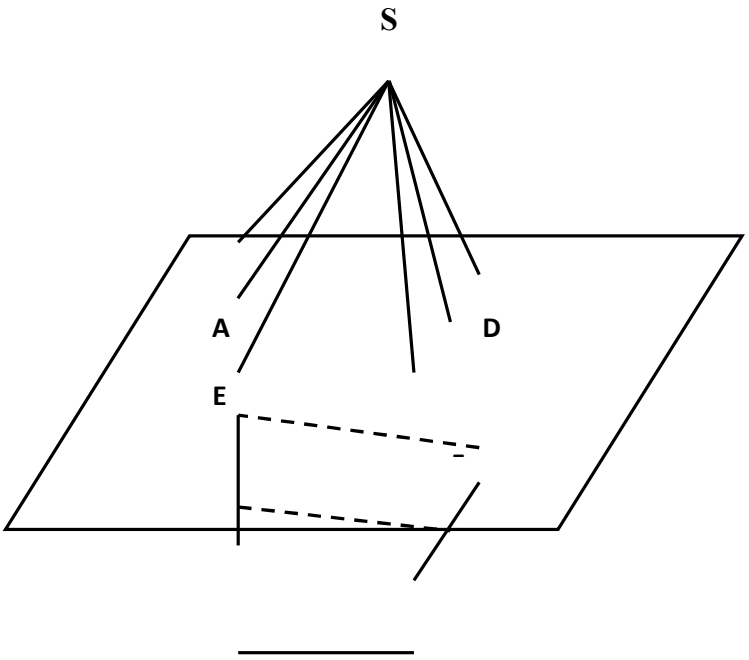
Exercices 5 :

Soit ABCS une pyramide de sommet S.

I et J sont des points des faces SAB et SCD qui n'appartiennent pas aux segments des faces.

La droite (SI) coupe (AB) en F.

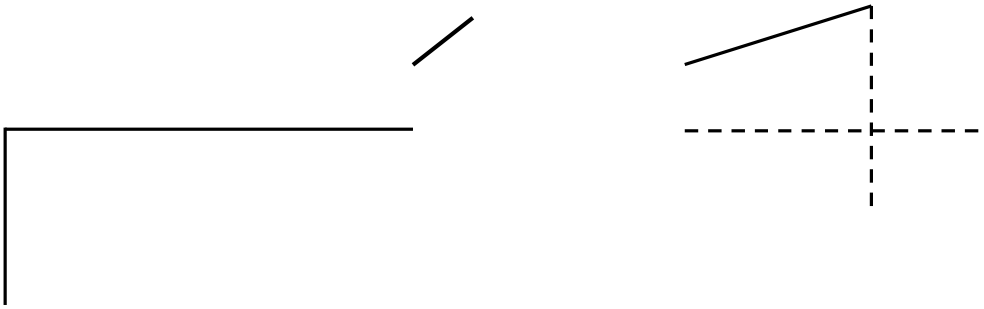
La droite (IJ) coupe (CD) en F.



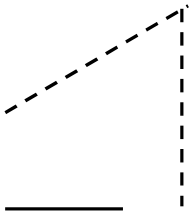
1) Les droites (IJ) et (EF) sont elles sécantes ?
2) Les droites (IJ) et (BC) sont elles sécantes ?

Exercices 6 :

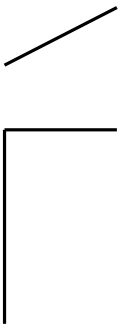
Reproduire et compléter, quand cela est possible, les dessins suivants pour obtenir une perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle.



(fig1)



(fig2)

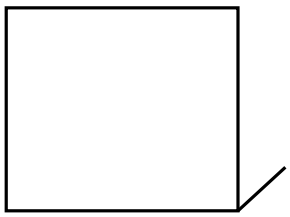


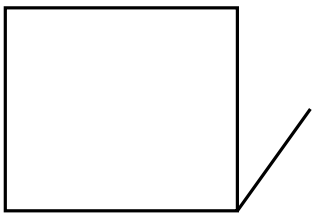
(fig3)

(fig4)

Exercises 7:

Reproduire et compléter, quand cela est possible, les dessins suivants pour obtenir une perspective cavalière d'un cube.

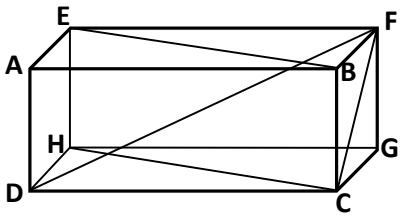




Exercice 8:

Un parallélépipède rectangle est représenté en perspective cavalière avec pour face frontale le rectangle ABCD. Quelques diagonales ont été tracées.

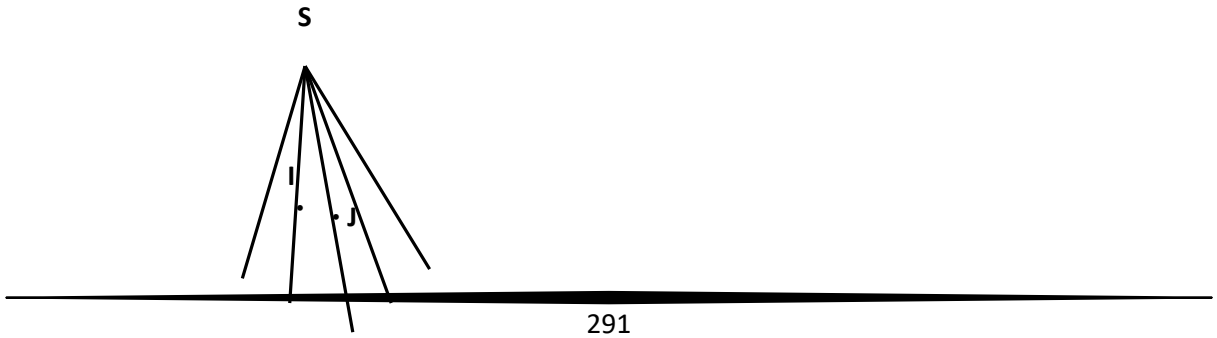
Indiquer les segments susceptibles d'être en pointillés.

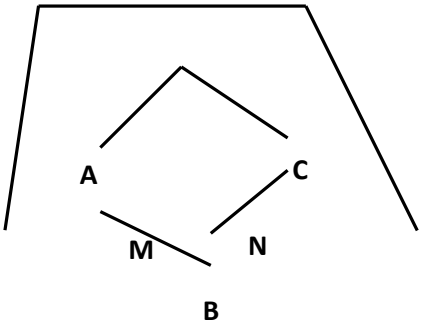


Exercice 9:

Soit ABCDS un tétraèdre. On considère les points M et N respectivement sur les segments $[AB]$ et $[BC]$. Soit I et J deux points situés respectivement sur les segments $[SM]$ et $[SN]$.

Reproduire ci-dessous puis étudier l'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).




A
C
M
N
B

statistiques

I- Vocabulaire de la statistique

Evaluation diagnostique

Activité

Voici une liste de notes attribuées à 30 élèves d'une terminale :

- 13 personnes on une note comprise entre 0 et 3.
- 9 personnes on une note comprise entre 3 et 8.
- 4 personnes on une note comprise entre 8 et 10.
- 3 personnes on une note comprise entre 10 et 15.
- 2 personnes on une note comprise entre 15 et 18.

Utilise le tableau ci-dessous pour Classer ses notes dans des intervalles bien déterminés.

Nombre d'élève	Intervalles de notes attribuées

Solution

Nombre d'élève	Intervalles de notes attribuées
13	[0 ; 3 [
9	[3 ; 8 [
4	[8 ; 10 [
3	[10 ; 15 [
1	[15; 18 [

Le faite que tu est classé ses notes donne la notion de statistique.

1- Définition :

D_1 : La statistique est un ensemble de données chiffrés ou non.

D_2 : La statistique est la branche de la mathématique qui consiste à regrouper les données ; à les analyser et à tirer des conclusions.

Comme toutes les sciences, la statistique fait appel à un langage spécialisé.

2- Langage statistique :

a- Notion de population et d'individu :

L'ensemble sur lequel porte l'étude statistique est appelé la population, un élément de cet ensemble est l'individu.

N.B : En statistique, les mots (population – individu) peuvent désigner des êtres ou des objets animés ou inanimés.

b- Caractères et modalités :

Dans l'étude de statistique d'une population, l'attention est portée généralement sur un événement commun à tous les membres de la population : c'est le caractère.

Exemple : Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités : marié, divorcé, célibataire, veuf.

Il existe deux sortes de caractères : **Les caractères qualitatifs et les caractères quantitatifs.**

- **Caractères qualitatifs :**

Un caractère est dit qualitatif si ses différentes modalités ne sont pas mesurables.

Exemple : La situation matrimoniale ; le sexe, la profession, la nationalité….

- **Caractères quantitatifs :**

Un caractère est dit quantitatif si ses différentes modalités sont mesurables c'est à dire des nombres.

Exemple : l'âge, la taille, le poids…….

Un caractère quantitatif peut être discret (discontinue) ou (continue)

Un caractère quantitatif est dit discret si ses valeurs prises sont isolées.

Exemple : le nombre de frère de chaque élève, le nombre de femme…..

Un caractère quantitatif est dit continu si ses valeurs prises sont en nombre infini dans un intervalle.

Exemple : la température du corps, la taille, l'âge…;

c- Echantillon :

L'étude d'un caractère sur une grande population est parfois sensible et coûteux.

Exemple : recensement de population, enquête etc… c'est pourquoi on étudie ce caractère sur un petit groupe de cette membre de cette population : c'est l'échantillon.

II- Présentation des données statistiques :

Plusieurs méthodes sont utilisées par les organismes de la statistique pour la collecte des données statistiques. Les données ayant été recueillis et est nécessaire dans une première phase de les grouper, de les présenter sous forme de tableau et de représentation graphique.

1- Cas d'un caractère qualitatif :

a- Tableau statistique :

Exemple : l'étude du caractère situation matrimoniale sur 10 élèves d'une classe a donné le résultat suivant :

A : marié

B : Divorcé

C : Célibataire

D : Célibataire

E : Marié

F : Veuf

G : Divorcé

H : Célibataire

Modalité (x_i)	Nombre d'élément (n_i)
Marié	3
Célibataire	4
Divorcé	2
Veuf	1
Total	10

I : Célibataire

J : Marié

Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités; on dresse un tableau à deux colonnes.

- 1ère Colonne contient la nomenclature des différentes modalités. On la note x_i
- La 2ème Colonne contient le nombre d'élément de chaque modalité. On la note n_i.

n_i est l'effectif relatif de la modalité xi. C'est le nombre d'élément présentant la modalité x_i.

Exemple : $n_1 = 3$, $n_2 = 4$, $n_3 = 2$, $n_4 = 1$ (d'après le tableau).

Alors $N = \sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$

N est appelé somme des ni.

A ce tableau, on peut ajouter une 3ème colonne ; celle des **fréquences notés f_i** tel que **f_i =** $\frac{n_i}{N} = \frac{effectif\ relatif}{effectif\ total}$

Modalités	**Nombre d'éléments**	**Fréquences**
(x_i)	(n_i)	(f_i)
Marié	3	3/10 = 0,3
Célibataire	4	4/10 = 0,4
Divorcé	2	2/10 = 0,2
Veuf	1	1/10 = 0,1
Total	10	10/10 = 1

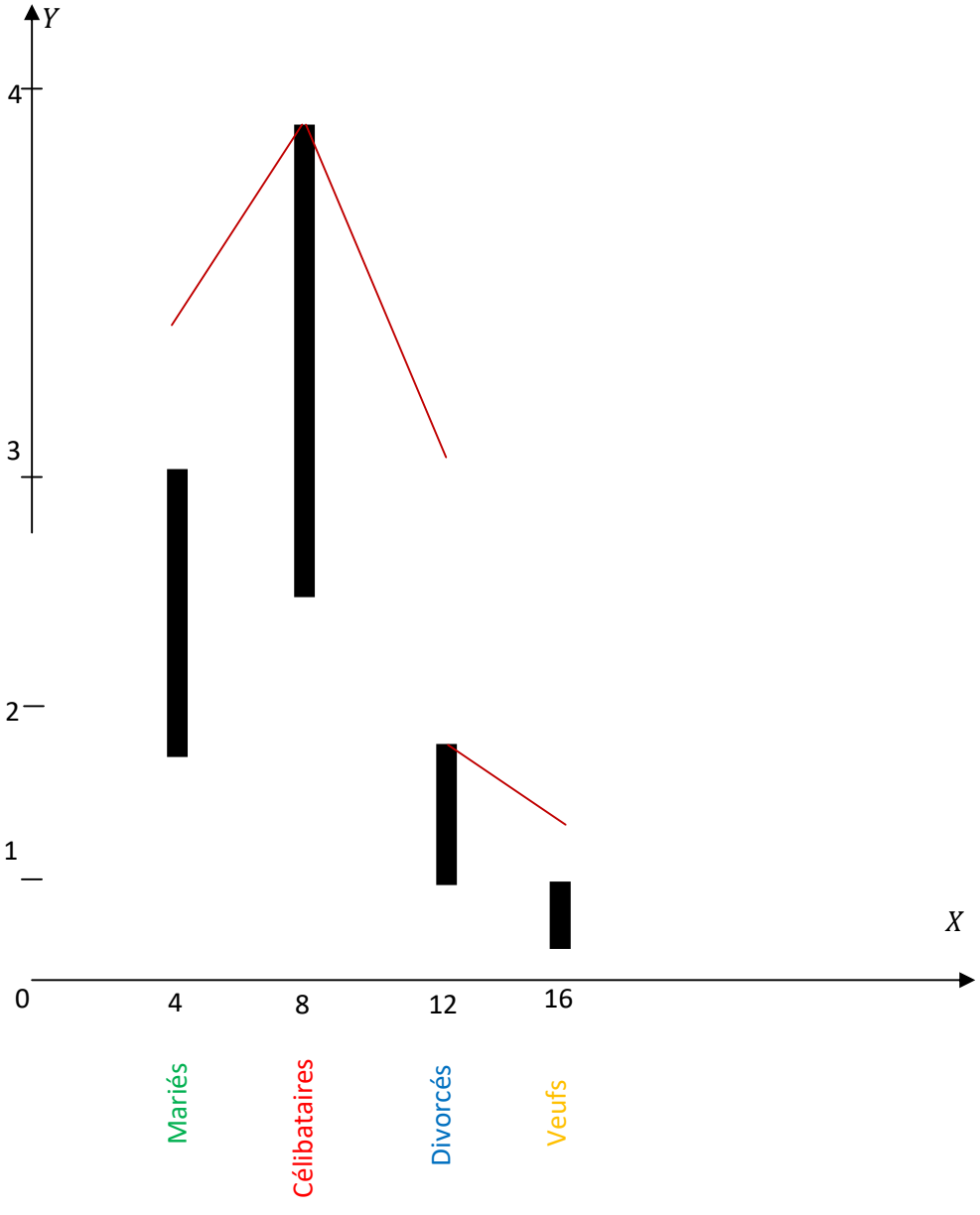
NB : la somme des fréquences est toujours égale à 1 : $\sum f_i = 1$

b- <u>Représentation graphique :</u>

<u>Diagramme en bâton</u> :

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les x_i (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs n_i ou les fréquences f_i.

Pour construire le diagramme en bâton des effectifs, on place les points $A_i(x_i \ ; \ 0)$ et $B_i(x_i \ ; \ n_i)$ et on construit en trait plein les segments$[A_iB_i]$.



N.B :

Si les fréquences f_i étaient en ordonnée, le digramme est appelé diagramme en bâton des fréquences. Le polygone des effectifs est la ligne brisée reliant les extrémités des bâtons dans le diagramme (Voir figure ci-dessus).

D'une manière générale, la ligne polygonale obtenue en joignant les différents points $B_i(x_i \ ; \ n_i)$

Diagramme en secteur circulaire :

Soit le demi – cercle (C) ; représentons la série précédente sur (C). Chaque modalité est représenté par un secteur angulaire proportionnel à son effectif $\boldsymbol{\alpha_i}$ tel que $\boldsymbol{\alpha_i} = f_i \times 180°$.

Marié : $\boldsymbol{\alpha_1} = 0{,}3 \times 180° \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_1} = 54°$

Célibataire : $\boldsymbol{\alpha_2} = 0{,}4 \times 180° \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_2} = 72°$

Divorcé : $\boldsymbol{\alpha_3} = 0{,}2 \times ° \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_3} = 36°$

Veuf : $\boldsymbol{\alpha_4} = 0{,}1 \times 180° \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_4} = 18°$

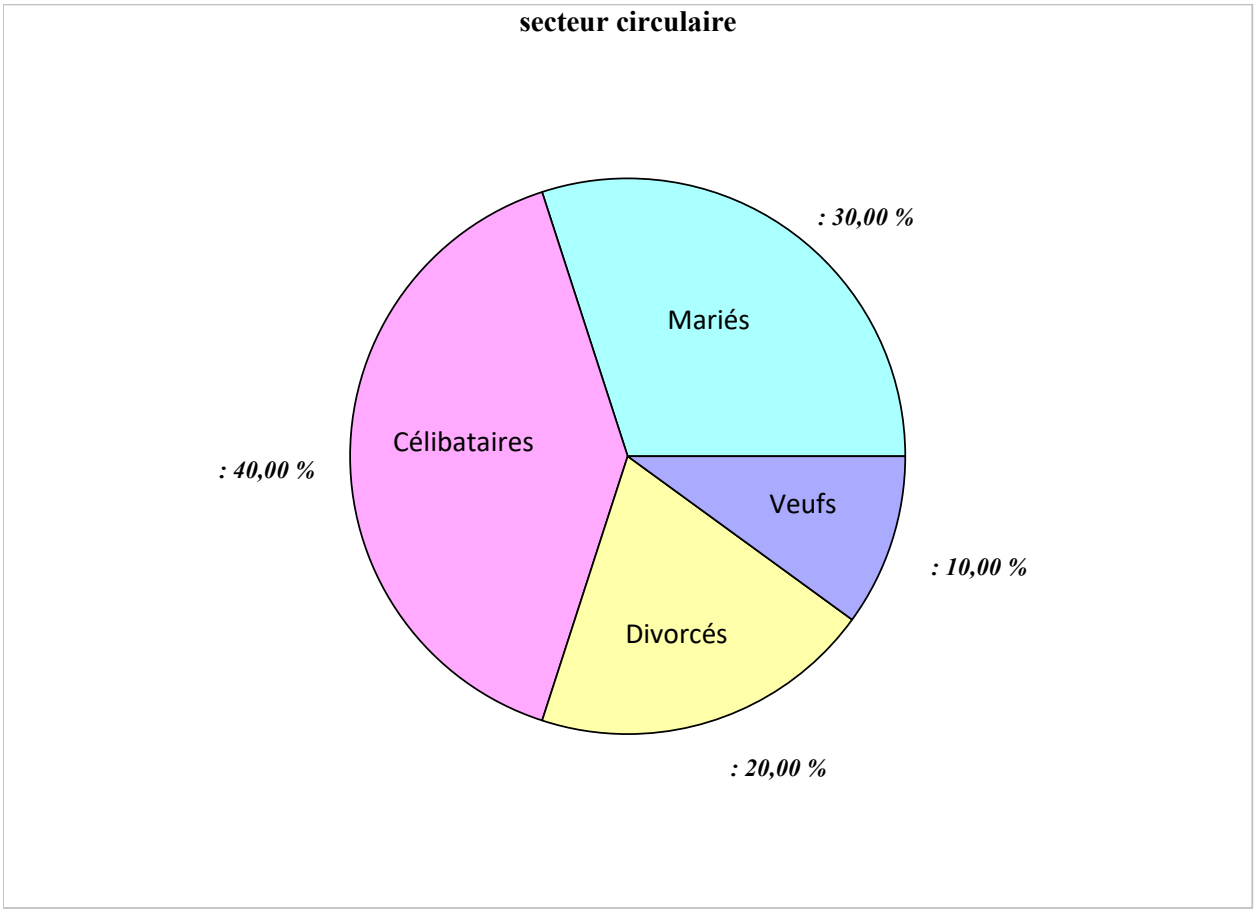
NB : pour le cercle tout entier le secteur angulaire $\alpha_i$est : $\alpha_i = f_i \times 360$

$\alpha_1 = 108°$

$\alpha_2 = 144°$

$\alpha_3 = 72°$

$\alpha_4 = 36°$


secteur circulaire
: 30,00 %
Mariés
Célibataires
: 40,00 %
Veufs
: 10,00 %
Divorcés
: 20,00 %

2- Cas d'un caractère quantitatif discret :

a- Etude du caractère nombre de frère dans un tableau statistique

L'étude du caractère nombre de frère dans une classe de 12è a donné les résultats suivants : 4 ; 2 ; 2 ; 1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 3 ; 2 ; 1.

Regrouper ces données dans un tableau statistique.

Modalités x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant	Fréquence croissante	Fréquence Décroissante
1	2	0,2	2	10	0,2	1
2	4	0,4	6	8	0,6	0,8
3	3	0,3	9	4	0,9	0,4
4	1	0,1	10	1	1	0,1
Total	10	1	/	/	/	/

Le regroupement en tableau se fait de la même manière que les caractères qualitatifs.
La seule différence est que les modalités sont des nombres s'écrivant dans l'ordre croissant. A ce tableau, on peut ajouter les colonnes, les effectifs cumulés croissants et décroissants ainsi que les fréquences cumulés croissantes et de croissantes. Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant, on appelle :

- **Effectif cumulé croissant de x_i** :

La somme des modalités inférieures ou égales à x_i c'est-à-dire :

$n_i = (n_1 + n_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n_i$

$n_1 = n_1 = 2$

$n_2 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 4 = 0$

$n_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 4 + 3 = 9$

$n_4 = n_1 + n_2 + n_3$ $n_4 = 2 + 4 + 3 + 1 = 10$ et la fréquence croissante cumulé est $f_i = \frac{n_i}{N = 10}$

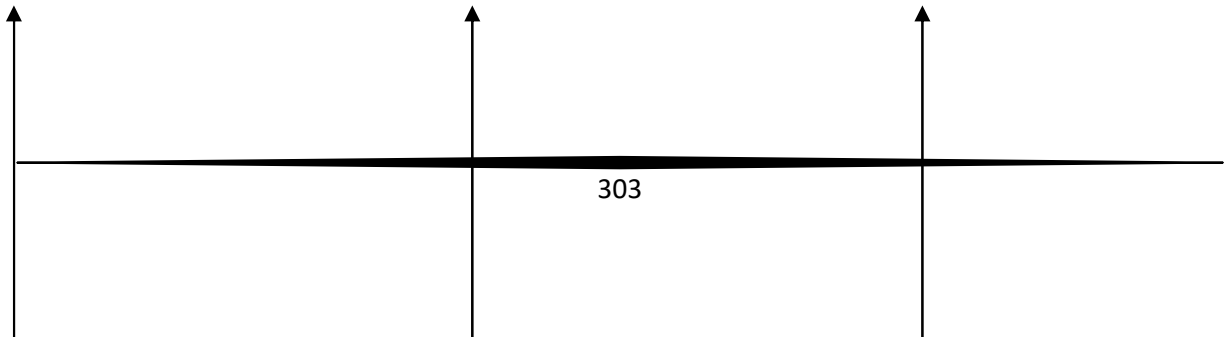
- **Effectif cumulé décroissant de x_i :**

On appelle effectif cumulé décroissant de la modalité x_i, la somme des modalités qui le succède ; c'est-à-dire $n_i = n_i + n_{1+1}$+……+ n_k et la fréquence cumulée décroissante est : $f_i \searrow = \frac{n_i}{N} \searrow$

b- <u>Diagramme en bâton des effectifs cumulés :</u>

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les x_i (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs n_i cumulés croissants ou décroissants.

Pour construire le diagramme en bâton des effectifs cumulés croissants ou décroissants, on place les points $A_i(x_i \ ; \ 0)$ et $B_i(x_i \ ; \ n_i)$ et on construit en trait plein les segments$[A_iB_i]$.



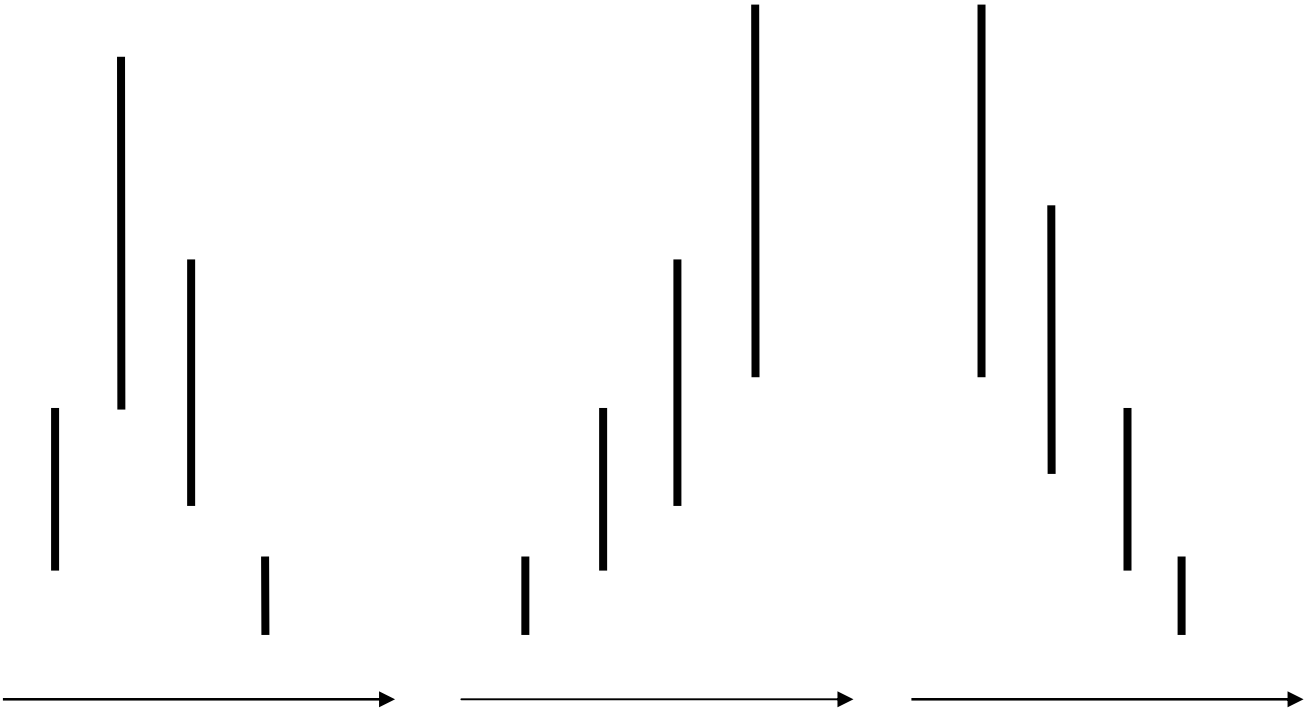


Diagramme des n_i **Diagramme des n_i croissantes**
Diagramme des n_i décroissantes

3- Cas des caractères quantitatifs continus :

a- Tableau statistique :

Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, les valeurs du caractère sont regroupées dans un intervalle de même amplitude $[x_i; x_{i+1}[$ soit appelées des classes.

Exemple : l'étude du caractère taille sur 30 élèves d'une classe de 12è a donné les résultats suivants en cm :

175 165 172 171 168

170 178 170 171 173

170	170	168	150	160
165	175	179	180	170
173	165	168	176	150
174	158	153	144	172

Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées.

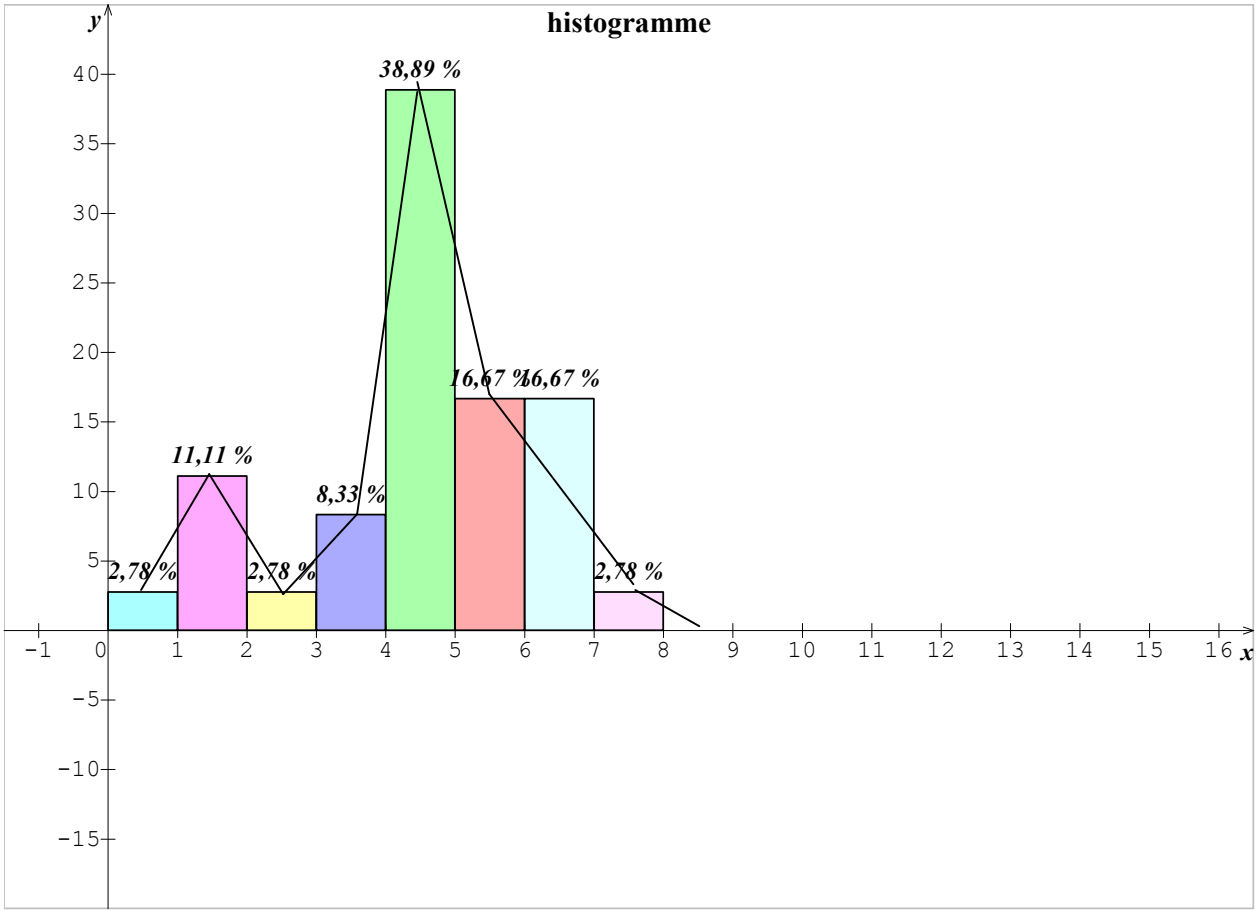
Prenons des classes d'amplitude 6.

Classes	Effectif	Centre des classes	n_i	n_i croissante	f_i
$[x_i ; x_{i+1}]$	n_i	c_i			
[144 ; 150]	1	147	1	30	0,633
[150 ; 156]	4	153	5	29	0,166
[156 ; 162]	1	159	6	25	0,2
[162 ; 168]	3	165	9	24	0,3
[168 ; 174]	14	171	23	21	0,76
[174 ; 180]	6	177	29	7	0,966
[180 ; 186]	1	183	30	1	1
Total	30	–	–	–	–

On appelle centre (c_i) de la classe (x_i, x_{i+1}) le nombre $\mathbf{c_i} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

Pour les calculs, nous conviendrons de prendre la valeur c_i commune à tous les individus de la classe (x_i, x_{i+1})

Histogramme des effectifs (représentation graphique)



Dans un repère cartésien, les valeurs des bornes de classe sont portées en abscisse et les effectifs (ou fréquence) sont portés en ordonnées.

Pour chaque classe [x_i; x_{i+1}[, on trace le rectangle de base [x_i ; x_{i+1}[, et de hauteur (n_i ou f_i). La représentation graphique obtenue est appelée : **Histogramme des effectifs ou des fréquences.**

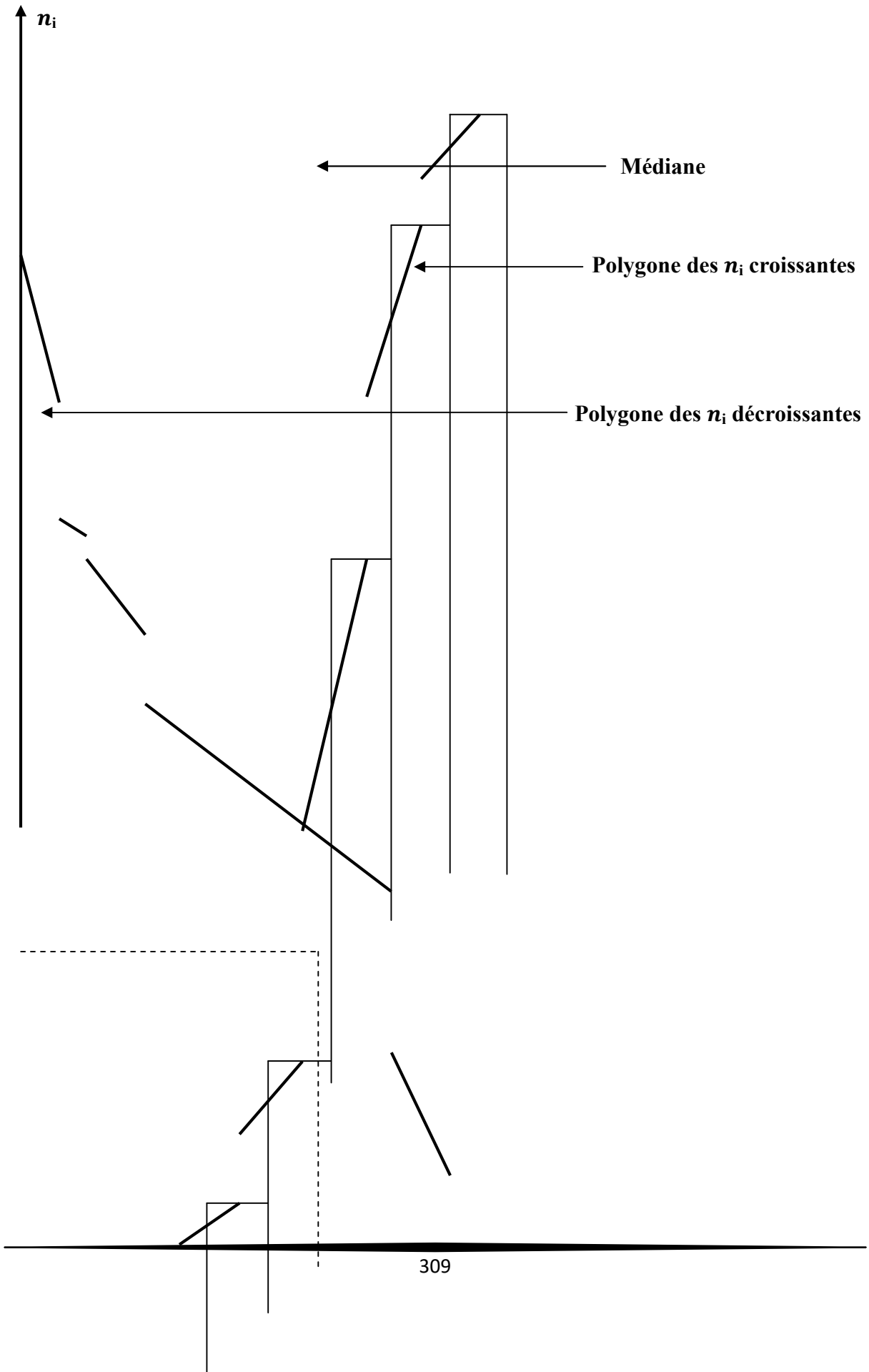
<u>Les polygones :</u>

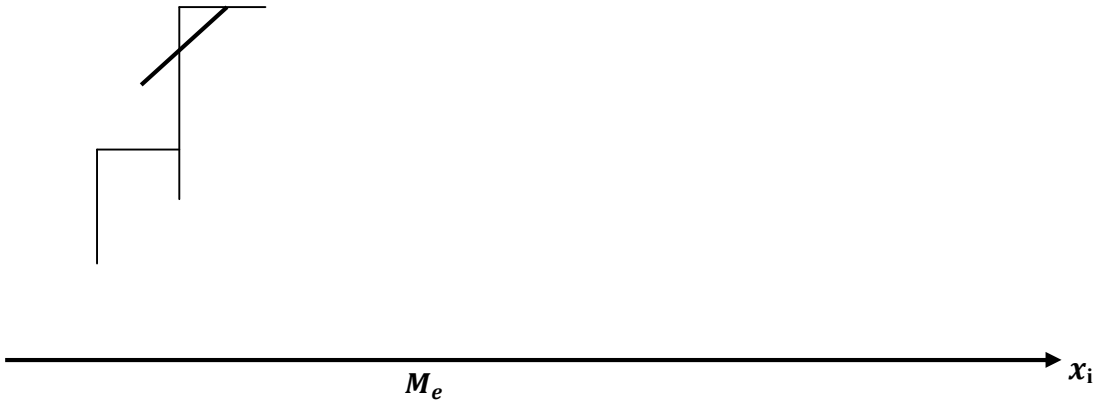
On appelle polygones les effectifs, la ligne brisée joignant les points (c_i ; n_i).

On appelle polygone des effectifs cumulés croissants, la ligne brisée passant par les points d'abscisse et d'ordonnées (x_{i+1} ; n_i).

On appelle polygone des effectifs cumulés décroissants, la ligne bisée joignant les points de coordonnées (x_i ; $n_i\searrow$)

Les deux polygones des effectifs cumulés croissant et décroissant x coupent en un point d'abscisse M_e : (M_e est la médiane).





III- Les éléments caractéristiques d'une série :

1- Les caractéristiques de position :

a- Le mode ou dominantes :

Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif (ou fréquence). On le note M_o.

Exemple : Déterminer le mode de la série suivante :

10, 7, 8 ; 5, 2, 7 ; 4, 4, 5 ; 7, 10

Ici : le mode est 7 (car 7 est compté plus que les autres)

b- La médiane d'une série :

Définition : La médiane d'une série est la valeur du caractère qui divise la série en deux séries de même effectif. On la note M_e.

Exemple 1 : soit la série suivante :

11, 7, 8, 3, 5, 6, 2

Déterminer la médiane. Pour cela écrivons la série dans l'ordre croissant :

2, 3, 5, 6, ,7, 8, 11

La médiane est donc Me = 6

Exemple 2 : soit la série suivante : 12, 3, 5, 7, 8, 6, 11, 4

Déterminer la médiane de cette série :

3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12. Par convention.

Ici la médiane est Me = $\frac{6+7}{2} = 6{,}5$

La médiane d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé

$n_i = \frac{N}{2}$

NB :

N désignant les valeurs de la série statistique rangée dans l'ordre croissante, on a :

-Si N est impaire, la médiane correspond à la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$

-Si N est paire, la médiane correspond à la valeur de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$

Détermination de la médiane dans le cas d'un caractère continu.

Exemple :

Déterminer la médiane dans la distribution des tailles de classe de 12ème dont les données sont dans le tableau en 3°).

La médiane Me correspond à l'effectif cumulé $\frac{N}{2} = 15$

Me ϵ [168 ; 174[est la classe médiane.

x_i : $168 < M_e < 174$

n_i : $9 < 15 < 23$

$$\frac{M_e - 168}{174 - 168} = \frac{15 - 9}{23 - 9} \Rightarrow M_e = 170{,}57$$

c- Moyenne arithmétique d'une série :

Définition : La moyenne arithmétique d'une série est le quotient de la somme de ces valeurs par l'effectif total. Si x_1, x_2,… x_k sont les valeurs et n_1, n_2,……, n_k sont les effectifs alors la moyenne est notée :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_1 x_1}{N} = \frac{1}{N} \sum_i^k n_i x_i$$

NB : Dans le cas d'un caractère continu, les xi sont remplacés par les ci

(centre de classe [x_i, x_{i+1}])

Exemple : Soit le tableau statistique donné par :

x_i	n_i	$n_i \times x_i$
7	1	7
8	3	24
9	5	45
10	4	40
11	2	22
12	2	24
13	4	52
14	1	147
15	2	30
16	0	0
17	1	17
Total	25	275

2- Les caractéristiques de dispersion :

a- Amplitude ou étendue d'une série :

L'amplitude d'une série est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère.

Exemple : Déterminer l'amplitude des séries suivantes :

a) – 5; 4 ; 3 ; 1 ; 10 ; 12 / Rep. : (12) – (- 5) = 12 + 5 = 17
b) 5 ; 10; 9 ; 20 ; 40 ; 30 ; 8 / Rep : (40) – (5) = 40 – 5 = 35

b- Les quartiles

Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant ou décroissant, on appelle quartiles les 3 valeurs qui divises la série en 4 groupes de même effectifs : on note : Q_1 ; Q_2 ; Q_3 ces 3 valeurs

Exemple : Déterminer les quantiles de la série suivante :

9 ; 12 ; 5 ; 11 ; 7 ; 15 ; 1 ; 2 ; 18 ; 20 ; 16 ; 19 ; 30 ; 40 ; 34

Rep : 1, 2;5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20 ; 30 ; 34 ; 40

Q_1 Q_2 Q_3

Déterminer les quantiles de la série suivante : ci-dessus. On a donc $Q_1 = 7$; $Q_2 = 15$; $Q_3 = 20$

Q_2 est la médiane, il est appelé quantile centrale

Q_1 et Q_3 sont les quantiles extrémités

NB : Q_1 est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé $n_i = \frac{N}{4}$

Q_3 est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé $n_i = \frac{3N}{4}$

$Q_3 – Q_1$ est l'écart interquartile

$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_2}$ Est l'écart interquartile relatif.

c- Variance ou fluctuation :

La variance d'une série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne c'est-à-dire :
Si x_1, x_2, ……. x_k sont les valeurs du caractère et n_1 ; n_2 ;……n_k les effectifs.
La variance est notée : V = $\frac{1}{N}\sum_i^k n_i {x_i}^2 - (\bar{x})^2$ ou encore on la note : V = $\frac{1}{N}\sum_i^k (n_i x_i - \bar{x})^2$

d- L'écart type :

C'est la racine carrée de la variance, on la note σ tel que $\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i^k n_i {x_i}^2 - (\bar{x})^2}$

EXERCICE 1 :

Soit le tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chaussures de 48 élèves.

x_i	n_i
36	5

37	11
38	12
39	8
40	4
41	3
42	4
43	1

1) Quelle est la population ?
2) le caractère étudié ?
3) Déterminer le mode
4) Déterminer la pointure moyenne

Solution

1- La population est un ensemble d'élèves.
2- Le caractère est : la pointure des chaussures.
3- Le mode est : 38
4- La moyenne des pointures : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1849}{48} \Rightarrow \bar{x} = 38{,}52$

x_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
36	5	180	1296	6480
37	11	407	1369	15059
38	12	456	1444	17328
39	8	312	1521	12168
40	4	160	1600	6400
41	3	123	1681	5043
42	4	168	1761	7056
43	1	43	1849	1849
Total		1849		71383

EXERCICE 2 :

A l'occasion d'un concours de pêche, les 250 poissons péchés ont été mesurés et leurs tailles ont été regroupées dans le tableau suivant :

Classe des tailles (cm)	Effectifs	n_i	c_i	n_i c_i
[10, 20[	16	16	15	240
[20, 30[	26	42	25	1050
[30, 40[	36	78	35	2730
[40, 50[	52	130	45	5850
[50, 60[	38	168	55	9240
[60, 70[	30	198	65	12870
[70, 80[	20	218	75	16350
[80, 90[	12	230	85	19530

[90, 100[	10	240	95	22800
[100, 110[	6	246	105	25830
[110, 120[	4	250	115	28750

N.B : Les parties complétées sont :

n_i : $n_1 = 16$; $n_2 = 16 + 26 = 42$, $n_3 = 16 + 26 + 36 = 78$……

c_i : $c_i = \frac{10+20}{2} = 15$; $c_2 = \frac{20+30}{2} = 25$; $c_3 = \frac{30+40}{2} = 35$

n_i c_i : n_1 .$c_1 = 16 \times 15 = 240$; n_2 $c_2 = 42 \times 25 = 650$; $n_3c_3 = 78 \times 35 = 1260$

Évaluation

a- compléter le tableau :
b- déterminer la population, le caractère et la nature du caractère
c- déterminer les quartiles
d- déterminer la moyenne et l'écart type.

Solution

a- Complétons le tableau (voir tableau)

b- La population : les poissons

- le caractère : la taille
- nature du caractère : caractère quantitatif continu

c- Déterminons les quartiles :

$Q_1 n_i = \frac{N}{4} = \frac{250}{4} = 62,5$ *alors* $Q_1 \in [30,40[<=> 42 < 62,5 < 78$

$\frac{Q_1 - 30}{40 - 30} = \frac{62,5 - 42}{78 - 42} <=> \frac{Q_1 - 30}{10} = 0,56 => Q_1 = 35,6$ or le $n_i =$
$\frac{N}{2} = \frac{250}{2} = 125 <=> 40 < Q_2 < 50$

$n_i = \frac{3N}{4} = \frac{3\ x\ 250}{4} = 187,5$

Q_3 є [60 – 70[

d- Déterminons la moyenne et l'écart type

$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \quad => \bar{x} = \frac{1}{250} x13090 = 52,36$

L'écart type :

- Variance V = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\,2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{250} x(1063064) - (52,36)^2$
- Ecart type : $\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{1510,6864} = 38,86$

σ = 38,86

IV- Série statistique à deux caractères x et y

1- Nuage de points associé :

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on appelle nuage de points associé, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_i).

2- Point moyen d'un nuage de points :

On appelle point moyen d'un nuage de points représentant une série, le point G de coordonnées (X_G ; Y_G) où

$$\begin{cases} X_G = \bar{X} = \dfrac{\sum x_i}{N} \\ \quad et \\ Y_G = \bar{Y} = \dfrac{\sum y_i}{N} \end{cases}$$

3- Covariance :

La covariance d'une série statistique à deux caractères x et y, de moyennes respectives $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et d'effectif total N est le nombre réel noté Cov (X, Y) ou $\sigma_{x,y}$ tel que :

$$\text{Cov (x,y)} = \frac{\sum n_{ij}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{Effectif\ total}$$

ou

Cov (x,y) = $\frac{\sum n_{ij} x_i y_i}{Effectif\ total} - \bar{X}.\bar{Y}$

4- Droit de régression de y en x :

La droite (D) de régression de y en fonction de x passe par le point G $(\bar{X}, \bar{Y})$, point moyen du nuage de point son équation est y = ax + b avec :

a = $\frac{Cov(X,Y)}{V(X)} etb = \bar{Y} - a\bar{X}$

où V(X) est la variance et a pour formule : V(X) = $\frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2$

5- Droite de régression de X en Y :

La droite (D') de régression de X en fonction de Y passe par le point G($\bar{X}$; $\bar{Y}$), point moyen du nuage de point. Son équation est x = a'y + b' avec :

a' = $\frac{Cov(X,Y)}{V(Y)}$ $et\ b' = \bar{X} - a\bar{Y}$

où V(Y) est la variance et a pour formule : V(Y)= $\frac{\sum Y_i^2}{N}$ - $\bar{Y}^2$

Remarque :

G($\bar{X}$; $\bar{Y}$) appartient aux deux droites de régression pour tracer ces droites, il suffit donc de déterminer un autre point vérifiant l'équation.

6- Corrélation linéaire

Deux variables statistiques X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en y sont des droites.

7- Coefficient de corrélation linéaire :

a) Définition :

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double decaractère (X ; Y) , le nombre réel **r** définie par $\mathbf{r} = \frac{Cov\,(X;Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$

b) Propriétés de r :

P_1 : Si $0{,}87 \leq |r| \leq 1$, on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est forte.

P_2 : si r = 1, on dit que la corrélation est parfaite.

8- Estimation et prévision

Lorsqu'il existe une bonne corrélation linéaire, il est possible de prévoir la valeur de y connaissant celle de x, en utilisant l'équation de la droite de régression de y en x ; et vice – versa.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaire en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires – correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

1- Calculer $\bar{X} et \bar{Y}$ les moyennes des variables X et Y.
2- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point G. on prendra : (Unités : 2 cm en abscisses et 1 cm pour 2 unités en ordonnées).
3- Calculer la variance V(X) de x et la covariance Cov(X,Y) de x et y.

N.B : Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

4- Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est :y = $\frac{78}{35}\ x +$ 9,2
5- Tracer la droite (D).
6- En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7ème mois.

Exercice 2 :

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

Prix de vente en milliers de francs xi	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels yi	180	160	150	130	100	90	80	70

1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :

1 cm pour 1000 francs en abscisse

1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

2- Déterminer les coordonnées du point G
3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.
4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x. Tracer (D)
5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x, puis déterminer :

a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

Solution

Exercice 1

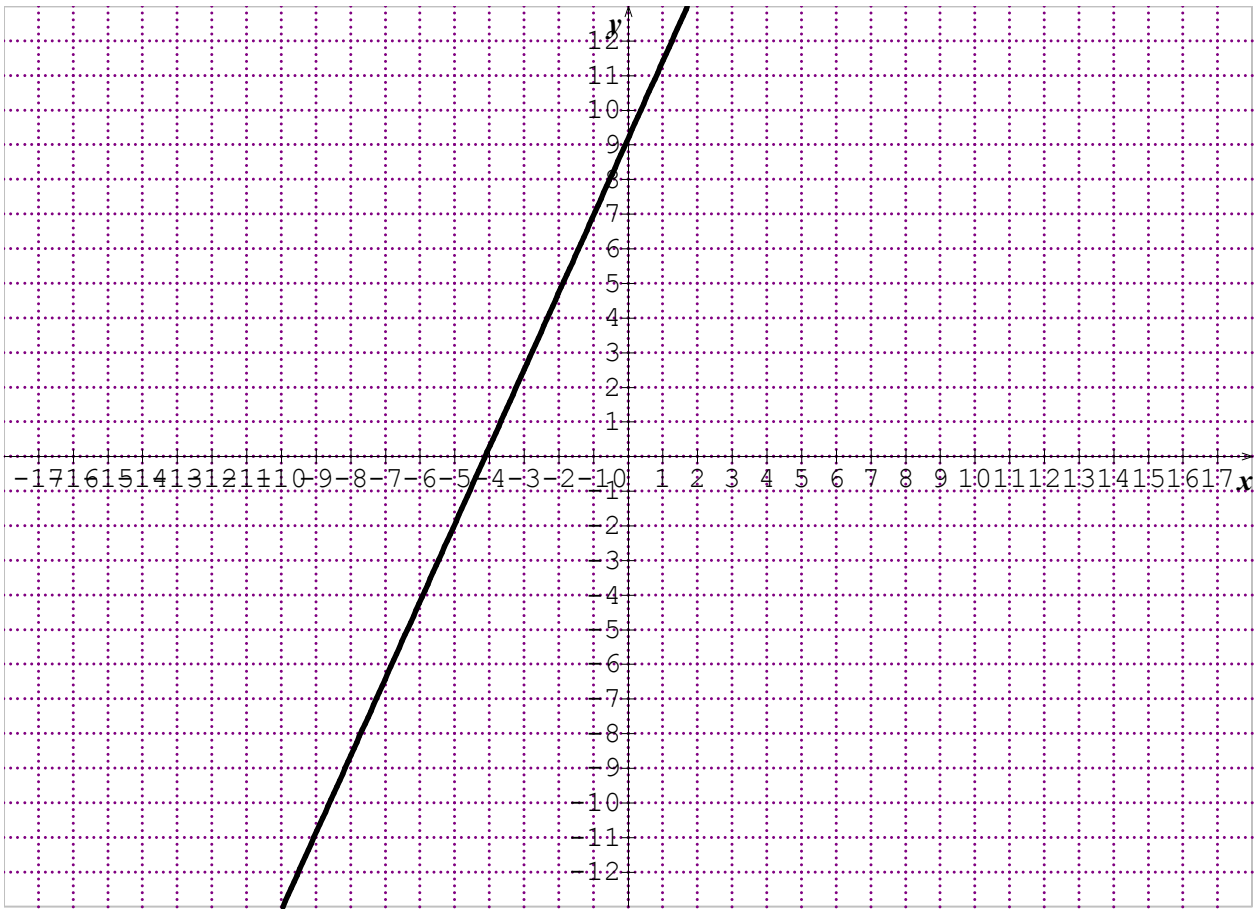
Pour le calcul, on pourra s'aider du tableau ci-dessous :

X_i	Y_i	X_i, y_i	X_i^2	Y_i^2	
1	12	12	1	144	
2	13	26	4	676	
3	15	45	9	225	
4	19	76	16	361	
5	21	105	25	441	
6	22	132	36	484	
21	102	396	91	2 331	Total

1- Calcul de $\bar{X}$ *et* $\bar{Y}$ les moyennes des variables x et y.

$\bar{X} = \frac{\sum_1^6 x_i}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$; $\bar{Y} = \frac{\sum_1^6 y_i}{6} = \frac{102}{6} = 17$

2- Le nuage de points de la série statistique ainsi que le point moyen G.



1- Calcul de la variante V(x) de x et la covariance Cov (x, y) de x et y.

$V(X) = \frac{91}{6} - (\frac{7}{2})^2 = \frac{70}{24} = \frac{35}{12}$; $cov\ (X\ ;\ Y) = \frac{396}{6} - \left(\frac{7}{2} \times 17\right) = \frac{39}{6} = \frac{13}{2}$

2- Montons qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est : $y = \frac{78}{35}x + 9{,}2$

$a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{35}{12}} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{35} = \frac{156}{70} = \frac{78}{35}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X} = 17 - \frac{78}{35} \times \frac{7}{2} = 9{,}2$

donc l'équation de la droite de régression est : $y = \frac{78}{35}\ x + 9{,}2$

3- Tracé de la droite (D). (Voir nuage de points)

La droite (D) passe par le point moyen point G (3,5 ; 17) et par un autre point que l'on détermine en remplaçant dans l'équation de la droite de régression, x par une valeur que l'on choisira.

Par exemple, si x = 0, on obtient y = 9,2. (D) passe donc également par le point A(0 ; 9,2).

4- Calcul d'une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7ème mois. Le 7ème mois correspond à x = 7. Il s'agit de déterminer la valeur de y associée à cette valeur de x.

Pour x = 7, on a : $y = \frac{78}{35} \times 7 + 9{,}2 = 24{,}8$ millions de francs CFA.

3°) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. interpréter le résultat obtenu.

Cov (X, Y) = $\frac{\sum X_i \,.\, Y_i}{n} - \bar{X}.\bar{Y}$

= $\frac{9\times180+10\times160+11\times150+12\times130+14\times100+15\times90+16\times80+17\times70}{8} - 13\text{x}120$

Cov (X, Y) = - 103,75

r = $\frac{cov\,(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$

V(X) = $\frac{\sum X_i^{\,2}}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9^2+10^2+11^2+12^2+14^2+15^2+16^2+17^2}{8} - 13^2$

V(X) = 7,499

V(Y) = $\frac{\sum Y_i^{\,2}}{N}$ - $\bar{Y}^2 = \frac{180^2+160^2+150^2+130^2+100^2+90^2+80^2+70^2}{8} - 120^2$

V(X) = 1450,003

r = $\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}} = \frac{-103{,}75}{\sqrt{7{,}499\times1450{,}003}} = -0{,}995$

$0{,}87 \leq |r| \leq 1$: il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y. L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4°) Equation de la droite (D) de régression de y en x.

(D) : y = ax + b

a = $\frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{-103{,}75}{7{,}499} = -13{,}88$

$\bar{Y}$ = a$\bar{x}$ + b => b = $\bar{y} - a\bar{x} = 120 - (-13{,}88) \times 13 = 199{,}83$

(D) :y = - 13,88 x + 299,83

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G(13,120), déterminons un second point en remplaçant par exemple x par 10. On trouve y = 161,03. On obtient : A (10 ; 161,03)

5°) Pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18 000 francs.

6°) a°) Le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13 000 F, correspond à x = 13

y = $-$ 13,88 $\times$ 13 + 299,83 = 119,39 $\simeq$119

b°) Il s'agit de déterminer x pour y = 250.

y = $-$ 13,88 x + 299,83 => x = $\frac{y-299{,}83}{-13{,}88}$

Pour y = 250, on a : x = $\frac{250-299{,}83}{-13{,}88} = 3{,}59\ milliers\ de\ francs = 3590\ F$

Exercice 2 :

1- Représentation graphique du nuage de points de cette série statistique (unité : 1 cm pour 1000 francs en abscisse, 1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée).



2- Déterminons les coordonnées du point G.

$\bar{X} = \frac{\sum_1^8 x_i}{8} = \frac{9+10+11+12+14+15+16+17}{8} = 13$

=> G(13 ; 120)

$\bar{Y} = \frac{\sum_1^8 y_i}{8} = \frac{180+160+150+130+100+90+80+70}{8} = 120$

3-Détermination du coefficient de corrélation linéaire r .

Cov(X ,Y) = Cov = $\frac{\sum X_i.Y_i}{N} - \bar{X}.\bar{Y}$

=>Cov(X ,Y) = $\frac{9.180+10.160+11.150+12.130+14.100+15.90+16.80+17.70}{8} - 13.120$

Cov(X ,Y)= $-1O3,75$

r = $\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}$

V(X) = $\frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9^2+10^2+11^2+12^2+14^2+15^2+16^2+17^2}{8} - 13^2$

V(X) = 7,499

V(Y) = $\frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{180^2+160^2+150^2+130^2+1OO^2+90^2+80^2+70^2}{8} - 120^2$

V(Y) = 1450,003

r = $\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499.1450,003}} = -0,995$

$0,87 \leq |r| \leq 1$:il existe alors une forte corrélation linéaire entre et les variations X et Y.linéaire

L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4-Equation de la droite (D) de régression de Y en X

(D) : y = ax+b

A = $\frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{-103,75}{7,499} = -13,88$

Alors on a $\bar{y}$ =a$\bar{x}$+ b => b =$\bar{y} - a\bar{x}$ = 120(-13 ,88) x13 = 299,83

(D) : y = −13 ,88x + 299,83

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G (13 ; 120).Déterminons un second en remplaçant par exemple x par 10 .On trouve y = 161,03.On obtient : A (10 ; 161,03)

5-Pour qu'il ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18000 francs.

6- a) le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13000 F, correspond à x = 13.

Y = −13,88x13 + 299,83 = 119,39

b)il s'agit de déterminer x pour y = 250

Y = −13,88x13 + 299,83 alors x = $\frac{y-299,83}{-13,88}$

Pour y = 240 $\frac{250-299,83}{-13,88}$ = 3,59 millions de francs = 3500 F

EXERCICES

EXERCICE1 :

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	5	11	12	8	4	3	4	1

1) Déterminer la population et le caractère étudié.
2) Déterminer le mode des chemises
3) Calculer la pointure moyenne des chemises
4) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

EXERCICE 2 :

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

Classes $[x_i ; x_{i+1}[$	[144 ; 150[	[150 ; 156[	[156 ; 162[	[162 ; 168[	[168 ; 174[	[174 ; 180[	[180 ; 186[
Effectifs ni	1	4	1	3	14	6	1

1) Dresser el tableau des centres ci .
2) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
3) En déduire l'histogramme des effectifs (ni) puis celle effectifs (n_i et n_i).

EXERCICE 3 :

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

1) Déterminer la médiane et les quartiles.
2) Faites la représentation en boîte de cette série.

EXERCICE 4 :

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

1) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?
2) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?
3) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

EXERCICE 5 :

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

EXERCICE 6 :

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une 41ème valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

EXERCICE 7 :

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

Montant des chèques	effectif	Fréquence	Fréquence cumulée croissante
[0,15[	20		
[15,30[	9		
[30,45[	19		
[45,60[	27		
[60,75[	18		
[75,90[	6		
[90,105[	1		
Total			

1) compléter le tableau
2) soit s le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de S. En déduire un intervalle I tel que le montant moyen des chèques appartienne à I.
3) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle I trouvé à la question précédente.

4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

Exercice 8 : (non corrigé)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

Prix de vente en milliers de francs xi	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels yi	180	160	150	130	100	90	80	70

1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :

1 cm pour 1000 francs en abscisse

1cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

2- Déterminer les coordonnées du point G

3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.

4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x. Tracer (D)

5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.

6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x, puis déterminer :

a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F

b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

EXERCICES

EXERCICE1 :

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	5	11	12	8	4	3	4	1

5) Déterminer la population et le caractère étudié.
6) Déterminer le mode des chemises
7) Calculer la pointure moyenne des chemises
8) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

EXERCICE 2 :

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

Classes $[x_i ; x_{i+1}[$	[144 ; 150[	[150 ; 156[	[156 ; 162[	[162 ; 168[	[168 ; 174[	[174 ; 180[	[180 ; 186[
Effectifs ni	1	4	1	3	14	6	1

4) Dresser el tableau des centres ci .
5) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
6) En déduire l'histogramme des effectifs (ni) puis celle effectifs (n_i et n_i).

EXERCICE 3 :

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

3) Déterminer la médiane et les quartiles.
4) Faites la représentation en boîte de cette série.

EXERCICE 4 :

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

4) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?
5) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?

6) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

EXERCICE 5 :

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

EXERCICE 6 :

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une 41ème valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

EXERCICE 7 :

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

Montant des chèques	**effectif**	**Fréquence**	**Fréquence cumulée croissante**
[0,15[	20		
[15,30[	9		
[30,45[	19		
[45,60[	27		
[60,75[	18		

[75,90[	6		
[90,105[	1		
Total			

4) compléter le tableau
5) soit s le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de S. En déduire un intervalle I tel que le montant moyen des chèques appartienne à I.
6) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle I trouvé à la question précédente.

4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

Exercice 8 : (non corrigé)

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

Prix de vente en milliers de francs xi	9	10	11	12	14	15	16	17

Nombre d'acheteurs potentiels yi	180	160	150	130	100	90	80	70

7- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :

1 cm pour 1000 francs en abscisse

1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

8- Déterminer les coordonnées du point G
9- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.
10- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x. Tracer (D)
11- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
12- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x, puis déterminer :

c) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
d) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.