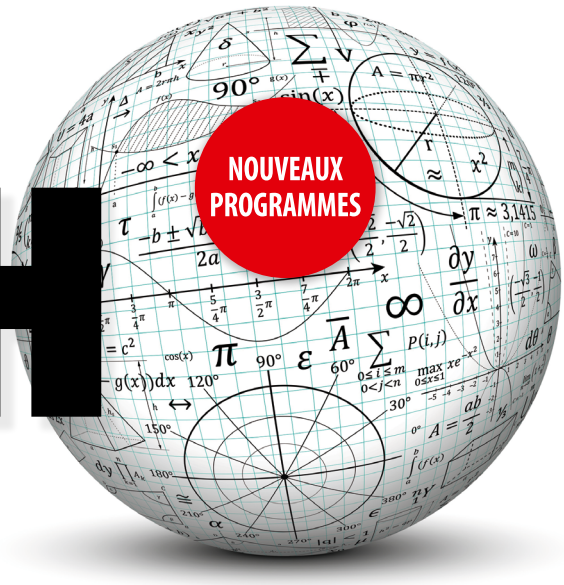
MATH MAX



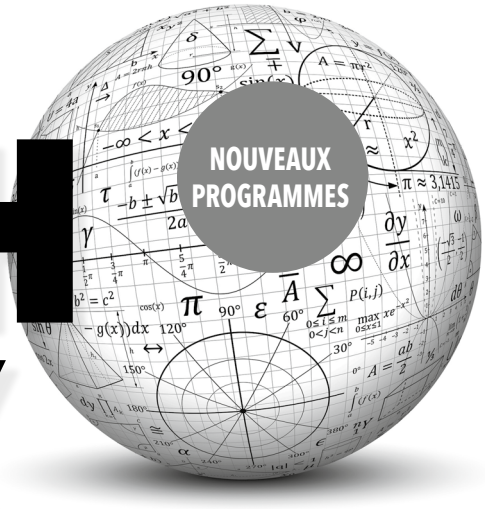
Cours complet
Exercices et devoirs corrigés

1re spécialité

- **Le cours complet** avec des exemples et des conseils
- **Des centaines d'exercices et devoirs, tous corrigés** en détail
- Des cahiers transversaux de **logique** et d'**algorithmique**
- Des extras pour réviser ou **anticiper sur les années à venir**
- Une approche **testée et validée auprès des élèves**

ellipses

MATH MAX



Cours complet
Exercices et devoirs corrigés

1re spécialité

Sébastien Krief-Détraz

Professeur agrégé de mathématiques
au lycée international Georges Duby d'Aix-en-Provence

ellipses

À mes parents

Pour mes élèves

ISBN 9782340-043961
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Vous avez entre les mains un ouvrage entièrement consacré aux mathématiques. Un de plus, direz-vous. Oui et non.

Pour commencer, c'est sa deuxième édition, enrichie, améliorée et conforme aux nouveaux programmes comme il se doit.

Bien sûr, il contient tout le cours, détaillé, avec les démonstrations, les figures, les remarques, les commentaires, les conseils et les exemples d'usage, rectifiés et peaufinés au fil des cours auprès d'élèves de tous horizons.

Puis des exercices, des exercices et des exercices, de difficulté croissante et en lien avec la progression du cours, bien évidemment.

Et tous les corrigés, bien entendu. Et rédigés de plus, pas de simples solutions laconiques.

Ajoutez à cela les devoirs de recherche et de synthèse, vous obtenez déjà un beau traité.

Insérez des cahiers d'algorithmique et de logique, vous aurez un esprit bien construit.

Agrémentez maintenant de quelques exercices en anglais, peu difficiles, vous avez enrichi votre langage.

Complétez d'une rubrique *Extras* dans laquelle on trouve des révisions, des aides, des compléments allant plus loin ou des problèmes ouverts, et de nouvelles perspectives s'ouvrent à vous.

Agrémentez le tout d'énoncés un peu alambiqués, tirés par les cheveux ou complètement décalés, aux références regroupées dans une bibliographie quelque peu insolite et vous avez là l'ensemble idéal pour apprendre, réviser ou étudier avec plaisir.

Bonne lecture.

Sommaire

Cours & Exercices corrigés **5**

I **Polynômes du second degré** **7**

II **Limites & Nombres dérivés** **27**

III **Trigonométrie** **49**

IV **Fonctions dérivées** **63**

V **Généralités sur les suites numériques** **85**

VI **Produit scalaire** **99**

VII **Compléments sur les suites numériques** **113**

VIII **Probabilités conditionnelles** **135**

IX **Fonction exponentielle** **159**

X **Variables aléatoires réelles** **179**

XI **Applications du produit scalaire** **201**

XII **Fonctions trigonométriques** **217**

Devoirs corrigés **231**

1 **Cinémaths** **233**

2 **La fonction dérive du nombre** **235**

3 **Trigonométrie de l'espace** **241**

4 **La dérive du sous-marin** **245**

5 **Voyage au bout du lieu-dit** **247**

6 Les courbes d'Esmeralda 251
7 À la suite 255
8 Lieux produits 259
9 Belles suites 261
10 Apapou ? 265
11 Improbables petits pois 269
12 La chaînette 273
13 Passe-temps variés 277
14 Lieux étranges 281
15 Math Wars 283
16 Devoir parental 287

Cahiers transversaux 289
α Algo à gogo 291
β En toute logique 313
γ Faute de preuves 325

Extras 333
A La racine, c'est carré 335
B Sine qua tion 337
C Droites et fines 341
D Trop grand écart 345
E Conic Strip 349
F Auto-exos 361
G Self-Working 367
H Équerre et math 371
I Einstein vaut mieux que deux tu l'auras 375

Annexes 377

Table des matières 389

COURS &
EXERCICES CORRIGÉS

Chapitre I

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Sommaire

Introduction **7**
1 Variations et extremum d'une fonction : rappels **8**
2 Définitions et premières propriétés **9**
2.1 Définition, forme canonique 9
2.2 Variations d'un trinôme 10
2.3 Représentation graphique d'un trinôme 11
3 Discriminant, factorisation et signe d'un trinôme **12**
3.1 Discriminant d'un trinôme 12
3.2 Factorisation d'un trinôme 13
3.3 Signe d'un trinôme 13
4 Polynômes de degré supérieur **14**
4.1 Définitions 14
4.2 Théorème de factorisation des polynômes 15
5 Synthèse **15**
Exercices **17**
Corrigé des exercices 20

Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions en détail les fonctions polynômes du second degré afin qu'elles n'aient plus aucun secret pour nous, du point de vue réel du moins. En effet, nous serons à même de déterminer l'existence et les valeurs des racines, les variations, les extremums,... Les polynômes du second degré, basés sur la fonction carré, modélisent par exemple le mouvement d'un solide en chute libre.

Nous abordons ensuite la notion de polynômes de degré quelconque. Outre leur facilité de calcul, leur utilité dans la résolution d'équations et les nombreuses modélisations en faisant usage, les fonctions polynômes permettent d'approcher localement

toute fonction dérivable (cf. chapitre II). Ils sont ainsi d'une importance capitale dans de nombreux domaines.

Diophante d'Alexandrie, entre le Ier s. et le IVe s. après J.C., s'intéresse déjà aux équations et en particulier à celles du second degré. Ses études sont les prémices de l'algèbre, un terme venant de l'arabe. En effet, l'école de Bagdad et en particulier le travail novateur d'Al-Khwârizmî au VIIIe s., son nom ayant donné le terme *algorithme*, permet de belles avancées et on le considère désormais comme le père de cette discipline mais il reste tributaire des lacunes des notations algébriques, des traditions géométriques et de l'absence du concept de nombres négatifs. L'étude que nous faisons ici est bien l'aboutissement d'un cheminement intellectuel multi-millénaire.

En préambule, commençons par un peu de logique (cf. *En toute logique*, p. 313, pour de bien plus amples informations).

Définition 1 • *Le symbole* $\exists$ *est le* ***quantificateur existentiel*** *et signifie « **il existe** » au moins un(e).*
• *Le symbole* $\forall$ *est le* ***quantificateur universel*** *et signifie « **pour tout** ».*

Exemples :
- « $\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad x < 0$ » signifie « il existe au moins un réel strictement négatif ».
- « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0$ » signifie « pour tout réel x, x^2 est positif ou nul ».
- La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x \leqslant y$ » est vraie alors que la proposition « $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ x \leqslant y$ » est fausse.

1 Variations et extremum d'une fonction : rappels

Définition 2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- *f est croissante sur I* *ssi* *f conserve l'ordre sur I*
  ssi $\forall a$ *et* $b \in I, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
- *f est décroissante sur I* *ssi* *f inverse l'ordre sur I*
  ssi $\forall a$ *et* $b \in I, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$.
- *f est monotone sur I* *si* *f est croissante sur I ou décroissante sur I.*

Décrire les variations de f, c'est déterminer les intervalles de monotonie de f. Les résultats sont souvent présentés dans un tableau de variation.

Remarque : Attention, une fonction n'admet pas nécessairement d'intervalle de monotonie. Autrement dit, il n'existe pas forcément d'intervalle sur lequel on puisse dresser un tableau de variation.

Esquisser par exemple le graphe de la fonction $\chi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & sinon. \end{cases}$
Ne ressemble-t-il pas à deux droites parallèles ?

Définition 3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I.*

- *f atteint en a un maximum sur I si $\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(a)$.*
- *f atteint en a un minimum sur I si $\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a)$.*
- *f admet un extremum en a sur I*
  si f admet un maximum ou un minimum en a sur I.

Ainsi, un extremum d'une fonction est une valeur atteinte par la fonction.

Définition 4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I. On dit que a est un **zéro** de f ou que a est une **racine** de f si $f(a) = 0$ c.-à-d. si f s'annule en a.*

2 Définitions et premières propriétés

2.1 Définition, forme canonique

Définition 5 *Une fonction **polynôme du second degré** P est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe trois réels a, b et c ($a \neq 0$) tels que, pour tout réel x,* $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx + c}$.

Cette écriture est la **forme développée** du polynôme, ou **trinôme**, P.

Exemples : ◦ La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est un polynôme du second degré : $a = 1, \quad b = 0$ et $c = 0$.
◦ La fonction $x \longmapsto -3 + 4x^2 - \frac{7}{5}x$ est un polynôme du second degré : $a = 4, \quad b = -\frac{7}{5}$ et $c = -3$.
◦ La fonction $x \longmapsto 3(x-1)^2 + 5$ est un polynôme du second degré : $a = 3, \quad b = -6$ et $c = 8$.

Cette dernière écriture est une forme spécifique du trinôme et elle apporte de nombreuses informations sur celui-ci. Nous démontrerons cette propriété avec le théorème 1 en page 12.

Propriété 1 ***Forme canonique***
Une fonction P est un polynôme du second degré ssi il existe trois réels a, α et β ($a \neq 0$) tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$.
*Cette écriture de P est appelée la **forme canonique** de P.*

La forme canonique d'un trinôme se trouve généralement en l'écrivant comme le début d'un carré remarquable.

Exemples : ◦ L'écriture $3(x-1)^2 + 5$ est la forme canonique de la fonction polynôme $3x^2 - 6x + 8$.
◦ La fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 1$ admet pour forme canonique $(x+1)^2$.

◦ $5x^2 - 30x + 17 = 5(x^2 - 6x) + 17 = 5(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2) + 17$
$= 5(x-3)^2 - 5 \times 9 + 17 = 5(x-3)^2 - 28.$

Exercice 1 Déterminer la forme canonique des fonctions polynômes suivantes.

$f(x) = 4x^2 - 24x + 41$ $\quad$ $k(x) = -3x^2 + 30x - 75$

$g(x) = -2x^2 + 16x - 37$ $\quad$ $p(x) = -x^2 - 4x + 1$

$h(x) = 3x^2 - 6x - 1$ $\quad$ $q(x) = 2x^2 - 2x - 24$

Exercice 2 Déterminer la forme développée des fonctions polynômes suivantes.

$r(x) = 5(x-2)^2 - 7$ $\quad$ $s(x) = -2(x+6)^2 + 1$

Exercice 3 Déterminer les racines éventuelles des huit fonctions polynômes des exercices 1 et 2 précédents puis visitez *La racine, c'est carré* en page 335.

2.2 Variations d'un trinôme

Propriété 2 *Soient a, α et β trois réels ($a \neq 0$).*
La fonction $x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ *admet un* ***extremum*** *en* $\boldsymbol{\alpha}$ *valant* $\boldsymbol{\beta}$.
Cet extremum est un minimum si $a > 0$, un maximum si $a < 0$.

Démonstration : D'une part, $\alpha \longmapsto a(\alpha-\alpha)^2 + \beta = a \times 0^2 + \beta = \beta$. D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$ donc, si $a > 0$, $a(x-\alpha)^2 \geqslant 0$ d'où $a(x-\alpha)^2 + \beta \geqslant \beta$ et, si $a < 0$, $a(x-\alpha)^2 \leqslant 0$ d'où $a(x-\alpha)^2 + \beta \leqslant \beta$. β est donc bien la plus petite (*resp.* grande) valeur atteinte. □

Propriété 3 *Un trinôme du second degré* $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ *admet l'un des tableaux de variations suivants.*

$a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
P		↘	β	↗	

$a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
P		↗	β	↘	

Démonstration : Nous allons par exemple démontrer que P est croissante sur $]-\infty\,;\alpha\,[$ lorsque $a < 0$.
Soient x_1 et x_2 deux réels de l'intervalle $]-\infty\,;\alpha\,[$.
On a $x_1 < x_2 < \alpha \iff x_1 - \alpha < x_2 - \alpha < 0 \iff (x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$ car la fonction carré est strictement décroissante sur les réels négatifs. D'où, a étant négatif, $a(x_1-\alpha)^2 < a(x_2-\alpha)^2$ et $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$.
Ainsi $P(x_1) < P(x_2)$. □

Exercice 4 Dresser le tableau de variation et déterminer l'extremum de chacune des fonctions des exercices 1 et 2.

Exercice 5 On définit le trinôme t sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = 2x^2 + 14x + 67$.
Déterminer la forme canonique de t puis en déduire son extremum, ses variations et ses racines éventuelles.

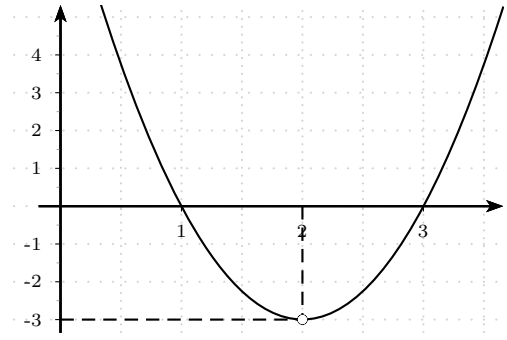
2.3 Représentation graphique d'un trinôme

Définition 6 *La représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction polynôme du second degré s'appelle une* ***parabole****.*
Si le trinôme admet pour forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$*, le point* $\boldsymbol{S(\alpha;\beta)}$ *est le* ***sommet*** *de cette parabole.*

Dans un repère orthogonal, les paraboles sont de deux types, suivant le signe de a :
« les bras en haut », « en $\bigcup$ », si $a > 0$ et « les bras en bas », « en $\bigcap$ », si $a < 0$.

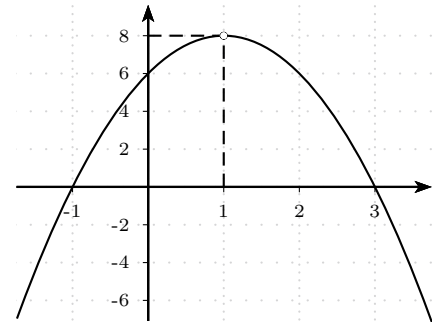
Exemples :

$\boldsymbol{a > 0}$



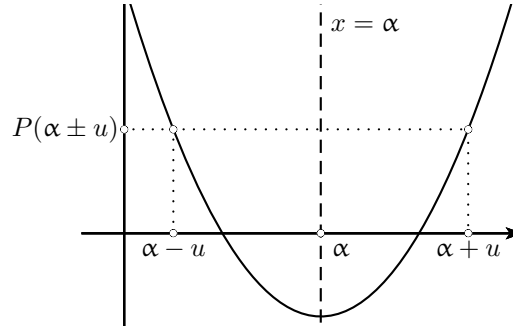
$f(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-2)^2 - 3$

$\boldsymbol{a < 0}$



$g(x) = -2x^2+4x+6 = -2(x-1)^2 + 8$

Propriété 4 *Dans un repère orthogonal, une parabole représentant une fonction polynôme du second degré admet pour* ***axe de symétrie*** *la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par son sommet.*



Visitez donc l'extra *Conic Strip* en page 349 pour de plus amples informations.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que les points du plan symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$ sont de la forme $(\alpha - u\,;\, y)$ et $(\alpha + u\,;\, y)$.

Soit $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ une fonction polynôme du second degré et soit $u \in \mathbb{R}$.
On a $P(\alpha+u) = a(\alpha+u-\alpha)^2 + \beta = au^2 + \beta$
et $P(\alpha-u) = a(\alpha-u-\alpha)^2 + \beta = a(-u)^2 + \beta = P(\alpha+u)$.
Ainsi, les points $(\alpha-u\,;P(\alpha-u))$ et $(\alpha+u\,;P(\alpha+u))$ appartiennent tous deux à la parabole représentative de P et sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x=\alpha$. □

Exercice 6 La fonction f est un polynôme du second degré admettant 3 pour maximum. On note $\mathscr{P}$ sa représentation graphique. On sait de plus que $f(0) = f(2)$.

1. Pour tout réel x, on pose $f(x) = ax^2 + bx + c$. Quel est le signe de a ?
2. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole $\mathscr{P}$ puis dresser le tableau de variations de f.
3. On donne $a = -2$. Calculer les réels b et c sans utiliser la forme canonique de f.
4. Retrouver la forme canonique de f puis calculer ses racines éventuelles.

3 Discriminant, factorisation et signe d'un trinôme

3.1 Discriminant d'un trinôme

Nous avons vu la définition de la forme canonique d'un polynôme du second degré. Le théorème suivant nous en donne la formule générale.

Théorème 1 *Soit* $P(x) = ax^2 + bx + c$ *un polynôme du second degré* ($a \neq 0$). *On a alors,* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{P(x) = a\left(x - \dfrac{-b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}}$ *où* $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ *est appelé le* ***discriminant*** *de* P.

Démonstration : Un simple développement donne le résultat.
En effet, pour tous réels x, $a \neq 0$, b et c, on a :

$$\begin{aligned} a\left(x-\tfrac{-b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a} &= a\left[x^2 - 2x\tfrac{-b}{2a} + \left(\tfrac{-b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\right] = ax^2+bx+c \end{aligned}$$

□

Ainsi, dans l'écriture de la forme canonique du § 2, on a

$$\boldsymbol{\alpha = -\tfrac{b}{2a}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta = f(\alpha) = -\tfrac{\Delta}{4a}}.$$

Pour déterminer la forme canonique d'un polynôme du second degré, on peut utiliser la formule précédente ou écrire le trinôme comme le début d'une identité remarquable.

Exercice 7 Retrouver les formes canoniques des fonctions de l'exercice 1 en utilisant la formule du théorème 1.

Le discriminant ainsi défini est un réel typique du trinôme puisqu'il va nous permettre de déterminer sa « catégorie » et d'obtenir un certain nombre de propriétés de ce trinôme.

3.2 Factorisation d'un trinôme

Nous remarquons dans les exemples précédents que la forme canonique d'un polynôme du second degré est du type A^2+B^2, $-A^2-B^2$ ou A^2-B^2 suivant le signe de Δ et de a et nous savons bien que seule la dernière écriture se factorise. Lorsque $\mathbf{\Delta \geqslant 0}$, on peut écrire :

$$a\left[\left(x-\tfrac{-b}{2a}\right)^2-\tfrac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left[x-\tfrac{-b}{2a}-\sqrt{\tfrac{\Delta}{4a^2}}\right]\left[x-\tfrac{-b}{2a}+\tfrac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}\right]$$
$$=a\left(x-\tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Les deux nombres $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont ainsi les racines du polynôme. Lorsque $\Delta=0$, ces deux nombres sont confondus et l'on parle alors de « racine double ». Si $\Delta<0$, la forme canonique ne peut se factoriser et le trinôme n'admet aucune racine.

Théorème 2 ***Factorisation des polynômes du second degré***
Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme ($a\neq 0$) et soit $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

Si $\mathbf{\Delta>0}$, P admet deux racines réelles distinctes
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
et a pour forme factorisée $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Si $\mathbf{\Delta=0}$, P admet une unique racine réelle, dite « double », $x_0=\dfrac{-b}{2a}$
et a pour forme factorisée (et canonique) $P(x)=a(x-x_0)^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Si $\mathbf{\Delta<0}$, P n'admet aucune racine réelle et n'a pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Déterminer les racines et la forme factorisée éventuelles des fonctions des exercices 1 et 2.

Remarque : Soient u et $v\in\mathbb{R}$. Les polynômes du second degré s'annulant en u et en v sont exactement ceux pouvant s'écrire sous la forme $a(x-u)(x-v)$ où $a\in\mathbb{R}$.

Propriété 5 *Soient S et P deux réels et l'on pose $P(x)=x^2-Sx+P$.*
P admet les racines réelles x_1 et x_2 si, et seulement si, $x_1+x_2=S$ et $x_1\,x_2=P$.

Démonstration : Elle sera faite dans l'exercice 20 en page 18. □

Exercice 9

1. Déterminer les racines des polynômes x^2-5x+6, $x^2-10x+21$ et $2x^2+4x-48$.
2. Déterminer deux réels dont la somme vaut 1 et le produit vaut -1.

3.3 Signe d'un trinôme

Une fois que l'on a déterminé les éventuelles racines d'un trinôme, il est aisé d'en déterminer le signe puisque ses variations sont données par le signe de a.

Théorème 3 *Soit* $P(x) = ax^2+bx+c$ *un trinôme* ($a \neq 0$) *et soit* $\Delta = b^2-4ac$ *son discriminant.*

Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$, *P est du signe contraire à a entre ses racines* $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et du signe de a à « l'extérieur » de ses racines.*

Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$, *P est nul en la racine « double »* $x_0 = \frac{-b}{2a}$ *et il est du signe de a partout ailleurs.*

Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$, *P est du signe de a sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration : Il suffit de tracer les différentes configurations de paraboles possibles pour s'en convaincre (cf. § 5). □

Exercice 10 Dresser le tableau de signes des fonctions des exercices 1 et 2.

Grâce au discriminant, nous avons désormais un algorithme de résolution des équations et inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$ mais rien ne vous empêche d'aller travailler votre maîtrise des résolutions d'équations dans l'extra de la page 337.

4 Polynômes de degré supérieur

4.1 Définitions

Définition 7 *Un polynôme réel P est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *telle qu'il existe un entier naturel n et des réels* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *tels que, pour tout réel x,*

$P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_n\,x^n$.

Si $a_n \neq 0$, $\boldsymbol{n}$ *est appelé le* ***degré*** *du polynôme P, noté* $d^\circ(P)$.

Le terme $a_i x^i$ *est appelé* ***monôme*** *de degré i.*

Exemples : ◦ La fonction $x \longmapsto -2x^6 + x^5 + 4x^3 - 7x$ est un polynôme de degré 6.

◦ La fonction $x \longmapsto 3x^4 - 5x^7 + 2x - 1$ est un polynôme de degré 7.

◦ La fonction $x \longmapsto 5x - 3$ est un polynôme de degré 1. Elle est donc affine.

◦ La fonction $x \longmapsto 2x^3 - 5x^2 + 4\cos x + 7$ n'est pas un polynôme.

◦ La fonction $x \longmapsto 0$ est un polynôme de degré $-\infty$ (ou alors indéfini).

Le résultat suivant est très intuitif et nous l'admettrons. Il découle du fait bien connu que, dans $\mathbb{R}$, un produit est nul *ssi* l'un des facteurs est nul.

Théorème 4 *Deux fonctions polynômes P et Q sont égales (sur* $\mathbb{R}$*) ssi elles ont même degré et leurs coefficients sont égaux deux à deux.*

Exemples : $3x^4 + 5$ et $3x^5 + 4$ ne sont pas égaux.

En revanche, $x^3(10x^4 - 5x^2)$ et $-5x^2(x^3 - 2x^5)$ le sont (identifier les coeff.).

4.2 Théorème de factorisation des polynômes

Théorème 5 *(Admis)* *Soient P un polynôme et λ un réel.*
λ est une racine de P
ssi il existe un polynôme Q tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\lambda)\,Q(x)$.
On a alors $d^\circ(Q) = d^\circ(P) - 1$.

Ce résultat est très utile, en particulier lorsque l'une des racines du polynôme est connue ou évidente.

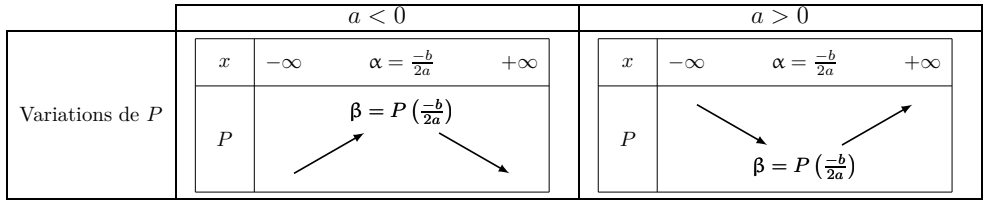
Exercice 11 Déterminer une racine évidente puis factoriser les polynômes suivants.
$P(x) = 2x^2 - 5x$, $Q(x) = x^2 - 5x + 6$,
$R(x) = 3x^2 + 8x + 5$, $S(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.

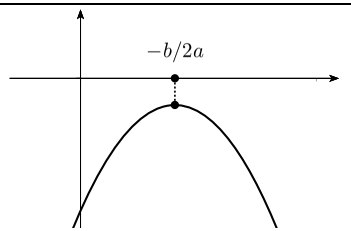
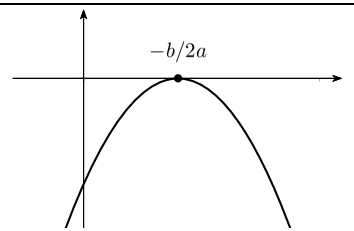
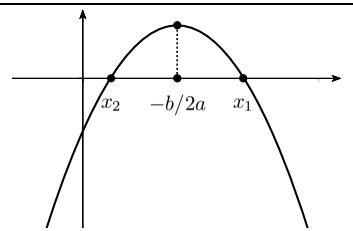
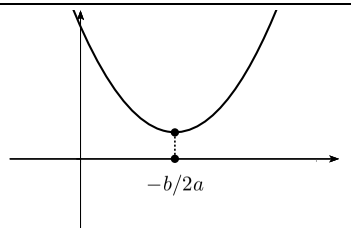
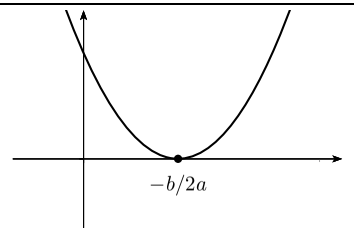
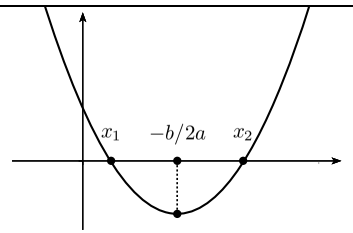
Exercice 12 Factoriser les polynômes $x^n - 1$ puis $x^n - a^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

5 Synthèse

Nous savons désormais décrire un polynôme du second degré, tant du point de vu algébrique qu'analytique et graphique. Nous pouvons ainsi résoudre toutes les équations et inéquations du second degré et même, dans certains cas, celles de degrés supérieurs. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont dorénavant indispensables.

Soit P un polynôme du second degré.
$\exists\, a \neq 0,\, b,\, c \in \mathbb{R}$ tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x - \dfrac{-b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$
où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de P.
λ est une racine de P *ssi* il existe un polynôme Q tel que $d^\circ(Q) = d^\circ(P) - 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-\lambda)\,Q(x)$.



$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$	$\boldsymbol{\Delta < 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\boldsymbol{\Delta > 0}$
Racines de P	Pas de racine réelle	Une racine "double" : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	Deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Forme factorisée de P	Pas de factorisation	$P(x) = a(x-x_0)^2$	$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
Signe de P	Signe de a	Signe de a ou nul	Signe de a à l'extérieur des racines
$a < 0$			
Signe de P	x : $-\infty$ … $+\infty$; $P(x)$: $-$	x : $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$; $P(x)$: $-$ 0 $-$	x : $-\infty$ … x_2 … x_1 … $+\infty$; $P(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$
Allure de la parabole			
$a > 0$			
Signe de P	x : $-\infty$ … $+\infty$; $P(x)$: $+$	x : $-\infty$ … $-\frac{b}{2a}$ … $+\infty$; $P(x)$: $+$ 0 $+$	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$; $P(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
Allure de la parabole			

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Exercice 13 Pour chacun des polynômes suivants, déterminer la forme canonique, calculer le discriminant et les éventuelles racines réelles, dresser les tableaux de signes et de variations, écrire la forme factorisée le cas échéant et donner le sommet et l'allure de la courbe.

$f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ $\quad$ $g(x) = 147 + 12x^2 - 84x$ $\quad$ $h(x) = 4x - 5x^2 - 3$

$p(x) = -3x^2 - 21x - 30$ $\quad$ $q(x) = -7x^2 - 63 + 42x$ $\quad$ $r(x) = 2x^2 - 3x + 4$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) : $4x^2 - 2 = -3x$. $\quad$ (E_2) : $2x^2 - 5 + 3x = 0$.

(E_3) : $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$. $\quad$ (E_4) : $3x + 8\sqrt{x} - 3 = 0$.

(E_5) : $x^4 + x^2 - 2 = 0$. $\quad$ (E_6) : $15 = 2x + \dfrac{7}{x}$.

(E_7) : $\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2 = x$. $\quad$ (E_8) : $8\sqrt{3x+1} = 3x + 17$.

Exercice 15 Déterminer l'équation de la parabole $\mathscr{P}$ passant par les points $A(5;0)$, $B(-2;0)$ et $C(0;-3)$ puis celle de la parabole $\mathscr{P}'$ passant par les points $E(-1;2)$, $F(0;5)$ et $G(2;1)$.

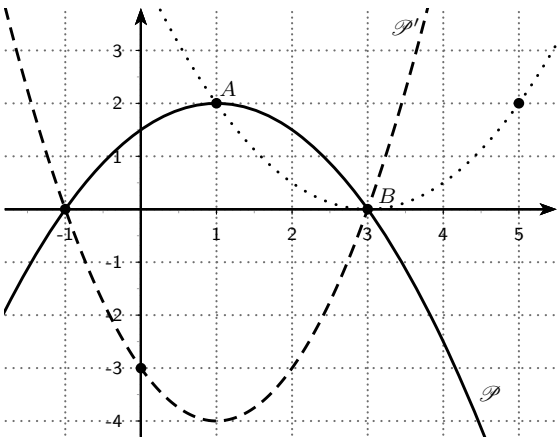
Exercice 16

VouF ?
Justifier la réponse.

(a) Une équation de $\mathscr{P}$ est $y = -(x+1)(x-3)$.

(b) Une équation de $\mathscr{P}'$ est $y = (x+1)(x-3)$.

(c) Une équation de la parabole passant par $A(1;2)$ et tangente en $B(3;0)$ à $(O;\vec{i})$ est $y = (x-3)^2$.



Exercice 17 Écrire une fonction Python (cf. *Algo à gogo* en page 291) donnant la valeur du discriminant et des racines éventuelles d'un trinôme à partir des coefficients de sa forme développée puis l'implémenter dans votre calculatrice.

Exercice 18 Jack dispose de 100 mètres de grillage et souhaite clôturer son jardin avec celui-ci afin de protéger ses plants de haricots magiques des attaques ravageuses de sa poule aux œufs d'or. Ce jardin doit être rectangulaire, c'est bien pratique. Il veut aussi qu'il soit le plus grand possible, c'est bien naturel. Comment doit-il procéder ?

Exercice 19 Soit b un réel et soit P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 3$.

1. Ouvrir l'application GeoGebra sur un ordinateur fonctionnel.
2. Créer un curseur b allant de -8 à 8 puis tracer la fonction P.
3. Créer le sommet de la parabole tracée ("Extremum[P]") puis activer sa trace.
4. Faire varier le curseur b puis démontrer votre conjecture.

Exercice 20 En complément de la propriété 5 p.13, cet exercice a pour but de déterminer des conditions d'existence de deux nombres réels dont la somme et le produit sont donnés.

1. Trouver deux nombres réels dont la somme vaut 11 et le produit 30.
   Justifier que 5 et 6 sont les solutions de l'équation $(x-5)(x-6) = 0$.
   En déduire que 5 et 6 sont les solutions de l'équation $x^2 - (5+6)x + 5 \times 6 = 0$.
2. (a) On suppose que u et v ont pour somme S et pour produit P.
   Démontrer que u et v sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.
   Que dire de $S^2 - 4P$?
   (b) Réciproquement, on suppose que S et P sont deux réels tels que $S^2 - 4P \geqslant 0$.
   Démontrer que les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ sont deux nombres, éventuellement égaux, ayant pour somme S et pour produit P.
   (c) Énoncer la propriété qui a été démontrée en (a) et (b).

Applications :

3. (a) On remarque que 1 est solution de l'équation $x^2 - 7x + 6 = 0$.
   Quelle est l'autre solution ?
   (b) On remarque que 2 est solution de l'équation $x^2 + 5x - 14 = 0$.
   Quelle est l'autre solution ?
4. (a) Un rectangle peut-il avoir un périmètre de 16 m et une aire de 8 m^2 ?
   (b) Un rectangle peut-il avoir un périmètre de 6 m et une aire de 3 m^2 ?

Exercice 21 Soit le polynôme $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 11x - 12$.

1. Trouver une racine évidente de P. En déduire une première factorisation de P.
2. Calculer les autres racines de P et en déduire la factorisation $P(x) = (1-x)(x+3)(x-4)$.
3. Dresser le tableau de signe de la fonction $x \longmapsto P(x)$ puis résoudre l'inéquation $P(x) > 0$.
4. Résoudre l'équation $\dfrac{2-2x}{-x^3+2x^2+11x-12} = \dfrac{3}{x-4}$

Exercice 22 Le nombre d'or.

On cherche les proportions d'un rectangle tel que, si on lui retire le plus grand carré possible, le rectangle restant lui est semblable, c.-à-d. qu'ils ont les mêmes proportions.

1. Faire une figure explicative.
2. Puisque cela est affaire de proportions, on peut imposer la largeur du rectangle : $\ell = 1$. Montrer que la longueur L du rectangle est racine d'un certain polynôme.

3. Calculer la valeur exacte de L.
   On l'appelle *nombre d'or* et on le note généralement φ.
4. (a) Donner une valeur approchée de φ, de φ^2 et de $\frac{1}{\varphi}$. Que remarquer ?
   (b) Démontrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$, que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ et que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$.
   (c) En déduire que le rectangle de côtés de longueur 1 et φ possède les propriétés souhaitées.
5. Justifier les formules suivantes :

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}} \qquad \text{et} \qquad \varphi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

6. Tapoter « Nombre d'or » sur Wikipedia où l'on verra maintes apparitions de φ en mathématiques, en sciences physiques mais aussi dans la nature, les arts...

Exercice 23 Arêtes à Malibu

Sur la plage de Malibu, les maîtres-nageuses Pam et Léa (and her son) utilisent un filet de 160 mètres de longueur et deux bouées afin de délimiter le long de la plage une zone de baignade de forme rectangulaire. Elles se demandent où placer les bouées pour que la zone de baignade ait la plus grande aire possible. On note x la longueur du côté nord de la zone.

1. Sur quel intervalle I la longueur x varie-t-elle ?
2. Exprimer en fonction de x les dimensions de la zone de baignade puis son aire.
   On appellera f la fonction associant à la longueur x l'aire en m^2 de la zone de baignade.
3. Tracer le graphe de f sur l'écran de la calculatrice puis conjecturer la valeur de x répondant au problème. On notera x_0 cette valeur.
4. Factoriser l'expression $f(x_0) - f(x)$ puis en déduire son signe.
5. Conclure.

Sautez vers la page 233 et réalisez le devoir n° 1.

Corrigé des exercices

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Exercice 1 à 5, 7 à 8 et 10

$f(x) = 4x^2 - 24x + 41 = 4(x-3)^2 + 5$ non factorisable dans $\mathbb{R}$, $\Delta = -80$, parabole en $\bigcup$ de sommet $S\,(\,3\,;\,5\,)$, de signe $+$.

$g(x) = -2x^2 + 16x - 37 = -2(x-4)^2 - 5$ non factorisable dans $\mathbb{R}$, $\Delta = -40$, parabole en $\bigcap$ de sommet $S\,(\,4\,;\,-5\,)$, de signe $-$.

$h(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 3(x-1)^2 - 4 = 3\left(x - 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\Delta = 48$, parabole en $\bigcup$ de sommet $S\,(\,1\,;\,-4\,)$, de signe $+\ 0\ -\ 0\ +$.

$k(x) = -3x^2 + 30x - 75 = -3(x-5)^2$, $\Delta = 0$, parabole en $\bigcap$ de sommet $S\,(\,5\,;\,0\,)$, de signe $-\ 0\ -$.

$p(x) = -x^2 - 4x + 1 = -(x-(-2))^2 + 5 = -(x+2-\sqrt{5})(x+2+\sqrt{5})$, $\Delta = 20$, parabole en $\bigcap$ de sommet $S\,(\,-2\,;\,5\,)$, de signe $-\ 0\ +\ 0\ -$.

$q(x) = 2x^2 - 2x - 24 = 2(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{49}{2} = 2(x-4)(x+3)$, $\Delta = 196$, parabole en $\bigcup$ de sommet $S\left(\,\frac{1}{2}\,;\,-\frac{49}{2}\,\right)$, de signe $+\ 0\ -\ 0\ +$.

$r(x) = 5(x-2)^2 - 7 = 5x^2 - 20x + 13 = 5\left(x - 2 - \frac{\sqrt{35}}{5}\right)\left(x - 2 + \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$, $\Delta = 140$, parabole en $\bigcup$ de sommet $S\,(\,2\,;\,-7\,)$, de signe $+\ 0\ -\ 0\ +$.

$s(x) = -2(x+6)^2 + 1 = -2x^2 - 24x - 71 = -2\left(x + 6 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + 6 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\Delta = 8$, parabole en $\bigcap$ de sommet $S\,(\,-6\,;\,1\,)$, de signe $-\ 0\ +\ 0\ -$.

$t(x) = 2x^2 + 14x + 67 = 2\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{2}$ non factorisable dans $\mathbb{R}$, $\Delta = -340 < 0$, parabole en $\bigcup$ de sommet $S\left(\,\frac{7}{2}\,;\,\frac{85}{2}\,\right)$, de signe $+$.

Exercice 6

1. a est strictement négatif car le trinôme admet un maximum.
2. Puisque la parabole est symétrique par rapport à la droite « verticale » passant par son sommet, l'abscisse de ce dernier ne peut être que $\frac{0+2}{2} = 1$: le sommet est donc $S\,(\,1\,;\,3\,)$ et la parabole est en $\bigcap$.
3. On a $f(1) = -2 \times 1^2 + b \times 1 + c = 3$ et $f(2) = -2 \times 2^2 + 2b + c = c = f(0)$ d'où $b + c = 5$ et $2b - 8 = 0$: $b = 4$, $c = 1$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$.
4. On a $f(x) = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3 = -2\left(x - 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\Delta = 24$.

Exercice 9

1. $2 + 3 = 5 = -(-5)$ et $2 \times 3 = 6$: le polynôme $x^2 - 5x + 6$ s'annule en 2 et en 3. On a $7 + 3 = 10 = -(-10)$ et $7 \times 3 = 21$: le polynôme $x^2 - 10x + 21$ s'annule

en 3 et en 7.
On a $4-6=-2=-(-2)$ et $-6\times 4=-24$: $2x^2+4x-48=2(x^2+2x-24)$ s'annule en 4 et en -6.

2. Cherchons les racines du polynôme x^2-x-1 : $\Delta=5$ et $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Nous avons bien $\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1-5}{4}=-1$.

Exercice 11 $P(x)=2x^2-5x=x(2x-5)$, $Q(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, $R(x)=3x^2+8x+5=(x+1)(3x+5)$
et $S(x)=2x^3+x^2-5x+2=(x-1)(2x^2+bx-2)$
qui donne $2x^3+(b-2)x^2+(-2-b)+2$ d'où $b=3$
et $S(x)=(x-1)(2x^2+3x-2)=(x-1)(x+2)(2x-1)$.

Exercice 12 On a $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)$
et $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+...+a^{n-2}x+a^{n-1})$.

Exercice 13

$f(x)=2x^2-8x+6=2(x-2)^2-2=2(x-1)(x-3)$, $\Delta=16>0$,
parabole en $\bigcup$ de sommet $S(2\,;-2)$.

$g(x)=147+12x^2-84x=12\left(x-\frac{7}{2}\right)^2$, $\Delta=0$,
parabole en $\bigcup$ de sommet $S\left(\frac{7}{2}\,;0\right)$.

$h(x)=4x-5x^2-3=-5(x-\frac{2}{5})^2-\frac{11}{5}$, $\Delta=-44<0$,
parabole en $\bigcap$ de sommet $S\left(\frac{2}{5}\,;-\frac{11}{5}\right)$.

$p(x)=-3x^2-21x-30=-3(x+\frac{7}{2})^2+\frac{27}{4}=-3(x+2)(x+5)$, $\Delta=81>0$,
parabole en $\bigcap$ de sommet $S\left(-\frac{7}{2}\,;\frac{27}{4}\right)$.

$q(x)=-7x^2-63+42x=-7(x-3)^2$, $\Delta=0$, parabole en $\bigcap$ de sommet $S(3\,;0)$.

$r(x)=2x^2-3x+4=2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{23}{8}$, $\Delta=-23<0$,
parabole en $\bigcup$ de sommet $S\left(\frac{3}{4}\,;\frac{23}{8}\right)$.

Exercice 14

(E_1) : $4x^2-2=-3x\Leftrightarrow 4x^2+3x-2=0$ de discriminant $\Delta=3^2-4\times 4\times(-2)$
$\Delta=41>0$ d'où les racines $x_1=\frac{-3-\sqrt{41}}{2\times 4}=-\frac{3+\sqrt{41}}{8}$ et $x_2=\frac{\sqrt{41}-3}{8}$.
(E_1) admet donc deux solutions $\frac{\sqrt{41}-3}{8}$ et $-\frac{\sqrt{41}+3}{8}$.

(E_2) : $2x^2+3x-5=0$ de discriminant $\Delta=3^2+4\times 2\times 5=49>0$.
(E_2) admet donc deux racines réelles : $x_1=1$ (évidente) et $x_2=-\frac{5}{2}$ (pour un juste développement).

(E_3) : $x-2\sqrt{x}+1=0$. Pour x positif, posons $t=\sqrt{x}\geqslant 0$. On a $x=t^2$ et (E_3) s'écrit $t^2-2\,t+1=0\iff(t-1)^2=0\iff t=1\geqslant 0$.
L'unique solution de (E_3) est donc $1^2=1$. On peut aussi remarquer que (E_3) s'écrit $(\sqrt{x}-1)^2=0$ mais cette méthode ne se généralise pas.

(E_4) : $3x+8\sqrt{x}-3=0$. Pour x positif, posons $t=\sqrt{x}\geqslant 0$. On a $x=t^2$ et (E_4) s'écrit alors $3t^2+8t-3=0$ de discriminant $\Delta=8^2+4\times 3\times 3=100>0$ et donc de racines $t_1=\frac{-8-\sqrt{100}}{2\times 3}=-3$ et $t_2=\frac{-8+10}{6}=\frac{1}{3}$.
t devant être positif, seul t_2 est solution et (E_4) a pour unique solution $(t_2)^2=\frac{1}{9}$.

CORRIGÉS

(E_5) : Pour $X = x^2 \geqslant 0$, $x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0$
$\Leftrightarrow (X-1)(X+2) = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou -2 (racines évidentes).
Seul $X = x^2 = 1$ est positif et (E_5) admet -1 et 1 pour seules solutions.

(E_6) : Pour $x \neq 0$, $15 = 2x + \frac{7}{x} \iff \frac{2x^2+7-15x}{x} = 0 \iff 2x^2 - 15x + 7 = 0$ de discriminant $\Delta = 225 - 56 = 169 > 0$ et de racines $x_1 = \frac{15-\sqrt{169}}{2\times 2} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{15+13}{4} = 7$. (E_6) admet donc $\frac{1}{2}$ et 7 pour solutions.

(E_7) : Puisque $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ par la méthode des racines évidentes ou celle du discriminant, on doit avoir $x \in]+\infty\,;-3\,]\cup[\,1\,;+\infty\,[$. Alors $\sqrt{x^2+2x-3}+2 = x \iff x^2+2x-3 = (x-2)^2$ et $x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$. Or $x^2 + 2x - 3 = x^2 - 4x + 4 \iff 6x = 7$. Comme $\frac{7}{6} < 2$, (E_7) n'admet aucune solution réelle.

(E_8) : Pour $3x+1 \geqslant 0$ et $3x+17 \geqslant 0$ c.-à-d. pour $x \geqslant -\frac{1}{3}$,
$8\sqrt{3x+1} = 3x+17 \Leftrightarrow 64(3x+1) = (3x+17)^2$
$\Leftrightarrow 9x^2 + 102x + 289 - 192x - 64 = 0$
$\Leftrightarrow 9x^2 - 90x + 225 = 0 \Leftrightarrow 9(x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \geqslant -\frac{1}{3}$.
(E_8) admet donc 5 pour unique solution.

Exercice 15 • On a $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ et $a(0-5)(0-(-2)) = -3$ d'où $\mathscr{P}$: $y = \frac{3}{10}(x-5)(x+2)$.

• On a $a-b+c = 2$, $c = 5$ et $4a+2b+c = 1$ d'où $b = a+3$ et $6a = 1-5-6$ d'où $\mathscr{P}'$: $y = -\frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 5$.

Exercice 16

(a) Faux puisque $\mathscr{P}$ passe par le point $(1\,;2)$ et $-(1+1)(1-3) = 4 \neq 2$.
Rq : les racines sont les bonnes, l'équation de $\mathscr{P}$ est donc $-\frac{1}{2}(x+1)(x-3)$ ($\frac{1}{2}$ car 2 est la moitié de 4).

(b) Vrai. $\mathscr{P}'$ a les bonnes racines et pour $x = 0$, $y = (0+1)(0-3) = -3$ (une parabole est entièrement déterminée par trois points).

(c) Faux. On a bien une racine double 3 mais lorsque $x = 1$, $y = (1-3)^2 = 4 \neq 2$.

Exercice 17 On entre les coefficients du polynôme du second degré sous sa forme développée et l'algorithme donne la valeur du discriminant, le nombre et la valeur des racines éventuelles.

```
1| def discriminant(a,b,c) :
2|    Delta=b**2-4*a*c
3|    if Delta>0 :
4|       x1=(-b-sqrt(Delta))/(2*a)
5|       x2=(-b+sqrt(Delta))/(2*a)
6|       print("Le trinome admet deux racines réelles ",x1," et ",x2)
7|    elif Delta==0 :
8|       x0=-b/(2*a)
9|       print("Le trinome admet une racine réelle double ", x0)
10|   else :
11|      print("Le trinome n'admet pas de racine réelle.")
```

Exercice 18 Jack cherche les dimensions L et ℓ d'un rectangle de périmètre $2(L+\ell)=100$ et d'aire $\mathscr{A}=L\ell$ maximale. On a donc $L+\ell=50$ *i.e.* $\ell=50-L$. D'où l'expression $\mathscr{A}=L(50-L)=50L-L^2$ qui est un polynôme du second degré de coefficient dominant -1 et s'annulant en 0 et en 50 : il est donc maximal en $L=\alpha=\frac{0+50}{2}=25$ et on a alors $\ell=50-25=25$.
Pour que son jardin soit d'aire maximale, il faut que Jack construise un enclos carré de côté 25 m.

Exercice 19 Le sommet de la parabole représentative de P semble décrire lui aussi une parabole. En effet, ce sommet a pour coordonnées $S\left(-\frac{b}{2a}\,;\,\frac{-\Delta}{4a}\right)$ ce qui donne ici $S\left(b\,;\,\frac{b^2}{2}-3\right)$. Le sommet S décrit donc la parabole d'équation $y=\frac{1}{2}x^2-3$ lorsque b varie.

Exercice 20

1. On a $5+6=11$ et $5\times 6=30$. Par ailleurs, un produit étant nul *ssi* l'un de ses facteurs est nul, on a :
$$(x-5)(x-6)=0 \iff x-5=0 \text{ ou } x-6=0 \iff x=5 \text{ ou } x=6.$$
5 et 6 sont donc les seules solutions de l'équation $(x-5)(x-6)=0$.
Puisque $(x-5)(x-6)=x^2-6x-5x+5\times 6=x^2-(5+6)x+5\times 6$, les seules solutions de l'équation $x^2-(5+6)x+5\times 6=0$ sont 5 et 6.

2. (a) On a $(x-u)(x-v)=x^2-ux-vx+u\,v=x^2-(u+v)x+uv=x^2-Sx+P$.
D'où $x^2-Sx+P=0 \iff (x-u)(x-v)=0 \iff x=u$ ou $x=v$ et le polynôme x^2-Sx+P admet les deux racines u et v, éventuellement confondues (sinon, on peut aussi calculer x^2-Sx+P en $x=u$ et $x=v$).
Son discriminant $(-S)^2-4\times 1\times P=S^2-4P$ est donc positif ou nul.

   (b) Si $S^2-4P\geqslant 0$, l'équation $x^2-Sx+P=0$ admet deux solutions u et v, éventuellement confondues, et peut s'écrire $(x-u)(x-v)=0$.
Le calcul précédent montre qu'alors, $S=u+v$ et $P=u\,v$.

   (c) On a ainsi démontré qu'il existe deux nombres réels ayant pour somme S et pour produit P *ssi* $S^2-4P\geqslant 0$. Ces deux nombres sont alors les racines du polynôme x^2-Sx+P.

3. (a) On a $1\times u=6$ donc l'autre solution est 6 (et $1+6=7$).

   (b) On a $2\times v=-14$ donc l'autre solution est -7 (et $2-7=-5$).

4. (a) On cherche deux nombres L et ℓ dont la double somme vaut 16 et le produit 8 (leur somme vaut donc 8). Puisque $8^2-4\times 8=32>0$, ces deux nombres existent et sont les racines du polynôme x^2-8x+8. Leur produit et leur somme étant positifs, ces nombres sont positifs et peuvent donc être les longueurs des côtés d'un rectangle.

   (b) On cherche deux nombres L et ℓ dont la double somme vaut 6 et le produit 3 (leur somme vaut 3). Comme $3^2-4\times 3=-3<0$, ces deux nombres n'existent pas.

Exercice 21 Soit le polynôme $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 11x - 12$.

1. On a $P(1) = -1 + 2 + 11 - 12 = 0$ donc il existe a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$. Par simple identification des termes « extrêmes », on a $a = -1$ et $c = 12$. On développe alors $(x-1)(-x^2+bx+12) = -x^3 + (b+1)x^2 + (-b+12)x - 12$ et $b = 1$: $P(x) = (x-1)(-x^2+x+12)$.
2. On a $\Delta = 1^2 + 4 \times 12 = 49 > 0$ et les autres racines sont $x_1 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2\times(-1)} = 4$ et $x_2 = \frac{-1+7}{-2} = -3$. D'où la factorisation $P(x) = (x-1) \times (-1)(x+3)(x-4) = (1-x)(x+3)(x-4)$.
3. On en déduit le tableau de signes suivant :

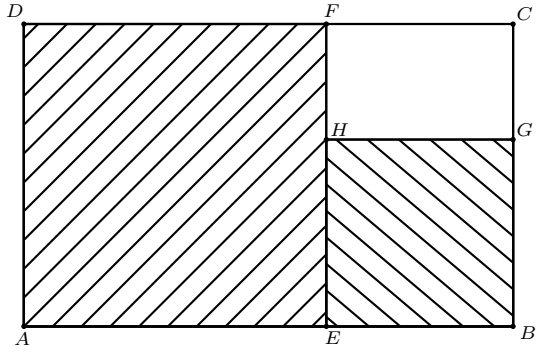
x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$(1-x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$(x-3)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$(x-4)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

et $P(x) > 0 \iff x \in]-\infty\,;-3[\cup]1\,;4[$.

4. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;1;4\}$, $\frac{2-2x}{-x^3+2x^2+11x-12} = \frac{3}{x-4} \iff \frac{2(1-x)(x-4)}{(1-x)(x+3)(x-4)} = 3$ $\iff 2 = 3(x+3) \iff x = -\frac{7}{3}$.

Exercice 22 Le nombre d'or

1. On cherche à construire un rectangle $ABCD$ tel que si on lui retire le plus grand carré possible, $AEFD$, le rectangle restant conserve les mêmes proportions. On veut donc $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BE}$. On remarque que cette propriété semble encore vraie dans le rectangle restant, $BCFE$.



2. On pose $AB = L$ et $AD = \ell$. On doit avoir $\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{L-\ell}$ puisque l'autre équation $\frac{L}{\ell} = \frac{L-\ell}{\ell}$ est impossible et pour $\ell = 1$, on obtient $L(L-1) = 1$: L doit donc être racine du trinôme $x^2 - x - 1 = 0$.
3. On a $\Delta = 5 > 0$ et les racines sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $L_0 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$.
4. (a) On a $\varphi \simeq 1,618$, $\varphi^2 \simeq 2,618$ $\frac{1}{\varphi} \simeq 0,618$ qui diffèrent d'environ 1.

(b) On a $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ donc $\varphi^2 = \varphi + 1$. Puisque $\varphi(\varphi - 1) = 1$, $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Ainsi, $\varphi^3 = \varphi\varphi^2 = \varphi(\varphi+1) = \varphi^2 + \varphi = (\varphi+1) + \varphi = 2\varphi + 1$.

(c) Ainsi, le rectangle de côtés 1 et φ et celui résultant de la découpe, de côtés $\varphi - 1$ et 1, ont pour égales proportions $\frac{1}{\varphi}$ et $\frac{\varphi-1}{1}$. De même que le rectangle donnant le premier, de côtés φ et $\varphi + 1$.

5. Comme $\varphi^2 = 1 + \varphi$, $\varphi = \sqrt{1+\varphi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}} = \ldots$ et puisque $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = \ldots$

Exercice 23 Arêtes à Malibu

1. On a $x \in]\,0\,;80\,[$.
2. Le rectangle a pour dimensions x et L tels que $x + L + x = 160$ d'où $L = 160 - 2x$ et l'aire vaut $f(x) = x(160 - 2x)$.
3. On conjecture que l'aire maximale est atteinte pour $x_0 = 40$.
4. On a $f(40) - f(x) = 40(160 - 80) - x(160 - 2x) = 2x^2 - 160x + 3200$
$= 2(x - 40)^2 \geqslant 0$.
5. Ainsi, $f(x) \leqslant f(40)$ sur $\mathbb{R}$ et f atteint son maximum en 40.

CORRIGÉS

Chapitre II

Limites & Nombres dérivés

Sommaire

Introduction **27**
1 Limite d'une fonction en un nombre réel **28**
2 Nombres dérivés : introduction **30**
2.1 Vitesse instantanée 30
2.2 Tangente à une courbe 31
3 Nombre dérivé de f en a **31**
3.1 Définitions 31
3.2 Interprétation graphique 32
3.3 Approximation affine locale 33
3.4 Exercice 33
4 La fonction valeur absolue **34**
4.1 Définition 34
4.2 Étude de la fonction valeur absolue 35
Exercices **36**
Corrigé des exercices 40

Introduction

Au cours du XVIIe s., le domaine de l'analyse connaît une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz, traitants notamment des *infiniment petits* et des sommes *intégrales*. C'est cependant Blaise Pascal qui le premier a mené des études sur la notion de tangente à une courbe, qu'il appelait « touchantes ». Néanmoins, cette théorie tout juste éclose n'est pas encore pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle exige : la notion d'infiniment petit est encore trop intuitive. C'est au XVIIIe s. que d'Alembert énonce la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement, sous une forme semblable à celle qui est utilisée de

nos jours. Plus tard, Lagrange † (fin du XVIIIe s.) utilise la notation $f'(x)$ et introduit le terme « dérivée » pour désigner cette notion. Cependant, la notion de limite pose encore problème : l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas encore construit formellement. C'est enfin avec les travaux de Cauchy † et de Weierstrass, au milieu du XIXe s., que le concept de limite et de dérivée sera entièrement formalisé.

Nous abordons ici des notions essentielles aux mathématiques et aux sciences en général dont la naissance ne manqua pas de controverses ni de polémiques tant mathématiques que philosophiques et, si les débats mathématiques sont pour la plupart clos, il n'est pas rare d'obtenir des résultats pour le moins surprenants et nous posant encore des questions auxquelles il est difficile de répondre avec certitude.

Ceci constitue la première partie du programme de cette année qu'un chapitre ultérieur complètera.

1 Limite d'une fonction en un nombre réel

Vous étudierez en classe de terminale la notion de limite d'une fonction en général. Néanmoins, il nous est nécessaire d'en avoir quelques notions dès à présent. Nous nous contenterons de définitions plutôt intuitives à défaut d'être parfaitement rigoureuses et ne démontrerons pas les résultats.

Étudier la limite d'une fonction f en un réel a, c'est déterminer le comportement de $f(x)$ lorsque x est très proche de a. Par exemple, on ne peut calculer la valeur de $\frac{3x^2+5}{x-2}$ pour $x = 2$ mais on le peut pour des valeurs de x très proches de 2. Que se passe-t-il autour de la valeur 2 ? Les premiers exercices de la planche (cf. page 36) nous montrent divers comportements possibles que l'on formalise ici.

On considère dans ce paragraphe une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ et un réel a appartenant à $\mathscr{D}_f$ ou à son « bord » : par exemple, le nombre 0 appartient au bord de $\mathbb{R}^*$.

Définition 1 ***Limite de f en a***

• *Soit ℓ un réel. On dit que* ***ℓ est la limite de f lorsque x tend vers a*** *(ou que f a pour limite ℓ quand x tend vers a ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a) si $f(x)$ peut être rendu aussi proche de ℓ que l'on veut pour tous les x assez proches de a. On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.*

• *De façon analogue, on dira que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pour tous les x proches de a et l'on notera alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.*

• *De même, on dira que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut pour tous les x proches de a et l'on notera $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

†. Illustres mathématiciens dont les noms sont inscrits sur la non moins illustre tour Eiffel.

Remarque : Lorsque l'on dit que x tend vers a, on sous-entend que x se rapproche de plus en plus de a tout en restant différent de a. Mais, dans certains cas, l'image de a, lorsqu'elle existe, pourra nous donner la limite en a.

Exemples :
- $\lim\limits_{x\to 3} 2x+5 = 2\times 3+5 = 11$.
- $\lim\limits_{x\to -1} 3x^2 - x + 4 = 3\times(-1)^2 - (-1) + 4 = 8$.
- $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x+3}{5-x} = \dfrac{6+3}{5-6} = -9$.

Définition 2
De manière générale, une fonction est dite continue *en $a \in \mathscr{D}_f$ si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Graphiquement, cela se traduit par le fait qu'il n'est pas nécessaire de « soulever le crayon » lorsqu'on trace sa représentation graphique : il n'y a ni « trous » ni « sauts ».

Propriété 1
Les fonctions polynomiales sont continues en tout nombre réel ainsi que les fonctions sinus et cosinus.

Cas des fonctions rationnelles
Les fonctions rationnelles sont des quotients de fonctions polynômiales et sont ainsi définies et même continues là où leur dénominateur ne s'annule pas.
Par exemple, $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-8x+6}{5x-2} = \frac{2\times 3^2-8\times 3+6}{5\times 3-2} = \frac{0}{13} = 0$.
Les limites nécessitant une étude plus approfondie sont donc aux *valeurs interdites* des fractions rationnelles c.-à-d. lorsque l'on tend à diviser par zéro.

Imaginez-vous près d'un précipice. Comme tout un chacun, vous êtes hypnotisés par l'attrait du vide et tenez absolument à observer ce qu'il y a au fond, s'il y en a un. Vous savez bien que pour ce faire, il vous faudrait vous situer juste au-dessus mais cela vous serait fatal. Alors, vous vous approchez, petit à petit, bravant le danger. Vous êtes pratiquement au bord mais vous pouvez encore avancer, un tout petit peu. Puis encore un peu plus. Que ne feriez-vous pour passer au-dessus, voler et voir l'immensité du gouffre béant ?
Étudier la limite d'une fonction en l'une de ses valeurs interdites, c'est un peu similaire : on s'approche infiniment près de la valeur « dangereuse », on observe le comportement des images et l'on entre en lévitation en passant à la limite, comme si l'on volait au-dessus de la valeur interdite.

Remarquons tout d'abord que $\frac{1}{1/1000} = 1000$, $\frac{1}{1/100000} = 10^5$, $\frac{1}{1/10^{97}} = 10^{97}$.
De même, $\frac{1}{-1/100} = -100$, $\frac{1}{-1/10000} = -10^4$, $\frac{1}{-1/10^{79}} = -10^{79}$.
Ainsi, on en déduit intuitivement $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty}$ et $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty}$
où $x \to 0^+$ signifie que x tend vers 0 en restant supérieur à 0,
et où $x \to 0^-$ signifie que x tend vers 0 en restant inférieur à 0.
On parle alors de limite à droite et de limite à gauche.
On définira similairement $x \to 2^-$ par x tend vers 2 en restant inférieur à 2 (et non, en restant négatif).

Exemples : La rédaction suivante est délicate car nous calculons avec l'infini. Il est nécessaire d'avoir un peu de pratique et de recul avant de l'utiliser.

- $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{\text{“}1\text{”}}{3^+-3} = \frac{\text{“}1\text{”}}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{\text{“}1\text{”}}{3^--3} = \frac{\text{“}1\text{”}}{0^-} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to -5^+} \frac{x+4}{x+5} = \frac{\text{“}(-5)^+ +4\text{”}}{(-5)^++5} = \frac{\text{“}-1\text{”}}{0^+} = -\infty$
  et $\lim\limits_{x\to -5^-} \frac{x+4}{x+5} = \frac{\text{“}(-5)^- +4\text{”}}{(-5)^-+5} = \frac{\text{“}-1\text{”}}{0^-} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 1^+} -\frac{7}{1-x} = \frac{\text{“}-7\text{”}}{1-1^+} = \frac{\text{“}-7\text{”}}{0^-} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} -\frac{7}{1-x} = \frac{\text{“}-7\text{”}}{1-1^-} = \frac{\text{“}-7\text{”}}{0^+} = -\infty$.

Parfois, il arrive aussi que le numérateur s'annule en même temps que le dénominateur. On obtient alors une limite que l'on voudrait écrire $\frac{\text{“}0\text{”}}{0}$. Plusieurs cas de figures se présentent dans le cas général : cette limite peut être finie, nulle, infinie ou même, ne pas exister. C'est que l'on appelle une **forme indéterminée (F.I.).**

Dans le cas des fonctions rationnelles, on peut généralement lever l'indétermination en factorisant par la racine du polynôme du dénominateur.

Exemples :
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^5}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{7x^3}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} 7 = 7$.
- $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+5x-6}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+6}{x+3} = \frac{1+6}{1+3} = \frac{7}{4}$.

Le principe de base est que « $\dfrac{1}{0^\pm} = \pm\infty$ » et que « $\dfrac{0}{0}$ » est une forme indéterminée que l'on cherchera souvent à préciser.

2 Nombres dérivés : introduction

2.1 Vitesse instantanée

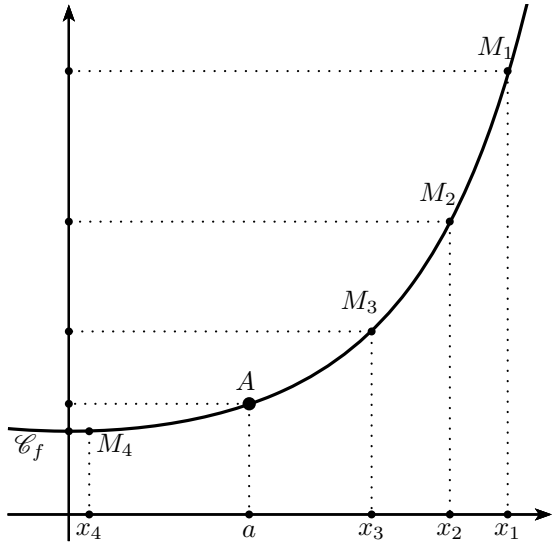
Une bille est lâchée, sans vitesse initiale, d'un point situé à 25 mètres du sol.
Nous admettrons que la distance parcourue par la bille à l'instant t, en secondes est indépendante de sa masse et vaut, en mètres, $d(t) = 5\,t^2$.
Ainsi, par exemple, au bout de 1 s., elle a parcouru $d(1) = 5 \times 1^2 = 5$ m.
On souhaite calculer sa *vitesse instantanée* à l'instant $t = 2$. Notons $v(2)$, en m.s^{-1}, cette vitesse.
Intuitivement, on peut penser que l'on aura une bonne idée de $v(2)$ en calculant la *vitesse moyenne* entre les instants $t = 2$ et $t = 2+h$ lorsque h est très proche de zéro :

$$v_m(h) = \frac{d(2+h) - d(2)}{h}\,.$$

On a $v_m(h) = \frac{d(2+h)-d(2)}{h} = \frac{5(2+h)^2-5\times 2^2}{h} = \frac{5\times 2^2+20h+5h^2-5\times 2^2}{h} = 20+5\,h$.
Ainsi, $v_m(-0,1) = 19,5$, $v_m(-0,005) = 19,975$, $v_m(0,01) = 20,05$...
Chacune de ces vitesses moyennes n'est qu'une approximation de $v(2)$ qui semble d'autant meilleure que h est petit. L'idée consiste alors à définir $v(2)$ comme la limite quand h tend vers 0 des rapports $\frac{d(2+h)-d(2)}{h}$.
Puisque ce rapport vaut $20+5\,h$, on a $v(2) = \lim\limits_{h\to 0}(20+5h) = 20+5\times 0 = 20$ m.s^{-1}.

2.2 Tangente à une courbe

Activité 1 *Thierry fait tournoyer sa fronde à toute berzingue au-dessus de sa tête. En quel endroit doit-il lâcher le galet qu'elle contient pour que celui-ci atteigne le tétras-lyre qui lui fait face ?*



Soit f la fonction de représentation graphique $\mathscr{C}_f$ ci-contre.

1. Tracer les droites sécantes (AM_1), …, (AM_4).
2. Exprimer leur coefficient directeur en fonction de a et de x_i.
3. Tracer la sécante « limite » lorsque x_i se rapproche de a. On l'appelle la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
4. Que penser de son coefficient directeur ?
5. Lire le §3.2 pour le corrigé.

3 Nombre dérivé de f en a

3.1 Définitions

Nous avons vu que le calcul de vitesse instantanée ou la recherche de tangente à une courbe nécessitent de s'intéresser au taux d'accroissement $T_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ d'une fonction f entre a et $a+h$ lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.

Définition 3 ***Nombre dérivé***
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel appartenant à I. On dit que $\boldsymbol{f}$ ***est dérivable en a s'il existe un réel ℓ tel que***

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell.$$

Le nombre ℓ s'appelle alors le nombre dérivé de f en a et il est noté $\boldsymbol{f'(a)}$.

Remarques :

- On posera très souvent $x = a+h$ et on obtiendra alors le nombre dérivé en étudiant la limite du taux d'accroissement « en x » :
$$\lim_{x\to a} \mathscr{T}_a(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
- Si la fonction f est *continue* en a, on a bien sûr $\big(f(x)-f(a)\big) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et la limite à étudier est donc une forme indéterminée du type $\frac{\text{“0”}}{0}$. En revanche, si

f n'est pas continue en a, elle ne peut pas être dérivable en a (puisque c'est une limite du type $\frac{\text{“}\lambda\text{”}}{0} = \infty \notin \mathbb{R}$).

- $f'(a)$ est souvent noté $\frac{df}{dx}(a)$ ou $\frac{dy}{dx}(a)$ ou $\dot{x}(a)$ en physique.

Exemples :

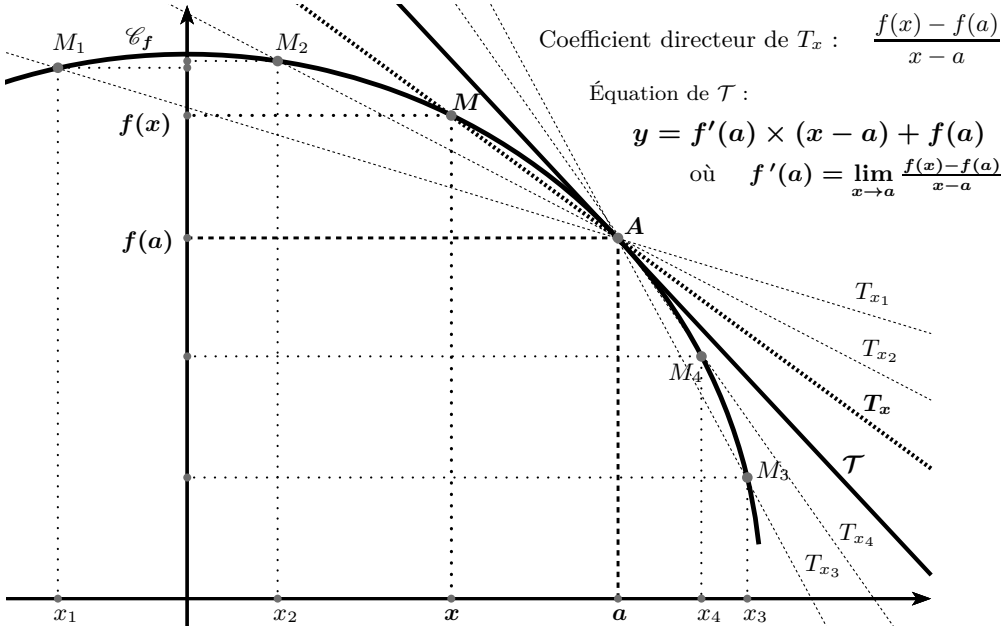
◦ $f(x) = 5x - 3$ en $a = 2$: Pour $x \neq 2$, on a
$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{(5x-3)-(5\times 2-3)}{x-2} = \frac{5x-10}{x-2} = \frac{5(x-2)}{x-2} = 5 \xrightarrow[x\to 2]{} 5 \in \mathbb{R}$
donc f est dérivable en $a = 2$ et $f'(2) = 5$.

◦ $g(x) = x^2 - 4$ en $a = 1$: Pour $x \neq 1$, on a
$\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{(x^2-4)-(1^2-4)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 1 + 1 = 2 \in \mathbb{R}$
donc g est dérivable en $a = 1$ et $g'(1) = 2$.

◦ $h(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 3$: Pour $x \neq 3$, on a
$\frac{h(x)-h(3)}{x-3} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3} = \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{3x} \xrightarrow[x\to 3]{} -\frac{1}{9} \in \mathbb{R}$
donc h est dérivable en $a = 3$ et $h'(3) = -\frac{1}{9}$.

3.2 Interprétation graphique

Lorsque le point M se rapproche du point A, la droite (MA), nommée ici la sécante T_x, se rapproche d'une droite $\mathcal{T}$ appelée tangente à la courbe en A.



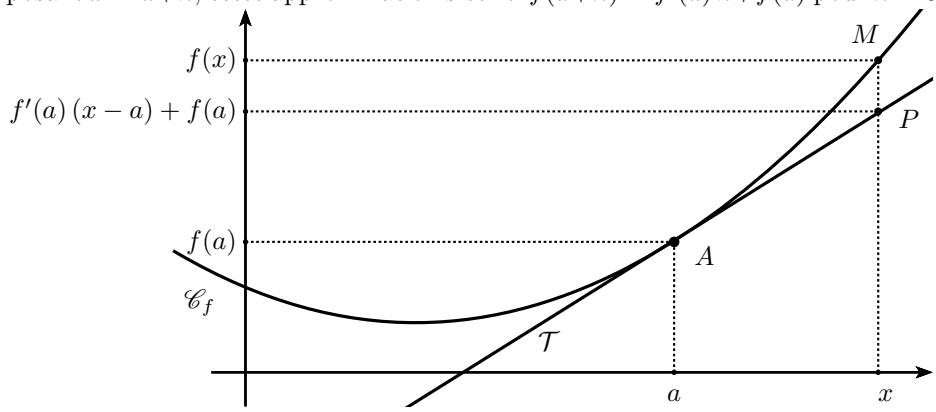
Définition 4 ***Tangente***
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative dans un repère d'une fonction f dérivable en a.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et ayant pour coefficient directeur $f'(a)$.
Elle a pour équation réduite : $\mathcal{T}_{f,a} : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Pour mémoriser l'équation de la tangente, certains se souviendront du fameux *yfaxafa*, où le prime vient en premier.

Exemples : ◦ $f(x) = 5x - 3$ au point d'abscisse $a = 2$:
$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 5(x - 2) + 7 = 5x - 3$.
◦ $h(x) = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse $a = 3$:
$y = h'(3)(x - 3) + h(3) = -\frac{1}{9}(x - 3) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$.

3.3 Approximation affine locale

On suppose que f est une fonction dérivable en un nombre a. Son graphe $\mathscr{C}_f$ admet donc une tangente $\mathcal{T}$ au point $A(a; f(a))$. Cette droite semble très proche de la courbe, du moins lorsque l'on regarde $\mathscr{C}_f$ autour du point A. Il est donc naturel d'approcher la fonction f au voisinage de a par la fonction affine ayant $\mathcal{T}$ pour graphe.
Autrement dit, on a $\boldsymbol{f(x) \simeq f'(a)\,(x - a) + f(a)}$ pour $\boldsymbol{x \simeq a}$.
On dit que l'on réalise ainsi l'approximation affine locale de f au voisinage de a.
Il est démontré que, parmi toutes les fonctions affines, c'est cette dernière qui réalise la meilleure approximation de la fonction f autour de a.
Autrement dit, parmi toutes les droites passant par le point A, $\mathcal{T}$ est la plus proche de la courbe $\mathscr{C}_f$.
En posant $x = a+h$, cette approximation s'écrit $f(a+h) \simeq f'(a)\,h + f(a)$ pour $h \simeq 0$.



3.4 Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ de représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

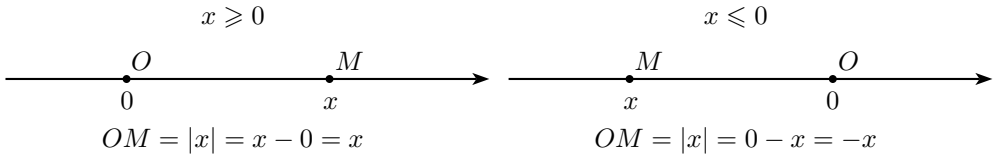
1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer le nombre dérivé de f en $a = 1$.
3. En déduire l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
4. Écrire l'approximation affine de f au voisinage de 1 et en déduire des valeurs approchées de $\frac{1}{1{,}05}$ et $\frac{1}{0{,}98}$.
5. Vérifier la qualité de ces approximations à la calculatrice puis en page 40.

Veuillez à présent vous diriger vers la page 36 afin de vous exercer avant d'aborder la suite du chapitre. Allez aussi voir le devoir n° 2 en page 235. Merci de votre coopération.

4 La fonction valeur absolue

4.1 Définition

Définition 5 *Soit $x \in \mathbb{R}$ l'abscisse d'un point M d'une droite graduée d'origine O. La **valeur absolue** du réel x, notée $|x|$, est la **distance** OM.*



Exemples : ◦ $|\pi| = \pi$ ◦ $|-7,4| = 7,4$ ◦ $\left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$

Propriété 2
Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points d'une droite graduée, alors $\boldsymbol{AB = |b-a| = |a-b|}$.

Propriété 3 *Si $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, l'intervalle $]\,a-r\,;a+r\,[$ est constitué des nombres réels situés à une distance de a strictement inférieure à r :*

$$\boldsymbol{x \in\,]\,a-r\,;a+r\,[\quad \Longleftrightarrow \quad |x-a| < r.}$$

Démonstration :
$x \in\,]\,a-r\,;a+r\,[\iff a-r < x < a+r \iff -r < x-a < r \iff |x-a| < r.$ □

Exemples : ◦ $x \in\,]\,5\,;11\,[\Leftrightarrow 5 < x < 11 \Leftrightarrow 5-8 < x-8 < 11-8 \Leftrightarrow -3 < x-8 < 3$
$\Leftrightarrow |x-8| < 3$ $\left(8 = \frac{5+11}{2}\right)$.
◦ $x \in [\,-6\,;2\,] \iff -6+2 \leqslant x+2 \leqslant 2+2 \iff -4 \leqslant x+2 \leqslant 4$
$\iff |x+2| \leqslant 4$ $\left(-2 = \frac{-6+2}{2}\right)$.
◦ $|x-12| < 5 \iff -5 < x-12 < 5 \iff -5+12 < x < 5+12 \iff x \in\,]\,7\,;17\,[\,.$
◦ $|x+3| \leqslant 4 \iff -4 \leqslant x+3 \leqslant 4 \iff -4-3 \leqslant x \leqslant 4-3 \iff x\,[\,-7\,;1\,]\,.$

Propriété 4
Pour tout réel x, on a $\boldsymbol{|x| = x}$ *si* $\boldsymbol{x \geqslant 0}$ *et* $\boldsymbol{|x| = -x}$ *si* $\boldsymbol{x < 0}$.

Dém. : Cela découle de la définition de l'abscisse d'un point d'une droite graduée. □

Propriété 5 *Pour tout réel x, on a :*

$\boldsymbol{|x| \geqslant 0}$, $\boldsymbol{|-x| = |x|}$, $\boldsymbol{|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0}$ *et* $\boldsymbol{|x| = \sqrt{x^2}}$.

Démonstration : $|x| \geqslant 0$ puisque c'est une distance, $|-x| = |x|$ puisque les points $M(x)$ et $M'(-x)$ sont symétriques par rapport à O donc équidistants de O,

$|x| = 0 \Leftrightarrow M$ et O sont confondus $\Leftrightarrow x = 0$.

D'après la proposition 4, $|x|^2 = (\pm x)^2 = x^2 = \left(\sqrt{x^2}\right)^2$. Ainsi, $|x|$ et $\sqrt{x^2}$ sont deux nombres positifs ayant même carré, ils sont donc égaux. □

4.2 Étude de la fonction valeur absolue

Définition 6 *La **fonction valeur absolue** est la fonction qui, à tout réel, associe sa valeur absolue.*

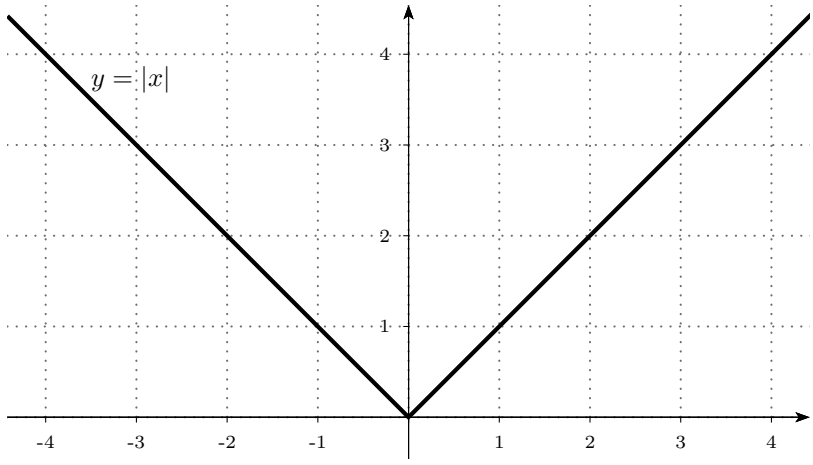
$$\boldsymbol{f} \ : \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ \longmapsto \ \boldsymbol{f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x < 0. \end{cases}}$$

Propriété 6
La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty\,;0\,]$ *et croissante sur* $[\,0\,;+\infty\,[$.

Dém. : Il suffit de connaître les variations des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$. □

C'est une fonction paire puisque $|-x| = |x|\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

La fonction valeur absolue est ce que l'on appelle une fonction affine par morceaux. Sa représentation graphique est constituée de deux demi-droites : $y = -x$ sur $]-\infty\,;0\,[$ et $y = x$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.



Étudions donc sa dérivabilité au voisinage du lieu le plus intéressant : $a = 0$.
On a, pour tout $x > 0$, $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{x}{x} = 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ et, pour tout $x < 0$, $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{-x}{x} = -1 \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1$. La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0. Graphiquement, nous voyons bien une *demi*-tangente à gauche, une autre *demi*-tangente à droite mais le « coin » fait qu'il n'y a pas de tangente en 0.
Vous pourrez travailler la valeur absolue dans l'extra de la page 345.

On a donc vu que les fonctions dont les courbes sont « à coin » ou ayant des tangentes « verticales » sont des fonctions non dérivables.

Exercices

LIMITES & NOMBRES DÉRIVÉS

Exercice 1 Soient les fonctions f, g et h définies par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$ et $h(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f, g et h.
2. Compléter les tableaux suivants à l'aide de la calculatrice.

x	$0,1$	$0,001$	10^{-5}	$-0,01$	$0,999$	1	$1,01$
$f(x)$							
$g(x)$							
$h(x)$							

x	$1,99$	$1,999$	$2,01$	$2,0001$	$2,999$	3	$3,01$
$f(x)$							
$g(x)$							
$h(x)$							

3. Que remarque-t-on ?

Exercice 2

1. (a) Dans une fenêtre Geogebra, tracer le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   (b) Créer un curseur h. Placer un point M d'abscisse $0+h$ sur la courbe et afficher ses coordonnées.
   (c) Que se passe-t-il lorsque h s'approche de 0 ?
2. Mêmes questions pour $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ autour de 2.
3. Mêmes questions pour $k(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ autour de 1.
4. Mêmes questions pour $r(x) = \dfrac{1+x}{x+3}$ autour de -3.
5. Mêmes questions pour $s(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$ autour de 4.
6. Mêmes questions pour $t(x) = \dfrac{x^2-10x+25}{x-5}$ autour de 5.
7. Mêmes questions pour $u(x) = \dfrac{x-5}{x^2-10x+25}$ autour de 5.

Exercice 3 Calculer les limites suivantes si elles existent.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} 3x^7 - 5x^5 + 6$

(b) $\lim\limits_{x\to -1} 5x^4 - 7x^3 - 2$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x+1}{7-2x}$

(d) $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{6-5x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-2x}{x}$

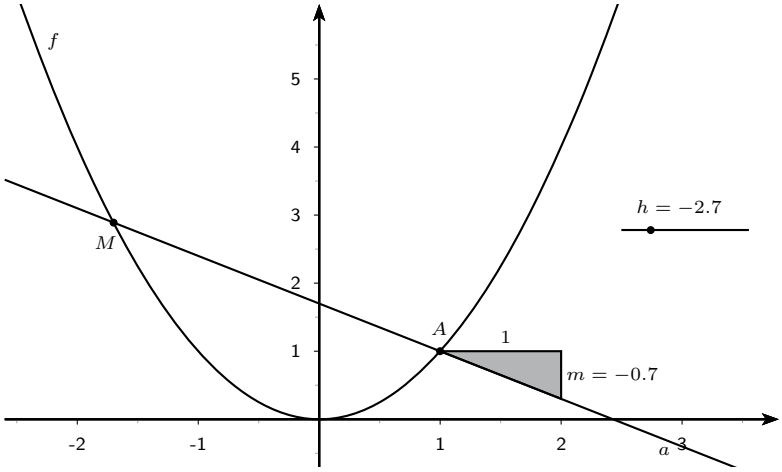
(f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-6x+4}{x-2}$

(g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3-10x-3}{x+3}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Exercice 4

1. Dans une fenêtre Geogebra ou sur la calculatrice, tracez la représentation graphique de la fonction carré. Choisissez un point quelconque de la parabole et zoomez dessus un nombre conséquent de fois. Qu'observez-vous donc ? Changez alors de point et faîtes de même.
   Tracez ensuite la représentation graphique de la fonction cube et zoomez sur un point de votre choix. Observez-vous le même phénomène ?
   Enfin, tracez la représentation graphique de la fonction valeur absolue(cf. Cours p.34). Observez-vous encore le même phénomène en un certain point très particulier ?
2. (a) Dans une fenêtre Geogebra, reproduire la figure suivante dans laquelle f est la fonction carré, A un point quelconque de la courbe (on prendra pour $(1\,;\,f(1))$ pour commencer) et M est le point de la courbe d'abscisse $x(A)+h$.
   (b) Exprimer en fonction de h le coefficient directeur de la droite sécante (AM) et conjecturer la limite de ce coefficient lorsque h tend vers 0.
   (c) Faire varier h et observer la position limite de la sécante à la courbe lorsque h tend vers 0 : cette droite est appelée *tangente* à la courbe au point A.
   (d) Conjecturer le coefficient directeur de cette tangente en A.



3. Déplacer A au point d'abscisse 2 et effectuer les mêmes observations et conjectures.
4. Répéter l'opération pour les abscisses -1, puis 0, puis $-\frac{1}{2}$.
5. Changer maintenant de fonction : $g(x) = x^3$, $p(x) = 3x+2$ et $q(x) = \sqrt{x}$ feront l'affaire.

Exercice 5 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer son taux d'accroissement, en déduire son nombre dérivé s'il existe puis donner alors l'équation de la tangente à sa représentation graphique en $x = a$.

$f(x) = 7x - 2$, $a = 3$ puis $a = -2$, puis...

$g(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $a = 2$.

$h(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ puis $a = 0$.

$i(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 5$.

$j(x) = \sqrt{4 - x}$, $a = -2$.

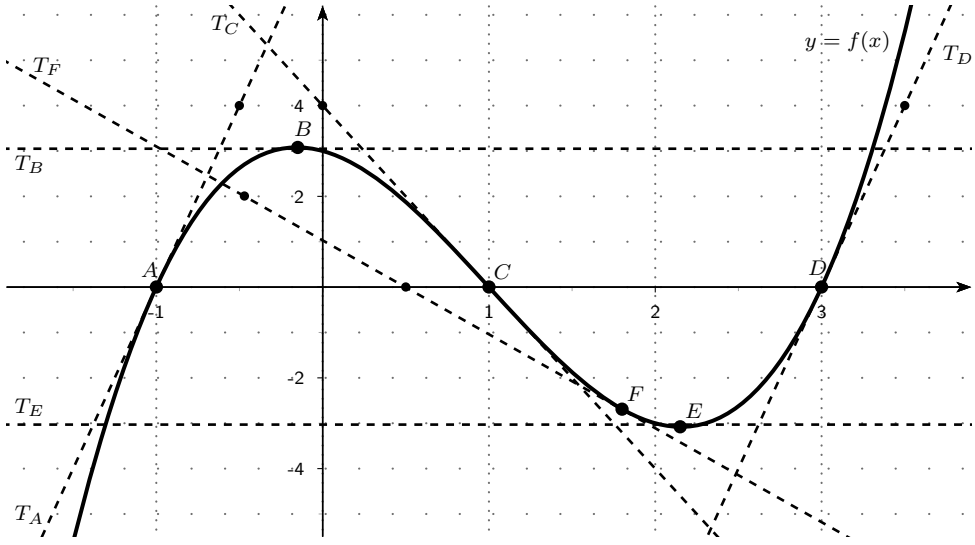
$k(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $a = 3$.

$v(x) = |x|$, $a = 3$ puis $a = -2$ puis $a = 0$.

$w(x) = |3x + 6|$, $a = -4$ puis $a = 1$ puis $a = -2$.

Exercice 6 Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ ainsi que ses tangentes connues d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en -4 et -2 telle que $f(0) = 3,2$, $f'(0) = 1$, $f(3) = 5$, $f'(3) = 0$, $f(8) = 0$ et $f'(8) = -2$.

Exercice 7 On a tracé ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable en tout nombre réel. Les droites tracées sont tangentes à $\mathscr{C}_f$.



1. Déterminer graphiquement les coordonnées des points A, B, C, D, E et F puis en déduire des images par f.
2. Déterminer graphiquement les coefficients directeurs des droites T_A, T_B, T_C, T_D, T_E et T_F puis en déduire certains nombres dérivés de f.
3. Par observation graphique, dresser le tableau de variations de la fonctions f en y ajoutant une ligne pour les signes des nombres dérivés trouvés.
4. On donne maintenant l'expression de f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.
   (a) Retrouver les résultats précédents par le calcul pour les points A, C et D.
   (b) Démontrer que pour tout a et tout x réels,
   $$x^3 - 3x^2 - x - a^3 + 3a^2 + a = (x - a)(x^2 + (a - 3)x + a^2 - 3a - 1).$$

(c) En déduire que, pour tout réel a, $\quad f'(a) = 3a^2 - 6a - 1$.
La fonction $\quad a \mapsto f'(a) \quad$ est appelée la fonction dérivée de f. En trouver les racines puis les comparer aux résultats précédents.

Exercice 8 A et B sont deux points distincts de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$. Existe-t-il une tangente à $\mathscr{P}$ parallèle à la droite (AB) ? Si oui, en quel point et comment la construire ?

Exercice 9

1. Exprimer en termes de valeur absolue les ensembles suivants.
   (a) $x \in [\,3\,;7\,]$ (b) $x \in]\,-5\,;1\,[$ (c) $x \in]\,-\infty\,;-5\,] \cup [\,3\,;+\infty\,[$
2. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

(a)	$\lvert x\rvert = 4$	(d)	$\lvert 2x+1\rvert = 7$	(g)	$\lvert x-2\rvert \leqslant 3$
(b)	$\lvert x\rvert = -3$	(e)	$\lvert x\rvert + 2x = -1$		
(c)	$\lvert x-5\rvert = 3$	(f)	$\lvert x+5\rvert = \lvert 8-x\rvert$	(h)	$\lvert x+3\rvert > 5$

Exercice 10 Étudier la dérivabilité en α des fonctions suivantes :

(a) $|x-2|$ en $\alpha = -1$ puis en $\alpha = 2$.

(b) $|1-x^2|$ en $\alpha = 0$ puis en $\alpha = 1$.

(c) $\sqrt{|x|}$ en $\alpha = 0$.

Exercice 11 Méthode de Torricelli (1608-1647)
Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $\quad y = x^2 \quad$ et soit A un point de $\mathscr{P}$ d'abscisse a dans un repère orthogonal.

1. Déterminer le nombre dérivé de la fonction carré en a puis l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{P}$ en A.
2. Soit H le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées et I l'intersection de $\mathcal{T}$ avec ce même axe. Déterminer les coordonnées des points H et I en fonction de a. Que dire des points H et I ?
3. En déduire une méthode de construction géométrique de la tangente en un point quelconque de $\mathscr{P}$.
4. Peut-on trouver une méthode similaire pour tracer la tangente en un point quelconque de la courbe représentative de la fonction inverse ? de la fonction cube ?
5. (a) Peut-on dire si la parabole $\mathscr{P}$ admet une ou plusieurs tangentes passant par le point de coordonnées $(\,-5\,;\,9\,)$? Si oui, en quel(s) point(s) ? Et quelles sont alors les équations de ces tangentes ?
   (b) Mêmes questions avec le point de coordonnées $(\,-1\,;\,3\,)$.
   (c) Soit un point $M\,(\,\alpha\,;\,\beta\,)$. À quelle condition sur α et β existe-t-il au moins une tangente à la parabole $\mathscr{P}$ passant par le point M ?

Ne pas oublier d'aller en page 235 afin de faire le devoir n° 2.

Corrigé des exercices

LIMITES & NOMBRES DÉRIVÉS

Exercice du §3.4 de la page 33 : $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

1. Le dénominateur $2-x$ ne pouvant s'annuler, f est définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. Pour $x \neq 2$ et 1, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2-1}}{x-1} = \frac{1-(2-x)}{(2-x)(x-1)} = \frac{1}{2-x} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2-1} = 1 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.
3. Ainsi, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $a = 1$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x$.
4. Pour x proche de 1, on a alors $f(x) \simeq x$.
   D'où, $\frac{1}{1,05} = \frac{1}{2-0,95} = f(0,95) \simeq 0,95$ et $\frac{1}{0,98} = \frac{1}{2-1,02} = f(1,02) \simeq 1,02$ ce qui est précis au moins au centième.

Exercice 1

1. Les dénominateurs ne pouvant s'annuler, on a $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$, $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\mathscr{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. Voici les tableaux complétés à l'aide de la calculatrice.

x	$0,1$	$0,001$	10^{-5}	$-0,01$	$0,999$	1	$1,01$
$f(x)$	10	1000	10^5	-100	$1,001$	1	$0,9901$
$g(x)$	$1,526$	$1,5003$	$1,5$	$1,4975$	$1,999$	2	$2,0101$
$h(x)$	$-3,9$	$-3,999$	-4	$-4,01$	$-3,001$	X	$-2,99$

x	$1,99$	$1,999$	$2,01$	$2,0001$	$2,999$	3	$3,01$
$f(x)$	$0,5025$	$0,5002$	$0,4975$	$0,4999$	$0,3334$	$0,3333$	$0,3322$
$g(x)$	101	1001	-99	-9999	$-0,001$	0	$0,0099$
$h(x)$	$-2,01$	$-2,001$	$-1,99$	-2	$-1,001$	-1	$-0,99$

3. On remarque que pour des valeurs de x proches de $a \in \mathscr{D}$, les images se situent à proximité de l'image de a pour chacune des fonctions f, g et h. En revanche, à proximité des valeurs interdites, les images peuvent être de plus en plus grandes positives, négatives ou proches d'une valeur réelle dans le cas de la fonction h.

Exercice 2

1. On s'aperçoit que lorsque a s'approche de 0, le point A « s'échappe » tant vers le haut, tant vers le bas suivant le signe de a. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers 0.
2. On s'aperçoit que lorsque a s'approche de 2, le point « s'échappe » tant vers le haut, tant vers le bas suivant le signe de $a-2$. On dit que $g(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers 2.
3. On s'aperçoit que lorsque a s'approche de 1, le point A « s'échappe » vers le haut. On dit que $h(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

4. On s'aperçoit que lorsque a s'approche de -3, le point « s'échappe » tant vers le bas, tant vers le haut suivant le signe de $a+3$. On dit que $r(x)$ tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ lorsque x tend vers -3.
5. On s'aperçoit que lorsque a s'approche de 4, le point s'approche de $(\,4\,;\,1\,)$. On dit que $s(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 4.
   On a de plus, $\quad s(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-4} = \frac{(x-4)(x-1)}{x-4} = x-1 \quad$ pour $x \neq 4$.
6. On s'aperçoit que lorsque a s'approche de 5, le point s'approche de $(\,5\,;\,0\,)$. On dit que $s(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 5.
   On a de plus, $\quad t(x) = \frac{x^2-10x+25}{x-5} = \frac{(x-5)^2}{x-5} = x-5 \quad$ pour $x \neq 5$.
7. On s'aperçoit que lorsque a s'approche de 5, le point « s'échappe » tant vers le bas, tant vers le haut suivant le signe de $a-5$. On dit que $u(x)$ tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ lorsque x tend vers 5.

Exercice 3

(a) $\lim\limits_{x\to 0} 3x^7 - 5x^5 + 6 = 3\times 0^7 - 5\times 0^5 + 6 = 6.$

(b) $\lim\limits_{x\to -1} 5x^4 - 7x^3 - 2 = 5(-1)^4 - 7(-1)^3 - 2 = 5 + 7 - 2 = 10.$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3x+1}{7-2x} = \frac{3\times 3+1}{7-2\times 3} = 10.$

(d) $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{6-5x} = \sqrt{6-5\times(-2)} = \sqrt{16} = 4.$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2-2)x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2 = 0^2 - 2 = -2.$

(f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-6x+4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} 2(x-1) = 2(2-1) = 2.$

(g) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3-10x-3}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2-3x-1)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} x^2 - 3x - 1$
$= (-3)^2 - 3\times(-3) - 1 = 17.$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$
$= \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}\,.$

Activité 1 *Afin que le galet atteigne le tétras-lyre, il faut que Thierry le relâche lorsque celui-ci est situé exactement au point où la tangente au cercle qu'il décrit au-dessus de sa tête passe par le tétras : sa trajectoire rectiligne suivra alors cette tangente et le galet ira droit sur sa cible.*

Exercice 4

1. Si l'on zoome sur n'importe quel point d'une parabole ou d'une cubique, on observe que la courbe ressemble furieusement à une droite, du moins à cette échelle. Cela donne bien envie de s'intéresser la droite la plus proche de la courbe. Existe-t-elle ? Si oui, quelle est-elle ?
   Quant à la courbe de la fonction valeur absolue, on observe toujours un « coin » autour de 0. Il n'y a pas ici de droite proche de cette courbe mais seulement deux demi-droites. Comment formaliser cette différence ?
2. (b) On a $\quad \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h \xrightarrow[h\to 0]{} 2.$

CORRIGÉS

(d) On conjecture que le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{x^2}$ en $A\,(\,1\,;\,1\,)$ est de 2.

3. On conjecture que le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{x^2}$ en $(\,2\,;\,4\,)$ est de 4.
4. On conjecture que le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{x^2}$ en $(\,-1\,;\,1\,)$ est de -2, celui au point $(\,0\,;\,0\,)$ est de 0 et celui au point $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ est de -1.
5. Les coefficients directeurs des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_{x^3}$ aux points d'abscisses 1, 2, -1, 0 et $-\frac{1}{2}$ semblent valoir respectivement 3, 12, -3, 0 et $-\frac{3}{4}$ et ceux des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_{3x+2}$ semblent tous valoir 3. Les coefficients directeurs des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_{\sqrt{x}}$ aux points d'abscisses 1 et 2 semblent valoir respectivement $0,5$ et $\simeq 0,35$. Il n'y a pas de tangente en -1 ni en $-\frac{1}{2}$ puisque q n'y est pas définie. En 0, il semble qu'il y ait une « demi-tangente verticale » et donc sans coefficient directeur.

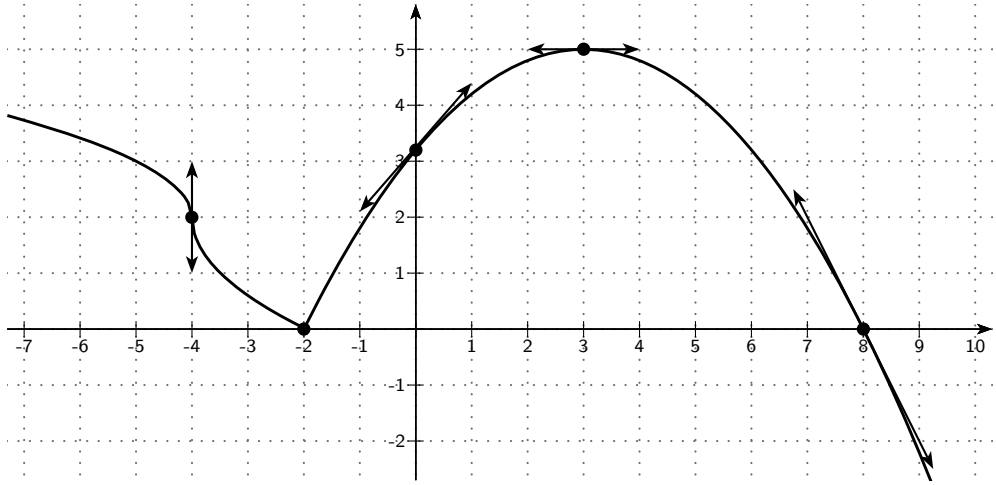
Exercice 5 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ si elle existe et est finie.
La tangente à la courbe en $x=a$ admet alors pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

- $\boldsymbol{f(x)=7x-2}$, $\boldsymbol{a=3}$. Pour tout h réel, on a :
  $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{(7(3+h)-2)-(7\times 3-2)}{h}=\frac{21+7h-2-21+2}{h}=7$
  donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}7=7$ et $f'(3)=7$. Par ailleurs, $f(3)=19$ donc la tangente à la courbe en $x=3$ a pour équation $y=7(x-3)+19=7x-2$.
  On obtient exactement les mêmes résultats pour $a=-2$, ...
- $\boldsymbol{g(x)=3x^2-2x+1}$, $\boldsymbol{a=2}$. Pour tout h réel, on a :
  $\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\frac{3(2+h)^2-2(2+h)+1-3\times 2^2+2\times 2-1}{h}$
  $=\frac{12+12h+3h^2-4-2h-12+4}{h}=\frac{h(10+3h)}{h}=10+3h$
  donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}10+3h=10$ et $g'(2)=10$.
  Puisque $g(2)=9$, la tangente à la courbe en $x=2$ a pour équation $y=10(x-2)+9=10x-11$.
- $\boldsymbol{h(x)=\sqrt{x}}$, $\boldsymbol{a=4}$. Pour tout x positif, on a :
  $\frac{h(x)-h(4)}{x-4}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{\sqrt{x}^2-2^2}=\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}$
  donc $\lim\limits_{x\to 4}\frac{h(x)-h(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$ et $h'(4)=\frac{1}{4}$.
  De plus, $h(4)=2$. La tangente à la courbe en $x=4$ a donc pour équation $y=\frac{1}{4}(x-4)+2=\frac{1}{4}x+1$.
- $\boldsymbol{h(x)=\sqrt{x}}$, $\boldsymbol{a=0}$. Pour tout x positif, on a $\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ qui n'a pas de limite finie lorsque x tend vers 0^+. h n'est donc pas dérivable en 0^+.
- $\boldsymbol{i(x)=\frac{1}{x}}$, $\boldsymbol{a=5}$. Pour tout x non nul, on a
  $\frac{i(x)-i(5)}{x-5}=\frac{1/x-1/5}{x-5}=\frac{5-x}{5x(x-5)}=-\frac{1}{5x}$
  donc $\lim\limits_{x\to 5}\frac{i(x)-i(5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}-\frac{1}{5x}=-\frac{1}{25}$ et $i'(5)=-\frac{1}{25}$.
  Puisque $i(5)=\frac{1}{5}$, la tangente à la courbe en $x=5$ a pour équation $y=-\frac{1}{25}(x-5)+\frac{1}{5}=-\frac{1}{25}x+\frac{2}{5}$.

- $\boldsymbol{j(x)=\sqrt{4-x}}$, $\boldsymbol{a=-2}$. Pour tout $x\leq 4$, on a :
  $\frac{j(x)-j(-2)}{x+2}=\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{6}}{x+2}\times\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{6}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{6}}=\frac{(4-x)-6}{(x+2)(\sqrt{4-x}+\sqrt{6})}=\frac{-(x+2)}{(x+2)(\sqrt{4-x}+\sqrt{6})}$
  $=\frac{-1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{6}}$
  donc $\lim\limits_{x\to-2}\frac{j(x)-j(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{-1}{(\sqrt{4-x}+\sqrt{6})}=\frac{-1}{(\sqrt{4+2}+\sqrt{6})}=\frac{-1}{2\sqrt{6}}=j'(-2)$.
  $j(-2)=\sqrt{6}$ et la tangente à la courbe en $x=-2$ a pour équation $y=-\frac{1}{2\sqrt{6}}(x+2)+\sqrt{6}$.
- $\boldsymbol{k(x)=\frac{x}{x+1}}$, $\boldsymbol{a=3}$. Pour tout $x\neq -1$, on a :
  $\frac{k(x)-k(3)}{x-3}=\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{3}{3+1}}{x-3}=\frac{\frac{4x}{4(x+1)}-\frac{3(x+1)}{4(x+1)}}{(x-3)}=\frac{4x-3x-3}{4(x+1)(x-3)}=\frac{x-3}{4(x+1)(x-3)}=\frac{1}{4(x+1)}$
  qui tend vers $\frac{1}{4(3+1)}=\frac{1}{16}=k'(3)$ lorsque x tend vers 3.
  $k(3)=\frac{3}{4}$ donc la tangente à la courbe en $x=3$ a pour équation $y=\frac{1}{16}(x-3)+\frac{3}{4}=\frac{x}{16}+\frac{9}{16}$.
- $\boldsymbol{v(x)=|x|}$, $\boldsymbol{a=3}$. Pour tout $x>0$ et $x\neq 3$, on a :
  $\frac{v(x)-v(3)}{x-3}=\frac{|x|-|3|}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}=1$ qui tend vers $1=v'(3)\in\mathbb{R}$ lorsque x tend vers 3.
  $v(3)=3$ donc la tangente à la courbe en $x=3$ a pour équation $y=1(x-3)+3=x$.
- $\boldsymbol{v(x)=|x|}$, $\boldsymbol{a=-2}$. Pour tout $x<0$ et $x\neq -2$, on a :
  $\frac{v(x)-v(-2)}{x-(-2)}=\frac{|x|-|-2|}{x+2}=\frac{-x-2}{x+2}=-1$ qui tend vers $-1=v'(-2)\in\mathbb{R}$ lorsque x tend vers -2. $v(-2)=2$ donc la tangente à la courbe en $x=-2$ a pour équation $y=-1(x-(-2))+2=-x$.
- $\boldsymbol{v(x)=|x|}$, $\boldsymbol{a=0}$. Pour tout $x>0$, on a $\frac{v(x)-v(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$ qui tend vers 1 lorsque x tend vers 0^+.
  Pour tout $x<0$, on a $\frac{v(x)-v(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$ qui tend vers -1 lorsque x tend vers 0^-.
  Ainsi, le taux d'accroissement de v en zéro n'admet pas de limite et v n'est pas dérivable en zéro.
- $\boldsymbol{w(x)=|3x+6|}$, $\boldsymbol{a=-4}$. Pour tout $x<-2$ et $x\neq -4$, on a :
  $\frac{w(x)-w(-4)}{x-(-4)}=\frac{|3x+6|-|-4\times 3+6|}{x+4}=\frac{-(3x+6)-6}{x+4}=\frac{-3x-12}{x+4}=\frac{-3(x+4)}{x+4}=-3$ qui tend vers $-3=w'(-4)\in\mathbb{R}$ lorsque x tend vers -4.
  $w(-4)=6$ donc la tangente à la courbe en $x=-4$ a pour équation $y=-3(x-(-4))+6=-3x-6$.
- $\boldsymbol{w(x)=|3x+6|}$, $\boldsymbol{a=1}$. Pour tout $x>-2$ et $x\neq 1$, on a :
  $\frac{w(x)-w(1)}{x-1}=\frac{|3x+6|-|3+6|}{x-1}=\frac{3x+6-9}{x-1}=\frac{3(x-1)}{x-1}=3$ qui tend vers $3=w'(1)\in\mathbb{R}$ lorsque x tend vers 1. $w(1)=9$ donc la tangente à la courbe en $x=1$ a pour équation $y=3(x-1)+6=3x+6$.
- $\boldsymbol{w(x)=|3x+6|}$, $\boldsymbol{a=-2}$.
  Pour tout $x>-2$, on a $\frac{w(x)-w(-2)}{x-(-2)}=\frac{|3x+6|}{x+2}=\frac{3(x+2)}{x+2}=3$ qui tend vers 3 lorsque x tend vers -2^+.
  Pour $x<-2$, on a $\frac{w(x)-w(-2)}{x+2}=\frac{|3x+6|}{x+2}=\frac{-3(x+2)}{x+2}=-3$ qui tend vers -3 lorsque x tend vers -2^-.
  Ainsi, le taux d'accroissement de w en -2 n'admet pas de limite et w n'est pas dérivable en -2.

Ainsi, typiquement, un fonction n'est pas dérivable en a lorsque sa courbe fait un « coin » en a ou lorsqu'elle est « verticale » en a.

Exercice 6 Cette superbe représentation graphique correspond magnifiquement aux mirobolantes attentes.



Exercice 7

1. On a, graphiquement, $A(-1;0)$, $B(-0.2;3)$, $C(1;0)$, $D(3;0)$, $E(2.2;-3)$ et $F(1.8;-2.7)$ donc $f(-1) \simeq f(1) \simeq f(3) \simeq 0$, $f(-0.2) \simeq 3$, $f(2.2) \simeq -3$ et $f(1.8) \simeq -2,7$.
2. T_A passe par les points $A(-1;0)$ et $(-0.5;4)$. Son coefficient directeur est donc $\frac{0-4}{-1-(-0.5)} = 8$ et $f'(-1) \simeq 8$.
   T_B est horizontale donc son coefficient directeur est nul et $f'(-0.2) \simeq 0$.
   T_C passe par les points $C(1;0)$ et $(0;4)$. Son coefficient directeur est donc $\frac{4-0}{0-1} = -4$ et $f'(1) \simeq -4$.
   T_D passe par les points $D(3;0)$ et $(3.5;4)$. Son coefficient directeur est donc $\frac{4-0}{3.5-3} = 8$ et $f'(3) \simeq 8$.
   T_E est horizontale donc son coefficient directeur est nul et $f'(2.2) \simeq 0$.
   T_F passe par les points $F(1.8;-2.7)$ et $(0.5;0)$. Son coefficient directeur est donc $\frac{-2.7-0}{1.8-0.5} \simeq -2.1$ et $f'(1) \simeq -2.1$.
3. On obtient le tableau suivant par lecture graphique.

x	$-\infty$	-1	-0.2	1	2.2	3	$+\infty$
f	$-\infty$	0	3	0	-3	0	$+\infty$
Signes observés de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$

(a) • A : $f(-1) = -1 - 3 + 1 + 3 = 0$
et $\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \frac{(x+1)(x^2-4x+3)}{x+1} = x^2 - 4x + 3$ qui tend vers $(-1)^2 + 4 + 3 = 8$ lorsque x tend vers -1 donc $f'(-1) = 8$.
• C : $f(1) = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$
et $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2-2x-3)}{x-1} = x^2-2x-3$ qui tend vers $1-2-3 = -4$ lorsque x tend vers 1 donc $f'(1) = -4$.
• D : $f(3) = 27 - 27 - 3 + 3 = 0$
et $\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{(x-3)(x^2-1)}{x-3} = x^2 - 1$ qui tend vers $9 - 1 = 8$ lorsque x tend vers 3 donc $f'(3) = 8$.

(b) Soient a et x deux réels. On a :
$$\begin{aligned}(x-a)(x^2 + (a-3)x + a^2 - 3a - 1) &= x^3 + (a-3)x^2 + (a^2 - 3a - 1)x - ax^2 - (a^2 - 3a)x - a^3 + 3a^2 + a \\ &= x^3 - 3x^2 - x - a^3 + 3a^2 + a.\end{aligned}$$

(c) On a alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^3-3x^2-x-a^3+3a^2+a}{x-a} = \frac{(x-a)(x^2+(a-3)x+a^2-3a-1)}{x-a}$
$$= x^2 + (a-3)x + a^2 - 3a - 1$$
et $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} x^2 + (a-3)x + a^2 - 3a - 1$
$$= a^2 + (a-3)a + a^2 - 3a - 1$$
$$= 3a^2 - 6a - 1 \in \mathbb{R}$$
donc, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 3a^2 - 6a - 1$,
de discriminant $\Delta = 48 = 16 \times 3$ et de racines
$x_1 = \frac{6-4\sqrt{3}}{2\times 3} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \simeq -0,15 \simeq x_B$ et $x_2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \simeq 2,15 \simeq x_E$
(cohérent avec le 3.).

Exercice 8 Si A et B appartiennent à $\mathscr{P}$, on peut écrire $A\left(a\,;\,a^2\right)$ et $B\left(b\,;\,b^2\right)$ et la droite (AB) admet pour coefficient directeur $m = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a + b$.
On a vu dans un exercice précédent que le nombre dérivé de la fonction carré en λ vaut $f'(\lambda) = 2\lambda$. On cherche donc λ tel que $2\lambda = a + b$ *i.e.* $\lambda = \frac{a+b}{2}$. Ainsi, la tangente à $\mathscr{P}$ parallèle à la droite (AB) est celle au point de même abscisse que le milieu de $[AB]$.
On pourrait aussi conjecturer graphiquement que le point recherché est de même abscisse que le milieu de $[AB]$, $\lambda = \frac{a+b}{2}$, puis démontrer que le nombre dérivé de la fonction carrée en λ est bien $a + b$.
En effet, $\frac{x^2-\lambda^2}{x-\lambda} = x + \lambda \xrightarrow[x\to\lambda]{} 2\lambda = a + b$.

Exercice 9

1. (a) $x \in [\,3\,;7\,] \iff 3 \leqslant x \leqslant 7 \iff 3 - 5 \leqslant x - \frac{3+7}{2} \leqslant 7 - 5$
$\iff -2 \leqslant x - 5 \leqslant 2 \iff |x - 5| \leqslant 2.$

(b) $x \in \,]-5\,;1\,[\iff -5 < x < 1 \iff -5 + 2 < x - \frac{-5+1}{2} < 1 + 2$
$\iff -3 < x + 2 < 3 \iff |x + 2| < 3.$

(c) $x \in \,]-\infty\,;-5\,] \cup [\,3\,;+\infty\,[\iff x \leqslant -5$ ou $x \geqslant 3$
$\iff x - \frac{-5+3}{2} \leqslant -5 + 1$ ou $x + 1 \geqslant 3 + 1 \iff |x + 1| \geqslant 4.$

CORRIGÉS

2. (a) $|x|=4 \iff \left\{\begin{array}{lll} x=4 & \text{si} & x\geqslant 0 \\ x=-4 & \text{si} & x<0 \end{array}\right. \iff x=\pm 4 : \quad \mathscr{S}_a=\{-4;4\}.$

(b) $|x|=-3$ est impossible car une valeur absolue est toujours $\geqslant 0$: $\quad \mathscr{S}_b=\varnothing.$

(c) $|x-5|=3 \iff \left\{\begin{array}{lll} x-5=3 & \text{si} & x-5\geqslant 0 \\ x-5=-3 & \text{si} & x-5<0 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{lll} x=8 & \text{si} & x\geqslant 5 \\ x=2 & \text{si} & x<5 \end{array}\right. : \mathscr{S}_c=\{2;8\}.$

(d) $|2x+1|=7 \iff \left\{\begin{array}{lll} 2x+1=7 & \text{si} & 2x+1\geqslant 0 \\ 2x+1=-7 & \text{si} & 2x+1<0 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{lll} x=3 & \text{si} & x\geqslant -\frac{1}{2} \\ x=-4 & \text{si} & x<-\frac{1}{2} \end{array}\right. : \mathscr{S}_d=\{-4;3\}.$

(e) $|x|+2x=-1 \iff \left\{\begin{array}{lll} x+2x=-1 & \text{si} & x\geqslant 0 \\ -x+2x=-1 & \text{si} & x<0 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{lll} x=-\frac{1}{3} & \text{si} & x\geqslant 0 \\ x=-1 & \text{si} & x<0 \end{array}\right. : \mathscr{S}_e=\{-1\}.$

(f) $|x+5|=|8-x| \iff \left\{\begin{array}{ll} -(x+5)=8-x & \text{si } x<-5 \\ x+5=8-x & \text{si } -5\leqslant x<8 \\ x+5=-(8-x) & \text{si } x\geqslant 8 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{ll} -5=8 & \text{si } x<-5 \\ x=\frac{3}{2} & \text{si } -5\leqslant x<8 \\ 5=-8 & \text{si } x\geqslant 8 \end{array}\right. : \mathscr{S}_f=\{\tfrac{3}{2}\}.$

(g) $|x-2|\leqslant 3 \iff \left\{\begin{array}{lll} x-2\leqslant 3 & \text{si} & x-2\geqslant 0 \\ -(x-2)\leqslant 3 & \text{si} & x-2<0 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{lll} x\leqslant 5 & \text{si} & x\geqslant 2 \\ x\geqslant -1 & \text{si} & x<2 \end{array}\right. : \mathscr{S}_g=[\,-1\,;5\,].$

(h) $|x+3|>5 \iff \left\{\begin{array}{ll} x+3>5 & \text{si } x+3\geqslant 0 \\ -(x+3)>5 & \text{si } x+3<0 \end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{ll} x>2 & \text{si } x\geqslant -3 \\ x<-8 & \text{si } x<-3 \end{array}\right. : \mathscr{S}_h=\,]-\infty\,;-8\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty\,[.$

Exercice 10

$a(x)=|x-2|$: pour $x\leqslant 2$ et $x\neq -1$, on a $\quad |x-2|=-(x-2) \quad$ et
$\frac{a(x)-a(-1)}{x-(-1)}=\frac{|x-2|-|-1-2|}{x+1}=\frac{-(x-2)-3}{x+1}=\frac{-x-1}{x+1}=\frac{-(x+1)}{x+1}=-1 \xrightarrow[x\to -1]{} -1\in\mathbb{R}$
donc a est dérivable en -1 et $a'(-1)=-1$.
Pour $x<2$, on a $\quad |x-2|=-(x-2) \quad$ et
$\frac{a(x)-a(2)}{x-2}=\frac{|x-2|-|2-2|}{x-2}=\frac{-(x-2)}{x-2}=-1 \xrightarrow[x\to 2^-]{} -1$
et pour $x>2$, on a $|x-2|=x-2$ et $\quad \frac{a(x)-a(2)}{x-2}=\frac{|x-2|}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}=1 \xrightarrow[x\to 2^+]{} 1$
donc a n'est pas dérivable en 2 et la courbe admet deux *demi*-tangentes de pentes -1 et 1.

$b(x)=|1-x^2|$: pour $x\in\,]-1\,;1\,[\setminus\{0\}$, on a
$\frac{b(x)-b(0)}{x-0}=\frac{|1-x^2|-|1|}{x}=\frac{1-x^2-1}{x}=-x \xrightarrow[x\to 0]{} -0=0\in\mathbb{R}$
donc b est dérivable en 0 et $b'(0)=0$.

Pour $x>1$, $\quad |1-x^2|=x^2-1 \quad$ et
$\frac{b(x)-b(1)}{x-1}=\frac{|1-x^2|-|1-1|}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1 \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1+1=2$ et
pour $0<x<1$, $\quad |1-x^2|=1-x^2 \quad$ et
$\frac{b(x)-b(1)}{x-1}=\frac{|1-x^2|}{x-1}=\frac{1-x^2}{x-1}=\frac{(1-x)(x+1)}{-(1-x)}=-(x+1) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -2$ donc b n'est pas dérivable en 1 et la courbe admet deux *demi*-tangentes de pentes -2 et 2.

$c(x)=\sqrt{|x|}$: pour $x>0$, $\quad \frac{c(x)-c(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{|x|}}{x}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{\text{“1”}}{0^+}=+\infty$
et pour $x<0$, $\quad \frac{c(x)-c(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{|x|}}{x}=\frac{\sqrt{-x}}{-\sqrt{-x}^2}=\frac{-1}{\sqrt{-x}} \xrightarrow[x\to 0^-]{} \frac{\text{“}-1\text{”}}{\sqrt{0^+}}=-\infty$
donc c n'est pas dérivable en 0 et la courbe admet une *demi*-tangente verticale.

Exercice 11 Méthode de Torricelli (1608-1647)

1. On a $\quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=x+a \xrightarrow[x\to a]{} a+a=2a=f'(a)\in\mathbb{R}$
   et la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse a admet pour équation
   $y=f'(a)(x-a)+f(a)=2ax-2a^2+a^2=2ax-a^2$.
2. Si $A\left(a\,;\,a^2\right)$, on a $\quad H\left(0\,;\,a^2\right) \quad$ et $\quad y_I=2a\times 0-a^2=-a^2(=-y_H) \quad$ donc $I\left(0\,;\,-a^2\right)$. $\quad$ Ainsi, les points H et I sont symétriques par rapport à l'origine.
3. Pour tracer la tangente en A, il suffit de placer facilement I sur l'axe des ordonnées et de tracer (AI).
4. Il faut placer I tel que $\quad HI=nHO \quad$ où $n\in\mathbb{Z}^*$ est l'exposant de la fonction x^n.
5. (a) $\quad 9=2a\times(-5)-a^2 \iff a^2+10a+9=0 \iff (a+1)(a+9)=0$
   $\iff a=-1$ ou $a=-9$.
   $\mathscr{P}$ admet deux tangentes passant par le point de coordonnées $(-5\,;\,9)$: une en $(-1\,;\,1)$ d'équation $\quad y=-2x-1$, une autre en $(-9\,;\,81)$ d'équation $y=-18x-81$.

   (b) $\quad 3=2a\times(-1)-a^2 \iff a^2-2a+3=0 \quad$ de discriminant $4-12<0$ donc $\mathscr{P}$ n'admet aucune tangente passant par le point $(-1\,;\,3)$.

   (c) Il existe au moins une tangente à la parabole $\mathscr{P}$ passant par le point $M(\alpha\,;\,\beta)$
   $\iff \exists a\in\mathbb{R},\ \beta=2a\alpha-a^2 \iff \exists a\in\mathbb{R},\ a^2+2\alpha a+\beta=0$
   $\iff \Delta=4\alpha^2-4\beta\geqslant 0 \iff \alpha^2\geqslant\beta$.
   Autrement dit, le point M doit être situé sous la parabole. On dit que la fonction carré est *convexe*.

Chapitre III

TRIGONOMÉTRIE

Sommaire

Introduction **49**
1 Enroulement de la droite réelle **50**
1.1 Cercle trigonométrique 50
1.2 Principe de l'enroulement 51
1.3 Propriétés 51
1.4 Lien avec les angles géométriques 52
2 Cosinus et sinus d'un nombre réel **52**
2.1 Trigonométrie dans un triangle rectangle 52
2.2 Définition et premières propriétés 53
2.3 Valeurs remarquables 54
2.4 Problèmes inverses 56
3 Fonctions trigonométriques **57**
Corrigé des exercices 58

Introduction

Très tôt dans l'histoire de l'humanité s'est inscrit le désir de mesurer des phénomènes apparemment réguliers, comme le retour des saisons ou le déplacement des planètes. L'histoire de la trigonométrie semble avoir débuté il y a environ 4 000 ans. Il est certain que les Babyloniens déterminaient des approximations de mesures d'angles ou de longueurs de côtés de triangles rectangles : lorsqu'ils observaient le ciel, ils ne pouvaient pas mesurer les distances mais seulement les angles entre les astres. Ils ont donc créé un outil permettant de passer des uns aux autres. Les premières formules de trigonométrie apparaissent en Grèce antique. Des développements significatifs furent réalisés en Inde à partir du VIe s. puis par les mathématiciens islamiques à partir du Xe s. Le traité d'un élève de Copernic (1551) est probablement le premier ouvrage définissant les fonctions trigonométriques directement en termes de triangles rectangles et non de cercles. Au XVIIIe s., la trigonométrie s'intègre presque naturellement à

l'étude des nombres complexes (cf. maths expertes en terminale).

Les applications de la trigonométrie sont très nombreuses : astronomie, navigation, optique, électronique, statistiques, économie, sciences naturelles et physiques, météorologie, géodésie,...

Dans un premier temps, nous généraliserons la notion de mesure d'angle à tous les nombres réels. Nous définirons ensuite les lignes trigonométriques – *sinus* et *cosinus* – de ces mesures d'angles généralisées et en étudierons les premières propriétés.

Commençons, toutefois, par une anecdote. Il était une fois deux mathématiciens réalisant leur rêve d'enfants en effectuant un safari dans la savane africaine. Sous la tente, l'un deux dormait paisiblement lorsqu'il fut éveillé au petit jour par des grognements inquiétants venant des broussailles alentour. Sortant une tête de la tente, il aperçoit son camarade courir autour de celle-ci car, horreur, l'infortuné est poursuivi par un lion. Voyant son acolyte pétrifié de peur, le coureur le rassure immédiatement en lui annonçant tout de go : « Ne t'inquiète pas mon ami, j'ai deux tours d'avance ! ».

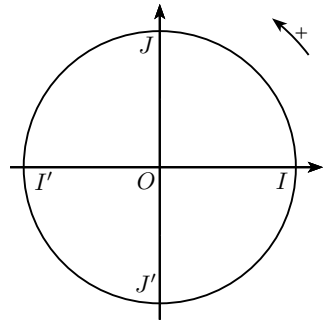
Dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère (O, I, J) orthonormé, un *r.o.n.*, qui plus est direct. Cela signifie que $OI = OJ = 1$, $(OI) \perp (OJ)$ et le quart de cercle IJ se parcourt dans le sens anti-horaire, appelé aussi sens trigonométrique, sens direct ou sens positif. Le sens inverse est nommé sens horaire, indirect ou négatif.

1 Enroulement de la droite réelle

1.1 Cercle trigonométrique

Définition 1
Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de rayon 1 et orienté dans le sens direct est appelé ***cercle trigonométrique****.*

Remarque : Le cercle trigonométrique étant de rayon 1, son périmètre est de 2π.

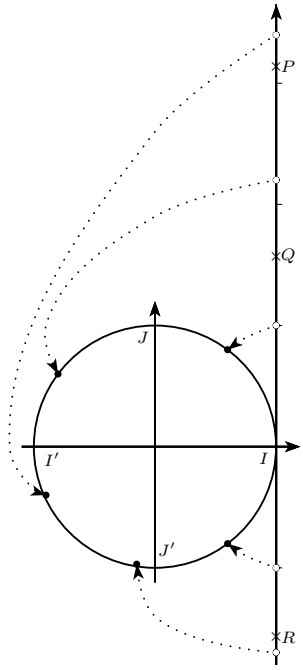


1.2 Principe de l'enroulement

On trace la tangente au cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ en I et l'on munit cette droite du repère (I, A) tel que $IA = 1$. Elle représente ainsi la droite des nombres réels.

On enroule alors cette droite des réels sur le cercle trigonométrique : la demi-droite $[IA)$ s'enroule dans le sens direct et la demi-droite $[IA')$ dans le sens indirect.

L'enroulement de la droite réelle autour du cercle trigonométrique permet d'associer à tout réel, un unique point de $\mathscr{C}$.



Exemples :

- Le point P d'abscisse π est associé au point I'.
- Le point Q d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est associé au point J.
- Le point R d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ est associé au point J'.

Deux réels distincts peuvent être associés à un même point du cercle.

Exemples :

- Le point R d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ et le point d'abscisse $\frac{3\pi}{2}$ sont associés à J'.
- Le point P d'abscisse π et le point d'abscisse $-\pi$ sont associés au point I'.

1.3 Propriétés

Propriété 1 *À tout réel x, on peut associer un unique point M du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. On dit que x est une mesure en radian de l'angle (orienté) $\widehat{IOM}$. Si x et x' sont deux réels associés au même point M de $\mathscr{C}$, alors ils diffèrent d'un multiple de $2\,\pi$ c.-à-d. qu'il existe un entier relatif k tel que $x - x' = k \times 2\pi$. On note alors* $\boldsymbol{x' \equiv x\ [2\pi]}$ *(« modulo 2π »).*

Autrement dit, deux réels associés au même point du cercle trigonométrique sont de la forme x et $x + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples :

- $\frac{39\pi}{4} \equiv -\frac{17\pi}{4}\ [2\pi]$: $\frac{39\pi}{4} - \left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \frac{56\pi}{4} = 16\pi = 8 \times 2\pi$.
- $\frac{23\pi}{3} \equiv \frac{11\pi}{3}\ [2\pi]$: $\frac{23\pi}{3} - \frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi = 2 \times 2\pi$.
- $-\frac{47\pi}{2} \equiv \frac{53\pi}{2}\ [2\pi]$: $-\frac{47\pi}{2} - \frac{53\pi}{2} = -\frac{100\pi}{2} = -50\pi = -25 \times 2\pi$.
- $\frac{17\pi}{5} \not\equiv \frac{2\pi}{5}\ [2\pi]$: $\frac{17\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{15\pi}{5} = 3\pi = \frac{3}{2} \times 2\pi$ et $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Exercice 1 Une histoire de famille

1. Famille de $\dfrac{\pi}{4}$: écrire tous les réels de la forme $k \times \dfrac{\pi}{4}$ pour k entier allant de 0 à 8, simplifier leur écriture si possible et placer leur image sur le cercle trigonométrique.
2. Famille de $\dfrac{\pi}{6}$: même consigne pour les réels $k \times \dfrac{\pi}{6}$ avec k entier allant de 0 à...

Définition 2 *Parmi tous les réels associés à un même point du cercle trigonométrique, un seul appartient à l'intervalle* $]-\pi\,;\pi]$. *On l'appelle* ***mesure principale****.*

Exemples :
- $\frac{39\pi}{4} = \frac{40\pi-\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 10\pi = -\frac{\pi}{4} + 5\times 2\pi \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ et $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi\,;\pi]$.
- $\frac{23\pi}{3} = \frac{24\pi-\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 8\pi = -\frac{\pi}{3} + 4\times 2\pi \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi\,;\pi]$.
- $-\frac{47\pi}{2} = \frac{-48\pi+\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 24\pi = \frac{\pi}{2} - 12\times 2\pi \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $\frac{\pi}{2} \in]-\pi\,;\pi]$.

Exercice 2 Déterminer la mesure principale des angles suivants et en déduire ceux ayant même point image sur le cercle trigonométrique.

(a)	$\frac{\pi}{3}$	(d)	π	(g)	$-\frac{23\pi}{6}$	(j)	$-\frac{3\pi}{4}$	(m)	$\frac{\pi}{6}$
(b)	0	(e)	$-\frac{29\pi}{4}$	(h)	2π	(k)	$\frac{19\pi}{4}$	(n)	$\frac{13\pi}{4}$
(c)	$-\frac{5\pi}{3}$	(f)	$\frac{19\pi}{3}$	(i)	$\frac{7\pi}{3}$	(l)	-8π	(o)	-9π

Remarque : Si $x \in [0\,;2\pi]$, x est aussi la longueur de l'arc $\widehat{IM}$, parcouru dans le sens direct.

Ainsi, un réel x peut à la fois désigner un nombre, un point de la droite réelle, un point du cercle trigonométrique, une mesure d'angle et une longueur. Aussi, on notera indifféremment x, t, α, a,...

Exercice 3 Un ornithologue souhaite connaître la distance survolée par les hirondelles, tant qu'il en reste, lorsqu'elles migrent de Bordeaux en France, sur le 45e parallèle, vers Libreville au Gabon, sur l'équateur.
Les deux villes sont situées sur le même méridien, trajectoire supposée des oiseaux.
Sachant que le rayon de la Terre est d'environ 6 371 km, quelle distance parcourent ces volatiles ?

1.4 Lien avec les angles géométriques

Le tableau des correspondances suivant est un tableau de proportionnalité.

Mesure géométrique	90	180	α	$\frac{180}{\pi}\,x$	45	60	30	120	150
Mesure en radians	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{180}\,\alpha$	x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

Exercice 4 Placer sur le cercle trigo les angles $\frac{39\pi}{4}$, $\frac{23\pi}{3}$, $-\frac{47\pi}{2}$, $-\frac{56\pi}{3}$ et -37π.

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

2.1 Trigonométrie dans un triangle rectangle

Vous vous souvenez bien sûr du fameux *cahsohtoasc* résumant les définitions des lignes trigonométriques dans un triangle rectangle :
$\cos(\alpha) = \frac{adjacent}{hypoténuse}$, $\sin(\alpha) = \frac{opposé}{hypoténuse}$ et $\tan(\alpha) = \frac{opposé}{ajacent} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

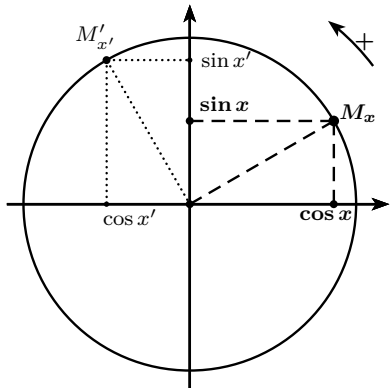
Soit α un réel de $\left]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right[$ et M son image sur le cercle trigonométrique : $\alpha = \widehat{IOM}$. Ce cercle étant de rayon 1, les triangles rectangles que l'on construit pour déterminer les coordonnées du point M sont précisément d'hypoténuse 1. Ainsi, $x_M = \cos(\alpha)$ et $y_M = \sin(\alpha)$.

La définition suivante est donc une généralisation naturelle de ce qui a été fait dans un triangle rectangle.

2.2 Définition et premières propriétés

Définition 3 *Soit x un réel et soit M le point du cercle trigonométrique associé à x par enroulement.*

- *On appelle* ***cosinus*** *du réel x et l'on note* $\cos(x)$*, l'****abscisse*** *du point M dans le repère (O,I,J).*
- *On appelle* ***sinus*** *du réel x et l'on note* $\sin(x)$*, l'****ordonnée*** *du point M dans le repère (O,I,J).*
- *Dans le repère (O,I,J), on a donc* $\boldsymbol{M\,(\,\cos x\,;\,\sin x\,)}$.
- *Pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on appelle* ***tangente*** *du réel x le nombre* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Exemples :
- Puisque $I\,(\,1\,;\,0\,)$, $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.
- Puisque $J\,(\,0\,;\,1\,)$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
- Puisque $I'\,(\,-1\,;\,0\,)$, $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$.
- Puisque $J'\,(\,0\,;\,-1\,)$, $\cos -\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$.

Propriété 2 *Pour tout réel x et tout entier relatif k, on a*

- *Propriété d'encadrement :* $\boldsymbol{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$ *et* $\boldsymbol{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$.
- *Relation fondamentale de la trigonométrie :* $\boldsymbol{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$.
- *Invariance :* $\boldsymbol{\cos(x + k\times 2\pi) = \cos(x)}$ *et* $\boldsymbol{\sin(x + k\times 2\pi) = \sin(x)}$.

Démonstration : Tout point du cercle a ses coordonnées dans l'intervalle $[\,-1\,;1\,]$, encadrées par celles des points I, I', J et J'.
Le repère étant orthonormé, on a, pour tout point M de $\mathscr{C}$, $1^2 = OM^2 = x_M^2 + y_M^2$. Ainsi, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \leqslant 1$ et $\cos x \in [\,-1\,;1\,]$.
De même pour le sinus.
Les réels x et $x + k\times 2\pi$ étant associés au même point du cercle, ils ont les mêmes lignes trigonométriques. □

Remarque : On écrit $\cos^2(x)$ en raccourci de $(\cos(x))^2$.

Exercice 5 Un réel t est tel que $t \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et $\sin t = \frac{1}{3}$.

1. Construire le point M du cercle trigonométrique associé à t. À quel cadran du cercle appartient-il ?
2. Quel est le signe de $\cos t$?
3. Calculer la valeur exacte de $\cos t$.

Exercice 6 Même type d'exercice avec $x \in [\,0\,;\pi\,]$ et $\cos x = -\frac{3}{4}$.

Exercice 7 Écrire une fonction Python (cf. *Algo à gogo* en page 291) déterminant à quel quadrant du cercle trigonométrique appartient le point M associé au réel entré x.

2.3 Valeurs remarquables

Exercice 8 Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{4}$, de $\frac{\pi}{6}$ et de $\frac{\pi}{3}$.

1. (a) Quelle figure géométrique usuelle fait apparaître un angle de $\frac{\pi}{4}$?
   (b) Calculer les longueurs de ses côtés.
   (c) En déduire les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{4}$.
2. (a) Quelle figure géométrique usuelle fait apparaître un angle de $\frac{\pi}{3}$?
   (b) En utilisant une droite remarquable, déterminer les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{3}$ et de $\frac{\pi}{6}$.
3. Vérifier vos résultats au moyen de la relation fondamentale de la trigonométrie.

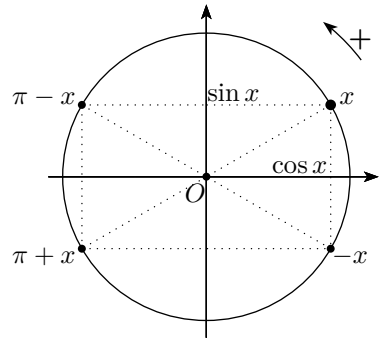
Nous pouvons remplir par symétrie le tableau suivant qui sera illustré et complété en page suivante.

Angle géométrique	0	30	45	60	90
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Exercice 9 M est un point du cercle trigonométrique associé à un réel α.

1. Faire une figure et construire le point P symétrique de M par rapport à O.
2. Comparer les coordonnées des points M et P.
3. En déduire les expressions de $\cos(\alpha+\pi)$ et $\sin(\alpha+\pi)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
4. Donner les lignes trigonométriques (sinus et cosinus) des réels $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

Par symétrie du cercle trigonométrique, on obtient facilement la propriété suivante qui nous permet de « changer de cadran ».



Propriété 3 *Pour tout réel x, on a*

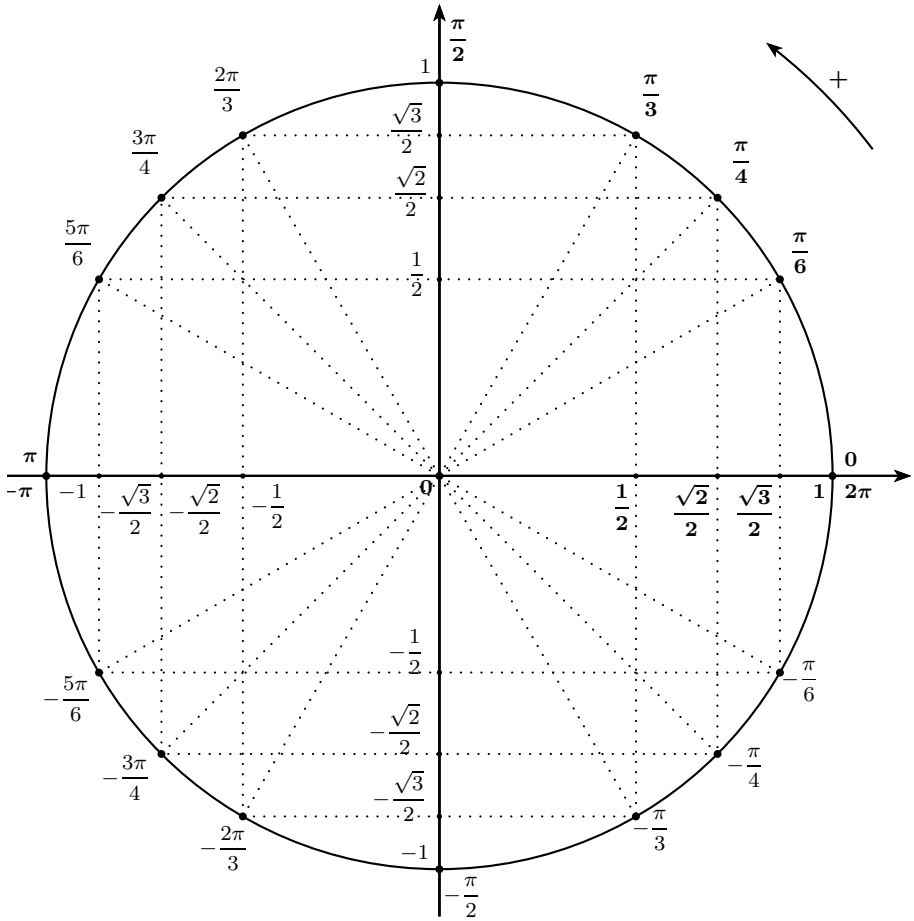
$\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$,
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

Exemples : ◦ $\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

◦ $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

◦ $\cos(-\frac{\pi}{4}) + \sin(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$

Ainsi, il nous est aisé de compléter les valeurs remarquables sur le cercle suivant.



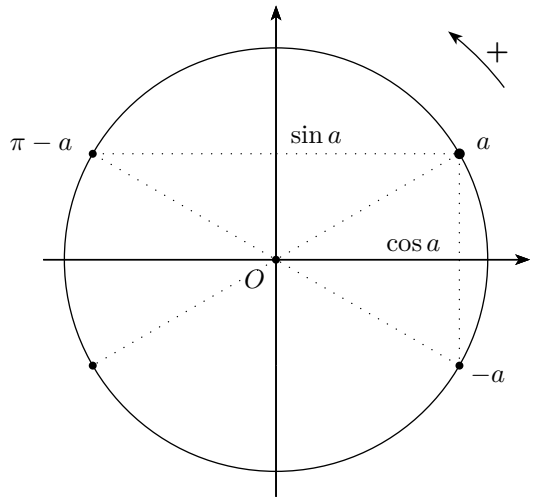
Exercice 10 Donner les lignes trigonométriques (sin et cos) des réels de l'exercice 2.

Exercice 11 Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants puis placer les points associés sur le cercle trigonométrique. Donner ensuite les valeurs de leurs lignes trigonométriques si possible.

(a) $-\dfrac{21\pi}{2}$	(d) $\dfrac{2001\pi}{4}$	(g) $3,15$	(j) $-\dfrac{99\pi}{8}$
(b) $\dfrac{199\pi}{6}$	(e) $\dfrac{2001\pi}{3}$	(h) 17	(k) $-\dfrac{56\pi}{3}$
(c) $-\dfrac{77\pi}{3}$	(f) $-\dfrac{101\pi}{3}$	(i) $\dfrac{33\pi}{7}$	(l) -37π

2.4 Problèmes inverses

Soit a un réel.
Nous pouvons remarquer qu'au maximum deux points du cercle trigonométrique ont pour abscisse $\cos a$ et au maximum deux ont pour ordonnée $\sin a$.
Il peut n'en exister qu'un seul lorsque l'on se situe sur les axes mais il est certain qu'il en existe au moins un.



Exemples : ◦ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = \cos\frac{\pi}{6} \iff x \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.
◦ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
$\iff x \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\,[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$.
◦ $\cos x > -\frac{1}{2} \iff \cos x > \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \iff x \in \left]-\frac{2\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right[\,[2\pi]$.
◦ $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin x \leqslant \sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} \iff x \in \left]-\pi\,;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]\,[2\pi]$.

Exercice 12 Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle stipulé.

(a)	$x \in [\,0\,;2\pi\,]$, $\cos x = \frac{1}{2}$.	(d)	$x \in [\,0\,;\,2\pi[$, $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$
(b)	$x \in [\,-\pi\,;\pi\,]$, $\sin x = \frac{1}{2}$.	(e)	$x \in]-\pi\,;\,\pi\,]$, $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$
(c)	$x \in [\,0\,;4\pi\,]$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	(f)	$x \in [\,0\,;\,2\pi]$, $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 13 Soit $\mathscr{F}$ l'équation $\sin\alpha = 2\sin^3\alpha$.

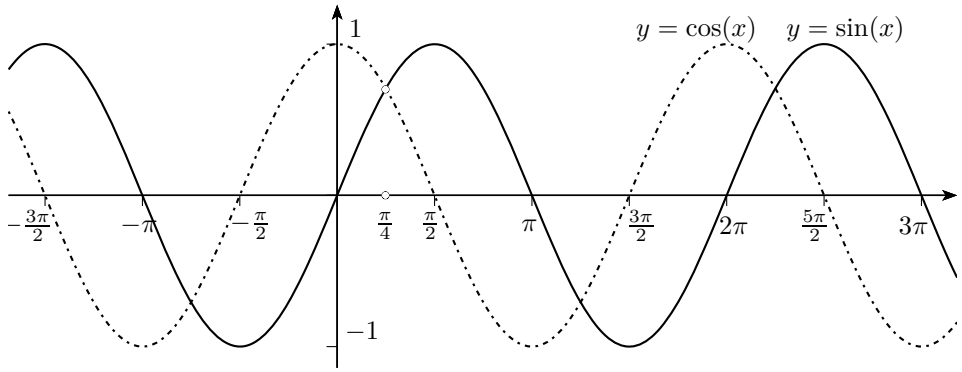
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = 2x^3$.
2. En déduire les valeurs possibles de $\sin\alpha$.
3. Résoudre $\mathscr{F}$ dans l'intervalle $[\,0\,;4\pi\,]$.

Exercice 14 Afin de fixer une cigale décorative sur la façade de sa maison, Marius doit poser une échelle contre le mur et pour qu'elle ne glisse pas, cette dernière doit former un angle d'au moins $60°$ avec le sol. Gêné tout le long par son bassin à poissons rouges, Marius n'a pu poser son échelle de $2\,\text{m}$ qu'à $1,10\,\text{m}$ du mur. Glissera-t-elle ?

3 Fonctions trigonométriques

Nous étudierons les fonctions trigonométriques de manière approfondie dans un chapitre ultérieur mais voici quelques résultats intéressants.

- Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire et elles sont toutes les deux 2π-périodiques :
  $\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(-x) = \cos x,\quad \sin(-x) = -\sin x.$
  $\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(x+2\pi) = \cos x,\quad \sin(x+2\pi) = \sin x.$
- Leur graphe sont donc invariants par translation de vecteur $\binom{2\pi}{0}$ et sont bornés par les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$.
  Le graphe de la fonction *cosinus* est aussi symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celui de la fonction *sinus* est symétrique par rapport à l'origine du repère. Les voici :



Exercice 15 Esquisser les graphes des fonctions $f\colon x \longmapsto 2\cos(x)$ et $g\colon x \longmapsto \sin(2x)$.

Tournez jusqu'à la page 241 afin de réaliser le devoir n° 3.

Corrigé des exercices

TRIGONOMÉTRIE

Exercice 1 Une histoire de famille

1. Famille de $\frac{\pi}{4}$: Pour k allant de 0 à 8, $k\frac{\pi}{4}$ prend les valeurs 0, $\frac{\pi}{4}$, $2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $4\frac{\pi}{4}=\pi$, $\frac{5\pi}{4}$, $6\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$ et $8\frac{\pi}{4}=2\pi$ que l'on place aisément sur le cercle trigonométrique (cf. page 55).
2. Famille de $\frac{\pi}{6}$: Pour k allant de 0 à 12, $k\frac{\pi}{6}$ prend les valeurs 0, $\frac{\pi}{6}$, $2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, $3\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, $4\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $6\frac{\pi}{6}=\pi$, $\frac{7\pi}{6}$, $8\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}$, $9\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$, $10\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ et $12\frac{\pi}{6}=2\pi$ que l'on place tout aussi aisément.

Exercice 2 Mesure principale

(a) $\frac{\pi}{3}\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(b) $0\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(c) $-\frac{5\pi}{3}=\frac{-6\pi+\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{6\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-2\pi\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et $\frac{\pi}{3}\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(d) $\pi\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(e) $-\frac{29\pi}{4}=\frac{-32+3}{4}\pi=\frac{3\pi}{4}-8\pi=\frac{3\pi}{4}-4\times2\pi\equiv\frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$ et $\frac{3\pi}{4}\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(f) $\frac{19\pi}{3}=\frac{18+1}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+6\pi=\frac{\pi}{3}+2\times2\pi\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et $\frac{\pi}{3}\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(g) $-\frac{23\pi}{6}=\frac{-24+1}{6}\pi=\frac{\pi}{6}-4\pi=\frac{\pi}{6}-2\times2\pi\equiv\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ et $\frac{\pi}{6}\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(h) $2\pi=0+2\pi\equiv0\,[2\pi]$ et $0\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(i) $\frac{7\pi}{3}=\frac{6+1}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+2\pi\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et $\frac{\pi}{3}\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(j) $-\frac{3\pi}{4}\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(k) $\frac{19\pi}{4}=\frac{16+3}{4}\pi=\frac{3\pi}{4}+8\pi=\frac{3\pi}{4}+4\times2\pi\equiv\frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$ et $\frac{3\pi}{4}\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(l) $-8\pi=0-4\times2\pi\equiv0\,[2\pi]$ et $0\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(m) $\frac{\pi}{6}\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(n) $\frac{13\pi}{4}=\frac{16-3}{4}\pi=-\frac{3\pi}{4}+8\pi=-\frac{3\pi}{4}+4\times2\pi\equiv-\frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$ et $-\frac{3\pi}{4}\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

(o) $-9\pi=\pi-10\pi=\pi-5\times2\pi\equiv\pi\,[2\pi]$ et $\pi\in\,]-\pi\,;\pi\,]$.

Ainsi, ont même image sur le cercle trigonométrique : a, c, f et i, b, h et l, d et o, e et k, g et m, j et n.

Exercice 3 On recherche donc la longueur de l'arc de cercle reliant Bordeaux à Libreville : il développe un angle de $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{8}\times2\pi$ radians sur un cercle de rayon $6\,371$ km. Lors de cette migration, les hirondelles parcourent donc au minimum $\frac{1}{8}\,(2\pi\times6371)\simeq5\,004$ km !

Exercice 4 Il suffit de trouver leur mesure principale et de les placer en utilisant les symétries du cercle trigo.

Exercice 5 Puisque $t \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, le point $M\,(\cos t\,;\sin t\,)$ appartient au second cadran, celui « en haut à gauche ». Ainsi, $\cos t \leqslant 0$. De plus, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ donc $\cos t = -\sqrt{1-\frac{1}{3^2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 6 Puisque $x \in [\,0\,;\pi\,]$, le point $P\,(\cos x\,;\sin x\,)$ appartient au demi-plan supérieur, celui des ordonnées positives. Ainsi, $\sin x \geqslant 0$.
De plus, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin x = +\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Exercice 7 Cette fonction donne le quadrant du cercle trigo. auquel x est associé.

```
def quadrant(x) :
    if cos(x)>=0 :
        C="à droite."
    else :
        C="à gauche."
    if sin(x)>=0 :
        V="M est en haut,"
    else :
        V="M est en bas,"
    print(V,C)
```

Exercice 8 Lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{4}$, de $\frac{\pi}{6}$ et de $\frac{\pi}{3}$.

1. (a) Dans un triangle rectangle isocèle, les deux angles opposés à l'angle droit mesurent $\frac{\pi}{4}$.
   (b) Dans un tel triangle d'hypoténuse h et de côtés c, le bon vieux théorème de Pythagore permet d'affirmer que $h^2 = c^2 + c^2 = 2c^2$.
   (c) Ainsi, $h = c\sqrt{2}$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{c}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. (a) Dans un triangle équilatéral, les trois angles mesurent $\frac{\pi}{3}$.
   (b) On trace l'une des hauteurs, de longueur h, du triangle équilatéral de côté c et le théorème de Pythagore dans l'un des « petits » triangles rectangles permet d'affirmer que $c^2 = h^2 + (\frac{c}{2})^2$ c.-à-d. $\frac{3}{4}c^2 = h^2$ et $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Puisque la hauteur est aussi la bissectrice dans le triangle équilatéral, les deux angles du petit triangle mesurent $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$ et l'on a $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{c/2}{c} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{h}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. On a bien $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Exercice 9

1. Le point P, symétrique de M par rapport à O, est l'intersection du cercle trigo. et de la demi-droite $[MO)$.
2. Par symétrie, les coordonnées des points symétriques M et P sont opposées.
3. Si M est l'image sur le cercle d'un réel x, alors P est l'image du réel $\alpha+\pi$ puisqu'ils sont « séparés » d'un demi-tour. Comme leurs coordonnées sont opposées, on a $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha)$.
4. Ainsi, $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 10 Il suffit de lire les coordonnées des points sur le remarquable cercle trigonométrique de la page 55.

Exercice 11 Vous vérifierez vos lignes trigonométriques dans le cours (les items g à j ne nous sont pas connus).

(a) $-\dfrac{21\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{20\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2} - 5\times 2\pi \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

(b) $\dfrac{199\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6} + \dfrac{204\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6} + 17\times 2\pi \equiv -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$.

(c) $-\dfrac{77\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{78\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - 13\times 2\pi \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

(d) $\dfrac{2001\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2000\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 250\times 2\pi \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

(e) $\dfrac{2001\pi}{3} = 667\pi = \pi + 333\times 2\pi \equiv \pi\ [2\pi]$.

(f) $-\dfrac{101\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{102\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - 17\times 2\pi \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

(g) $\pi < 3,15 \leq 3\pi$ donc $3,15 - 2\pi \in]-\pi;\ \pi]$ et $3,15 \equiv 3,15 - 2\pi\ [2\pi]$.

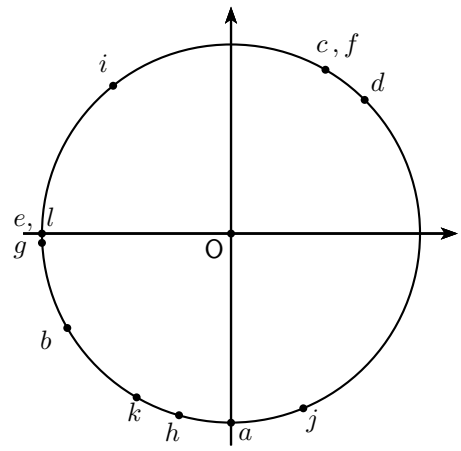
(h) $5\pi < 17 \leq 6\pi$ donc $17 - 6\pi \in]-\pi;\ \pi]$ et $17 \equiv 17 - 6\pi\ [2\pi]$.

(i) $\dfrac{33\pi}{7} = \dfrac{5\pi}{7} + \dfrac{28\pi}{7} = \dfrac{5\pi}{7} + 2\times 2\pi \equiv \dfrac{5\pi}{7}\ [2\pi]$.

(j) $-\dfrac{99\pi}{8} = -\dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{96\pi}{8} = -\dfrac{3\pi}{8} - 6\times 2\pi \equiv -\dfrac{3\pi}{8}\ [2\pi]$.

(k) $-\dfrac{56\pi}{3} = \dfrac{-2\pi - 54\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3} - 9\times 2\pi \equiv -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

(l) $-37\pi = \pi - 38\pi = \pi - 19\times 2\pi \equiv \pi\ [2\pi]$.



Exercice 12 En traçant les droites parallèles aux axes pertinentes, on résout ces équations et inéquations.

(a) Si $x \in [\,0\,;2\pi\,]$, $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$.

(b) Si $x \in [\,-\pi\,;\pi\,]$, $\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$.

(c) Si $x \in [\,0\,;4\pi\,]$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{11\pi}{6}$ ou $\frac{13\pi}{6}$ ou $\frac{23\pi}{6}$.

(d) Dans $[\,0\,;\,2\pi[\,$, $\cos x \leqslant -\dfrac{1}{2} \iff x \in \left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\dfrac{4\pi}{3}\right]$.

(e) Dans $]\,-\pi\,;\,\pi\,]$, $\sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in \left]-\pi\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}\,;\,\pi\right]$.

(f) Dans $x \in [\,0\,;\,2\pi]$, $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left[\,0\,;\dfrac{\pi}{6}\,\right[\cup \left]\,\dfrac{11\pi}{6}\,;2\pi\right]$.

Exercice 13 Soit $\mathscr{F}$ l'équation $\sin\alpha = 2\sin^3\alpha$.

1. On a $x = 2x^3 \iff x(2x^2-1) = 0 \iff x(\sqrt{2}\,x-1)(\sqrt{2}\,x+1) = 0$
   $\iff x = 0$ *ou* $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *ou* $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Ainsi, en posant $x = \sin\alpha$, on obtient
   $\sin\alpha = 2\sin^3\alpha \iff \sin\alpha = 0$ *ou* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *ou* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Autrement dit, $\alpha = 0$ *ou* π *ou* $\frac{\pi}{4}$ *ou* $\frac{3\pi}{4}$ *ou* $-\frac{\pi}{4}$ *ou* $-\frac{3\pi}{4}$ *modulo* 2π.
   $\mathscr{F}$ admet donc pour solutions dans $[\,0\,;4\pi\,]$:
   $\left\{0\,;\,\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{3\pi}{4}\,;\,\pi\,;\,\frac{5\pi}{4}\,;\,\frac{7\pi}{4}\,;\,2\pi\,;\,\frac{9\pi}{4}\,;\,\frac{11\pi}{4}\,;\,3\pi\,;\,\frac{13\pi}{4}\,;\,\frac{15\pi}{4}\,;\,4\pi\right\}$.

Exercice 14 Une fois installée, l'échelle de Marius forme avec le sol un angle $\alpha \in \left]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right[$ vérifiant $\cos\alpha = \frac{1{,}1}{2} > \frac{1}{2}$ donc $\alpha < \frac{\pi}{3}$ et son échelle glissera fâcheusement.

Exercice 15 Les graphes des fonctions $f\colon x \longmapsto 2\cos(x)$ et $g\colon x \longmapsto \sin(2x)$ sont similaires à ceux des fonctions cos et sin. $\mathscr{C}_f$ a une amplitude deux fois plus grande que $\mathscr{C}_{\cos}$: $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$ tandis que $\mathscr{C}_g$ a une période deux fois plus petite que $\mathscr{C}_{\sin}$: $g(x+\pi) = g(x)$.

Chapitre IV

Fonctions dérivées

Sommaire

1 Fonctions dérivées 63
1.1 Définition 63
1.2 Quelques fonctions dérivées usuelles 64
2 Fonctions dérivées et opérations 64
2.1 Somme et produit 65
2.2 Quotient 66
2.3 Composition 66
3 Fonctions dérivées et variations 67
4 Extremum d'une fonction 68
4.1 Extremum local, extremum global 68
4.2 Optimisation 69
5 L'essentiel 70
Exercices 71
Corrigé des exercices 76

Voici enfin la seconde partie du chapitre sur la dérivation. Nous allons apprendre à calculer beaucoup plus facilement les nombres dérivés et en déduire des propriétés essentielles sur les fonctions dont ils proviennent. Vous allez voir que ce concept n'est pas anodin, bien au contraire.

1 Fonctions dérivées

1.1 Définition

Définition 1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.*
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. La fonction dérivée de f est alors la fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé de f en x : $f' : x \in I \longmapsto f'(x)$.

Exemple : $f(x) = 7 - 3x$ sur $\mathbb{R}$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{7-3x-7+3a}{x-a} = -3 \xrightarrow[x\to a]{} -3 \in \mathbb{R}$ et $f' : x \in \mathbb{R} \longmapsto f'(x) = -3$.

1.2 Quelques fonctions dérivées usuelles

- f est une fonction affine : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx+p$. Soient a et $x \neq a$ deux réels. On a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{(mx+p)-(ma+p)}{x-a} = \frac{m(x-a)}{x-a} = m \xrightarrow[x\to a]{} m = f'(a)$.
- Soit g la fonction carré : $g(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. Soient a et $x \neq a$ deux réels. On a $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(x+a)(x-a)}{x-a} = x + a \xrightarrow[x\to a]{} 2a = g'(a) \in \mathbb{R}$.
- h est la fonction inverse : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) = \frac{1}{x}$. Soient a et $x \neq a$ deux réels non nuls. On a $\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a} = \frac{-1}{ax} \xrightarrow[x\to a]{} -\frac{1}{a^2} = h'(a) \in \mathbb{R}$.
- Parfois, la fonction dérivée est définie sur un ensemble restreint. Soit $i(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, $a > 0$ et $x \geqslant 0$. On a $\frac{i(x)-i(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{x}^2-\sqrt{a}^2}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}} = i'(a) \in \mathbb{R}$.
- Pour x^3, on a : $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$
  donc $\frac{x^3-a^3}{x-a} = x^2 + ax + a^2 \xrightarrow[x\to a]{} a^2 + a\,a + a^2 = 3a^2 = (x^3)'$.
- Nous admettrons que les fonctions trigonométriques *sinus* et *cosinus* sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et ont pour fonction dérivée :
$$\boldsymbol{\left(\sin x\right)' = \cos x} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\left(\cos x\right)' = -\sin x}\,.$$

Formulaire : On note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f et $\mathscr{D}_{f'}$ celui de sa fonction dérivée f'.

$\mathscr{D}_f$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$	$\mathscr{D}_{f'}$
$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{mx+p}$	$\boldsymbol{m}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{2x}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{x^3}$	$\boldsymbol{3x^2}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^*$	$\boldsymbol{1/x}$	$\boldsymbol{-1/x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$[\,0\,;+\infty\,[$	$\boldsymbol{\sqrt{x}}$	$\boldsymbol{1/2\sqrt{x}}$	$]\,0\,;+\infty\,[$

2 Fonctions dérivées et opérations

On rappelle que, pour u et v deux fonctions numériques définies sur $\mathscr{D}_u$ et $\mathscr{D}_v$ respectivement, on a défini de manière naturelle les opérations usuelles sur les fonctions, pour $x \in \mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v$:

$(u+v)(x) = u(x)+v(x)$, $(u \times v)(x) = u(x) \times v(x)$ et $\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ si $v(x) \neq 0$.

Remarquons $(x+x)' = (2x)' = 2 = 1+1 = x'+x'$, $(x^2)' = 2x \neq 1 \times 1 = x' \times x'$ et $\left(\frac{x^2}{x}\right)' = x' = 1 \neq \frac{2x}{1} = \frac{(x^2)'}{(x)'}$.

Si la dérivation d'une somme paraît évidente, il n'en est donc pas de même pour un produit ni un quotient. Les résultats suivants nous donnent un formulaire de dérivation pour des opérations usuelles sur les fonctions.

2.1 Somme et produit

Propriété 1 *Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I et soit λ un réel.*
Les fonctions $u+v$, $u\times v$ et λu sont dérivables et l'on a, pour tout $x\in I$:

$\boldsymbol{(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)}$ i.e. $\boldsymbol{(u+v)'=u'+v'}$
$\boldsymbol{(u.v)'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)}$ i.e. $\boldsymbol{(uv)'=u'v+uv'}$
$\boldsymbol{(\lambda u)'(x)=\lambda u'(x)}$ i.e. $\boldsymbol{(\lambda u)'=\lambda u'}$

Démonstration :
- $\frac{(u+v)(x)-(u+v)(a)}{x-a}=\frac{u(x)+v(x)-u(a)-v(a)}{x-a}=\frac{u(x)-u(a)}{x-a}+\frac{v(x)-v(a)}{x-a}\xrightarrow[x\to a]{} u'(a)+v'(a)$.
- $\frac{(u.v)(x)-(u.v)(a)}{x-a}=\frac{u(x).v(x)-u(a).v(a)}{x-a}=\frac{u(x).v(x)-u(a).v(x)+u(a).v(x)-u(a).v(a)}{x-a}$
$=\frac{u(x)-u(a)}{x-a}.v(x)+u(a).\frac{v(x)-v(a)}{x-a}\xrightarrow[x\to a]{} u'(a).v(a)+u(a).v'(a)$.
- Pour $\lambda.u$, on applique ce qui précède pour $v(x)=\lambda$. □

Ainsi, la dérivée d'une somme est la somme des dérivées mais cela ne fonctionne pas pour le produit.

Application : ***Dérivée de x^n.***
Nous effectuons ce que l'on appelle un raisonnement par récurrence.
Observons tout d'abord que la formule $(x^n)'=n\,x^{n-1}$ est vraie au rang $n=1$:
$(x^1)'=x'=1=1\times x^0=1\times x^{1-1}$.
Supposons alors que cette formule est vraie pour un certain rang n et démontrons qu'elle reste vraie pour le rang suivant $n+1$.
On a $(x^{n+1})'=(x\times x^n)'=x'\times x^n+x\times(x^n)'=1\times x^n+x\times n\,x^{n-1}=x^n+n\,x^n$
$=(n+1)\,x^n=(n+1)\,x^{n+1-1}$ et la formule est vraie au rang $n+1$.
Ainsi, puisque la formule est vraie au rang 1, elle l'est aussi au rang suivant $1+1=2$ et donc au rang suivant $2+1=3$, au rang suivant $3+1=4$ et ainsi de suite.
Ce type de raisonnement sera étudié en terminale.
Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, la dérivée de la fonction x^n est la fonction $n\,x^{n-1}$: $\boldsymbol{\left(x^n\right)'=n\,x^{n-1}}$.
On peut démontrer également la formule suivante : $\boldsymbol{\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Puisqu'un polynôme est une somme de fonctions dérivables, on obtient le résultat suivant.

Propriété 2 *Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Exemple : $P(x)=7x^5+3x^4+5x^3-9x^2-x+4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet pour fonction dérivée : $P'(x)=7\times5x^4+3\times4x^3+5\times3x^2-9\times2x-1+0$
$P'(x)=35x^4+12x^3+15x^2-18x-1$.

2.2 Quotient

Propriété 3 ***Dérivée de l'inverse***
Soit v une fonction définie, dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle ouvert I.
La fonction $\dfrac{1}{v}$ est alors dérivable sur I et admet pour fonction dérivée :

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{[\,v(x)\,]^2} \qquad \text{i.e.} \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Démonstration :
$\frac{\frac{1}{v(x)}-\frac{1}{v(a)}}{x-a} = \frac{\frac{v(a)}{v(x).v(a)}-\frac{v(x)}{v(x).v(a)}}{x-a} = -\frac{v(x)-v(a)}{x-a} \times \frac{1}{v(x).v(a)} \xrightarrow[x\to a]{} -v'(a) \times \frac{1}{v(a).v(a)}$. □

Propriété 4 ***Dérivée d'un quotient***
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I telles que v ne s'annule pas sur I.
La fonction $\dfrac{u}{v}$ est alors dérivable sur I et admet pour fonction dérivée :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[\,v(x)\,]^2} \qquad \text{i.e.} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Dém. : $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ donc $(\frac{u}{v})' = u' \times \frac{1}{v} + u \times (\frac{1}{v})' = u' \times \frac{v}{v^2} + u \times \frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{v^2}$. □

Exemple : Calcul de la dérivée de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto f(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$.
Posons $u = x-3$, $v = x-2$. On a $u' = 1$, $v' = 1$. Puisque $f = \frac{u}{v}$, $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ et, pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \frac{1(x-2)-1(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$.

2.3 Composition

Propriété 5 ***Dérivée de $u(ax+b)$***
Soit $x \longmapsto ax+b$ une fonction affine d'un intervalle ouvert I sur un intervalle ouvert J (i.e. $\forall x \in I,\ ax+b \in J$) et soit u une fonction dérivable sur J.
La fonction $f : x \in I \longmapsto \boldsymbol{u(ax+b)}$ est alors dérivable et admet pour fonction dérivée $f'(x) = \boldsymbol{a.u'(ax+b)}$

Nous admettrons ce résultat.

On peut remarquer que la dérivée de $ax+b$ est a et donc que la dérivée de $u(ax+b)$ est le produit des dérivées a et u', où l'on applique u' non à x mais à $ax+b$, là où s'applique aussi u.

Exemple : Calcul de la dérivée de la fonction $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto g(x) = -3(2x-7)^5$.
Posons $u = -3x^5$, $u' = -15x^4$. Puisque $g(x) = u(2x-7)$, on a $g'(x) = 2.u'(2x-7) = 2(-15)(2x-7)^4 = -30(2x-7)^4$.

3 Fonctions dérivées et variations

On observe graphiquement que les tangentes aux courbes de fonctions croissantes ont des coefficients directeurs positifs alors qu'ils sont négatifs dans le cas décroissant. Ce résultat ainsi que sa réciproque sont vrais.

Théorème 1 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.*

- *f est croissante sur I si et seulement si, $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$.*
- *f est décroissante sur I si et seulement si, $\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$.*
- *f est constante sur I si et seulement si, $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$*

Démonstration : Nous admettrons les réciproques.
Soit f une fonction croissante et dérivable sur un intervalle ouvert I et soient a et x deux réels de I.

Si $a < x$, $f(a) \leqslant f(x)$ car f est croissante donc $x - a > 0$ et $f(x) - f(a) \geqslant 0$.

Si $a > x$, $f(a) \geqslant f(x)$ car f est croissante donc $x - a < 0$ et $f(x) - f(a) \leqslant 0$.

Ainsi, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$, tout comme sa limite lorsque x tend vers a.
On a utilisé la propriété admise suivante : *La limite d'une fonction positive est positive.*
La démonstration est analogue pour une fonction décroissante.
Si elle est constante, $f(x) - f(a) = 0$. □

Remarques :

• On admettra que *si la dérivée est strictement positive, alors la fonction est strictement croissante.*
En revanche, même si f est strictement monotone, sa dérivée peut quand même s'annuler (cf. $x \mapsto x^3$ en 0).

• L'hypothèse d'intervalle est très importante. Bien sûr, les variations ne s'étudient, par définition, que sur des intervalles mais il est facile de l'oublier et de construire des tableaux de variations fantaisistes.
La fonction inverse par exemple est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, sa dérivée $-\frac{1}{x^2}$ est strictement négative mais elle n'est pas décroissante « globalement ».

• L'étude du « simple » signe d'une dérivée permet dorénavant de déterminer les variations d'une fonction.

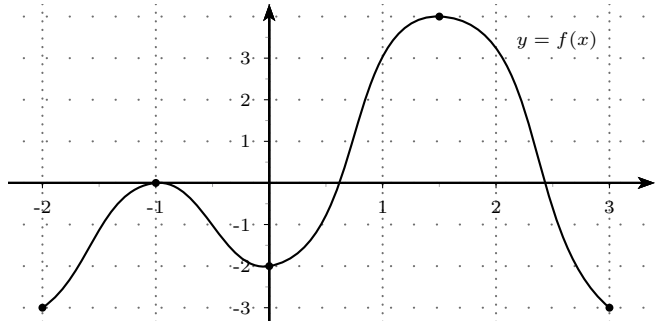
Exemples : ◦ Variations de $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \longmapsto f(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$.
On a vu précédemment que, pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2} > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]\,2\,;+\infty[$.
◦ Variations de $g(x) = -3(2x-7)^5$.
On a vu que $g'(x) = -30(2x-7)^4 \leqslant 0$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4 Extremum d'une fonction

4.1 Extremum local, extremum global

Définition 2 ***Extremum locaux & globaux***
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ et soient $a, b \in \mathscr{D}_f$.
$f(a)$ est un maximum local de f s'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que,
$\forall x \in I \cap \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant f(a)$.
$f(b)$ est un minimum local de f s'il existe un intervalle ouvert J contenant b tel que,
$\forall x \in J \cap \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant f(b)$.
Un extremum local est soit un minimum local soit un maximum local.
On dira que f admet un maximum (resp. minimum) global en a si,
$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant f(a) \quad \big(\text{resp. } f(x) \geqslant f(a)\big)$.

Exemples :
◦ Maximum local : le Mont-Blanc (4810 m) est la plus haute montagne des Alpes.
◦ Maximum global : Chomolungma, Sagarmatha ou l'Everest (8848 m) est la plus haute montagne d'Asie et du Monde.
◦ La fonction f ci-dessous admet un minimum local et global en -2 et en 3 qui vaut -3, un minimum local non global en 0 valant -2, un maximum global et local en $1,5$ valant 4 et un maximum local non global en -1 valant 0.



Remarques : • Un extremum global est local mais la réciproque est fausse.
• Une fonction n'admet pas nécessairement d'extremum : $2x+3$ sur $\mathbb{R}$ par exemple.

Propriété 6 *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a.*
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarques : • La réciproque est fausse. Regarder $x \mapsto x^3$ en 0 par exemple.
• Ce résultat est faux si l'intervalle n'est pas ouvert et ce, même si f est dérivable à gauche ou à droite aux bords (cf. $2x + 3$ sur $[\,0\,;1\,]$).

Idéemonstration : Autour de a, $f(x)-f(a)$ est de signe constant car a est un extremum local. D'un côté de a, on a $x < a$ et de l'autre, $x > a$: le nombre dérivé en a doit donc être à la fois positif et négatif, donc nul.

4.2 Optimisation

L'optimisation consiste à déterminer des conditions ou des configurations optimales pour des systèmes variés. Lorsque l'on veut maximiser ou minimiser une certaine quantité, on est souvent amené à trouver les extremums d'une fonction.

Exemple : *Comment fabriquer une casserole de volume v donné avec le moins de métal possible ?*
On suppose que cette question vous tarabuste depuis toujours et que la fabrication du manche ne dépend pas des dimensions de la casserole. L'unité est le centimètre. On note x le rayon du disque du fond, h la hauteur et $\mathscr{S}$ l'aire totale de la casserole.

1. Démontrer que $h = \dfrac{v}{\pi\, x^2}$ puis que $\mathscr{S} = \pi\, x^2 + \dfrac{2v}{x}$.
2. Étudier les variations de la fonction $f(x) = \pi\, x^2 + \dfrac{2v}{x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
3. (a) Pour quel rayon x_0 obtient-on une surface minimale ?
   (b) Exprimer h_0 en fonction de x_0 en utilisant deux écritures différentes de v.
   (c) Conclure (puis regarder le corrigé en page 76).

Vous pouvez enfin réaliser les exercices en page 71 ainsi que les devoirs n°s 4, 5 et 6 en pages 245, 247 et 251, en vous aidant éventuellement de la synthèse de la page suivante.

5 L'essentiel

f, u, et v sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Définitions :

• f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est réelle (*i.e.* finie). Cette limite est alors $f'(a)$, le nombre dérivé de f en a.

• Si f est dérivable en a, le graphe $\mathscr{C}_f$ de f admet alors une droite tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation réduite $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. Le nombre dérivé est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe.

• f admet un maximum local en x_0 *ssi* $\exists J$, $x_0 \in J$,$\forall x \in J \cap I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Théo. : f est croissante (resp. décroissante, constante) sur I *ssi* $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$, $f'(x) = 0$).

Formulaire : (λ et μ sont deux réels et n un entier naturel non nul)

Fonction	Dérivée	Commentaires
$\boldsymbol{\lambda x+\mu}$	$\boldsymbol{\lambda}$	
$\boldsymbol{x^n}$	$\boldsymbol{n\,x^{n-1}}$	
$\boldsymbol{1/x}$	$\boldsymbol{-1/x^2}$	$x \neq 0$
$\boldsymbol{1/x^n}$	$\boldsymbol{-n/x^{n+1}}$	$x \neq 0$
$\boldsymbol{\sqrt{x}}$	$\boldsymbol{1/2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\boldsymbol{\sin x}$	$\boldsymbol{\cos x}$	
$\boldsymbol{\cos x}$	$\boldsymbol{-\sin x}$	
$\boldsymbol{u+v}$	$\boldsymbol{u'+v'}$	
$\boldsymbol{u.v}$	$\boldsymbol{u'.v+u.v'}$	
$\boldsymbol{\lambda.u}$	$\boldsymbol{\lambda.u'}$	
$\boldsymbol{1/v}$	$\boldsymbol{-v'/v^2}$	si $v(x) \neq 0$
$\boldsymbol{u/v}$	$\boldsymbol{\frac{u'.v-u.v'}{v^2}}$	si $v(x) \neq 0$
$\boldsymbol{x \mapsto u(\lambda x+\mu)}$	$\boldsymbol{x \mapsto \lambda.u'(\lambda x+\mu)}$	lorsque défini

Exercices

FONCTIONS DÉRIVÉES

Exercice 1 **VouF**. Justifier la réponse.

1. La fonction cube admet une fonction affine pour dérivée.
2. En tout point, la courbe d'équation $y = x^3$ est située du même côté par rapport à ses tangentes.
3. La dérivée d'une fonction polynôme de degré n est une fonction polynôme de degré $n-1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. La fonction $f : x \in]1\,;+\infty[\longmapsto \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ admet pour dérivée la fonction constante égale à 1.
5. Si deux fonctions dérivables sont différentes alors leurs fonctions dérivées sont différentes.
6. Les fonctions sinus et cosinus ont le même nombre dérivé en $\dfrac{3\pi}{4}$.
7. (a) Il existe un point A de la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et un point B de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ en lesquels les tangentes sont parallèles.

   (b) Et pour les courbes d'équation $y = -\dfrac{1}{x}$ et $y = \sqrt{x}$?

Exercice 2 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ au point d'abscisse 2 et puis celle de la tangente à la courbe $y = x^4$ au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

Exercice 3 **Q.C.M.** Donner la ou les bonnes réponses. Justifier.

1. La fonction $f : x \longmapsto x^2 - 4x + 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

   (a) $f'(x) = 2x - 4$ | (c) $f'(x) = 2x - 1$

   (b) $f'(x) = (x-1)(x-3)$ | (d) $f'(x) = 2(x-2)$

2. La fonction $f : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et l'on a :

   (a) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$ | (c) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1}$

   (b) $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ | (d) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

3. La fonction $f : x \longmapsto (x^2-1)(x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

   (a) $f'(x) = 2x(x+1) + (x^2-1)$ | (c) $f'(x) = (x+1)(3x-1)$

   (b) $f'(x) = 2x \times 1$ | (d) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

4. La fonction $f : x \longmapsto x^2\sqrt{x}$ est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et l'on a :

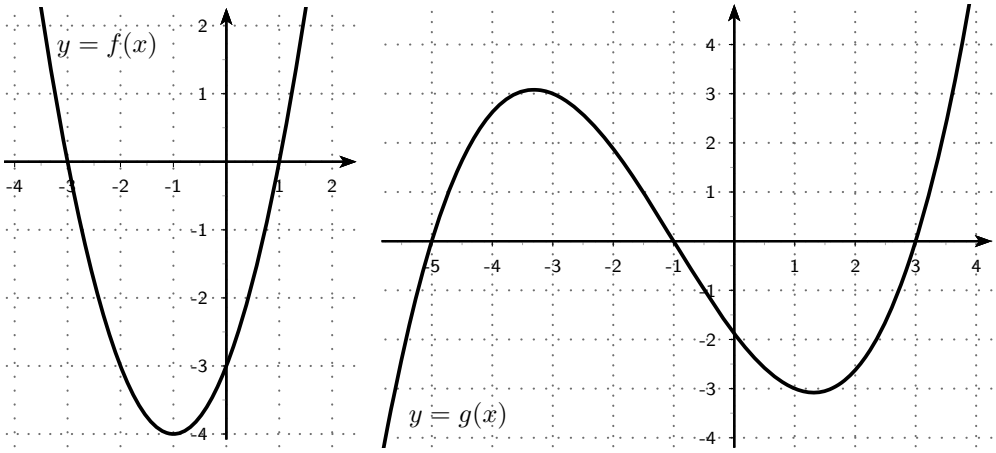
   (a) $f'(x) = 2x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | (c) $f'(x) = \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x}}$

   (b) $f'(x) = 2x\sqrt{x} - x^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | (d) $f'(x) = \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$

Exercice 4 Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = x^3 + 2x^2 - 4x$.
Déterminer les points de $\mathscr{C}$:

1. en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ;
2. en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 1$.

Exercice 5



1. Tracer des graphes des fonctions dérivées f' et g' compatibles avec les représentations graphiques de fonctions dérivables f et g ci-dessus.
2. Tracer des graphes de fonctions F et G telles que $F' = f$ et $G' = g$.
   On dit que les fonctions F et G sont des *primitives* des fonctions f et g.

Exercice 6 Étudier les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition et vérifier à la calculatrice.

$f(x) = x^3 + 3x^2$

$g(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$

$h(x) = (x-1)\sqrt{x}$

$i(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$j(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$k(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

$l(x) = \dfrac{x^2-5x}{x^2+x+1}$

$m(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}$

$n(x) = 2\sqrt{3x}$

$o(x) = \sqrt{-2x+3}$

$p(x) = (5x+2)^3$

$q(x) = -3(1-2x)^4$

Exercice 7

1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Démontrer que la fonction $f = u^2$ est dérivable sur I et de fonction dérivée $f' = 2uu'$.
2. Application : Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = (x^2 - 3x)^2$ et en déduire ses variations sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+1}$ où a et b sont des réels.

1. Déterminer son ensemble de définition et de dérivabilité.
2. Déterminer les réels a et b tels que $f(2) = 1$ et $f'(0) = 3$.
3. Étudier les variations de f.

Exercice 9 Soit f une fonction définie par $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$ où a, b et c sont trois réels tels que :

x	1		2		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	7	↘	6	↗	

Déterminer les réels a, b et c et calculer $f(5)$.

Exercice 10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 + \dfrac{1-x}{x^2+1}$.
Étudier les variations de f puis en déduire un encadrement de $f(x)$ sur l'intervalle $[-10\,;10]$.

Exercice 11 Déterminer les extremums de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{(3x+1)^2+4}$ sur l'intervalle $I = [-5\,;5]$.

Exercice 12 Une boîte à bijoux a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée. Cette boîte a un volume imposé de 1,5 L. Le matériau utilisé pour construire les bases coûte 6 € le dm^2 et celui pour la surface latérale, 4 € le dm^2.
Déterminer les dimensions de la boîte pour que le prix de revient soit minimal.

Exercice 13 Soit $A(3;5)$ un point du plan muni d'un repère orthonormé. Une droite d de pente négative et passant par A coupe l'axe des abscisses en M et l'axe des ordonnées en N. Déterminer une équation cartésienne de la droite d pour que l'aire du triangle OMN soit minimale. Refaire l'exercice pour un point A de coordonnées positives quelconques.

Exercice 14 Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$.

Exercice 15 Je suis une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 16$ où α, β et γ sont trois nombres réels. Je suis nulle en -1, j'admet un extremum local en 1 et ma dérivée seconde s'annule en 2.
Qui suis-je ?

Exercice 16 **VouF**. Justifier la réponse.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
La fonction f est telle que, pour tout x appartenant à I, $f''(x)$ est supérieur ou égal à 0.

(a) f est croissante sur I.

(b) Pour tout x appartenant à I, $f(x)$ est supérieur ou égal à 0.

(c) f admet un minimum sur I.

(d) f' est croissante sur I.

(e) Pour tout x appartenant à I, $f'(x)$ est supérieur ou égal à 0.

(f) f' admet un minimum sur I.

(g) Pour tout $a \in I$, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse a.

Exercice 17 Équilibre stable et équilibre instable.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$.

1. Déterminer les racines de la fonction dérivée f'.
   Elles correspondent bien sûr aux éventuels extremums locaux de f.
2. Déterminer la fonction dérivée seconde de f et l'évaluer aux racines de f'.
3. En déduire la nature des extremums trouvés précédemment.
4. Dresser le tableau de signe de f'' et le comparer au graphe de f tracé à la calculatrice.

On dit que f est convexe lorsque $f''(x) > 0$ et que f est concave lorsque $f''(x) < 0$.

Notation : Pour les dérivées successives suivantes, on notera $f^{(n)}(x)$ la dérivée n-ième.

Exercice 18 Plus qu'un seul kilomètre du rivage, un seul ! Ulysse s'approche enfin d'Ithaque. Il est pressé, pressé, de retrouver Pénélope qui n'en peut plus de tapisser et détapisser sa chaumière. L'œil perçant tel un lynx, il évalue à 4 km la distance entre le point du rivage rectiligne le plus proche de lui et sa dulcinée qui l'attend impatiemment sur la plage. Lucide, il sait aussi qu'il avance à 4 km.h^{-1} sur la mer et à 8 km.h^{-1} sur le sable. En revanche, il n'a pas encore découvert la dérivation – ce qui peut paraître très étonnant, pour le moins. Aide-le donc à trouver le point d'accostage optimal, il souhaite retrouver au plus vite sa bien-aimée.

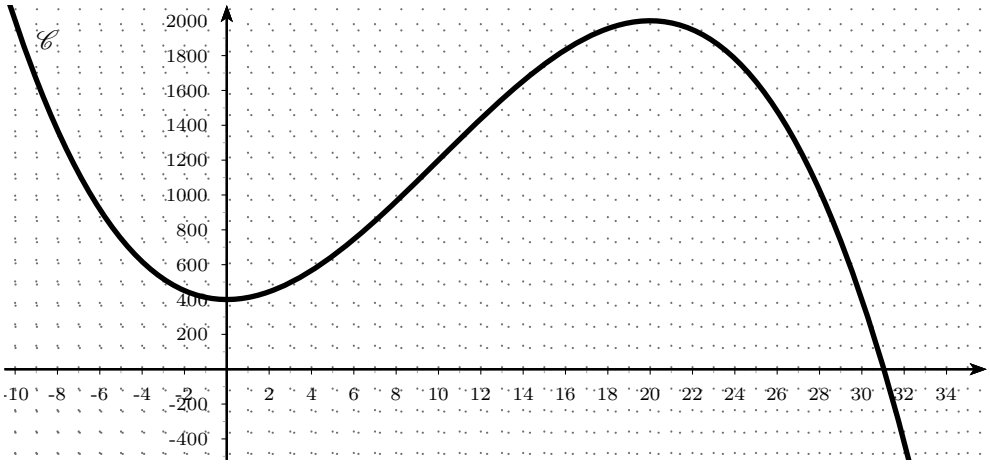
Exercice 19

A. On considère la fonction f définie par : $f(x) = -0,4x^3 + 12x^2 + 400$ et on nomme $\mathscr{C}$ son graphe.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f.
2. Calculer la fonction dérivée f' puis étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 10.
4. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$.
   (a) Tracer la droite $\mathcal{T}$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 30x + 900$.
   (b) Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$.

B. La fédération de jokary de la commune de Bains-les-Thermes fête ses 47 ans et organise pour cela une grande célébration dans la salle polyvalente de la Maison des Jeunes et de la Culture de la ville. Le prix de la location de la salle est de 900 €.
La fédération espère avoir le maximum de spectateurs payants parmi la population des environs. Aussi décide-t-elle de faire paraître auparavant des annonces publicitaires illustrées dans « Bains du Jour », le quotidien local. Chaque parution d'annonce lui est honteusement facturée 30 €.
Pour x compris entre 0 et 30, on prévoit que la recette des entrées payantes après x jours de parution est donnée par $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A.
On rappelle que le résultat d'une opération financière est la différence entre la recette et les dépenses.

1. On fait un calcul sur 20 jours de parution.
   (a) Quelle est la recette prévisible ?
   (b) Calculer les frais engagés (parutions et location de la salle).
   (c) Calculer le bénéfice dans le cas où la recette est conforme à la prévision.
2. Quel est le résultat de l'opération si la fédération prévoit 5 jours de parution des annonces publicitaires ? Que cela signifie-t-il ?
3. Exprimer le montant total des frais engagés $C(x)$ en fonction du nombre x de jours de parution.
4. En utilisant la partie A, déterminer graphiquement le nombre de jours de parution qu'il faut envisager au minimum et au maximum pour que le résultat de l'opération soit positif ou nul.
5. (a) Étudier les variations de la fonction $R(x) = -0,4x^3+12x^2-30x-500$ pour tout réel $x \in [\,0\,;30\,]$.
   (b) En déduire le nombre de jours de parution qu'il faut envisager pour que le bénéfice soit maximal.
   (c) Vérifier graphiquement le résultat obtenu.



Pensez à rédiger les devoirs n°s 5 et 4 des pages 247 et 245.

Corrigé des exercices

FONCTIONS DÉRIVÉES

Les rédactions sont succinctes et l'on exigera plus de précisions de votre part.

Exemple du §4.2 de la page 69 : La fabrique de la casserole.

1. Le volume d'un cylindre étant le produit de l'aire du disque par sa hauteur, on a $v = \pi x^2 \times h$ donc $h = \frac{v}{\pi\, x^2}$.
   L'aire de la surface de la casserole est celle du disque à laquelle on ajoute l'aire du pourtour qui est celle d'un rectangle de côtés la hauteur h et le périmètre du bord. Ainsi, $\mathscr{S} = \pi x^2 + h \times 2\pi x = \pi x^2 + 2\pi x \frac{v}{\pi\, x^2} = \pi\, x^2 + \frac{2v}{x}$.
2. Pour $x > 0$, on a $f'(x) = 2\pi x - \frac{2v}{x^2} = \frac{2}{x^2}(\pi x^3 - v)$ du signe de $\pi x^3 - v$ qui est positif pour $x > \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}} = x_0$ donc f est croissant pour $x > x_0$, décroissant pour $x < x_0$.
3. (a) La surface est donc minimale pour un rayon de $x_0 = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ cm.
   (b) On a alors $\pi x_0^3 - v = 0$ donc $\pi x_0^3 = v = \pi x_0^2 h_0$ et $h_0 = x_0$.
   (c) La casserole de surface minimale est celle dont la hauteur égale le rayon.

Exercice 1

1. $(x^3)' = 3x^2$ non affine : Faux.
2. Faux : une simple lecture graphique (en 1, 0 et -1 par exemple) nous en convainc.
3. Vrai : $(a_n.x^n)' = n a_n.x^{n-1}$.
4. Pour tout $x > 1$, $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x + 2$ de dérivée 1 donc Vrai.
5. Faux : $2x + 1$ et $2x - 5$ par exemple.
6. On a $\sin'(\frac{3\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos'(\frac{3\pi}{4}) = -\sin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc Vrai.
7. (a) $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} < 0$ et $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. On a $-\frac{1}{a^2} \neq \frac{1}{2\sqrt{b}}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}^*$ donc Faux.
   (b) $(-\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$ et $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. On a $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2\sqrt{b}} \iff a^2 = 2\sqrt{b}$ $\iff b = \frac{a^4}{4}$: pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, les tangentes à $y = -\frac{1}{x}$ en a, en $-a$ et la tangente à $y = \sqrt{x}$ en $\frac{a^4}{4}$ sont parallèles.

Exercice 2

On a $(\sqrt{\cdot})'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ donc $\mathcal{T}_{2,\sqrt{\cdot}} : \quad y = (\sqrt{\cdot})'(2)(x-2) + \sqrt{2} = \frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$
et $(x^4)'(\frac{3}{2}) = 4(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{2}$ donc $\mathcal{T}_{\frac{3}{2},X^4} : \quad y = (x^4)'(\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2}) + (\frac{3}{2})^4 = \frac{27}{2}x - \frac{243}{16}$.

Exercice 3

1. $(x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4 = 2(x-2)$: (a) et (d).
2. $(x + \frac{1}{x})' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$: (b) et (d).

3. $[(x^2-1)(x+1)]' = 2x(x+1)+(x^2-1)\times 1 = 3x^2+2x-1 = (x+1)(3x-1)$: (a), (c) et (d).

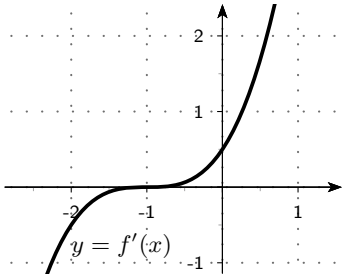
4. $(x^2\sqrt{x})' = 2x\sqrt{x}+x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+x^2) = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$: (c), (d).

Exercice 4 On a $f'(x) = (x^3+2x^2-4x)' = 3x^2+4x-4$
donc $f'(x) = 0 \iff 3x^2+4x-4 = 0 \iff x = \frac{-4\pm\sqrt{64}}{2\times 3} \iff x = \frac{2}{3}$ ou $x = -2$
et $f'(x) = 3 \iff 3x^2+4x-4 = 3 \iff (x-1)(3x+7) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -\frac{7}{3}$.

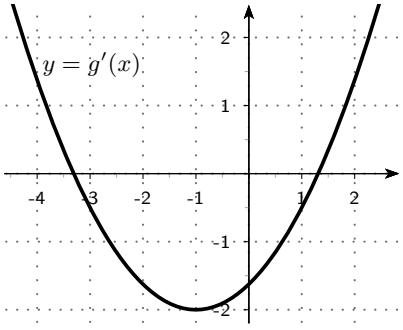
Exercice 5

1. Les tableaux de variations des fonctions f et g nous donnent les tableaux de signes des dérivées f' et g'.
Il suffit ensuite de tracer des courbes compatibles avec ces derniers.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		↘		↗	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

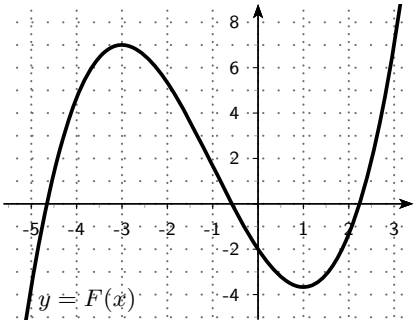


x	$-\infty$		-3.2		1.2		$+\infty$
g		↗		↘		↗	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



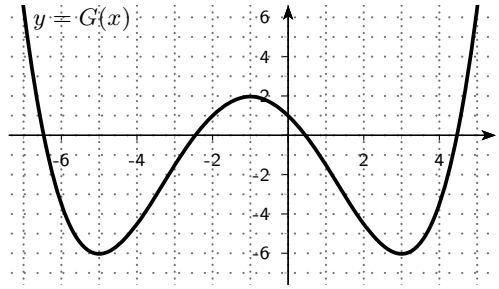
2. Les tableaux de signes des fonctions $f = F'$ et $g = G'$ nous donnent les tableaux de variations des fonctions F et G. Il suffit ensuite de tracer des courbes compatibles avec ces derniers.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
F		↗		↘		↗	



CORRIGÉS

x	$-\infty$		-5		-1		3		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
G		↘		↗		↘		↗	



Exercice 6 Voici les fonctions dérivées et leur ensemble de définition. Les tableaux sont à votre charge.

Sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x^3+3x^2)' = 3x^2+6x = 3x(x+2)$.

Sur $\mathbb{R}^*$, $g'(x) = (4x+\frac{1}{x})' = 4-\frac{1}{x^2} = \frac{4x^2-1}{x^2} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}$.

Pour $x>0$, $h'(x) = \big[(x-1)\sqrt{x}\big]' = 1\sqrt{x}+(x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.

Sur $\mathbb{R}$, $i'(x) = \big(\frac{1}{x^2+1}\big)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Pour $x\neq -1$, $j'(x) = \big(\frac{x^2}{x+1}\big)' = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Sur $\mathbb{R}^*$, $k'(x) = \big(\frac{x+1}{x^2}\big)' = \frac{x^2-2x(x+1)}{x^4} = \frac{-x^2-2x}{x^4} = \frac{-x(x+2)}{x^4}$.

Sur $\mathbb{R}$, $l'(x) = \big(\frac{x^2-5x}{x^2+x+1}\big)' = \frac{(2x-5)(x^2+x+1)-(x^2-5x)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{6x^2+2x-5}{(x^2+x+1)^2}$
$= \frac{6(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2+x+1)^2}$.

Sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, $m'(x) = \big(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\big)' = -\frac{1}{x^2}-\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{x^2-(1-x)^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$.

Pour $x>0$, $n'(x) = \big(2\sqrt{3x}\big)' = 2\times 3\frac{1}{2\sqrt{3x}} = \frac{3}{\sqrt{3x}}$.

Pour $x<\frac{3}{2}$, $o'(x) = \big(\sqrt{-2x+3}\big)' = -2\times\frac{1}{2\sqrt{-2x+3}} = \frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$.

Sur $\mathbb{R}$, $p'(x) = \big[(5x+2)^3\big]' = 5\times 3(5x+2)^2 = 15(5x+2)^2$.

Sur $\mathbb{R}$, $q'(x) = -3\big[(1-2x)^4\big]' = -3(-2)\times 4(1-2x)^3 = -24(2x-1)^3$.

Exercice 7

1. On a $u^2 = u.u$ donc $(u^2)' = u'u+uu' = 2u'u$.
2. Ainsi, $\big[(x^2-3x)^2\big]' = 2\times(x^2-3x)'(x^2-3x) = 2x(2x-3)(x-3)$.

Exercice 8 $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$.

1. La fonction f étant une fonction rationnelle, elle est définie et dérivable là où son dénominateur $x+1$ ne s'annule pas. D'où $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}'_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
2. Pour $x\neq -1$, $f'(x) = \frac{(ax+b)'(x+1)-(ax+b)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{ax+a-ax-b}{(x+1)^2} = \frac{a-b}{(x+1)^2}$.
   Ainsi, $\left\{\begin{array}{l} f(2)=1 \\ f'(0)=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{2a+b}{3}=1 \\ a-b=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=b+3 \\ 2(b+3)+b=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=\frac{3-6}{3}=-1 \\ a=b+3=2 \end{array}\right.$
   et $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.
3. On a, pour $x\neq -1$, $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty\,;-1\,[$ et sur $]-1\,;+\infty\,[$.

Exercice 9 On a $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$ donc $f'(x) = a - \frac{c}{x^2}$ et, d'après le tableau de variations,

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 7 \\ f(2) = 6 \\ f'(2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+c = 7 \\ 2a+b+\frac{c}{2} = 6 \\ a - \frac{c}{4} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = 4a \\ b = 7-a-4a \\ 2a+(7-5a)+\frac{4a}{2} = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 7-6 = 1 \\ b = 7-5 = 2 \\ c = 4 \end{array}\right.$$

et $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x}$.

Exercice 10 On a $f'(x) = 0 + \frac{(1-x)'(x^2+1)-(1-x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-1-2x+2x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2+1)^2}$ où $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Puisque $f(-10) \simeq 3,1$, $f(10) \simeq 2,9$ $f(x_1) \simeq 4,2$ et $f(x_2) \simeq 2,8$, on a le tableau suivant.

x	-10		x_1		x_2		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	3.1	↗	4.2	↘	2.8	↗	2.9

Donc, sur $[\,10\,;10\,]$, la fonction f admet un minimum local en $1+\sqrt{2}$, un minimum global en -10, un maximum local en 10 et un maximum global en $1-\sqrt{2}$.

Exercice 11 Posons $u = (3x+1)^2+4$, $u' = 2\times 3(3x+1)+0$. Puisque $f = \frac{2}{u}$, $f' = \frac{-2}{u^2}$ et $f('x) = \frac{-12(3x+1)}{[(3x+1)^2+4]^2}$ du signe opposé à $3x+1$.

On a $f(-5) = \frac{1}{100}$, $f(5) = \frac{1}{130}$ et $f(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$.

Les extremum se lisent alors dans le tableau suivant.

x	-5		$-\frac{1}{3}$		5
$3x+1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\frac{1}{100}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{1}{130}$

Si $x \in [\,-5\,;5\,]$, alors $f(x) \in \left[\,\frac{1}{130}\,;\frac{1}{2}\,\right]$.

Exercice 12 Soient c et h (>0) les dimensions de la boîte en dm.

On a $v = 1,5L = 1,5\,\text{dm}^3 = c^2h$ donc $h = \frac{1,5}{c^2}$. Les différentes surfaces sont à des prix de, respectivement, 6 et 4€ par dm^2. Ainsi, le prix de la boîte s'exprime par

$\mathscr{P} = 6\times 2c^2 + 4\times 4h.c = 12c^2 + 16c\frac{1,5}{c^2} = 12c^2 + \frac{24}{c}$ de dérivée

$\mathscr{P}' = 24c - \frac{24}{c^2} = \frac{24}{c^2}(c^3-1)$ qui ne s'annule qu'en 1 et le prix de revient est minimal pour $c = 1\,\text{dm}$ et $h = \frac{1,5}{1^2} = 1,5\,\text{dm}$.

Exercice 13 On a $A\,(\,3\,;\,5\,)$, $M\,(\,m\,;\,0\,)$ et $N\,(\,0\,;\,n\,)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} m-3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -m \\ n \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc $(m-3)n - (-5)(-m) = 0$

$\iff mn - 5m - 3n = 0 \iff n(m-3) - 5m = 0 \iff n = \frac{5m}{m-3}$.

Le double de l'aire du triangle OMN vaut $2\mathscr{A} = mn = \frac{5m^2}{m-3}$ de dérivée

$2\mathscr{A}' = \frac{10m(m-3)-5m^2}{(m-3)^2} = \frac{5(m-6)}{(m-3)^2}$ du signe de $m-6$. $\mathscr{A}$ est donc minimale pour

CORRIGÉS

$m = 6$ et $n = \frac{5\times 6}{6-3} = 10$ et la droite d a pour équation $10x + 6y - 60 = 0$ puisque $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$ est directeur et $N(0\,;10) \in d$.
La même étude avec $A(a\,;b)$ mène à $m = 2a$ et $n = 2b$.

Exercice 14
On a $f'(x) = \frac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1+2x-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x-x_1)(x-x_2)}{(x^2+1)^2}$
où $x_{1,2} = \frac{-2\mp\sqrt{8}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$. D'où le tableau suivant.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

Exercice 15 On a $g(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 16$ donc $g'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ et $g''(x) = 6\alpha x + 2\beta$. D'après l'énoncé, on a $g(-1) = 0 \Longrightarrow -\alpha + \beta - \gamma + 16 = 0$, $g'(1) = 0 \Longrightarrow 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0$ et $g''(2) = 0 \Longrightarrow 12\alpha + 2\beta = 0 \Longrightarrow \beta = -6\alpha$ d'où $\gamma = -3\alpha - 2\times(-6\alpha) = 9\alpha$ et $-\alpha - 6\alpha - 9\alpha + 16 = 0$. Ainsi, $\alpha = 1$, $\beta = -6$ et $\gamma = 9$: $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$.

Exercice 16

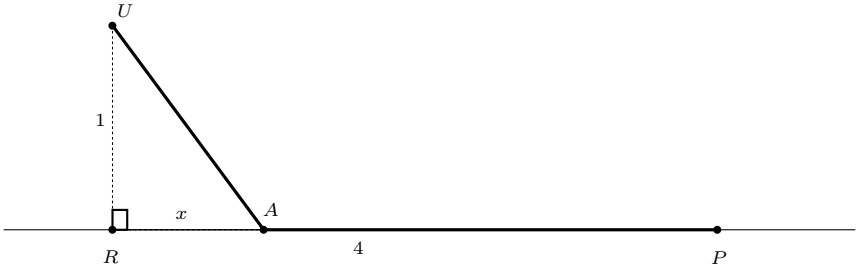
- Si $f''(x) \geqslant 0$ sur I, alors f' est croissante sur I donc (d) est vraie.
- Posons $f(x) = x^2+x-3$ sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 2x+1$ et $f''(x) = 2 \geqslant 0$. f n'est pas croissante, pas positive et f' n'est pas positive et n'admet pas de minimum : (a), (b), (e) et (f) sont fausses.
- Pour $f(x) = 3x + 2$, $f'(x) = 3$, $f''(x) = 0 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$. f n'admet pas de minimum : (c) est fausse.
- (g) est vraie : nous n'allons pas le démontrer mais une étude graphique nous en convainc (cf. exercice 17).

Exercice 17 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

1. On a $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$.
2. Pour tout réel x, $f''(x) = 12x-6$ et $f''(-1) = -18 < 0$, $f''(2) = 18 > 0$.
3. -1 est donc un maximum local (*point d'équilibre instable*), 2 un minimum local (*point d'équilibre stable*) et $\frac{1}{2}$, racine de f'', est un *point d'inflexion*.
4. Ce qui se vérifie sur le tableau suivant.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f'		↘		↘		↗		↗	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↘		↗	

Exercice 18 Ulysse est en U, Pénélope en P, le point du rivage le plus proche d'Ulysse est R et A est le lieu d'accostage. On désigne par x la distance RA et l'on a trivialement $PA = PR - RA = 4 - x$ et $AU = \sqrt{RA^2 + RU^2} = \sqrt{1 + x^2}$.
Puisque $t = \frac{d}{v}$, on peut exprimer le temps total mis par Ulysse pour rejoindre Pénélope par $T(x) = \frac{AU}{4} + \frac{AP}{8} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{4} + \frac{4-x}{8}$.
On a $T'(x) = \frac{(1+x^2)'}{4\times 2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{8} = \frac{2x}{8\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{8} = \frac{2x-\sqrt{1+x^2}}{8\sqrt{1+x^2}}$ du signe de $2x - \sqrt{1+x^2}$.
Pour $x \geqslant 0$, on a $2x - \sqrt{1+x^2} > 0 \iff 2x \geqslant \sqrt{1+x^2} \iff 4x^2 \geqslant 1 + x^2$
$\iff x^2 \geqslant \frac{1}{3} \iff x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ qui réalise alors le minimum de la fonction T.
Ainsi, Ulysse doit accoster à $4 - \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 3,4$ km de Pénélope et parcourir le reste les pieds nus dans le sable blond et chaud.



Exercice 19

A. $f(x) = -0,4x^3 + 12x^2 + 400.$

1. La fonction f étant un polynôme, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -0,4 \times 3x^2 + 12 \times 2x + 0 = x(24 - 1,2x)$ qui s'annule en 20 et en 0.
   On a $f(20) = -0,4 \times 20^3 + 12 \times 20^2 + 400 = 2000$ et $f(0) = 400$.
   On obtient alors le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		20		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$24 - 1.2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	400	↗	2000	↘	$-\infty$

3. Puisque $f(10) = -0,4 \times 10^3 + 12 \times 10^2 + 400 = 1200$ et $f'(10) = 10(24 - 1,2 \times 10) = 120$, l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 10 est
   $y = f'(10)(x - 10) + f(10) = 120(x - 10) + 1200 = \ldots = 120\,x.$

CORRIGÉS

4. Le tracé est en page 83.

B. 1. (a) Pour $x = 20$, la recette prévisible est d'un montant de $f(20) = 2000$ €.

(b) Sur vingt jours, la fédération engage $900 + 20 \times 30 = 1500$ € .

(c) On en déduit un bénéfice de $2000 - 1500 = 500$ € pour la fédération.

2. Pour 5 jours, la recette est de $f(5) = 650$ €, les frais sont de $900+30\times5 = 1050$ € et le résultat de $650 - 1050 = -400$ €. La fédération sera donc en déficit de 400 € en effectuant cinq jours de publicité.

3. On a $C(x) = 30x + 900$ pour $x \in [0\,;30]$ (900 € de location et 30 € par jour de parution), représenté par la droite $\mathscr{D}$ ci-dessus.

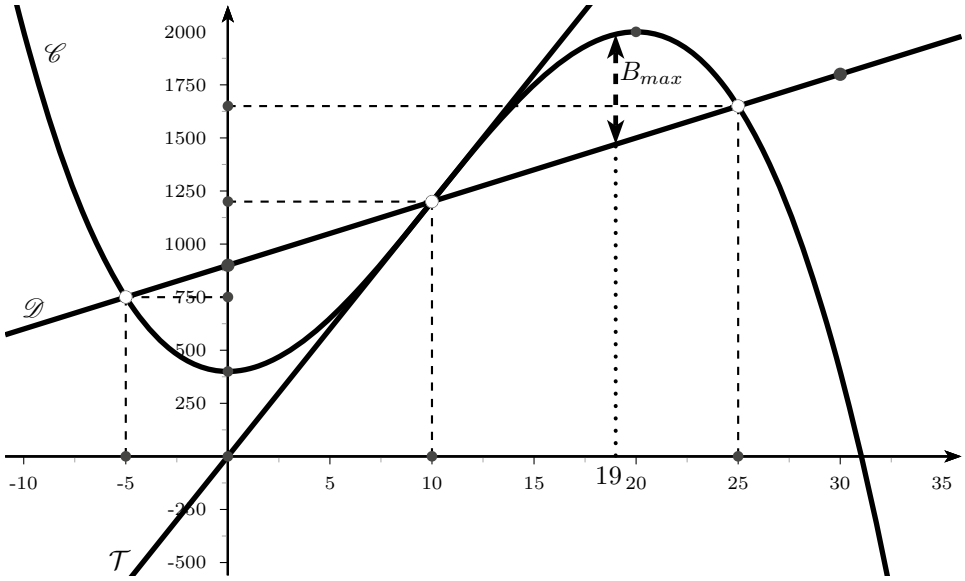
4. On observe sur le graphe que, pour $x \in [0\,;30]$, la droite $\mathscr{D}$ est située en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ lorsque $x \in [10\,;25]$. La fédération doit donc réaliser entre 10 et 25 jours de publicité pour que le résultat de son opération soit positif ou nul.

5. (a) On a $R'(x) = -1,2x^2 + 24x - 30$
de discriminant $\Delta = 24^2 - 4 \times 30 \times 1,2 = 432 > 0$
et donc de racines $x_1 = \frac{-24-\sqrt{16\times9\times3}}{-2\times1,2} = 10 + 5\sqrt{3} \simeq 19$ et $x_2 = 10 - 5\sqrt{3} \simeq 1$.
D'où $R(x) = -1,2(x - x_1)(x - x_2)$.
De plus, $R(0) = -500$, $R(1) \simeq -518$, $R(19) \simeq 518$ et $R(30) = -1400$.
On obtient le tableau de variations suivant avec des valeurs approchées.

x	0		1		19		30
$R'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$R(x)$	-500	↘	-518	↗	518	↘	-1400

(b) Pour $x \in [0\,;30]$ le nombre de jours de parution de l'annonce publicitaire illustrée dans le quotidien « Bains du Jour », le résultat théorique de l'opération réalisée par la fédération de jokary de Bains-les-Thermes à l'occasion des festivités organisées pour son 47e anniversaire est donné par
$f(x) - C(x) = (-0,4x^3 + 12x^2 + 400) - (30x + 900)$
$= -1,2x^2 + 24x - 30 = R(x)$, la fonction R précédente.
La fédération peut donc espérer un bénéfice maximal d'environ 518 € et doit pour cela publier son annonce pendant 19 jours.

(c) On remarque que l'écart entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ est maximal « positif » lorsque $x \simeq 19$. La recette maximale, elle, n'est atteinte qu'après 20 jours de parution.


$\mathscr{C}$
$\mathscr{D}$
$\mathcal{T}$
B_{max}
2000
1750
1500
1250
1000
750
500
250
-250
-500
-10
-5
5
10
15
19
20
25
30
35

Chapitre V

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Sommaire

Introduction **85**
1 Définitions **86**
2 Suites définies par une fonction de n : $u_n = f(n)$ **88**
3 Suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ **88**
Suites, calculatrice & algorithmes **90**
Exercices **91**
Corrigé des exercices 94

Introduction

Dans les chapitres d'analyse précédents, nous avons principalement étudié des fonctions numériques dont les variables évoluent à l'intérieur d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles. Ceci est bien adapté à l'étude de phénomènes comme la température d'un lac en fonction du moment de la journée, la densité de l'air en fonction de l'altitude, la note obtenue au devoir de mathématiques en fonction du temps de travail effectif,... La variable se doit ici d'être *continue* : moment, altitude, temps de travail,...

En revanche, on est parfois amené à étudier des phénomènes d'une nature différente, ou alors des phénomènes similaires mais qui ne sont observés qu'à certains instants ou états. Par exemple, le nombre de croissants vendus à la cafétéria en fonction du jour de l'année, l'indice du prix de la tonne de cacahuètes au premier janvier de chaque année, la moyenne obtenue en mathématiques en fonction du trimestre d'étude,... Dans ces cas, on étudie plutôt une liste de nombres que l'on numérote et la variable ne peut prendre toutes les valeurs (un jour, une année, un trimestre,...). On dit que la variable est *discrète*.

Étonnamment, les suites rebutent parfois certains élèves car elles leur semblent inhabituelles, étranges ou incomplètes mais il leur suffit alors de faire l'analogie suivante : si le violon est un instrument « continu », le piano est un instrument « discret ». Ils n'en sont pas moins tous deux harmonieux, parfois même enchanteurs.

En guise d'introduction, faites donc l'exercice n° 1 de la page 91.
Une suite numérique est ainsi une liste infinie de nombres réels que l'on a numérotés.

1 Définitions

Définition 1 *Une **suite numérique** u est une **fonction** de l'ensemble **des entiers naturels dans** $\mathbb{R}$.*
L'image de $n \in \mathbb{N}$, que l'on appelle le terme général de u, est notée u_n et non $u(n)$ et se lit « u indice n » ou « u n ». La suite u est souvent notée $(u_n)_{\mathbb{N}}$. On a ainsi $(u_n)_{\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n \in \mathbb{R}$.
Il arrive parfois que la suite ne soit pas définie pour les premiers entiers mais seulement à partir d'un certain entier n_0 ; on dira alors que la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ a pour premier terme ou terme initial u_{n_0}.
Les trois termes u_{n-1}, u_n et u_{n+1} sont dits « consécutifs ».

Attention à ne pas confondre $u_n + 1$ et u_{n+1}.

Exemples :

- $(u_n) : n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n = 2n + 3 \in \mathbb{R}$. $u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3$, $u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$, $u_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$, $u_3 = 9$, $u_4 = 11, ...$
- $(u_n) : n \in \mathbb{N}^* \longmapsto u_n = \dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}$. $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{3}$, $u_4 = \frac{1}{4}, ...$
- $(u_n) : n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n \in \{0, 1, 2\}$ le reste de la division euclidienne de n par 3. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$, $u_5 = 2$, $u_6 = 0, ...$
- $(u_n) : n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n = (-1)^n \in \mathbb{R}$. $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1$, $u_4 = 1, ...$
- $(u_n) : n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n = 2^n \in \mathbb{R}$. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 8, ...$
- $u_0 = 3$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 1$, $u_4 = 5$, $u_5 = 9, ...$ u_n est la n-ième décimale de π.
- $(u_n)_{n \geqslant 3} : u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = -1$, $u_6 = 0$, $u_7 = \pi^2$, $u_8 = -6, ...$

Une suite réelle n'est pas forcément « une suite logique ».

Remarque : Parfois, ce ne sont pas les premiers termes de la suite qui nous intéressent mais plutôt les termes où n est grand ou lorsque n tend vers l'infini. Certaines propriétés des suites étudiées seront alors nécessaires mais peut-être pas pour leurs premiers termes.

*Lorsque une suite (u_n) vérifie une certaine propriété pour les entiers n plus grands qu'un certain n_0, on dit qu'elle la vérifie à partir d'un certain rang et l'on note **à.p.c.r.***

Exemple : On a $2^n \geqslant 10$ à partir du rang $n = 4$.

Définition 2 ***Variations***
Une suite $(\boldsymbol{u_n})$ *est dite* ***croissante*** *(resp. décroissante, resp. constante ou stationnaire) à.p.c.r. s'il existe* n_0 *tel que, pour tout* $n \geqslant n_0$, $\boldsymbol{u_{n+1} \geqslant u_n}$ *(resp.* $u_{n+1} \leqslant u_n$ *à.p.c.r., resp.* $u_{n+1} = u_n$ *à.p.c.r.).*

Une suite est monotone à.p.c.r. si elle est croissante à.p.c.r. ou décroissante à.p.c.r. ou stationnaire à.p.c.r.

Si les inégalités sont strictes, on parlera de stricte croissance, stricte décroissance et stricte monotonie.

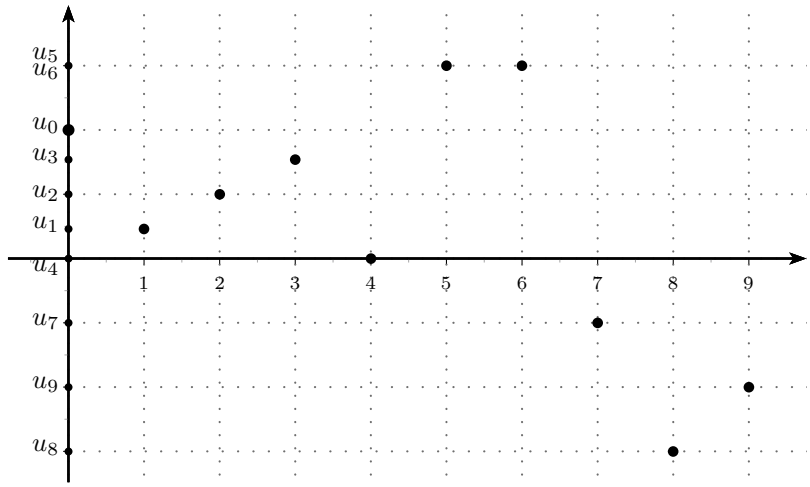
Exemple : $(u_n) \ : \ n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n = 2n + 3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$u_{n+1} = 2(n+1)+3 = (2n+3)+2 = u_n+2 > u_n$ et la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante.

Remarque :
Pour étudier la monotonie d'une suite, on étudiera souvent le signe de $u_{n+1} - u_n$. On pourra aussi comparer les nombres $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 lorsque la suite est strictement positive.

Définition 3 ***Égalité*** *Deux suites* $(u_n)_{n \geqslant n_1}$ *et* $(v_n)_{n \geqslant n_2}$ *sont égales si* $n_1 = n_2$ *et si* $\forall n \geqslant n_1, \ u_n = v_n$.
Si $n_1 \neq n_2$ *mais les termes sont tous égaux pour des* n *assez grands, les suites* (u_n) *et* (v_n) *sont égales à.p.c.r.*

Une suite peut être définie au moyen, par exemple,

- de son graphe : ce sont alors des points isolés, d'abscisse entière ;



- d'un tableau de valeurs : on ne connaît alors que certains termes de la suite ;

n	0	1	2	3	4	5	6	11
v_n	3	5,2	π	-1	17,4	0	6	4,7

- de manière implicite : une phrase explicitant un processus, une quantité concrète à mesurer à des moments, des endroits, des états précis,...

- d'une formule explicite en fonction de n : $w_n = 3n+1$, $t_n = (-5)^n$,...
- d'une relation de récurrence : cf. §3 p. 88.

2 Suites définies par une fonction de n : $u_n = f(n)$

Soit a un réel et soit f une fonction définie sur $[\,a\,;+\infty\,[$. Pour tout entier $n \geqslant a$, $f(n)$ existe et on peut définir la suite $(u_n)_{n\geqslant a} : n \longmapsto u_n = f(n)$.

Propriété 1 *Si f est monotone, alors $(u_n) = \big(f(n)\big)$ est aussi monotone et de même monotonie que f.*

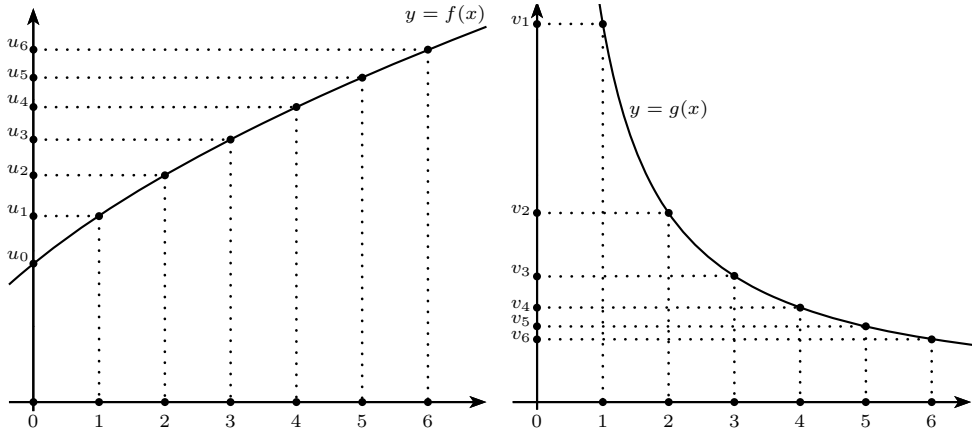
Démonstration : Cela découle immédiatement des définitions de monotonie des suites et de fonctions numériques :

f croissante $\implies$ $\forall n \geqslant a,\ f(n) \leqslant f(n+1)$ $\implies$ (u_n) croissante à.p.c.r. □

Remarque : Attention, ce n'est pas parce que $(u_n) = \big(f(n)\big)$ est monotone que f l'est (cf. $u_n = \cos(2\pi n)$).

Représentation graphique :

Si $u_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $v_n = g(n)$, $\forall n \geqslant 1$, les termes des suites $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont les ordonnées des points d'abscisses entières des courbes représentatives des fonctions f et g.



3 Suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

La donnée d'un premier terme u_{n_0} et d'une relation, dite de récurrence, qui permet de calculer un terme à partir du précédent détermine une suite :

Définition 4 *Soit une fonction f définie sur un ensemble I tel que $f(I) \subset I$ c.-à-d. $\forall x \in I,\ f(x) \in I$ et soit $u_0 \in I$.*

La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u_0 \in I} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n),\ \ \forall n \geqslant 0} \end{array} \right.$ *existe.*

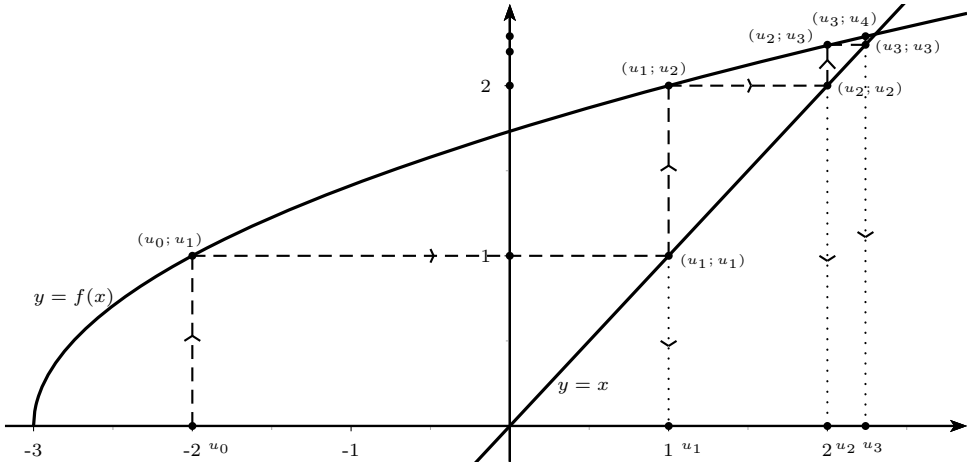
On dit que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est une ***suite récurrente****.*

Démonstration : Le problème potentiel est que u_n « tombe » sur une valeur interdite de f. Puisque $f(I) \subset I$, si $u_n \in I$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ aussi et l'on peut calculer de proche en proche :
$u_0 \in I \overset{f}{\longmapsto} f(u_0) = u_1 \in I \overset{f}{\longmapsto} f(u_1) = u_2 \in I \overset{f}{\longmapsto} f(u_2) = u_3 \in I \overset{f}{\longmapsto} f(u_3)...$ □

Les termes d'une suite récurrente se calculent *en général* de proche en proche. Pour connaître le n-ième terme, il faut avoir calculé le $(n-1)$-ième.

Exemple : Soit $f : x \in [-3\,;+\infty[\longmapsto \sqrt{x+3}$. On a $f(x) \geqslant 0$ donc $f\big([-3\,;+\infty[\big) \subset [-3\,;+\infty[$. La suite suivante est donc bien définie : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n + 3}$, $\forall n \geqslant 0$.
On a $u_0 = -2$, $u_1 = \sqrt{u_0 + 3} = \sqrt{-2+3} = 1$, $u_2 = \sqrt{1+3} = 2$, $u_3 = \sqrt{5}$, $u_4 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$, ...

Représentation graphique : On reprend l'exemple précédent.



Propriété 2 ***Égalité des suites récurrentes*** *Soit n_0 un entier naturel. Si deux suites (u_n) et (v_n), définies à partir du rang n_0, ont le même terme initial $u_{n_0} = v_{n_0}$ et vérifient la même relation de récurrence, alors elles sont égales c.-à-d. $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = v_n$.*

<u>*Remarque*</u> : Soit la suite (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = (n+1)\,u_n\,, \quad \forall n \geqslant 1. \end{cases}$
On a $u_1 = 1$, $u_2 = 2u_1 = 2$, $u_3 = 3u_2 = 6$, $u_4 = 4u_3 = 24$,...
$(u_n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas une suite récurrente. En effet, même si chaque terme dépend de son précédent, il dépend aussi de son rang.
En revanche, c'est une suite « classique » :

$$u_n = \mathbf{1 \times 2 \times \ldots (n-1) \times n} = \prod_{i=1}^{i=n} i = \boldsymbol{n\,!} \quad \text{qui se lit « } \mathbf{factorielle\ n} \text{ ».}$$

Nous la retrouverons avec plaisir à de multiples reprises.

Suites, calculatrice & algorithmes

Avec une [TI] :

* Activer le mode suite : [mode] option Suite ou Sequ selon la langue.
  Ne pas oublier de revenir à l'option "Fonc" si l'on veut tracer des fonctions.
* Entrer la suite : [f(x)].
  - $nMin$ correspond au premier indice,
  - $u(nMin)$ correspond au premier terme.
  - Entrer dans $u(n) =$ l'expression de la suite en fonction de n et/ou de $u(n-1)$. Le n s'obtient avec [X,T,θ,n], les u et v avec [2nde] [7] et [8].
    Ne pas oublier que les « Graph 1,2 et 3 » ne doivent pas être grisés.
* Pour un tableau de valeurs, définir la plage :
  [2nde] [fenêtre] (déf.table) : début au premier indice et un pas de 1.
  Puis affichage avec [2nde] [graphe] (table).
* Pour une représentation graphique d'une suite définie par récurrence :
  [2nde] [zoom] (format), menu Esc, CoorRec et régler la fenêtre. [graphe] pour la courbe, [trace] pour la suite que l'on affiche pas à pas avec [▶].

Avec une [Casio], on sélectionne le menu RECUR et le reste est plutôt limpide si l'on remarque que les suites s'appellent a_n, b_n et c_n.

Quant aux **algorithmes**, faites donc tourner celui-ci :

Variables	I est un entier
Initialisation	Affecter à I la valeur 90
Début	Tant que $I < 291$
	Affecter $I + 1$ à I
	Tourner la page
	Fin Tant que
	Faire les exercices dédiés aux algorithmes.
Fin	

Exercices

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1 Premières suites

1. Donner une succession possible aux suites logiques de nombres suivantes :
   (a) $1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
   (b) $1 \quad 7 \quad 13 \quad 19 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
   (c) $300 \quad 150 \quad 75 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
   (d) $1 \quad 0,5 \quad 0,3333... \quad 0,25 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
   (e) $-2 \quad 6 \quad -18 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
   (f) $2 \quad \sqrt{5} \quad \sqrt{6} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
   (g) $2 \quad 3 \quad 5 \quad 9 \quad 17 \quad 33 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
   (h) $0 \quad 3 \quad 8 \quad 15 \quad 24 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
   (i) $1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
   (j) $1 \quad 11 \quad 21 \quad 1211 \quad 111221 \quad 312211 \quad 13112221 \quad \ldots$
2. Créer une suite logique de nombres, plutôt compliquée si possible.
3. Pour chacune des suites ci-dessus, trouver si possible le 10e, le 101e et le 859e terme. Ces suites « s'arrêtent-elles » ?
4. Pour chacune des suites ci-dessus, trouver si possible une formule donnant le terme de rang n en fonction du nombre n.
5. Pour chacune des suites ci-dessus, trouver si possible une formule donnant le terme de rang $k+1$ en fonction du terme de rang k.
6. Pour la suite (j), que se passe-t-il si l'on commence par 7 ? par 3333 ? et par 22 ?

Exercice 2

1. Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -3n + 4$.
   (a) Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
   (c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Questions similaires pour la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (n+1)^2$.
3. Soit la suite $(w_n)_{\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $w_{n+1} = (w_n - 2)^2$.
   Exprimer w_n en fonction de w_{n-1}.

Exercice 3 Étudier la monotonie des suites $(2-5n)_{\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{\mathbb{N}}$ puis vérifier à la calculatrice.

Exercice 4 Un site fantaisiste publié dans l'internet affirme qu'un lapin mange quotidiennement le même nombre de grammes de carottes que le carré de son âge mesuré en nombre entier de semaines. Qu'en penser ?

Exercice 5 Le premier avril dernier, Averell est incarcéré au bagne sous la garde du féroce RanTanPlan et on lui donne un énorme rocher qu'il doit indéfiniment casser. Puisque ce n'est pas la première fois qu'il se retrouve dans une telle situation, sa technique est bien rodée et, chaque jour, il réussit à découper chacun des morceaux en quatre. Il en lance toujours deux à son gardien qui les gobe immanquablement. En effet, celui-ci a encore plus faim que son prisonnier.

1. Combien aura-t-il de morceaux à briser en quatre le 4 avril ? le 13 avril ? le 30 ?
2. (a) (∫) Écrire un programme `caillouxjour` en langage Python (cf. page 291) permettant de calculer le nombre de cailloux qu'il a cassé le n^{e} jour.
   (b) Écrire un programme `caillouxtotal` donnant le nombre total de cailloux cassés au n^{e} jour.
   (c) Écrire un programme `caillouf` permettant de déterminer le jour à partir duquel il aura au moins C cailloux à casser.
3. Que se passe-t-il s'il en donne trois et non plus deux à RanTanPlan ?
   Et s'il les brise en trois et non plus en quatre ? Et si on lui donne deux rochers le premier jour ?

Exercice 6 Commençons par placer un point sur un cercle, puis un deuxième, distinct du précédent, et traçons la corde associée. Plaçons ensuite un troisième point, distinct des deux autres, et traçons les nouvelles cordes possibles. On appelle c_n le nombre de cordes tracées avec n points sur ce cercle.
Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n et de n.

Exercice 7 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Donner l'expression de la fonction f vérifiant, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Représenter graphiquement la fonction f.
3. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.
4. Quelle conjecture peut-on émettre sur la monotonie de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$?
5. (∫) Écrire un programme en langage Python permettant de lister les N premiers termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.

Exercice 8 Même exercice pour la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{1+v_n}{v_n}$.

Exercice 9 Soient les suites suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{u_n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = \frac{3}{v_n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction f donnant la relation de récurrence pour (u_n) et (v_n).
2. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et en déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) sont bien définies.
3. Calculer les premiers termes de chacunes des deux suites.
4. Représenter graphiquement les suites (u_n) et (v_n).
   Contrairement au graphe de l'exemple du cours, dit « en escalier », ceux-ci sont dits « en colimaçon ».
5. Ces deux suites sont-elles égales ? Que dire lorsque n est « grand » ? Déterminer le point fixe positif de f.

Exercice 10 Soit la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 3)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la fonction f donnant la relation de récurrence.
2. Justifier que, quel que soit le premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Représenter graphiquement la fonction f dans une fenêtre GeoGebra.
4. Représenter succinctement les premiers termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ pour chacune des valeurs de u_0 suivantes : -2, -1, 0, 0.5, 1, 2, 3 puis 4.
5. Que dire lorsque n est « grand » ?

Exercice 11 Les nombres de Catalan, mathématicien belge (si, si !) du XIXe s., ont de très nombreuses applications en combinatoire.
La suite C est définie par $C_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \sum_{g,d \in \mathbb{N}, g+d=n-1} C_g \times C_d$.
Déterminer les six premiers termes de la suite C.

Exercice 12 ⟆

1. Écrire un algorithme calculant la somme des N premiers carrés d'entiers.
2. Écrire un algorithme permettant de calculer $n!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13 On aimerait tant voir Syracuse...
On part d'un nombre entier plus grand que zéro. S'il est pair, on le divise par 2, s'il est impair, on le multiplie par 3 et l'on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs s_n dont chacun ne dépend que de son prédécesseur. La suite $(s_n)_{\mathbb{N}}$ est appelée *suite de Syracuse* du nombre s_0 choisi au départ.

1. Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.
2. Calculer les premiers termes de la suite de Syracuse du nombre 14.
3. ⟆ Écrire un programme en langage Python permettant de lister les N premiers termes de la suite de Syracuse d'un premier nombre $S \in \mathbb{N}$.

Ouvrez la page 255 pour faire le devoir n° 7, puis la page 291 pour tout savoir, ou presque, sur les algorithmes.

Corrigé des exercices

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1 Premières suites

(a) $1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad \ldots \quad 2a_k \quad \ldots \quad 2^n \quad \ldots$

(b) $1 \quad 7 \quad 13 \quad 19 \quad 25 \quad 31 \quad \ldots \quad b_k + 6 \quad \ldots \quad 6n + 1 \quad \ldots$

(c) $300 \quad 150 \quad 75 \quad \frac{75}{2} \quad \frac{300}{16} \quad \ldots \quad \frac{c_k}{2} \quad \ldots \quad \frac{300}{2^n} \quad \ldots$

(d) $1 \quad 0,5 \quad 0,3333... \quad 0,25 \quad 0,2 \quad 0,1666... \quad \ldots \quad \frac{1}{n+1} \quad \ldots$

(e) $-2 \quad 6 \quad -18 \quad 54 \quad -162 \quad \ldots \quad -3e_k \quad \ldots \quad -2.(-3)^n \quad \ldots$

(f) $2 \quad \sqrt{5} \quad \sqrt{6} \quad \sqrt{7} \quad 2\sqrt{2} \quad \ldots \quad \sqrt{n+4} \quad \ldots$

(g) $2 \quad 3 \quad 5 \quad 9 \quad 17 \quad 33 \quad \ldots \quad 2g_k - 1 \quad 2^n + 1 \quad \ldots$
On multiplie par 2 puis l'on retranche 1.

(h) $0 \quad 3 \quad 8 \quad 15 \quad 24 \quad 35 \quad 48 \quad \ldots \quad h_k + (2k+1)$
$\ldots \quad (n+1)^2 - 1 \quad \ldots$
On ajoute successivement les nombres impairs.

(i) $1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad \ldots \quad i_{k-1} + i_k \quad \ldots$
On ajoute deux termes consécutifs pour obtenir le suivant.

(j) $1 \quad 11 \quad 21 \quad 1211 \quad 111221 \quad 312211 \quad 13112221 \quad 1113213211 \quad \ldots$
On lit à voix haute puis on transcrit : « un 1, deux 1, un 2 un 1,... »

On peut en créer à foison, je vous fais confiance.
Les expressions en fonction de n ou du terme précédent ont été données si possible. Il suffit alors de remplacer par 10, 101 ou 859 ou d'aller jusque-là si possible, elles ne « s'arrêtent » jamais.
L'avant-dernière suite est la fameuse suite de Fibonacci, nous la retrouverons plus loin.
La dernière est appelée suite de Conway du nom de son inventeur, en 1986. C'est la suite « Look and say ». On peut aisément se convaincre des propriétés suivantes.

Aucun terme de la suite ne comporte un chiffre supérieur à 3.

Tous les termes de la suite possèdent un nombre pair de chiffres, sauf le terme initial.

Les termes de rang impair se terminent par 11 et les termes de rang pair par 21 (là encore à l'exception du terme initial).

Il est démontré qu'en moyenne, les termes de cette suite possèdent 50% de chiffres 1, 31% de 2 et 19 % de 3.
Si l'on commence par 7, cela produira une suite analogue dont les termes se terminent toujours par 17.

Si l'on commence par 3333, un 4 apparaît, bien seul.
Si l'on commence par 22, cette suite est stationnaire.

Exercice 2

1. (a) On a $u_0 = -3\times 0+4 = 4$, $u_1 = -3\times 1+4 = 1$, $u_2 = -3\times 2+4 = -2$, $u_3 = -3\times 3+4 = -5$ et $u_4 = -3\times 4+4 = -8$.
   (b) On a $u_{n+1} = -3\times(n+1)+4 = -3n+1$
   (c) et $u_{n+1} = -3n+4-3 = u_n - 3$ (ou alors $u_{n+1}-u_n = \ldots = -3$).
2. (a) On a $v_0 = (0+1)^2 = 1$, $v_1 = (1+1)^2 = 4$, $v_2 = (2+1)^2 = 9$, $v_3 = (3+1)^2 = 16$ et $v_4 = (4+1)^2 = 25$.
   (b) On a $v_{n+1} = [(n+1)+1]^2 = (n+2)^2$
   (c) et $v_{n+1} = \big[(n+1)+1\big]^2 = \big[\sqrt{v_n}+1\big]^2 = (n+1)^2 + 2(n+1) + 1^2$
   $= v_n + 2\sqrt{v_n} + 1$.
3. Si $w_{n+1} = (w_n - 2)^2$ alors $w_n = (w_{n-1}-2)^2$.

Exercice 3 • $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (2-5(n+1)) - (2-5n) = -5 < 0$ donc $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
• $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$ donc $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Tout ceci s'observe facilement à la calculatrice en suivant le tutoriel en page 90.

Exercice 4 Si n est l'âge du lapin en nombre entier de semaines et u_n la masse, en grammes, de carottes qu'il consomme quotidiennement pendant cette semaine-là, on a $u_n = n^2$ donc $u_4 = 16\,\text{g}$ et $u_{100} = 10\,000\,\text{g}$ ce qui fait très peu pour un lapereau d'un mois et beaucoup pour un lapin de deux ans.

Exercice 5 Soit r_n le nombre de rochers d'Averell au matin du n-ième jour.

1. On a $r_1 = 1$, $r_2 = 4\times 1-2 = 2$, $r_3 = 4\times 2-2 = 6$ et $r_4 = 4\times 6-2 = 22$.
   Averell aura 22 morceaux à casser au matin du 4 avril.
   En appliquant successivement la relation de récurrence $r_{n+1} = 4r_n - 2$, on obtient r_{13} et r_{30} mais cela est quelque peu fastidieux.
2. Voici des programmes correspondants. Attention à bien tester les premières valeurs afin d'éviter les décalages intempestifs.

```
def caillouxjour(n):
    r=1
    for i in range(n-1) :
        r=4*r-2
    return r
def caillouxtotal(n) :
    t=0
    for i in range(n) :
        t=t+caillouxjour(i+1)
    return t
def caillouf(C) :
    n=1
    while caillouxjour(n)<C :
        n=n+1
    return (n)
```

3. S'il en donne 3 et non plus 2, on a $r'_{n+1} = 4r'_n - 3$
   et $r'_2 = 4\times 1 - 3 = 1 = r'_1 = r'_3 = r'_4 = \ldots$: la suite est stationnaire.
   De même, s'il les brise en 3 et non plus en 4, on a $r''_{n+1} = 3r''_n - 2$

et $r''_2 = 3 \times 1 - 2 = 1 = r''_1 = r''_3 = r''_4 = \ldots$: la suite est stationnaire.
S'il en a deux le premier jour, on a $\tilde{r}_{n+1} = 4\tilde{r}_n - 2$, $\tilde{r}_1 = 2$: $\tilde{r}_2 = 4 \times 2 - 2 = 6$, $\tilde{r}_3 = 4 \times 6 - 2 = 22$,...

Exercice 6 On a $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1 + 2 = 3$, $c_4 = 3 + 3 = 6$, $c_5 = 6 + 4 = 10$,... $c_{n+1} = n + c_n$.

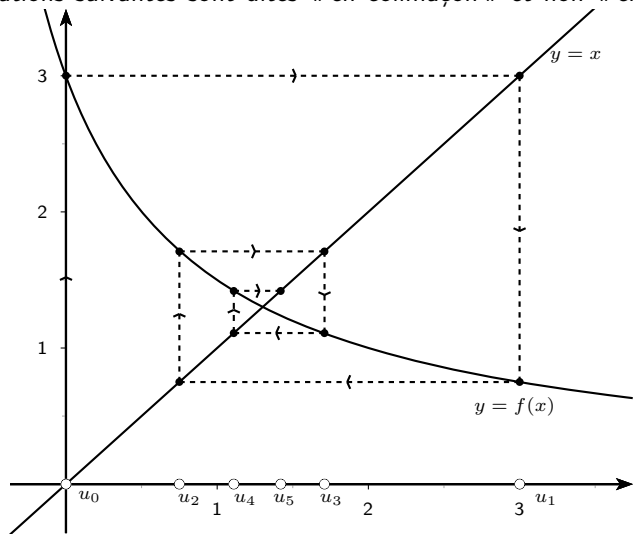
Exercice 7 $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

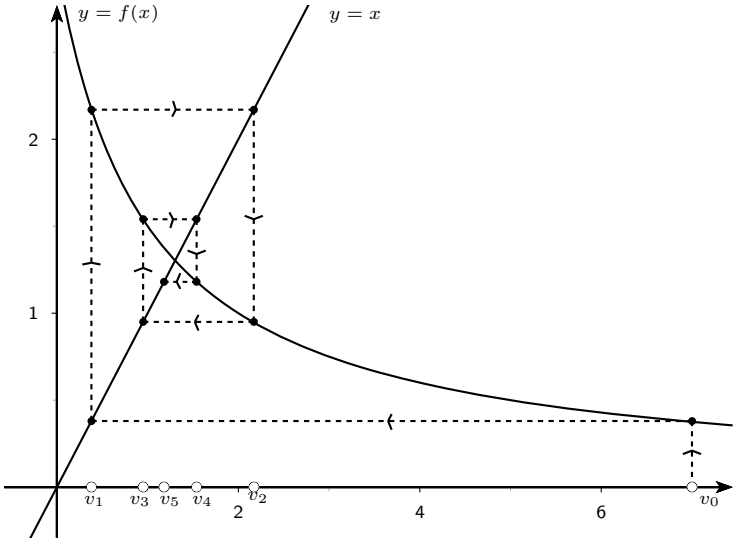
1. Pour $f(x) = \sqrt{3x + 4}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. 3. et 4. La représentation graphique est « en escalier ». $(u_n)_{\mathbb{N}}$ semble croissante.
5.
```
1| def SuiteU(N) :
2|     u=[0]
3|     for i in range(N-1) :
4|         u.append(sqrt(3*u[i]+4))
5|     return u
```

Exercice 8 $v_0 = \frac{1}{2}$, $v_{n+1} = \dfrac{1 + v_n}{v_n}$: La représentation (avec $\frac{1+x}{x}$) est « en colimaçon » et la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ ne semble pas monotone. Dans l'algorithme précédent, il suffit de commencer à `u=[0.5]` et d'écrire `v.append((1+v[i])/v[i])` en ligne 4.

Exercice 9 $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 1}$ et $v_0 = 7$, $v_{n+1} = \dfrac{3}{v_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Pour $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = f(v_n)$
2. $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x + 1} > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ et $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. Les deux suites sont donc bien définies.
3. $u_1 = f(u_0) = f(0) = 3$, $u_2 = f(u_1) = f(3) = \frac{3}{4}$, $u_3 = f(\frac{3}{4}) = \frac{12}{7}$, ... et $v_1 = f(7) = \frac{3}{8}$, $v_2 = f(\frac{3}{8}) = \frac{24}{11}$, ...
4. Les représentations suivantes sont dites « en colimaçon » et non « en escalier ».





5. Ces deux suites ne sont évidemment pas égales puisque $u_0 \neq v_0$ mais, lorsque n grandit, il semble qu'elles se rapprochent d'un même nombre, environ $1,3$.

Exercice 10 Soit la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 3)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)$.
2. f étant un polynôme, elle est définie sur $\mathbb{R}$ et la la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est donc définie pour toute valeur initiale.
3. et 4. On observe divers « escaliers » et « colimaçons ».
5. On s'aperçoit sur l'écran que :
   - pour les valeurs initiales -1, 1 et 3, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est constante à.p.c.r. ;
   - pour les valeurs initiales 0, 0.5 et 2, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ semble converger vers 1 ;
   - pour les valeurs initiales -2 et 4, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ semble diverger vers $+\infty$.

Exercice 11 $C_0 = 1$ $\quad C_1 = \sum_{g+d=0} C_g \times C_d = C_0 C_0 = 1$

$$C_2 = \sum_{g+d=1} C_g \times C_d = C_0C_1 + C_1C_0 = 1 + 1 = 2$$
$$C_3 = \sum_{g+d=2} C_g \times C_d = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 2 + 1 + 2 = 5$$
$$C_4 = \sum_{g+d=3} C_g \times C_d = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14$$
$$C_5 = \sum_{g+d=4} C_g \times C_d = C_0C_4 + C_1C_3 + C_2C_2 + C_3C_1 + C_4C_0 = 14 + 5 + 2 \times 2 + 5 + 14 = 42$$

Exercice 12

1. Deux propositions, deux boucles pour les algorithmes demandés.

CORRIGÉS

```
S ⟵ 0
Lire N
Pour K allant de 1 à N
   S ⟵ S + K²
Fin Pour
Afficher S
```

ou

```
S ⟵ 0
K ⟵ 0
Lire N
Tant que K < N
   K ⟵ K + 1
   S ⟵ S + K²
Fin Tant que
Afficher S
```

2.

```
S ⟵ 1
Lire N
Pour K allant de 1 à N
   S ⟵ S * K
Fin Pour
Afficher S
```

ou

```
S ⟵ 1
K ⟵ 0
Lire N
Tant que K < N
  K ⟵ K + 1
   S ⟵ S * K
Fin Tant que
Afficher S
```

Exercice 13 Suites de Syracuse

1. On a donc $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\,u_n & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$
2. Cela donne par exemple $14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$

   Après que le nombre 1 ait été atteint, la suite des valeurs (1,4,2,1,4,2...) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3, appelé cycle trivial. On dit que la suite est cyclique ou périodique à.p.c.r.

   Si l'on était parti d'un autre entier, on aurait obtenu une suite différente. *A priori,* il serait possible que la suite de Syracuse de certaines valeurs de départ n'atteigne jamais la valeur 1, soit qu'elle aboutisse à un cycle différent du cycle trivial, soit qu'elle n'aboutisse à aucun cycle. Or, on n'a jamais trouvé d'exemple de suite obtenue suivant les règles données qui n'aboutisse à 1. La conjecture de Syracuse est qu'une suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint nécessairement 1 et donc le cycle trivial.

   En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture continue de défier les mathématiciens depuis 1928. Ce problème, devenu célèbre quand il a été présenté à l'Université de Syracuse dans l'état de New York, mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960 qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine. Selon certains, les mathématiques ne seraient pas encore prêtes pour de tels problèmes.
3. Le programme suivant permet de lister les N premiers termes de la suite de Syracuse d'un premier nombre $S \in \mathbb{N}$:

```
1| def syracuse(S,N) :
2|    s=[S]
3|    for i in range(N-1) :
4|       if s[i]
5|          s.append(s[i]/2)
6|       else :
7|          s.append(3*s[i]+1)
8|    return s
```

Chapitre VI

PRODUIT SCALAIRE

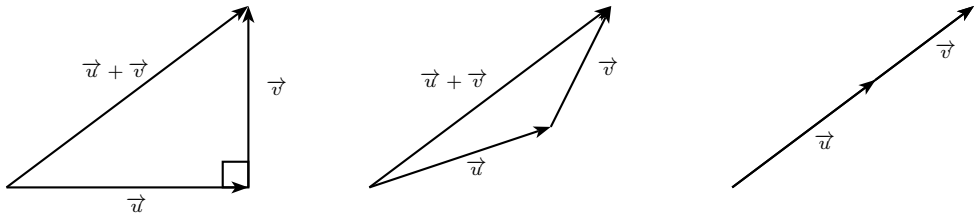
Sommaire

Introduction **99**
1 Définitions et premières propriétés **100**
2 Propriétés algébriques **101**
3 Projections orthogonales **102**
4 Orthogonalité **103**
5 Applications dans un triangle **104**
Exercices **105**
Corrigé des exercices 108

Introduction

La notion de vecteur était implicite en mécanique depuis Galilée mais a mis longtemps à prendre sa forme actuelle. On observe un lien entre analyse et géométrie au XVIIe s. en étudiant la façon dont la notion de vecteur apparaît chez Leibniz au cours de ses recherches sur l'élaboration d'un calcul des variations. Le XIXe s. voit l'élaboration conjointe de ce qui deviendra le produit scalaire et de la notion de travail en physique. Le calcul vectoriel et le produit scalaire permettent une approche de la géométrie différente de celle des Anciens, plus puissante, avec l'avantage de combiner vision géométrique et calcul.

Dans les trois cas suivants, mesurer les distances puis évaluer le nombre $||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$.



Le nombre $||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$ mesure en quelque sorte le « défaut de perpendicularité » entre les directions des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.*
*Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et lu « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ », est le **nombre réel** défini par :*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\, ||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 \,\right].$$

Notation : On note $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2$.

Remarque : $\vec{u}\cdot\vec{0} = \vec{0}\cdot\vec{v} = 0$.

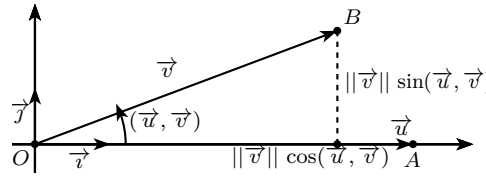
Propriété 1
*Dans un **repère orthonormé**, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors* $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration : Dans un repère orthonormé, *la formule des distances* donne :
$||\vec{u}||^2 = x^2+y^2$, $||\vec{v}||^2 = x'^2+y'^2$ et $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (x+x')^2+(y+y')^2$ donc
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\,(x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\,\right] = \ldots \frac{1}{2}\left[\,2xx'+2yy'\,\right]$. □

On désigne par $(\vec{u},\vec{v})$ l'angle orienté entre les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsqu'ils ne sont pas nuls.

Propriété 2
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$.

Idéemonstration : On construit un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ tel que $\vec{\imath}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires et de même sens. On a alors $\vec{u}\begin{pmatrix}||\vec{u}||\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}||\vec{v}||\cos(\vec{u},\vec{v})\\||\vec{v}||\sin(\vec{u},\vec{v})\end{pmatrix}$.
La propriété 1 donne ensuite le résultat.



Remarque : Cette formule peut s'écrire, pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||}.$$

Cas de deux vecteurs colinéaires :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}||.||\vec{v}||$.

Démonstration : Remarquons que si l'un des vecteurs est nul, les deux résultats sont vrais.
Dans le premier cas, $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0\,[2\pi]$ donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ et dans le deuxième, $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi\,[2\pi]$ donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$. □

D'après la propriété 2, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

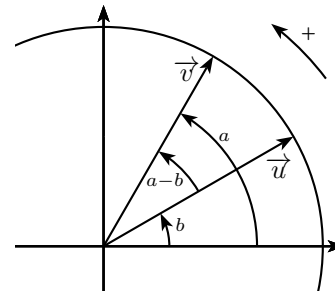
$$-||\vec{u}||.||\vec{v}|| \leqslant \vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant ||\vec{u}||.||\vec{v}||.$$

On peut donc dire que le produit scalaire atteint ses valeurs « extrêmes » lorsque les vecteurs sont colinéaires.

Application : Nous avons donc plusieurs expressions différentes d'un même nombre. Profitons-en ! Démontrons par exemple les formules d'addition de trigonométrie que vous étudierez l'année prochaine.

Soient a, et b deux réels et soient les vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ tels que $(\vec{\imath}\,;\,\vec{u}) = b\,[2\pi]$ et $(\vec{\imath}\,;\,\vec{v}) = a\,[2\pi]$.

D'après la relation de Chasles[†] pour les angles, on a
$(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = (\vec{u}\,;\,\vec{\imath}) + (\vec{\imath}\,;\,\vec{v}) = -b + a = a - b$.
On a $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$.
D'une part, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
D'autre part,
$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 1 \times 1 \cos(a-b)$.
Ainsi, $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
Pour $\cos(a+b)$, il suffit de changer b en $-b$:
$\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$



Pour les sinus, on montre que $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ et l'on écrit ensuite $\alpha = a \pm b$:
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$, $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.

2 Propriétés algébriques

Propriété 3 *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et soit λ un réel. On a toujours :*
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
$(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

[†]. Michel Chasles (1793-1880), éminent mathématicien français dont le nom est inscrit sur la non moins éminente tour Eiffel.

Cela se démontre aisément en utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé (prop. 1).

On dit que le produit scalaire est *bilinéaire*. On peut ainsi « développer » les produits scalaires de la même manière que les produits de nombres et on obtient les égalités suivantes :

- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u'}+\vec{v'}) = \vec{u}\cdot\vec{u'}+\vec{u}\cdot\vec{v'}+\vec{v}\cdot\vec{u'}+\vec{v}\cdot\vec{v'}$.
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$.
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}^2\|+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$.
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}^2\|-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$.

Ainsi, « $\cdot$ » est une opération qui associe un nombre à deux vecteurs et qui vérifie des propriétés similaires à celles de la multiplication des réels. Ceci justifie bien le nom de *produit scalaire*.

On retrouve alors immédiatement le résultat (déjà connu et utilisé) suivant.

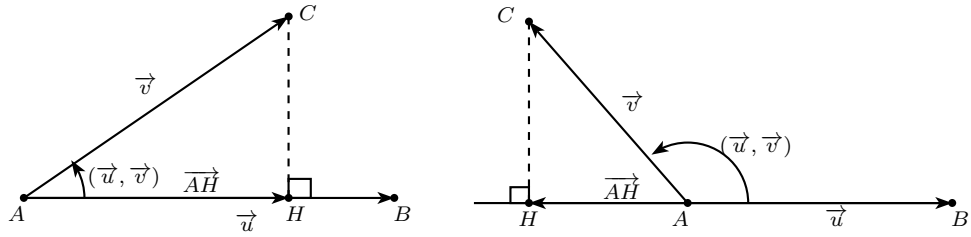
Propriété 4 *Dans un r.o.n., pour tout vecteur* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, *on a* $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Démonstration : Dans un r.o.n., $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = x\times x + y\times y = x^2+y^2$. □

3 Projections orthogonales

Propriété 5 *Soient A, B et C trois points distincts.*
On nomme H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). On a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \begin{cases} \boldsymbol{AB\times AH} & \textit{si } \overrightarrow{AB} \textit{ et } \overrightarrow{AH} \textbf{ ont même sens,} \\ \boldsymbol{-AB\times AH} & \textit{si } \overrightarrow{AB} \textit{ et } \overrightarrow{AH} \textbf{ ont sens contraire.} \end{cases}$$



Démonstration : Immédiat avec la prop. 2 : $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\times(\,||\vec{v}||\times\cos(\vec{u},\vec{v})\,)$. □

Nous remarquons que, pour un vecteur $\vec{u}$ comme sur les figures ci-dessus, les vecteurs $\vec{v}$ qui donneront un produit scalaire positif sont ceux orientés « vers la droite » tandis que ceux qui donneront un produit scalaire négatif sont ceux orientés « vers la gauche ».

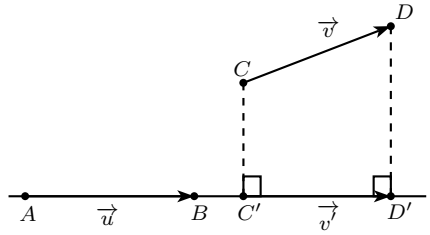
Ainsi, le produit scalaire ne change pas lorsque l'on projette une extrémité d'un vecteur sur un vecteur de même origine. La propriété suivante montre que le produit scalaire ne change pas non plus lorsque l'on projette le vecteur en « entier ».

Propriété 6 *Soient A, B, C et D quatre points (A et B distincts) et soient C' et D' les projetés orthogonaux de C et de D sur la droite (AB).*
*On dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le **projeté orthogonal** de $\overrightarrow{CD}$ sur $\overrightarrow{AB}$.*

On a $\quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$,

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v'}$.

Si, de plus, $\overrightarrow{u}$ *est **unitaire**,*
$\overrightarrow{v'} = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})\,\overrightarrow{u}$.



Démonstration : Il suffit de « placer » $\overrightarrow{CD}$ en A et appliquer la prop. précédente. Le théorème de Thalès nous garantit que le projeté de ce vecteur et $\overrightarrow{C'D'}$ sont égaux. □

Remarques : • Si $\overrightarrow{u}$ est non nul, le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$ est toujours unitaire. Il est donc aisé d'en *fabriquer* un.

• Les projections utilisées ici seront toujours orthogonales et surtout, d'un vecteur sur l'*autre* et non pas *n'importe où ailleurs*.

4 Orthogonalité

Définition 2 *Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.*
$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Exemple : Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Propriété 7 *Soient A et C deux points distincts respectivement des points B et D. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.*

Démonstration :
$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \iff ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{CD}|| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$
$\iff \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \iff (AB) \perp (CD)$. □

La propriété suivante est évidente mais très utile. Elle donne en effet, dans un repère orthonormé, une décomposition vectorielle et un critère d'orthogonalité.

Propriété 8 *Dans un **repère orthonormé** $(O\,;\,\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j})$,*
si $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$ *et* $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$, *on a* $\quad \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff xx' + yy' = 0$.
De plus, on a $\quad x = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i} \quad$ *et* $\quad y = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j}$
et donc $\quad \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i})\,\overrightarrow{i} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j})\,\overrightarrow{j}$.

Dém. : En effet, $\quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i} = x \times 1 + y \times 0 = x \quad$ dans un repère orthonormé. □

Exemple : Dans un repère orthonormé direct, les vecteurs $\overrightarrow{u}\binom{a}{b}$ et $\overrightarrow{v}\binom{-b}{a}$ sont toujours orthogonaux et de même norme puisque $a \times (-b) + b \times a = 0$ et $\sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
On a donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \iff \left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{v}\right) \equiv \left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{u}\right) \pm \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et
$\cos\left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{v}\right) = \cos\left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{u}\right).\cos(\pm\frac{\pi}{2}) - \sin\left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{u}\right).\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = -(\pm 1)\sin\left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{u}\right)$.
Or, $x_{\overrightarrow{v}} = -y_{\overrightarrow{u}} = -b$ donc $\cos\left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{v}\right) = -\sin\left(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{u}\right)$
et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv +\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$: en sens direct.

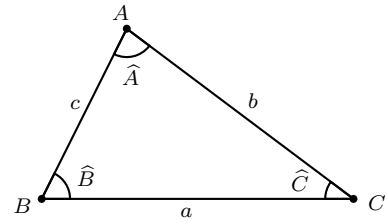
Remarque : Ne pas confondre avec le critère de colinéarité vu précédemment qui, lui, est valable dans tout repère : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires *ssi* $xy' - x'y = 0$.

5 Applications dans un triangle

Nous démontrerons les deux résultats suivants aux exercices 12 et 14 en pages 106 et 107.

Théorème 1 ***Théorème d'Al Kashi – Pythagore généralisé***
Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On a les relations :

- $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\widehat{A}}$.
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\widehat{B}$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\widehat{C}$.



Ce théorème généralise bien le théorème de Pythagore. En effet, si $\widehat{A}$ est droit alors $\cos\widehat{A} = 0$.

Théorème 2 ***Formule des sinus***
Avec les notations précédentes, pour tout triangle ABC, on a

$$\frac{\boldsymbol{\sin\widehat{A}}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{\sin\widehat{B}}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{\sin\widehat{C}}}{\boldsymbol{c}}\ .$$

On retrouve ici le fait que les longueurs des côtes des triangles semblables (ayant des angles de même mesure) sont proportionnelles.

Exercices

PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 Dans un repère orthonormé du plan, on donne $A(2\,;-1)$, $B(-2\,;3)$, et $C(-1\,;-2)$.

(a) Calculer les longueurs des différents côtés du triangle ABC.

(b) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

(c) En déduire les angles du triangle ABC.

Exercice 2 Dans chaque cas, déterminer les deux nombres qui manquent parmi les cinq suivants : $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$, $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et $\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$.
Signaler les impossibilités éventuelles.

(a) $\|\overrightarrow{u}\|=3$, $\|\overrightarrow{v}\|=4$, $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|=6$.

(b) $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{2}$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$ et $\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) $\|\overrightarrow{u}\|=1$, $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}$.

Exercice 3 Dans un repère orthonormé direct, on donne :

(a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1/2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, $\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$.

(b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-1$, $\|\overrightarrow{u}\|=\|\overrightarrow{v}\|$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{v}$.

(c) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\cos(2\pi/3)\\\sin(2\pi/3)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\cos(\pi/4)\\\sin(\pi/4)\end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et en déduire $\cos(\frac{5\pi}{12})$.

Exercice 4 VouF ? Justifier la réponse.
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a :

(a) $(-3\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot(2\overrightarrow{v})=(-2\overrightarrow{u})\cdot(3\overrightarrow{v})$

(b) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=(-\overrightarrow{u})\cdot(-\overrightarrow{v})$

(c) $2\overrightarrow{u}\cdot(-\overrightarrow{v})+(-\overrightarrow{u})\cdot(3\overrightarrow{v})=-5\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

(d) $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}\cdot(2\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$

(e) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

Exercice 5 On donne un triangle ABC tel que $AB=5$, $BC=6$ et $CA=7$.
Les points I et J sont définis par $\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AI}$.
Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Exercice 6 Deux vecteurs vérifient $\|\overrightarrow{u}\|=3$, $\|\overrightarrow{v}\|=2$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-2$.

(a) Calculer $(3\overrightarrow{u})\cdot(-5\overrightarrow{v})$, $\overrightarrow{u}\cdot(3\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$.

(b) Calculer $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2$ et $(2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2$.
En déduire $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|$ et $\|2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|$.

Exercice 7 Redémontrer que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

Exercice 8 Deux vecteurs vérifient $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
On pose $\vec{w} = \vec{u} + k\vec{v}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer k pour que $\vec{w}$ soit orthogonal à $\vec{u}$.

(b) Déterminer k pour que $\vec{w}$ soit de norme 1.

(c) Déterminer k pour que $\vec{v} + \vec{w}$ soit colinéaire à $2\vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 9 Le plan est muni d'un repère orthonormé. A, B et C sont trois points et H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ (sauf dans le 3.) dans chacun des cas suivants.

1. (a) $AB = 6$, $BC = 4$ et $AC = 5$.
   (b) $AB = 5$, $BC = 4$ et $AC = 7$.
2. (a) $A(-1\,;2)$, $B(6\,;0)$ et $C(2\,;5)$.
   (b) $A(-2\,;-1)$, $B(3\,;-2)$ et $C(6\,;2)$.
3. (a) $AB = 5$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 45°$.
   (b) $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 120°$.
4. (a) $AH = 5$, $HB = 2$ et $H \in [AB]$.
   (b) $AB = 5$, $BH = 2$ et $H \notin [AB]$.
   (c) $AB = 5$, $BH = 7$ et $H \in (AB]$.

Exercice 10 $CADO$ et $PIZA$ sont deux carrés tels que $D \in [ZA]$ et $C \notin [PA]$.
Tracez les droites (CZ) et (DP) puis démontrez votre conjecture.

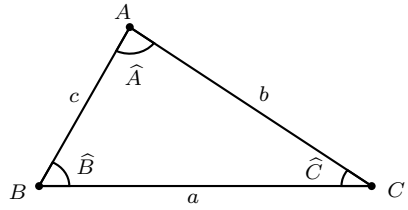
Exercice 11 Soit ABE un triangle isocèle en E tel que $AB = 4$.

(a) Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EM} = 16$ en utilisant les projetés orthogonaux E' et H respectifs de E et M sur (AB).

(b) Même question pour l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EN} = -4$.

Exercice 12 *Théorème d'Al Kashi* ou de *Pythagore généralisé*
Soient A, B et C trois points distincts.

1. Montrer que $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AC\,.\,AB\,\cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$.
2. En déduire les résultats suivants :
   - $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\widehat{A}}$.
   - $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\widehat{B}$.
   - $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\widehat{C}$.



3. PQR est tel que $PQ = 6$, $QR = 10$ et $\widehat{RPQ} = 60°$. Calculer PR.

Exercice 13 ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 8$ et $AC = 10$.
Déterminer les angles du triangle ABC puis calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 14 *Formule des sinus*

Montrer que, pour tout triangle ABC, on a $\boldsymbol{\dfrac{\sin \widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{c}}$ au moyen de l'aire du triangle.
Application : Déterminer BC, AC et l'aire en supposant que $AB = 4$, $\widehat{A} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$.

Rendez-vous en page 259 et faites donc le devoir n° 8.

Corrigé des exercices

PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 Dans un r.o.n., on donne $A(2\,;-1)$, $B(-2\,;3)$, et $C(-1\,;-2)$.

(a) On a $\overrightarrow{AB}(-4\,;4)$, $\overrightarrow{BC}(1\,;-5)$ et $\overrightarrow{CA}(3\,;1)$ donc $AB^2=4^2+4^2=32$, $BC^2=1^2+5^2=26$ et $AC^2=3^2+1^2=10$.

(b) Dans ce r.o.n., $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4\times(-3)+4\times(-1)=8$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=4\times1-4\times(-5)=24$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=3\times(-1)+1\times5=2$.

(c) Les vecteurs n'étant pas nuls, on a
$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{8}{\sqrt{32}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$,
$\cos\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\frac{24}{\sqrt{32}\sqrt{26}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$
et $\cos\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{CA\times CB}=\frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{65}}$.
D'où une valeur approchée des angles géométriques $\widehat{A}=\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{5}})\simeq63°$, $\widehat{B}\simeq34°$ et $\widehat{C}\simeq83°$.

Exercice 2 Les deux manquants parmi $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$, $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et $\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$.

(a) On a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2)=\frac{1}{2}(6^2-3^2-4^2)=\frac{11}{2}$
et $\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}=\frac{11/2}{3\times4}=\frac{11}{24}$.

(b) On a $\|\overrightarrow{v}\|=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})}=\frac{1}{\sqrt{2}\frac{-\sqrt{2}}{2}}=-1$: Impossible.

(c) On a $\|\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{3}^2-1^2-2\frac{1}{2}=1$ donc $\|\overrightarrow{v}\|=1$ et $\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}=\frac{1/2}{1\times1}=\frac{1}{2}$.

Exercice 3 Nous sommes dans un repère orthonormé direct.

(a) On a $\|\overrightarrow{u}\|^2=(\frac{1}{2})^2+2^2=\frac{17}{4}$, $\|\overrightarrow{v}\|^2=4^2+1^2=17$,
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1/2\\-2\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\times4+(-2)\times(-1)=4$
et $\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}=\frac{4}{\sqrt{\frac{17}{4}}\times\sqrt{17}}=\frac{8}{17}$.

(b) Pour $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-1\iff\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=-1$
$\iff x\sqrt{3}+y=-2\iff y=-2-x\sqrt{3}$
et $\|\overrightarrow{u}\|=\|\overrightarrow{v}\|\iff\|\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2\iff x^2+y^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$
$\iff x^2+(-2-x\sqrt{3})^2=1\iff4x^2+4x\sqrt{3}+3=0$
$\overset{\Delta=0}{\iff}x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y=-2-x\sqrt{3}=-\frac{1}{2}$: $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

(c) On a $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\cos(2\pi/3)\\\sin(2\pi/3)\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\cos(\pi/4)\\\sin(\pi/4)\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$,
$\|\overrightarrow{u}\|=\|\overrightarrow{v}\|=1$ donc $\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et
$\cos(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})=\cos(\frac{2\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{2\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{5\pi}{12})$.

Exercice 4 VouF ?

(a) Faux : $(-3\vec{u})\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot(2\vec{v})=-3\vec{u}\cdot\vec{v}+2\vec{u}\cdot\vec{v}=-\vec{u}\cdot\vec{v}$
et $(-2\vec{u})\cdot(3\vec{v})=-6\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(b) Vrai : $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1)^2\vec{u}\cdot\vec{v} \quad = \quad (-\vec{u})\cdot(-\vec{v})$.

(c) Vrai : $2\vec{u}\cdot(-\vec{v})+(-\vec{u})\cdot(3\vec{v})=-2\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{u}\cdot\vec{v} \quad = \quad -5\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(d) Faux : $\frac{1}{2}\vec{u}\cdot(2\vec{v}-\vec{w})=\frac{2}{2}\vec{u}\cdot\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{w} \quad \neq \quad \vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$.

(e) Faux : $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2\vec{u}\cdot\vec{v} \iff 3\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$
$\implies \vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ ou $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Exercice 5
On a $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI})\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$
$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}||^2-||\overrightarrow{AB}||^2-||\overrightarrow{BC}||^2)+\frac{1}{6}BC^2$
$=\frac{1}{4}(AC^2-AB^2-BC^2)+\frac{1}{6}BC^2$
$=\frac{1}{4}(7^2-5^2-6^2)+\frac{1}{6}.6^2=-3+6=3.$

Exercice 6 Deux vecteurs vérifient $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=2$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$.

(a) On a $(3\vec{u})\cdot(-5\vec{v})=-15\vec{u}\cdot\vec{v}=-15\times(-2)=30$,
$\vec{u}\cdot(3\vec{u}+\vec{v})=3\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times3^2-2=25$
et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=3^2-2^2=5$.

(b) On a $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=3^2+2(-2)+2^2=9$
et $(2\vec{u}-\vec{v})^2=4\vec{u}^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=4.3^2-4(-2)+2^2=48$.
Ainsi, $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2}=\sqrt{(\vec{u}+\vec{v})^2}=\sqrt{9}=3$
et $\|2\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{(2\vec{u}-\vec{v})^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

Exercice 7 Soit $ABCD$ un losange. On a
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$
$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot(-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$
$=-AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+AB^2=0$
donc les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Exercice 8 $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=3$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$ et $\vec{w}=\vec{u}+k\vec{v}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

(a) On a $(\vec{u}+k\vec{v})\cdot\vec{u}=\vec{u}^2+k\vec{v}\cdot\vec{u}=1^2+1k$
et $\vec{w}\perp\vec{u} \iff \vec{w}\cdot\vec{u}=0 \iff k=-1$.

(b) On a $||\vec{w}||^2=||\vec{u}+k\vec{v}||^2=(\vec{u}+k\vec{v})^2=\vec{u}^2+2k\vec{u}\cdot\vec{v}+(k\vec{v})^2$
$||\vec{w}||^2=1^2+2k+3^2k^2$ et $||\vec{w}||=1 \iff ||\vec{w}||^2=1^2$
$\iff 9k^2+2k=0 \iff k(9k+2)=0 \iff k=0$ ou $k=-\frac{2}{9}$.

(c) On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\neq\pm3=\pm\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et forment une base du plan. Puisque $\vec{a}=\vec{v}+\vec{w}=\vec{v}+\vec{u}+k\vec{v}=\vec{u}+(k+1)\vec{v}$ et $\vec{b}=2\vec{u}+\vec{v}$, on a, dans la base $(\vec{u};\vec{v})$, $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\k+1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ colinéaires ssi $1\times1-2(k+1)=0 \iff k=-\frac{1}{2}$.

CORRIGÉS

Exercice 9 H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) dans un r.o.n.

1. (a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}((\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2 - AB^2 - BC^2)$
$= 6^2 + \frac{1}{2}(AC^2 - 6^2 - 4^2) = \frac{45}{2}$ et
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})$
$= -\frac{1}{2}(||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{BC}||^2)$
$= -\frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AC^2) = -\frac{1}{2}(5^2 - 6^2 - 4^2) = \frac{27}{2}$.

(b) De même, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}((\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2 - AB^2 - BC^2)$
$= 5^2 + \frac{1}{2}(7^2 - 5^2 - 4^2) = 29$ et
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}((\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2 - AB^2 - AC^2) = 5^2 + \frac{1}{2}(4^2 - 5^2 - 7^2) = -4$.

2. (a) On a $\overrightarrow{AB}(7;-2)$, $\overrightarrow{AC}(3;3)$ et $\overrightarrow{BC}(-4;5)$ donc
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7\times 3 - 2\times 3 = 15$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -7\times(-4) + 2\times 5 = 38$.

(b) On a $\overrightarrow{AB}(5;-1)$, $\overrightarrow{AC}(8;3)$ et $\overrightarrow{BC}(3;4)$ donc
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5\times 8 - 1\times 3 = 37$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -5\times 3 + 1\times 4 = -11$.

3. (a) On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 5\times 5\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$.

(b) On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 4\times 3\times\frac{-1}{2} = -6$.

4. (a) $H\in[AB]$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = (5+2)\times 5\times 1 = 35$
et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH} = 7\times 2\times 1 = 14$.

(b) $H\in[AB)\setminus[AB]$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = +AB.AH = +(5-2)\times 5 = 15$
et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -BA.BH = -(5-2)\times 2 = -6$.

(c) $H\in(AB]\setminus[AB]$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB.AH = -5(7-5) = -10$
et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = +BA.BH = 5\times 7 = 35$.

Exercice 10 Les droites (DP) et (CZ) semblent perpendiculaires et, en effet,
$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{CZ} = (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AZ}) = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AZ}$
$= 0 - DA\times AZ + AP\times CA + 0 = -DA.AZ + DA.AZ = 0$.

Exercice 11 Soit ABE un triangle isocèle en E tel que $AB = 4$.

(a) On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{E'H} = AB.E'H\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{E'H}\right) = 16$
$\iff E'H\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{E'H}\right) = \frac{16}{AB} = 4 \iff E'H = 4$ et $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{E'H}\right) = 1$
car ces vecteurs sont colinéaires et ce cosinus ne peut donc valoir que ± 1.
H doit donc être situé sur la demi-droite $[AB)$ et tel que $AH = AE' + E'H = 6$ et l'ensemble recherché est constitué des points ayant H pour projeté orthogonal sur (AB) : la droite perpendiculaire à (AB) en H.

(b) De même, en appelant K le projeté orthogonal de N sur (AB), on a
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EN} = -4 \iff E'K\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{E'K}\right) = \frac{-4}{AB} = -1 \iff E'K = 1$
et $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{E'K}\right) = -1$ car ces vecteurs sont colinéaires et ce cosinus ne peut donc valoir que ± 1. K doit donc être situé sur la demi-droite $(AB]$ et tel que $BK = BE' + E'K = 3$ et l'ensemble recherché est constitué des points ayant K pour projeté orthogonal sur (AB) : la droite perpendiculaire à (AB) en K.

Exercice 12 *Théorème d'Al Kashi* ou de *Pythagore généralisé*

1. On a $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$
$= AC^2 + AB^2 - 2\,AC\,.\,AB\,\cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$.

2. Avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on obtient les résultats demandés :
$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\widehat{A}}$, $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\widehat{B}$
et $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\widehat{C}$.
Ce théorème généralise bien le théorème de Pythagore. En effet, si $\widehat{A}$ est droit alors $\cos\widehat{A} = 0$.

3. On a $p^2 = r^2 + q^2 - 2qr\cos(\widehat{P}) \iff 10^2 = 6^2 + q^2 - 2\times 6q\cos(60°)$
$\iff q^2 - 6q - 64 = 0 \iff q = \frac{6\pm\sqrt{292}}{2} \overset{q>0}{\iff} PR = q = 3 + \sqrt{73}$.

Exercice 13 ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 8$ et $AC = 10$.
On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(||\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{BA}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2)$
$= -\frac{1}{2}(BC^2 - AB^2 - AC^2) = -\frac{1}{2}(64 - 49 - 100) = \frac{85}{2}$.
De même, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2) = -\frac{1}{2}(100 - 49 - 64) = \frac{13}{2}$
et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}(AB^2 - CB^2 - CA^2) = -\frac{1}{2}(49 - 64 - 100) = \frac{115}{2}$.
Ainsi, $\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{\frac{85}{2}}{7\times 10} = \frac{17}{28}$ et $\widehat{BAC} \simeq 52,6°$,
$\cos\widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \frac{\frac{13}{2}}{7\times 8} = \frac{13}{112}$ et $\widehat{ABC} \simeq 83,3°$,
$\cos\widehat{ACB} = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{CA\times CB} = \frac{\frac{115}{2}}{10\times 8} = \frac{23}{32}$ et $\widehat{ACB} \simeq 44°$.
On peut remarquer que si l'on connaît le théorème d'Al Kashi, ces résultats sont obtenus bien plus rapidement.
Si H est le projeté orthogonal de B sur (AC), on a
$AH = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AC}$ et $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2}$.
Sinon, on peut écrire $BH = AB.\sin(\widehat{BAC}) = 7\sin(\cos^{-1}(\frac{17}{28}))$.
On a alors, $\mathscr{A}ire_{BAC} = \frac{AC\times BH}{2} \simeq 27,8$.

Exercice 14 *Formule des sinus*
On a, pour H projeté de A sur (BC),
$AH = AB\sin(\widehat{B}) = c\sin(\widehat{B})$ et l'aire du triangle peut s'écrire
$\mathscr{A}ire_{ABC} = \frac{BC\times AH}{2} = \frac{ac\sin(\widehat{B})}{2}$. De même, $\mathscr{A}ire_{ABC} = \frac{ab\sin(\widehat{C})}{2} = \frac{bc\sin(\widehat{A})}{2}$.
Ainsi, $\frac{2.\mathscr{A}ire_{ABC}}{abc} = \frac{bc\sin(\widehat{A})}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$.
Application : On a $\frac{\sin(\pi/4)}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\pi/3)}{4}$ donc
$BC = a = \frac{4\sin(\pi/4)}{\sin(\pi/3)} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\quad AC = b = \frac{4\sin(\pi-\pi/4-\pi/3)}{\sin(\pi/3)} = \frac{8\sin(5\pi/12)}{\sqrt{3}}$, et
$\mathscr{A}ire_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}.\frac{8\sin(5\pi/12)}{\sqrt{3}}.4.\sin(\pi/4) = \frac{8\sqrt{2}\sin(5\pi/12)}{\sqrt{3}}$.

Chapitre VII

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Sommaire

1 Suites arithmétiques 113
2 Suites géométriques 116
3 Notion de limite d'une suite 118
3.1 Définitions et premières propriétés 118
3.2 Quelques limites de référence 119
3.3 Cas des suites géométriques 120
3.4 Cas des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ 120
Exercices 122
Corrigé des exercices 127

Nous poursuivons l'étude de ces formidables objets que sont les suites numériques en nous focalisant sur deux cas usuels, plutôt simples et néanmoins très utiles. Nous abordons enfin la notion de limite d'une suite, c.-à-d. l'étude de son comportement lorsque n est de plus en plus grand.

1 Suites arithmétiques

Définition 1 *Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** si chacun de ses termes est obtenu à partir du précédent en **ajoutant une constante** c.-à-d. s'il existe un réel r tel que pour tout entier n,* $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.
*Le réel $\boldsymbol{r}$ est alors apellé la **raison** de cette suite arithmétique.*

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on montre en général que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

Exemples :

- La suite des entiers naturels $(u_n = n)$ est arithmétique de premier terme $u_0 = 0$ et de raison 1 : $u_{n+1} = u_n + 1$.

- La suite des naturels impairs ($u_n = 2n+1$) est arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2 : $u_{n+1} = u_n + 2$.
- La suite $u_n = 3n+2$: $u_{n+1} - u_n = (3(n+1)+2) - (3n+2) = 3$ donc $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3 : $u_{n+1} = u_n + 3$.
- La suite $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n + (n+1)$: $u_1 = u_0 + 1 = 1$ et $u_2 = u_1 + 2 = 3$. $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ donc $(u_n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.

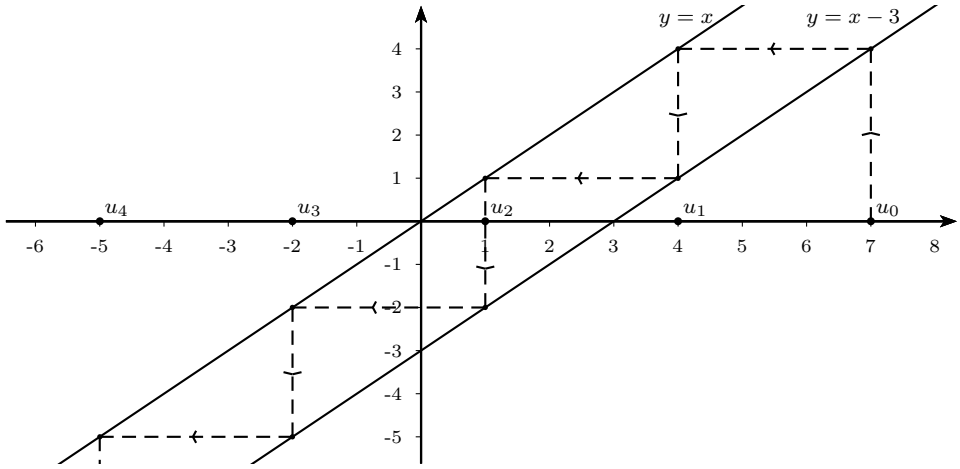
Remarque : Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique, $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ $\left(= \frac{(u_n - r) + (u_n + r)}{2}\right)$.
Chaque terme est ainsi la moyenne arithmétique de son précédent et son suivant.

Propriété 1 ***Variations des suites arithmétiques***
Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .
$(u_n)_{\mathbb{N}}$ est ***strictement croissante*** *(resp. décroissante, resp. stationnaire)*
ssi $\boldsymbol{r > 0}$ *(resp.* $r < 0$*, resp.* $r = 0$*).*

Dém. : $u_{n+1} - u_n = r$ et l'on se reporte à la définition 2 en page 87. □

Remarque : Ainsi, une suite arithmétique de raison r est une suite définie par récurrence, de fonction de récurrence $f(x) = x + r$.

Représentation graphique
Voici un exemple avec $r = -3$ et $u_0 = 7$.

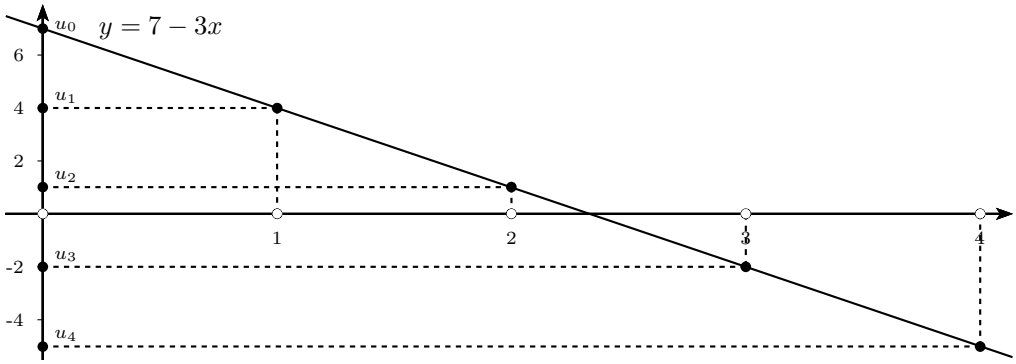


Théorème 1 ***Terme général d'une suite arithmétique***
Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite ***arithmétique*** *de raison r.*
On a, pour tout entier n, $\boldsymbol{u_n = u_0 + n\,r}$.
Plus généralement, pour tous entiers n et p, $\boldsymbol{u_p = u_n + (p-n)\,r}$.

Démonstration : Pour passer de u_0 à u_n, on ajoute n fois r :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n-1} + r = u_{n-2} + 2r = ... = u_0 + nr$.
Plus généralement, $\forall n, p \in \mathbb{N}$, $u_p = u_0 + pr = u_0 + nr + (p-n)r = u_n + (p-n)r$. □

Remarque : Une suite arithmétique est donc une suite définie par récurrence qui est aussi définie explicitement en fonction de n.

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ est arithmétique de raison -3. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = 7 - 3n$ ($u_4 = 7 - 3 \times 4 = -5$ par exemple) et l'on peut représenter $(u_n)_{\mathbb{N}}$ de la manière suivante.



Propriété 2 *Pour tout entier n, on a* $\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Démonstration : Elle est belle et astucieuse.

$$\begin{array}{rrcccccccccc} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots & + & n \\ \text{et} & S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots & + & 1 \\ \text{donc} & 2\,S & = & (1+n) & + & (2+n-1) & + & (3+n-2) & + \ldots & + & (n+1) \\ & & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \ldots & + & (n+1) \\ & & = & n(n+1) & & & & & & & \end{array}$$

□

Théorème 2 ***Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique***
Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Pour tout entier n, on pose et l'on a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S_n} &= \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\boldsymbol{i=n}} \boldsymbol{u_i} = \boldsymbol{u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_i + \ldots + u_{n-1} + u_n} \\ &= \boldsymbol{(n+1)\,\frac{u_0 + u_n}{2}} = \boldsymbol{(n+1)\,u_0 + r\,\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Démonstration : Elle suit le même principe que la démonstration précédente.

$$\begin{array}{rcccccccccc} S_n & = & u_0 & + & u_1 & \ldots & + & u_i & \ldots & + & u_n \\ S_n & = & u_n & + & u_{n-1} & \ldots & + & u_{n-i} & \ldots & + & u_0 \\ 2\,S_n & = & (u_0+u_n) & + & (u_1+u_{n-1}) & \ldots & + & (u_i+u_{n-i}) & \ldots & + & (u_n+u_0) \end{array}$$

Or, $u_i + u_{n-i} = (u_0 + ir) + (u_0 + (n-i)r) = u_0 + (u_0 + nr) = u_0 + u_n$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ donc $2\,S_n = (u_0+u_n) + (u_0+u_n) + \ldots + (u_0+u_n) = (n+1)(u_0+u_n)$ car il y a $(n+1)$ termes. Pour la dernière égalité, remplacer u_n par $u_0 + nr$. □

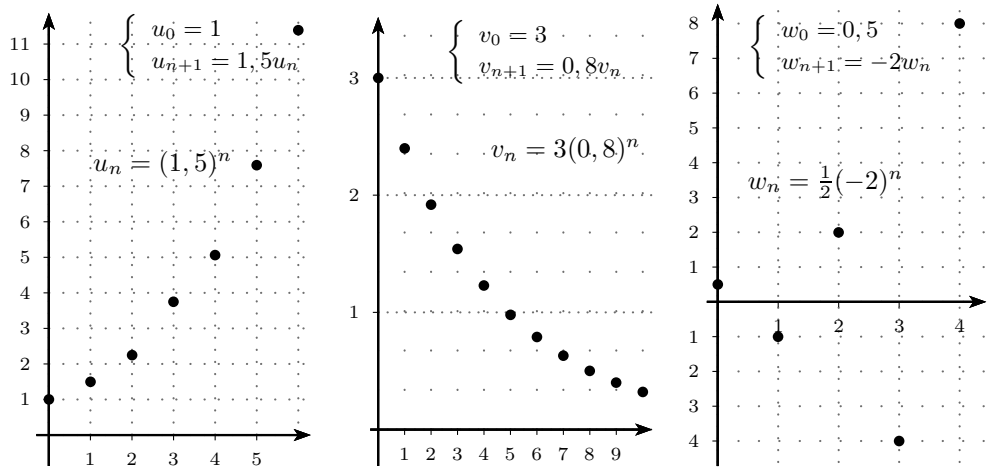
2 Suites géométriques

Définition 2 *Une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est dite* ***géométrique*** *si chaque terme est obtenu à partir du précédent par* ***multiplication par une constante*** *c.-à-d. s'il existe un réel q, appelé raison de la suite géométrique, tel que, pour tout entier n,* $\boldsymbol{u_{n+1} = q\,u_n}$.

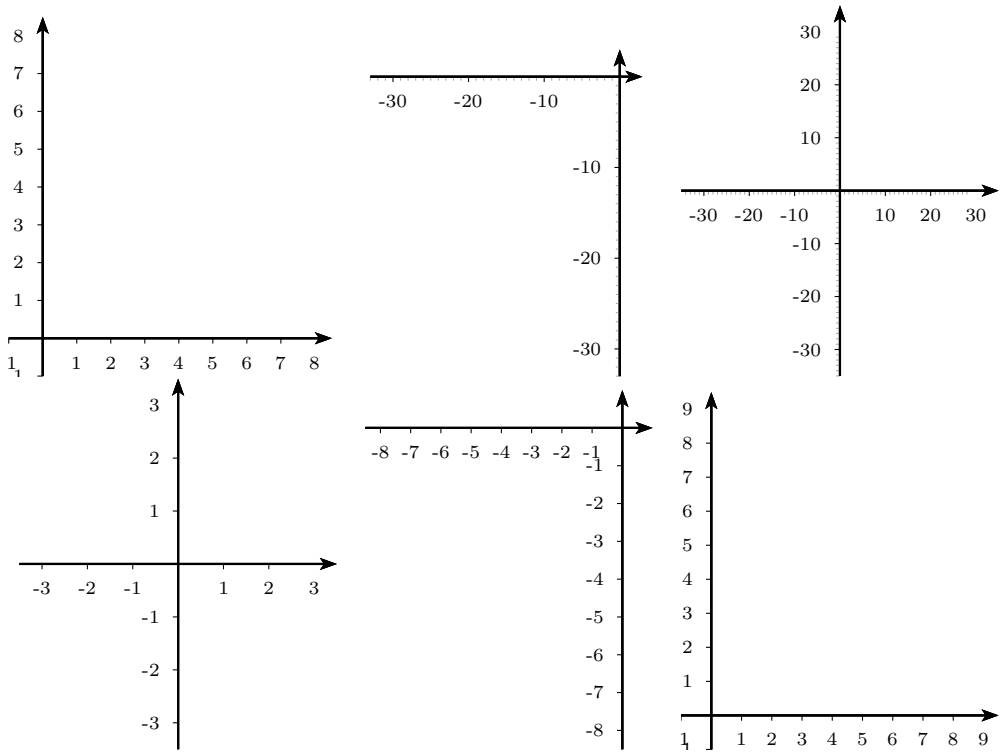
Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on montre généralement que le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Exemples :

- La suite $1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n, ...$ des puissances de deux est géométrique de premier terme 1 et de raison 2 : $u_0 = 1,\ u_{n+1} = 2u_n$.
- La suite $1, -1, 1, -1, ..., (-1)^n, ...$ est géométrique de premier terme 1 et de raison -1 : $u_0 = 1,\ u_{n+1} = -u_n$.
- La suite $u_1 = 1$, $u_{n+1} = (n+1)\,u_n$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)u_n}{u_n} = n+1$ non constant donc $(u_n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique. En revanche, nous avons vu en page 89 que $u_n = n!$.



Remarques : • Une suite géométrique de raison q est une suite récurrente de fonction de récurrence $f(x) = qx$.
Traçons donc dans les repères ci-contre les premiers termes des quelques suites géométriques de raison et de premier terme suivants :
$a_0 = 1,\ q_1 = 2$; $b_0 = -2,\ q_2 = 3$; $c_0 = 4,\ q_3 = -2$; $d_0 = 3,\ q_4 = -1$; $e_0 = -8,\ q_5 = \frac{1}{2}$; $f_0 = 9,\ q_6 = -\frac{1}{3}$.
Souvenez-vous, il faut tracer la droite d'équation $y = x$, la courbe de la fonction de récurrence et commencer par aller « verticalement » sur la courbe puis « horizontalement » sur la droite.



• Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique, $u_n^2 = u_{n-1} \,.\, u_{n+1}$ (tout deux égaux à $q^2\, u_{n-1}^2$). Ainsi, u_n est la moyenne géométrique de son terme précédent et son terme suivant lorsqu'ils sont positifs.
La moyenne géométrique de a et b positifs est $\sqrt{ab}$: côté d'un carré de même aire que le rectangle $a \times b$.

Théorème 3 ***Terme général d'une suite géométrique***
Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \neq 0$ alors, pour tout entier n, $\boldsymbol{u_n = u_0\, q^n}$.
Plus généralement, pour tous entiers n et p, $\boldsymbol{u_p = q^{p-n}\, u_n}$.

Démonstration : Pour passer de u_0 à u_n, on multiplie n fois par q :
$$u_n = q\, u_{n-1} = q\, q\, u_{n-2} = q^3\, u_{n-3} = \ \ldots\ = q^n\, u_{n-n} = q^n\, u_0.$$
De même, pour passer de n à p, on multiplie $(p-n)$ fois par q *(Attention si $n > p$).* □

Exemple : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = 3\, u_n \end{cases}$ est géométrique de raison $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2 \times 3^n$ et $u_4 = -2 \times 3^4 = -162$ par exemple.

<u>*Remarque*</u> : Une suite géométrique est donc une suite définie par récurrence qui est aussi définie explicitement en fonction de n.

Théorème 4 ***Variations*** *Soit q un réel.*

- *Si $q > 1$, la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante.*
- *Si $0 < q < 1$, la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
- *Si $q < 0$, la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.*
- *Si $q = 0$ ou 1, la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$ est stationnaire.*

Démonstration : On a $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$ du signe de $q-1$ pour q positif.
Si $q < 0$, q^{n+1} et q^n sont de signes contraires. La suite ne peut donc être monotone.
Si $q = 0$, $q^n = 0$ et si $q = 1$, $q^n = 1$. □

Remarque : Attention au signe de u_0 lors de l'étude des variations de $(u_0\, q^n)$.

Théorème 5 ***Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique***
Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Pour tout entier n, on a :

$$\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_p + \ldots + u_{n-1} + u_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0\, \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$$

Démonstration : On a :
$(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+q^n)$
$= 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+q^n - q-q^2-q^3-\ldots-q^n-q^{n+1} = 1-q^{n+1}$.
Il suffit alors de diviser par $(1-q)$ puis de multiplier par u_0. □

Remarque : Cette formule peut se lire : $S = (1^{er}\ terme) \times \dfrac{1 - q^{nbre\ de\ termes}}{1-q}$.

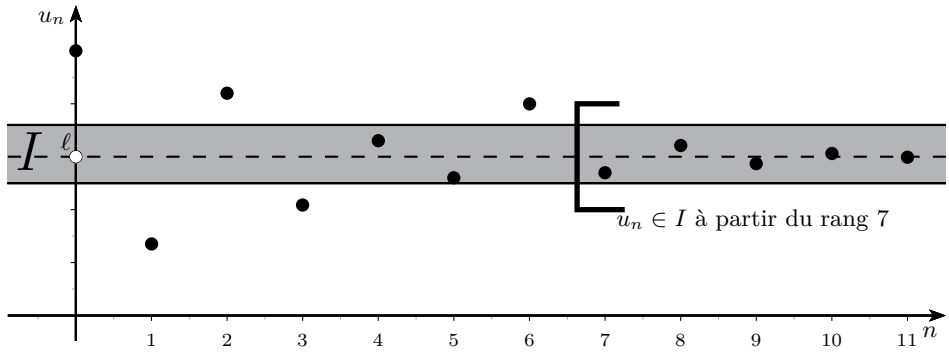
3 Notion de limite d'une suite

Lorsque l'on étudie une suite, ce sont parfois les termes de rang élevé ou ceux de rang tendant vers l'infini qui nous intéressent et non pas les premiers termes. On étudie alors le comportement asymptotique de la suite, c'est-à-dire le comportement de la suite lorsque n tend vers l'infini.

Ce paragraphe ne consiste qu'en une approche de la notion qui sera plus amplement étudiée en classe de terminale. Les définitions sont donc volontairement simplifiées et les propriétés admises.

3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 3 ***Suites convergentes***
Soit ℓ un réel et soit $u = (u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite.
u converge vers ℓ *(ou a pour limite ℓ) signifie que les termes u_n sont aussi proches que l'on veut de ℓ pour peu que n soit assez grand : quel que soit le voisinage de ℓ donné, u_n est dans ce voisinage à.p.c.r. On dit alors que u est* ***convergente****.*
Une suite qui ***ne converge pas*** *est dite* ***divergente****.*



Remarques :

- La définition suppose de connaître le nombre ℓ avant de démontrer que c'est bien la limite de u.
- La limite d'une suite ailleurs qu'en l'infini n'a pas de sens (on n'écrit d'ailleurs pas toujours $n \to +\infty$) : n ne peut tendre vers 13 par exemple puisque soit $n = 13$, soit n est « loin » de 13.

Exemple : La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 : Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Il existe alors $\varepsilon \in I$ positif. Pour tout $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, on a $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ donc $\dfrac{1}{n} \in I$ à partir du rang $Ent\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ où l'on note $Ent(x)$ la partie entière de x : le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Propriété 3 ***Unicité de la limite***
*Si la suite u est **convergente**, alors sa **limite** est **unique**.*

Définition 4 ***Suite divergeant vers l'infini***
Une suite admet $+\infty$ pour limite si u_n est aussi grand que l'on veut à.p.c.r.
On définit de façon analogue une suite ayant $-\infty$ pour limite.

Remarque : Une suite tendant vers l'infini est divergente mais la réciproque est fausse : $(-1)^n$, $\cos(n)$, ...

Exemple : La suite $u_n = 2n$ diverge vers l'infini. En effet, $\forall A \in \mathbb{R}$, $u_n > A$ dès que $n > Ent(\frac{A}{2}) + 1$.

3.2 Quelques limites de référence

- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} n^p = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty.$ $(p \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.$ $(p \in \mathbb{N}^*)$

3.3 Cas des suites géométriques

Théorème 6 *Soit q un réel.*

- *Si* $\boldsymbol{q \leqslant -1}$, *la suite* $\boldsymbol{(q^n)}$ ***n'a pas de limite*** *(diverge mais pas vers l'infini).*
- *Si* $\boldsymbol{-1 < q < 1}$, *alors* $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0}$ *(q^n converge).*
- *Si* $q = 1$, *alors* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$ *(q^n converge).*
- *Si* $\boldsymbol{q > 1}$, *alors* $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty}$ *(q^n diverge vers l'infini).*

On admet ce théorème dont les résultats sont très intuitifs.
Dans le cas $q < -1$, $|q^n|$ est de plus en plus grand positif mais q^n change de signe à chaque rang donc q^n ne peut tendre ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$.

Exemple : Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0,9 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{10} \end{cases}$ On a $u_1 = 0,09$, $u_2 = 0,009$, $u_3 = 0,0009$, $u_4 = 0,00009$. $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{10}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

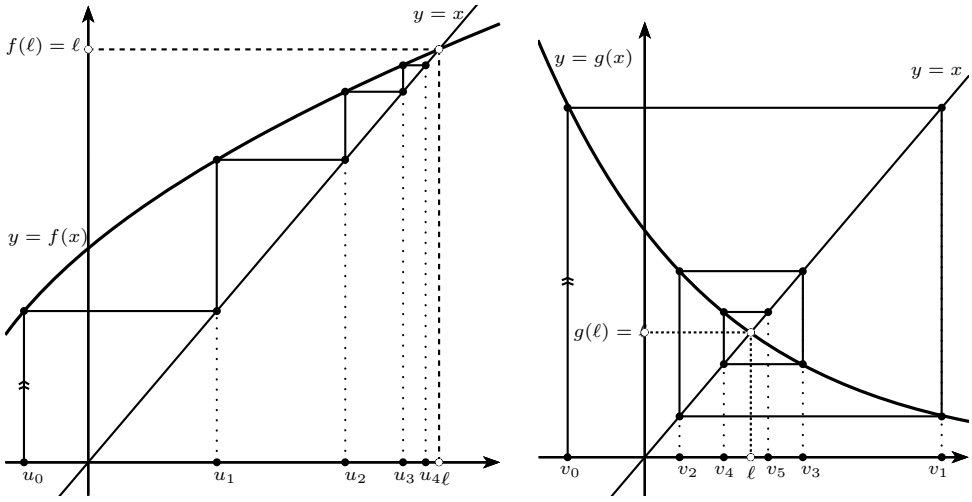
Par ailleurs, si on note $S_n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i$, on a $S_0 = 0,9$, $S_1 = 0,99$, $S_2 = 0,999$, $S_3 = 0,9999$, $S_n = 0,99...9$. Or $S_n = u_0 \dfrac{1 - 10^{-(n+1)}}{1 - 10^{-1}} = \frac{0,9}{0,9}(1 - 10^{-(n+1)})$ donc $S_n = 1 - 0,1^{n+1}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini puisque $q = 0,1 \in]-1\,;1[$. On démontre ainsi que $\boldsymbol{0,9999... = 1}$.

3.4 Cas des suites récurrentes $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$

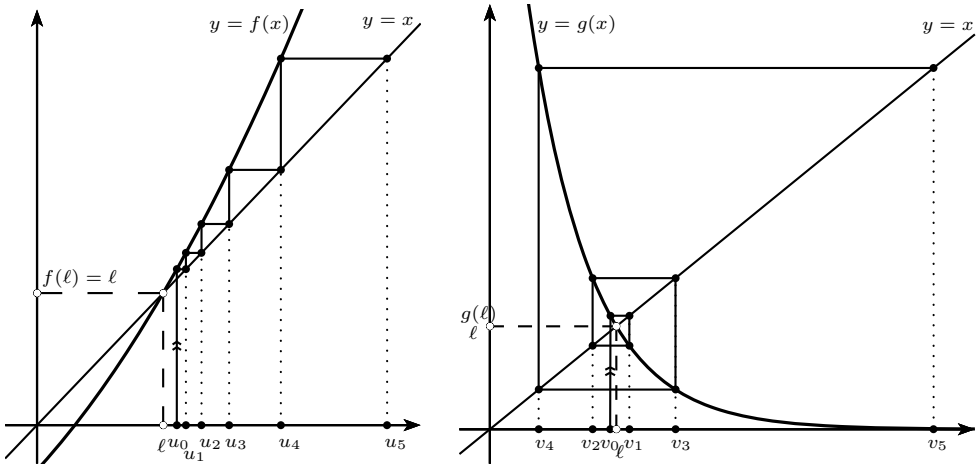
Propriété 4 *Soit f une fonction continue sur un intervalle J tel que $f(J) \subset J$ et soit $u_0 \in J$, $u_{n+1} = f(u_n)$ une suite récurrente.*
Si $\boldsymbol{(u_n)_{\mathbb{N}}}$ ***converge*** *vers un réel* $\boldsymbol{\ell}$ *et si* $\boldsymbol{\ell \in J}$, *alors* $\boldsymbol{f(\ell) = \ell}$.
Un tel réel ℓ est appelé ***point fixe*** *de la fonction f.*

Remarque : La réciproque est fausse. Ce n'est pas parce que la fonction admet un point fixe que la suite converge. Les graphes suivants illustrent différents cas de figures.

Point fixe attractif



Point fixe répulsif



Conjecture : Quelle propriété de f semble déterminer le caractère attractif ou répulsif d'un point fixe ? Que pourrait être un point fixe *indifférent* ?

Vous aurez bien sûr remarqué que les tangentes aux points fixes attractifs ont des coefficients directeurs inférieurs à 1 en valeur absolue alors que celles aux points fixes répulsifs ont des coefficients directeurs supérieurs à 1 en valeur absolue.
Un point fixe indifférent aurait alors une tangente de coefficient directeur égale à ± 1 tandis qu'un point fixe ayant une tangente de coefficient directeur nul serait qualifié de *super-attractif*.

Exercices

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1

1. Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme -17. Calculer u_1, u_2, u_7, u_{23}.
2. Déterminer la raison, le 1er et le 1000e terme d'une suite arithmétique $(v_n)_{\mathbb{N}}$ telle que $v_{102} = 47$ et $v_{157} = 25$.

Exercice 2 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison positive. On sait que la somme des trois premiers termes vaut 60 et que la somme de leur carré vaut 1 218. Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

Exercice 3 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$.

1. La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?
2. On suppose que pour tout entier n, $u_n \neq 0$ et on définit la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique et en donner les caractéristiques.
   (b) Donner l'expression de v_n en fonction de n et en déduire celle de u_n.
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 1$.

Exercice 4 Calculer la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$.

Exercice 5 On pose $u_n = 1 + 2 + ... + n = \sum_{i=1}^{i=n} i$ pour $n \geqslant 1$. On construit un carré de coté u_{n-1} que l'on « prolonge » par un autre de côté u_n : deux des côtés du premier sont inclus dans deux côtés du second.

1. Démontrer que l'aire du domaine situé entre les deux carrés égale n^3.
2. En déduire que $\sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2$.

Exercice 6 Le 31 décembre dernier, afin de fêter la nouvelle année et de fidéliser un nouveau client, le fabriquant de chewing-gums ChimyBul' en a offert trois à Ambroise qu'il s'est empressé de dévorer. Le lendemain, Ambroise en reçoit quatre et le surlendemain cinq qu'il mâche avidement. Évidemment, la promotion s'arrête bien vite mais Ambroise est déjà dépendant et continue d'en acheter et d'en manger un de plus par jour en dépit de sa santé mentale et physique dépérissante.

1. Définir une suite u donnant le nombre u_n de chewing-gums ChimyBul' ingurgités par Ambroise au n-ième jour de l'année. Quelle est sa nature ?
2. Combien en mangera-t-il le 31 décembre prochain ?
3. Combien en aura-t-il mangé au cours de l'année écoulée ?

Exercice 7

1. Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite géométrique telle que $u_3 = 12$ et $u_6 = 324$.
   Déterminer sa raison ainsi que u_4, u_{11} et u_0.
2. Soit $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -7 \times 3^{n-1}$.
   Montrer qu'elle est géométrique et en donner ses caractéristiques.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Calculer les premiers termes de le suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$. Est-elle arithmétique ou géométrique ?
2. Soit $(v_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - 3u_n$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique et en déterminer les caractéristiques.
3. Soit $(w_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = u_{n+1} - 2u_n$.
   Montrer que la suite $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique et en déterminer les caractéristiques.
4. Donner les expressions de v_n et w_n en fonction de n.
5. En déduire que, pour tout entier n, $u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 9 La petite souris a donné 2 euros à Léo qu'il a placé sur son livret Tout-Petit à un taux annuel mirifique de 25%. Aidez Léo à représenter graphiquement son capital dépendant du nombre d'années de placement puis déterminez le temps nécessaire au triplement de son capital.

Exercice 10 Soient les suites $u_n = 1.2^n$, $v_n = 0.85^n$, $w_n = (-1.5)^n$ et $t_n = -5 \times 0.7^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Étudier leurs variations et les tracer sur la calculatrice.

Exercice 11 Un jeune salarié de l'entreprise Fégaf se voit proposer une « promotion ». Il a le choix entre un premier contrat : premier salaire de 1000 € puis une augmentation annuelle de 8%, et un second : premier salaire de 1200 € puis une augmentation annuelle de 60 €.

1. Calculer les premiers salaires S_0, S_1, S_2, S_3 et T_0, T_1, T_2, T_3 des années 0, 1, 2, 3 pour les deux contrats.
2. Déterminer les relations de récurrence de chacune des deux suites (S) et (T) puis en donner la nature.
3. Déterminer, au moyen de la calculatrice, au bout de combien d'années le premier contrat devient le plus intéressant. Calculer alors le cumul des salaires reçus pour chacun des contrats. Qu'en penser ?
4. Comparer les croissances des deux suites (S) et (T).

Exercice 12 Balthazar dispose d'un petit pécule qu'il désire placer sur un livret à la banque et il souhaite déterminer le nombre d'années de placement nécessaires au doublement de son pécule.
On note $t \in [0\,;1]$ le taux d'intérêts composés annuel mirobolant que lui propose la banque, P le montant de son pécule initial, n le nombre d'années qu'il attend patiemment sans toucher à ses économies et s_n le montant de son pécule après n années de placement.

A. 1. Exprimer s_n en fonction de t, P et n puis étudier les variations de la suite $(s_n)_{\mathbb{N}}$.

2. Compléter le tableau suivant à l'aide de la calculatrice.

Taux de placement (en %)	1	2	4	5	10	15	20	30	50
t									
Nombre d'années pour une augmentation d'au moins 10%									
Nombre d'années pour une augmentation d'au moins 20%									
Nombre d'années pour un doublement du capital									

B. On note s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $s(x) = x^n$.

1. Calculer $s'(1)$. En déduire une approximation affine de $(1+t)^n$ pour $t \simeq 0$.

2. Justifier les observations faites précédemment.

De cette étude, on retient qu'il est pratiquement équivalent de considérer 10 augmentations de 1% successives et une augmentation globale de 10%. Ceci reste vrai si le taux t est assez « petit ». En revanche, si t est « grand » ($|t| > 0,05$ par exemple), ce résultat est faux.
Les intérêts simples et les intérêts composés sont équivalents pour des petits pourcentages seulement.

Exercice 13 Limites & Variations
Dans chaque cas, indiquer, construire ou tracer une suite :

1. qui converge vers zéro en décroissant ;
2. qui converge vers zéro en croissant ;
3. qui converge vers zéro, ayant une infinité de termes strictement positifs et une infinité strictement négatifs ;
4. qui diverge vers plus l'infini en croissant ;
5. qui diverge vers plus l'infini et qui n'est pas croissante, même à.p.c.r.

Exercice 14 Étudier les limites des suites $\left(\frac{3}{49} \times 1,2^n\right)_{\mathbb{N}}$, $\left(-2 \times \frac{1}{3^n}\right)_{\mathbb{N}}$ et $((-4)(-2)^n)_{\mathbb{N}}$.

Exercice 15 Le tenancier d'une officine de restauration baclée peine à vendre ses hot-dogs, produits sous cellophane qu'il prétend comestibles. Ayant commencé à un prix de 2€ l'unité, il les rabaisse de 20% quotidiennement mais n'en vend toujours qu'un par jour.
À la fin des temps, quand il aura vendu la totalité de son stock infini, pourra-t-il enfin écrire une carte postale depuis une île paradisiaque grâce aux fruits de la vente ?

Exercice 16 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer l'évolution de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.
3. En déduire les expressions de v_n puis de u_n en fonctions de n.
4. Déterminer la limite de $(v_n)_{\mathbb{N}}$ puis celle de $(u_n)_{\mathbb{N}}$.

Exercice 17 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1$.

1. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ puis conjecturer sa limite.
2. Trouver un réel a tel que $v_n = u_n - a$ soit une suite géométrique.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Démontrer que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 18 Une barrière de corail ceinture un atoll mais une algue brune prolifère au détriment du corail. Des relevés annuels menés tous les 1ers janvier de 2000 à 2010 font ressortir les informations suivantes :

• Au 1er janvier 2000, la superficie d'algue est de 150 000 m^2 et elle augmente de 15 % par an.

• À la même date, la superficie du corail est de 350 000 m^2 et diminue de 15 000 m^2 par an.

1. Calculer la superficie d'algue et celle de corail au 1er janvier 2001.
2. Soit n un entier naturel, on note u_n la superficie d'algue au 1er janvier $2000 + n$. Ainsi, $u_0 = 150\,000$.
   (a) Quelle est la nature de la suite u ? Justifier.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$. Que cela signifie-t-il ?
3. Soit n un entier naturel, on note v_n la superficie du corail au 1er janvier $2000 + n$. Ainsi, $v_0 = 350\,000$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de la suite v.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$. Que cela signifie-t-il ?

Exercice 19 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

1. Calculer les valeurs de u_n pour $n \in \{1, 2, 3, 5, 10\}$.
   Conjecturer alors le comportement de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.
2. Sachant que pour tout entier $i \in \mathbb{N}$ et tout réel positif x, $(1+x)^i \geqslant 1 + ix$, montrer que, pour tout $k > 0$, $\frac{u_k}{u_{k+1}} \geqslant 2$.
   Indices : $(p+1)! = (p+1) \times p!$ et $a^{m+1} = a \times a^m$.
3. En déduire le sens de variation de $(u_n)_{\mathbb{N}}$.

4. En utilisant le produit $\dfrac{u_2}{u_1} \times \dfrac{u_3}{u_2} \times \ldots \times \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$, démontrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
5. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 20 Un influenceur compte 7500 abonnés à son compte d'images publicitaires en ligne et doit en conserver au moins 1000 s'il veut continuer à recevoir les exorbitants émoluments versés par l'hébergeur de son compte. Malgré son incessante et futile activité, il perd 20 % d'abonnés par jour, bien qu'il en gagne concomitamment 300. Le nombre de ses abonnés diminue-t-il ou augmente-t-il ? Quand sera-t-il enfin remis à sa juste place ?

Exercice 21 On considère la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+1)u_n + n - 1}{2n} \end{cases}$.

1. (a) Expliciter les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$.
   (b) À l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{n}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Étudier les variations de la suite $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$.
   (e) Exprimer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} + v_n$ en fonction de n.
   (f) Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{\mathbb{N}^*}$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \dfrac{n}{2^{n-1}}$.
   (b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - n)$ et en déduire le sens de variation de $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$.

Exercice 22 En 2019, le Plastikistan a pris enfin des mesures pour supprimer progressivement l'utilisation des sacs en plastiques à usage unique. En effet, 16 milliards de sacs ont été utilisés cette année-là et il est plus que temps de réagir. Grâce à ces interventions, il est prévu que la quantité de sacs utilisés diminue annuellement d'un quart jusqu'à ce que leur nombre soit inférieur à 1 million. À l'aide de la calculatrice, déterminer quand cela se produira-t-il enfin ?

Sautez à présent vers la page 261 pour faire le devoir n° 9, puis la page 291 pour un rappel sur les algorithmes.

Corrigé des exercices

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1

1. Puisque $(u_n)_{\mathbb{N}}$, le premier terme est u_0 et l'on a
   $u_1 = u_0 + r = u_0 + 4 = -17 + 4 = -13, \quad u_2 = u_1 + 4 = -13 + 4 = -9,$
   $u_7 = u_0 + 7r = -17 + 7 \times 4 = 11$ et $u_{23} = -17 + 23 \times 4 = 75.$
2. On a $\left\{ \begin{array}{l} 47 = v_{102} = v_0 + 102r \\ 25 = v_{157} = v_0 + 157r \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} v_0 = 47 - 102r \\ 25 = 47 - 102r + 157r \end{array} \right.$
   $\iff \left\{ \begin{array}{l} v_0 = 47 - 102r \\ 55r = 25 - 47 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} r = -\frac{22}{55} = -\frac{2}{5} \\ v_0 = 47 - 102 \times \frac{-2}{5} = \frac{439}{5} \end{array} \right.$
   et $v_{999} = \frac{439}{5} - \frac{2}{5} \times 999 = -\frac{1559}{5}.$

Exercice 2 On a $u_0 + u_1 + u_2 = 60$ et $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = 1218.$
Ainsi, $u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r = 3(u_0 + r) = 3u_1 = 60$ et $u_1 = 20.$
D'où $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = (u_1 - r)^2 + u_1^2 + (u_1 + r)^2 = (20 - r)^2 + 20^2 + (20 + r)^2$
$= 400 - 40r + r^2 + 400 + 400 + 40r + r^2 = 2r^2 + 1200.$
$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = 1218 \iff r^2 = 9 \iff r = \pm 3 \overset{r \geqslant 0}{\iff} r = 3$ et $u_0 = u_1 - r = 17.$

Exercice 3 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$.

1. On a $u_1 = \frac{2u_0}{2+3u_0} = \frac{2}{5}$ et $u_2 = \frac{2u_1}{2+3u_1} = \frac{1}{4}$.
   Puisque $u_1 - u_0 = -\frac{3}{5} \neq -\frac{3}{20} = u_2 - u_1,$ la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique.
2. On suppose que pour tout entier n, $u_n \neq 0$ et on définit la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.
   (a) On a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2+3u_n}{2u_n} - \frac{2}{2u_n} = \frac{2+3u_n-2}{2u_n} = \frac{3u_n}{2u_n} = \frac{3}{2}$ donc la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1.$
   (b) Ainsi, $v_n = v_0 + nr = \frac{3}{2}n + 1$ et $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{\frac{3}{2}n+1}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
   $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\frac{3}{2}(n+1)+1} - \frac{1}{\frac{3}{2}n+1} = 2\frac{(3n+2)-(3n+5)}{(3n+3+2)(3n+2)} = \frac{-6}{(3n+5)(3n+3)} < 0$ donc la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
4. Puisque v_n est de raison positive, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante donc, $\forall n$, $v_n \geqslant v_0 = 1 > 0$ et donc $u_n = \frac{1}{v_n} > 0.$ Par ailleurs, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante donc $u_n \leqslant u_0 = 1.$

Exercice 4 $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = \dfrac{100\,(100+1)}{2} = 5050.$

Exercice 5 $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} i$ pour $n \geqslant 1.$ Le carré de côté u_{n-1} est « emboîté » dans un autre de côté u_n.

1. On a $\mathscr{A} = \mathscr{A}_n - \mathscr{A}_{n-1} = u_n^2 - u_{n-1}^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2$
$\mathscr{A} = \frac{1}{4}\left[n(n+1) - (n-1)n\right]\left[n(n+1) + (n-1)n\right]$
$= \frac{1}{4}(n^2+n-n^2+n)(n^2+n+n^2-n) = \frac{2n\times 2n^2}{4} = n^3.$
2. Puisque l'aire du carré de côté n égale la somme des aires « emboîtées », on a
$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} i\right)^2 = u_n^2 = u_1^2 + (u_2^2 - u_1^2) + ... + (u_{n-1}^2 - u_{n-2}^2) + (u_n^2 - u_{n-1}^2)$$
$$= 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \sum_{i=1}^{i=n} i^3.$$

Exercice 6

1. $u_0 = 3, \quad u_{n+1} = u_n + 1\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ est arithmétique de raison 1.
2. Puisque $u_n = u_0 + n\,r, \qquad u_{365} = 3 + 365 \times 1 = 368.$
Ambroise mâchera 368 chewing-gums le 31/12 prochain.
3. $S_{365} = u_1 + \ldots + u_{365} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{365} - u_0 = (365+1)\dfrac{3+368}{2} - u_0$
$= 67\,893 - 3 = 67\,890$ chewing-gums mâchés par Ambroise cette année.

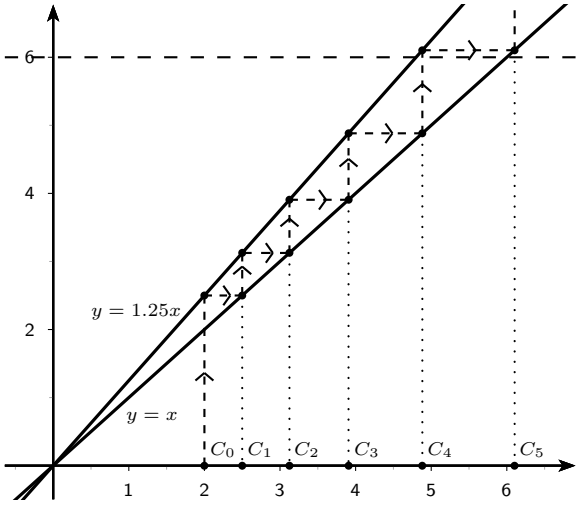
Exercice 7

1. On a $\frac{u_6}{u_3} = \frac{u_0\,q^6}{u_0\,q^3} = q^3 = \frac{324}{12} = 27$ donc $\quad q = \sqrt[3]{27} = 3 \quad$ et $\quad u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}.$
Ainsi, $\quad u_4 = u_3 \times q = 12 \times 3 = 36 \quad$ et $\quad u_{11} = u_6 \times q^{11-6} = 324 \times 3^5 = 78\,732.$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-7\times 3^{n+1-1}}{-7\times 3^{n-1}} = 3 \quad$ donc $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $\quad v_0 = -7 \times 3^{0-1} = -\frac{7}{3}.$

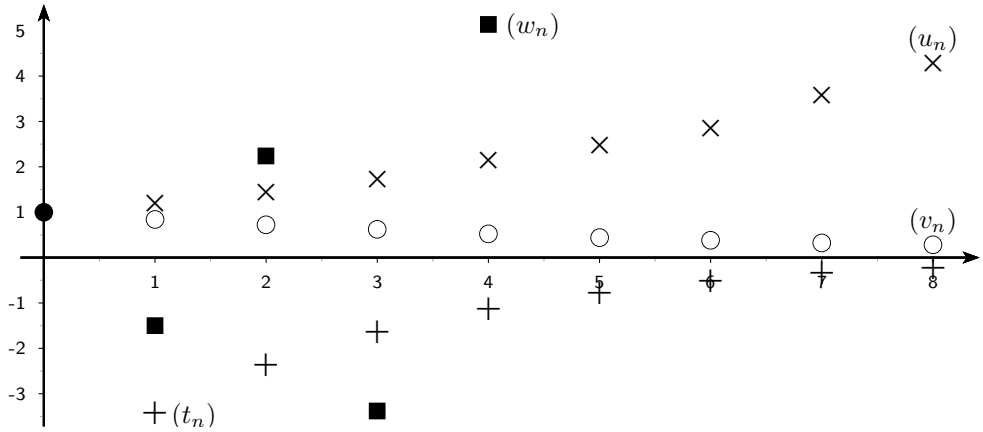
Exercice 8 Soit $\quad u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, \quad v_n = u_{n+1} - 3u_n \quad$ et $w_n = u_{n+1} - 2u_n.$

1. On a $\quad u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 5, \quad u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 19 \quad$ et $\quad u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 65.$
$u_1 - u_0 = 1 \neq 4 = u_2 - u_1$: $(u_n)_{\mathbb{N}}$ non arithmétique, $\quad \frac{u_2}{u_1} = 5 \neq \frac{19}{5} = \frac{u_3}{u_2}$: $(u_n)_{\mathbb{N}}$ non géométrique.
2. On a $\quad \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+2}-3u_{n+1}}{u_{n+1}-3u_n} = \frac{5u_{n+1}-6u_n-3u_{n+1}}{u_{n+1}-3u_n} = \frac{2u_{n+1}-6u_n}{u_{n+1}-3u_n} = 2\frac{u_{n+1}-3u_n}{u_{n+1}-3u_n} = 2$
donc la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_{0+1} - 3u_0 = 1.$
3. On a $\quad \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{u_{n+2}-2u_{n+1}}{u_{n+1}-2u_n} = \frac{5u_{n+1}-6u_n-2u_{n+1}}{u_{n+1}-2u_n} = \frac{3u_{n+1}-6u_n}{u_{n+1}-2u_n} = 3\frac{u_{n+1}-2u_n}{u_{n+1}-2u_n} = 3$
donc la suite $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $w_0 = u_{0+1} - 2u_0 = 1.$
4. Ainsi, $\quad v_n = v_0\,q^n = 2^n \quad$ et $\quad w_n = w_0\,q'^n = 3^n.$
5. Puisque, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n - v_n = (u_{n+1} - 2u_n) - (u_{n+1} - 3u_n) = u_n, \quad u_n = 3^n - 2^n.$

Exercice 9 Soit C_n le capital acquis après n années de placement.
On a $\quad C_0 = 2, \quad C_{n+1} = C_n + \frac{25}{100}\,C_n = 1,25\,C_n \quad$ est une suite géométrique de raison $1,25 > 1$ donc (C_n) est croissante et pout tout $n \in \mathbb{N}, \quad C_n = 2 \times 1,25^n.$
Léo peut observer ci-dessous que son capital aura triplé dans cinq ans et, en effet, $1,25^5 \gtrsim 3.$



Exercice 10 Ces suites étant géométriques, $(u_n)_{\mathbb{N}} = (1.2^n)_{\mathbb{N}}$ est croissante car $1.2 > 1$, $(v_n)_{\mathbb{N}} = (0.85^n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante car $0 < 0.85 < 1$, $(w_n)_{\mathbb{N}} = ((-1.5)^n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas monotone car $-1.5 < 0$ et $(t_n)_{\mathbb{N}} = (-5 \times 0.7^n)_{\mathbb{N}}$ est croissante car opposée à la suite décroissante (0.7^n).



Exercice 11

1. $S_0 = 1000$, $S_1 = 1.08 \times 1000 = 1080$, $S_2 = 1.08 \times 1080 = 1166.4$, $S_3 = 1.08 \times 1166.4 \simeq 1259,7$ et $T_0 = 1200$, $T_1 = 1200 + 60 = 1260$, $T_2 = 1260 + 60 = 1320$, $T_3 = 1320 + 60 = 1380$.
2. $(S) : \left\{ \begin{array}{l} S_0 = 1000 \\ S_{n+1} = 1,08\, S_n \end{array} \right.$ géométrique et $(T) : \left\{ \begin{array}{l} T_0 = 1200 \\ T_{n+1} = T_n + 60 \end{array} \right.$ arithmétique.
3. On a $S_5 \simeq 1469$, $S_6 \simeq 1587$ et $T_5 = 1500$, $T_6 = 1560$. Le premier contrat devient intéressant après six années de travail. En revanche, les cumuls des salaires antérieurement reçus sont les suivants.
$$\Sigma_S = S_0 \frac{1 - 1,08^{5+1}}{1 - 1,08} \times 12 \text{ mois} \simeq 88\,000 \text{ €}$$

CORRIGÉS

$$\Sigma_T = (5+1)\frac{T_0+T_5}{2} \times 12 \text{ mois} \simeq 97\,000 \text{ €}.$$

4. On observe à la calculatrice que le premier contrat progresse bien plus vite que le second. Par exemple, après vingt-et-un ans de travail, le premier contrat offre 5 034 €, plus du double du second : 2 460 €.

Exercice 12

A. 1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = (1+t)^n P$ qui est une suite géométrique de raison $1+t>1$ et de premier terme $s_0 = P > 0$. $(s_n)_{\mathbb{N}}$ est donc croissante.

2.

Taux de placement (en %)	1	2	4	5	10	15	20	30	50
t	$0,01$	$0,02$	$0,04$	$0,05$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,3$	$0,5$
n pour une augmentation $\geqslant 10\%$	10	5	3	2	1	1	1	1	1
n pour une augmentation $\geqslant 20\%$	19	10	5	4	2	2	1	1	1
n pour un doublement du capital	70	36	18	15	8	5	4	3	2

B. 1. On a $s(x) = x^n$ donc $s'(x) = n\,x^{n-1}$ et $s'(1) = n\,1^{n-1} = n$.
Ainsi, pour t proche de 0, *i.e.* $1+t$ proche de 1,
$(1+t)^n = s(1+t) \simeq s(1) + s'(1)\,[(1+t)-1] = 1^n + n \times t = 1 + nt$.

2. Ceci montre que si t est proche de 0 (et n « petit »), n années d'intérêts composés à un taux t équivalent une seule augmentation d'un taux de $n\,t$.

Exercice 13 Limites & Variations

1. $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{2^n}$ convergent vers zéro en décroissant.
2. $-\dfrac{1}{n^2}$ et $-\dfrac{5}{3^n}$ convergent vers zéro en croissant.
3. $\dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$ convergent vers 0, une infinité de termes positifs et une infinité négatifs.
4. n^3 et 4^n divergent vers plus l'infini en croissant.
5. $n + 3(-1)^n$ diverge vers plus l'infini et n'est pas croissante, même à.p.c.r.

Exercice 14
- $1,2 > 1$ donc $1,2^n \longrightarrow +\infty$ et $\left(\frac{3}{49} \times 1,2^n\right)_{\mathbb{N}}$ aussi car $\frac{3}{49} > 0$.
- $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tend vers 0 et $\left(-2 \times \frac{1}{3^n}\right)_{\mathbb{N}}$ aussi.
- $-2 < -1$ donc $(-2)^n$ n'a pas de limite et $((-4)(-2)^n)_{\mathbb{N}}$ non plus.

Exercice 15 Soit p_n le prix de vente en euros du hot-dog le n-ième jour.
On a $p_1 = 2$, $p_{n+1} = \left(1 - \frac{20}{100}\right)\,p_n = 0,8\,p_n$, suite géométrique de raison $0,8$.
Après n jours, il récolte

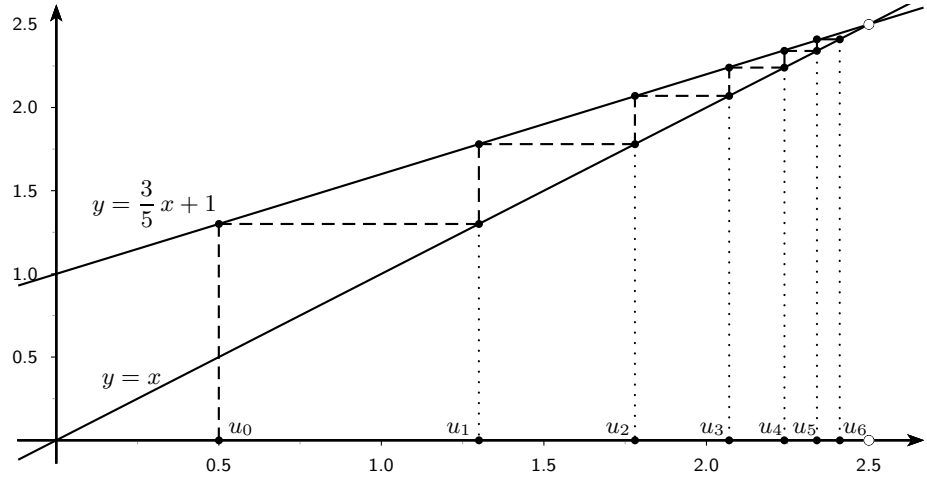
$$S_n = p_1 + p_2 + \ \ldots\ + p_n = p_1\,\frac{1-0,8^n}{1-0,8} = 2 \times \frac{1-0,8^n}{0,2} = 10\,(1-0,8^n) \text{ €}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} (0,8)^n = 0$, s'il réussissait à vendre la totalité (infinie) de son stock, il récolterait au total : $S = 10\,(1-0) = 10$ € mais il est très difficile pour ce prix d'aller sur une île paradisiaque (à moins d'y habiter).

Exercice 16 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

1. À la calculatrice, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ semble converger vers 2 ce qui est plausible puisque 2 est un point fixe de la fonction de récurrence : $\frac{1}{2}\sqrt{2^2+12} = 2$.
2. $\forall n \geqslant 0, \quad v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\right)^2 - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 + \frac{12}{4} - \frac{16}{4}$
   $= \frac{1}{4}(u_n^2 - 4) = \frac{1}{4}v_n$
   et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0^2 - 4 = -4$.
3. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0.q^n = -4.\frac{1}{4^n} = -\frac{1}{4^{n-1}}$ et, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ étant positive, $u_n = \sqrt{v_n + 4} = \sqrt{4 - \frac{1}{4^{n-1}}}$.
4. $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc (v_n) tend vers 0. Or $u_n = \sqrt{v_n + 4}$ car u_n est positive donc u_n tend vers $\sqrt{0+4} = 2$.

Exercice 17 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + 1$.

1. 

   $(u_n)_{\mathbb{N}}$ semble converger vers $2,5$ ce qui est plausible puisque $\frac{5}{2}$ est un point fixe : $\frac{3}{5} \times \frac{5}{2} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$.
2. Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers $2,5$ alors $v_n = u_n - a$ converge vers $2,5 - a$.
   Par ailleurs, si $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique (non constante) et convergente, alors $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   Ainsi, par unicité de la limite de $(v_n)_{\mathbb{N}}$, on devrait avoir $2,5 - a = 0$.
   Posons donc $a = \frac{5}{2}$ et $v_n = u_n - \frac{5}{2}$. On a
   $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}u_n + 1 - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}u_n - \frac{3}{2} = \frac{3}{5}(u_n - \frac{3}{2}.\frac{5}{3}) = \frac{3}{5}(u_n - \frac{5}{2}) = \frac{3}{5}v_n$
   et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{5}{2} = -2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0\, q^n = -2\left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $u_n = v_n + \frac{5}{2} = -2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{5}{2}$.
4. $-1 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\left(\frac{3}{5}\right)^n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[+\infty]{} -2 \times 0 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

Exercice 18

1. Au 01/01/01, on a $150\,000 \times 1,15 = 172\,500\,m^2$ d'algues et $350\,000 - 15\,000 = 335\,000\,m^2$ de corail.

CORRIGÉS

2. (a) Pour ajouter 15%, il faut multiplier par $1+\frac{15}{100}$ donc on a $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n\times 1,15$ et la suite u est géométrique de raison 1,15 et de premier terme 150 000.

   (b) Ainsi, $u_n=u_0.q^n=150\,000\times 1,15^n,\quad \forall n\in\mathbb{N},$

   (c) La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ étant géométrique de raison strictement supérieure à 1 et de premier terme positif, elle diverge vers $+\infty$.
   Cela signifie que les algues finiront par recouvrir tout l'espace disponible puisque ce dernier est fini.

3. (a) Puisque la surface de corail diminue de $15\,000\,m^2$ chaque année, on a $v_{n+1}=v_n-15\,000$ et la suite v est arithmétique de raison $-15\,000$ et de premier terme $350\,000$.

   (b) Ainsi, $v_n=v_0+nr=350\,000-15\,000\,n,\quad \forall n\in\mathbb{N},$

   (c) La suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ étant arithmétique de raison strictement négative, elle diverge vers $-\infty$.
   Cela signifie que le corail finira par disparaître (et le modèle ne sera alors plus valide).

Exercice 19 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

1. On a $u_1=\frac{1!}{1^1}=1,\quad u_2=\frac{2!}{2^2}=\frac{1}{2},\quad u_3=\frac{3!}{3^3}=\frac{2}{9},\quad u_5=\frac{5!}{5^5}=\frac{24}{625},$ et $u_{10}=\frac{10!}{10^{10}}\simeq 3,6.10^{-4}$.
   La suite (u_n) semble décroissante et converger vers 0.

2. $\dfrac{u_k}{u_{k+1}}=\dfrac{k!\,/\,k^k}{(k+1)!\,/\,(k+1)^{k+1}}=\frac{k!}{(k+1)!}\times\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}=\frac{1}{k+1}\times\frac{(k+1)\times(k+1)^k}{k^k}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$
   $=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\geqslant 1+k\times\frac{1}{k}=2.$

3. La suite (u_n) est une suite strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{1}{2}<1$: elle est donc décroissante.

4. En simplifiant les fractions de proche en proche, on obtient $\dfrac{u_2}{u_1}\times\dfrac{u_3}{u_2}\times\dfrac{u_4}{u_3}\times\ldots\times\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=\dfrac{u_n}{u_1}$.
   Or, d'après la question 2, $\frac{u_{k+1}}{u_k}\leqslant\frac{1}{2}$ pour tout $k>0$ donc
   $\frac{u_n}{u_1}\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\ldots\frac{1}{2}$ et $u_n\leqslant u_1\times\frac{1}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

5. La suite $\frac{1}{2^{n-1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ étant géométrique de raison $\frac{1}{2}\in\,]-1\,;1\,[$, elle converge vers 0 et, puisque $0\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},$ on peut penser que (u_n) converge de même vers 0 (c'est un théorème de terminale).

Exercice 20 Soit a_n le nombre des abonnés de l'influenceur au n-ième jour. D'après l'énoncé, on a $a_1=7500$ et $a_{n+1}=(1-\frac{20}{100})a_n+300=\frac{4}{5}a_n+300$. À l'aide de la calculatrice, on conjecture que $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 1500. En effet, 1500 est l'unique point fixe de la fonction de récurrence : $\frac{4}{5}x+300=x\Leftrightarrow\frac{1}{5}x=300\Leftrightarrow x=1500$.
Introduisons la suite annexe $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie par $b_n=a_n-1500$.

On a $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}-1500}{a_n-1500} = \frac{\frac{4}{5}a_n+300-1500}{a_n-1500} = \frac{\frac{4}{5}a_n-1200}{a_n-1500} = \frac{\frac{4}{5}(a_n-1500)}{a_n-1500} = \frac{4}{5}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = \frac{4}{5}$ et de premier terme $b_1 = a_1 - 1500 = 6000$. Puisque $q \in]\,0\,;1\,[$ et $b_1 > 0$, $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et puisque $q \in]\,-1\,;1\,[$, $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Ainsi, $a_n = b_n + 1500$ est aussi strictement décroissante et converge vers $0 + 1500 = 1500$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 1500 > 1000$ et l'influenceur sévira malheureusement jusqu'à la fin des temps.

Exercice 21 Soit la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n+n-1}{2n}$.

1. (a) On a $u_1 = 2$, $u_2 = u_{1+1} = \frac{(1+1)u_1+1-1}{2\times 1} = \frac{2\times 2}{2} = 2$,
   $u_3 = u_{2+1} = \frac{(2+1)u_2+2-1}{2\times 2} = \frac{3\times 2+1}{4} = \frac{7}{4}$
   et $u_4 = u_{3+1} = \frac{(3+1)u_3+3-1}{2\times 3} = \frac{4\times\frac{7}{4}+2}{6} = \frac{3}{2}$.
   (b) Sur la calculatrice, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ semble décroissante et converger vers 1.

2. (a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{n}$. On a
   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_{n+1}-1}{n+1}}{\frac{u_n-1}{n}} = \frac{n}{n+1}\,\frac{\frac{(n+1)u_n+n-1}{2n} - 1}{u_n - 1}$$
   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{(n+1)(u_n-1)}\,\frac{(n+1)u_n+n-1-2n}{2n} = \frac{(n+1)u_n - n - 1}{2(n+1)(u_n-1)}$$
   $$= \frac{(n+1)(u_n-1)}{2(n+1)(u_n-1)} = \frac{1}{2}$$
   et $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = \frac{u_1-1}{1} = \frac{2-1}{1} = 1$.
   (b) Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$.
   (c) Puisque $q = \frac{1}{2} \in]\,0\,;1\,[$ et $v_1 > 0$, la suite $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (d) Puisque $q = \frac{1}{2} \in]\,-1\,;1\,[$, les suites $\left(q^{n-1}\right)_{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ tendent vers 0.
   (e) On a $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1} + v_n = v_1\frac{1-q^n}{1-q} = 1\frac{1-1/2^n}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-1/2^n)$.
   (f) Et $S_n = 2(1-1/2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2(1-0) = 2$.

3. (a) Puisque $v_n = \frac{u_n-1}{n}$, on a $u_n - 1 = nv_n$ et $u_n = nv_n + 1 = 1 + \frac{n}{2^{n-1}}$.
   (b) Ainsi, $u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{n+1}{2^{n+1-1}}\right) - \left(1 + \frac{n}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^n}(n+1-2n)$
   $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-n) \leqslant 0$ donc $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Exercice 22 Soit p_n le nombre de sacs en plastique utilisés au Plastikistan l'année $2019 + n$. On a $p_0 = 16.10^9$, $p_{n+1} = (1-\frac{1}{4})p_n = \frac{3}{4}p_n$ qui est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4} \in [\,0\,;1\,[$ et de premier terme positif donc $p_n \longrightarrow 0$ et $(p_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante. Un tableau de valeurs à la calculatrice montre que $p_{33} > 10^6 > p_{34}$.
Le nombre de sacs en plastique utilisés serait donc inférieur à un million en l'an $2019 + 34 = 2053$.

Chapitre VIII

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Sommaire

Introduction 135
1 Probabilité conditionnelle 137
1.1 Définition 137
1.2 Formule des probabilités totales 138
1.3 Arbre de probabilité 138
2 Indépendance 139
2.1 Définition 139
2.2 Indépendance des événements contraires 140
Exercices 141
Corrigé des exercices 149

Introduction

La notion de « risque », préalable à l'étude des probabilités, n'est apparue qu'au XIIe siècle pour l'évaluation de contrats commerciaux. Le véritable début de la théorie date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654. Ceux-ci commencent à élaborer les bases du traitement mathématique des probabilités autour de l'étude de jeux de hasard. Même s'ils sont considérés comme les fondateurs du traitement des probabilités, ils ne publient rien de leurs travaux. Vient ensuite Thomas Bayes (1702 - 1761), mathématicien britannique qui a grandement contribué à l'élaboration du concept de conditionnalité. Ce n'est qu'au XIXe siècle qu'apparaît ce qui peut être considéré comme la théorie moderne des probabilités et il faudra attendre 1933 pour que sorte un ensemble de méthodes et d'exemples divers et que les probabilités deviennent une véritable théorie axiomatisée.

Les jeux de hasard sont l'application la plus naturelle des probabilités mais de nombreux autres domaines s'appuient ou se servent des probabilités : statistiques, économie, finance, aide à la décision, imagerie médicale, physique (quantique ou non), évaluation des risques, mouvements aléatoires,...

Activité

Si vous êtes sages, il y a une forte probabilité que vous ayez une correction de cette activité en page 149.

Voici la répartition selon le salaire et le sexe des employés d'une fabrique de machines à machin-trucs.

	Salaire $\leqslant 20\,000$ €	*Salaire* $> 20\,000$ €
Femme	0,35	0,1
Homme	0,3	0,25

On considère les événements F *: « l'employé choisi est une femme »*
et E *: « l'employé choisi gagne moins de 20 000* € *par an ».*

1. *Que signifient les valeurs* 0,25 *et* 0,35 *?*
2. *Parmi les employés, on en choisit un au hasard.*
   (a) *Quelle est la probabilité que ce soit une femme qui gagne moins de 20 000* € *par an ?*
   (b) *Quelle est la probabilité qu'il gagne moins de 20 000* € *par an ?*
   (c) *Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?*
   (d) *Calculer* $P(E) \times P(F)$ *et comparer ce produit à* $P(E \cap F)$.
3. *Parmi les femmes, on en choisit une au hasard.*
   (a) *Quelle est la probabilité qu'elle gagne moins de 20 000* € *par an ?*
   (b) *Comparer la probabilité précédente au quotient* $\dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$.
4. *Parmi les employés qui gagnent moins de 20 000* €*, on en choisit un au hasard.*
   (a) *Quelle est la probabilité que l'employé choisi soit une femme ?*
   (b) *Exprimer la probabilité précédente au moyen des probabilités* $P(E \cap F)$ *et* $P(E)$.
5. *Calculer puis interpréter le quotient* $\dfrac{P(E \cap \overline{F})}{P(\overline{F})}$.
6. *Dresser deux arbres pondérés avec des probabilités en lettres.*

1 Probabilité conditionnelle

1.1 Définition

En préambule, nous rappelons la définition d'une loi de probabilité P sur un univers fini $\Omega = \{x_1; \ldots; x_n\}$.

Définition & Propriété 1 *Définir une* ***loi de probabilité*** P *sur un univers fini* Ω*, c'est associer à chaque issue* $x_i \in \Omega$ *un réel* p_i *de l'intervalle* $[\,0\,;1\,]$ *tel que la somme des probabilités de toutes les issues vaut* 1.

$$P : x_i \mapsto p_i \quad \textit{tel que} \quad \boldsymbol{0 \leqslant p_i \leqslant 1} \quad \textit{et} \quad \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{i=n}} \boldsymbol{p_i = 1}.$$

Le nombre p_i *est appelé* ***probabilité de l'événement élémentaire*** x_i *et on note* $p_i = P(\{x_i\})$.

La ***probabilité d'un événement*** *est la somme des probabilités de toutes les issues qui le réalisent :*

$$\textit{Si} \quad A = \{x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_m}\} \quad \textit{alors} \quad P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_m}.$$

On a toujours $\quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad$ *et* $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Suite à notre activité d'introduction, il est bigrement tentant de se lancer dans la définition suivante, non ?

Définition 1 ***Probabilité conditionnelle***

A et B étant deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $P(A) \neq 0$, on définit la ***probabilité conditionnelle de B sachant A*** *par le nombre*

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}.$$

Propriété 2 *Si* $P(A) \times P(B) \neq 0$,

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)}.$$

Dém. : C'est une conséquence immédiate de la définition des probas conditionnelles. □

Théorème 1

Si $P(A) \neq 0$*, la probabilité conditionnelle* P_A *définit une loi de probabilité sur* Ω.

En particulier, $\quad \boldsymbol{P_A(\Omega) = 1}, \quad \boldsymbol{P_A(\varnothing) = 0} \quad$ *et* $\quad \boldsymbol{P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1}$.

Démonstration :

- Puisque $\quad A \cap B \subset A, \quad 0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(A) \quad$ et $\quad 0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$.
- Si $x \notin A, \quad P_A(\{x\}) = \frac{P(\varnothing)}{P(A)} = 0$

donc $\quad \sum_{x \in \Omega} P_A(\{x\}) = \sum_{x \in A} P_A(\{x\}) = \frac{1}{P(A)} \sum_{x \in A} P(\{x\}) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$

Autrement dit, $\quad P_A(\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$

On a $\quad P_A(\varnothing) = \frac{P(A \cap \varnothing)}{P(A)} = \frac{P(\varnothing)}{P(A)} = 0$

et $\quad P_A(B) + P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$ □

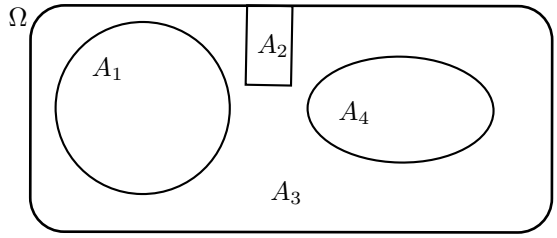
1.2 Formule des probabilités totales

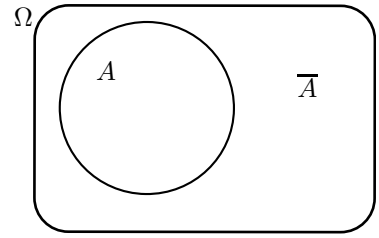
Notoirement joueurs et facétieux, les mathématiciens se devaient de s'intéresser aux découpages, façon puzzles.

Définition 2 *On dit que les événements A_1, A_2,...,A_n, pour $n \geqslant 2$, forment une* ***partition*** *de l'univers Ω si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- *Chacun de ces événements est non vide :* $\forall i = 1, ..., n, \quad A_i \neq \varnothing$.
- *Ces événements sont deux à deux incompatibles :*
  $\forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., n, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.
- *Leur réunion est égale à Ω :* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

En particulier, pour tout événement A non vide et différent de Ω,
$\{A\,,\ \overline{A}\}$ *est une partition de Ω.*





Théorème 2 ***Probabilités totales***
Soit A_1, A_2,...,A_n une partition de Ω et soit B un événement de Ω. On a
$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)}.$$
Si de plus, $P(A_i) \neq 0$ $\forall i$,
$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}.$$
En particulier, si $P(A) \times P(\overline{A}) \neq 0$,
$$\boldsymbol{P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que B est la réunion disjointe des événements $A_i \cap B$. Sa probabilité est alors la somme des probabilités de ces événements.
Les lignes suivantes en sont des conséquences immédiates. □

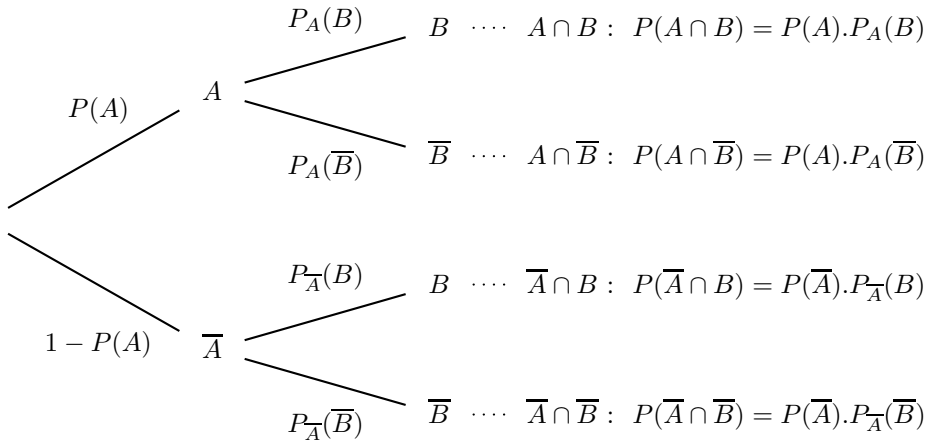
Exemple : Dans l'activité de la page 136, on a bien
$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}) = 0,35 + 0,3 = 0,65$ et
$P(F) \times P_F(E) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(E) = (0,35 + 0,1) \times \frac{0,35}{0,45} + (0,30 + 0,25) \times \frac{0,3}{0,55} = 0,65$.

1.3 Arbre de probabilité

Les règles suivantes découlent de la définition des probabilités conditionnelles et des théorèmes précédents.

Règles Dans un arbre de probabilités,

- la probabilité inscrite sur une branche reliant un événement A à un événement B est la probabilité conditionnelle de B sachant A ;
- la somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud vaut 1 ;
- la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à celui-ci.



$P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$ et $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ par exemple.

2 Indépendance

2.1 Définition

A et B sont deux événements de probabilité non nulle d'une expérience aléatoire. Dans certaines situations, il peut arriver que le fait de savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit. On dit alors que B est indépendant de A ce qui signifie $P_A(B) = P(B)$. Ainsi, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$ et $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$: A est alors indépendant de B.

Définition 3 *Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque*

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}.$$

Remarques : • Il n'est pas nécessaire que les événements indépendants soient de probabilité non nulle mais si $P(B) = 0$ par exemple, on a $P(B \cap A) \leqslant P(B) = 0$ donc $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0 = P(B)$ et B est indépendant de A.

• Ne pas confondre indépendance ($P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$) et incompatibilité ($A \cap B = \varnothing$). En effet, deux événements ne peuvent être à la fois indépendants et incompatibles que si au moins l'un des deux est de probabilité nulle, ce qui n'est généralement pas le cas des événements considérés. Effectivement, si deux événements

sont incompatibles, le fait d'avoir l'un implique nécessairement de ne pas avoir l'autre : ils sont donc « liés », en quelque sorte.

Exemple : On a vu que $P(E) \times P(F) = 0,2925 \neq 0,35 = P(E \cap F)$ donc les événements E et F de l'activité de la page 136 ne sont pas indépendants.

2.2 Indépendance des événements contraires

Théorème 3 *Si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour les couples d'événements $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.*

Démonstration : • On a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Par ailleurs, $\{A, \overline{A}\}$ forme une partition de Ω.
La formule des probabilités totales affirme alors que $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.
D'où, $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) \times (1 - P(A))$
$= P(B) \times P(\overline{A})$: $\overline{A}$ et B sont donc indépendants.

• Il suffit de reprendre le raisonnement ci-dessus en échangeant A et B.

• D'après le premier point, $\overline{A}$ et B sont indépendants et d'après le second, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi. □

Exercices

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exercice 1 Repérer les phrases qui définissent une probabilité conditionnelle.

1. 65 % des individus de cette population sont bilingues.
2. Parmi les anglophones de cette population, 30 % sont trilingues.
3. 40 % de cette population parle anglais et espagnol.
4. Cette population est composée d'individus de neuf nationalités différentes.
5. 60 % des européens de cette population sont bilingues.

Exercice 2 On considère une loterie dont certains tickets sont gagnants mais pas tous. Dans cette loterie, certains tickets sont carmin mais pas tous. On tire au hasard un ticket et l'on appelle C l'événement « le ticket tiré est carmin » et G l'événement « le ticket tiré est gagnant ». Traduire en terme de probabilité les phrases suivantes.

1. Le quart des tickets carmin sont gagnants.
2. Le tiers des tickets gagnants sont carmin.
3. Un ticket sur cinq est carmin et gagnant.
4. Un ticket perdant sur cinq est carmin.

Exercice 3

1. On donne $P_A(B) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,3$. Calculer $P(A)$.
2. On donne $P(B) = 0,7$ et $P_B(A) = 0,2$. Calculer $P(A \cap B)$.
3. On donne $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,7$ et $P(A \cup B) = 0,9$.
   Calculer $P(A \cap B)$, $P_B(A)$ et $P_A(B)$.
4. On donne $P(B) = 2\,P(A)$, $P(A \cup B) = 0,5$ et $P_A(B) = 0,5$.
   Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
5. On donne $P_A(B) = 0,5$, $P_B(A) = 0,3$ et $P(B) = P(A) + 0,3$.
   Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
6. Dans chacun des cas précédents et lorsque c'est possible, préciser si les événements A et B sont indépendants.

Exercice 4 A, B et $A \cap B$ étant de probabilité non nulle,
déterminer $P_A(A)$, $P_A(\overline{A})$, $P_{A\cap B}(A)$ et $P_B(A \cup B)$.

Exercice 5 Au restaurant de La Fare-en-Dole, on a constaté que 80 % des clients prennent un café et que 40 % des clients prennent un dessert dont les trois-quarts prennent aussi un café.

1. On choisit un quidam lambda au hasard parmi les clients du restaurant au hasard.

(a) Quelle est la probabilité qu'il prenne un dessert et un café ?

(b) Quelle est la probabilité qu'il ne prenne ni dessert ni café ?

2. On choisit un client qui a pris un café. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas pris de dessert ?
3. Sachant qu'un client n'a pas pris de café, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas pris de dessert ?
4. Ces deux événements sont-ils indépendants ?

Exercice 6 Il est bien connu que les habitants de La Fare-en-Dole sont cinéphiles. Cette année,

- 25 % des farendoliens ne sont pas allés au cinéma,
- 50 % des farendoliens y sont allés une fois et 70 % d'entre eux ont vu un film français,
- 25 % des farendoliens sont allés au moins deux fois au cinéma et 80 % d'entre eux ont vu un film français.
- Certains auraient même vu *Math Attack !*

On interroge un quidam lambda au hasard parmi les farendoliens.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit allé au cinéma au cours de cette année ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ait vu un film français au cours de cette année ?
3. Le fait d'avoir vu un film français est-il indépendant du fait d'être allé au cinéma ?

Exercice 7 Le tableau suivant donne la répartition des 1 250 élèves du lycée Henri Matisse de La Fare-en-Dole selon leur classe et leur participation au club *Math Max* proposé dans l'établissement.

	Seconde	Première	Terminale
participent au club	70	28	24
ne participent pas	430	322	376

1. On choisit un élève de seconde au hasard. Quelle est la probabilité qu'il participe au club *Math Max* ?
2. On choisit un élève du lycée au hasard.
   (a) Construire un arbre pondéré schématisant la situation.
   (b) Quelle est la probabilité que ce soit un élève de seconde participant au club ?
   (c) Quelle est la probabilité que ce soit un élève participant au club ?
   (d) Sachant que l'élève choisi participe au club, quelle est la probabilité qu'il soit en classe de première ?
   (e) Le fait qu'il participe au club est-il indépendant du fait qu'il soit en classe de première ?

Exercice 8 Au carrefour principal de La Fare-en-Dole, doté d'un feu tricolore, on a remarqué que :

- 2 % des véhicules s'arrêtent au feu vert ;
- 65 % des véhicules s'arrêtent au feu orange ;

- 97 % des véhicules s'arrêtent au feu rouge.

On décide d'observer le comportement d'un véhicule se présentant au carrefour. On admet que l'état du feu, à l'arrivée du véhicule est aléatoire et que la probabilité que le feu soit vert est de 0,6 et celle qu'il soit orange de 0,1.

1. Quelle est la probabilité que le véhicule observé s'arrête ?
2. Le véhicule est passé. Quelle est la probabilité qu'il l'ait fait au feu rouge ?
3. Le passage au feu est-il indépendant du fait qu'il soit rouge ?

Exercice 9 L'école d'ingénieurs de La Fare-en-Dole organise la sélection de ses futurs étudiants de la manière suivante :

- après examen de leur dossier scolaire, 15 % des candidats sont admis directement ;
- tous les autres candidats passent une épreuve écrite dont le taux de réussite est estimé à 60 % ;
- tous les candidats ayant réussi l'épreuve écrite sont convoqués pour passer une épreuve orale. Ceux qui réussissent l'épreuve orale sont alors admis. On estime que les candidats ont une chance sur trois de réussir l'épreuve orale.

On choisit un candidat au hasard et l'on considère les événements suivants :
D : « le candidat est admis sur dossier » ;
E : « le candidat réussit l'épreuve écrite » ;
O : « le candidat réussit l'épreuve orale » ;
A : « le candidat est admis ».

1. Dresser un arbre de probabilité schématisant les différentes étapes de la sélection.
2. Calculer les probabilités $P(E)$ et $P(O)$.
3. Justifier que la probabilité que le candidat soit admis est de 0,32.
4. Parmi les candidats admis, quelle est la proportion de ceux qui ont été admis sur dossier ?
5. Les événements A et D sont-ils indépendants ?

Exercice 10 Parmi les phrases suivantes, lesquelles sont compatibles avec l'hypothèse « les événements A et B sont indépendants » ?

1. A et B ne se réalisent jamais en même temps.
2. La réalisation de A n'influence pas celle de B.
3. Si A est réalisé alors B n'est pas réalisé.
4. $A \subset B$.
5. A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 11

1. On donne $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,3$.
   Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$ sachant que :
   (a) A et B sont indépendants. (b) A et B sont incompatibles.

2. On donne $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,58$.
   A et B sont-ils indépendants ?
3. A et B sont indépendants et tels que $P(A) = 0,5$ et $P(A \cup B) = 0,75$.
   Calculer $P(B)$.
4. On donne $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,86$.
   Calculer $P_B(A)$. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 12 On lance simultanément deux dés bien équilibrés, un rubis et un vermillon, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements suivants :

R : « le numéro sorti sur le dé rubis est pair » ;
V : « le numéro sorti sur le dé vermillon est pair » ;
S : « la somme des numéros sortis est paire ».

1. Démontrer que S et V sont indépendants.
2. Les événements S et R sont-ils indépendants ?
3. Les événements S et $V \cap R$ sont-ils indépendants ?



Exercice 13 From Cambridge, William goes to Windsor by one of the two routes A or B. The probability of going by route A is 0.3 and if so, the probability of being late for tea time is 0.05. If he goes by route B, the probability of being late is 0.1. Draw a probability tree diagram and find the probability that his grandmother Elizabeth lectures him.

Exercice 14 Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la Santé. Une maladie est présente dans la population dans la proportion d'une personne malade sur $100\,000$. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99 %. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1 %. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Exercice 15 Au zoo de La Fare-en-Dole, l'unique activité du manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un sautoir et d'un toboggan pour plonger.
On a observé que si le manchot choisit :

- le sautoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8 ;
- le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Lors du premier passage, les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les événements :

S_n : « le manchot utilise le sautoir lors de son n-ième passage » ;
T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage ».

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = P(T_n)$.

1. (a) Vérifier que $P(T_2) = 0,25$.
   (b) Dresser l'arbre de probabilité lors des passages n et $(n+1)$.
   (c) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1\,u_n + 0,2$.
   (d) Conjecturer la limite de la suite (u_n) à l'aide d'une calculatrice.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.
   (a) Prouver que (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

(b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

(c) Calculer la limite de la suite (u_n). Cela valide-t-il la conjecture émise ?

Exercice 16 Chez Colette, la vaisselle se joue toujours aux jeux vidéo de la façon suivante : on lance une pièce équilibrée et si c'est pile, elle affronte sa mère à un jeu de combat où elle n'a que 30 % de chance de gagner, si c'est face, elle affronte son père à un jeu de briques où elle a 40 % de chances de perdre. Si elle perd sa partie, elle fait la vaisselle, sinon, ses parents s'affrontent sur un jeu de stratégie où ils sont aussi bons l'un que l'autre pour décider qui fera la vaisselle. Ce soir, c'est le père de Colette qui est de vaisselle. Quelle est la probabilité que le premier duel ait eu lieu sur le jeu de briques ?

Exercice 17 Au club Math Max du lycée Henri Matisse de La Fare-en-Dole, on compte sept élèves de seconde, neuf de première et n de terminale. De plus, parmi les élèves de seconde, il n'y a qu'un seul garçon contre trois parmi les élèves de première et six parmi les terminales. On tire au sort un élève du club afin de le torturer avec des exercices encore plus difficiles que ceux de l'épreuve blanche organisée au retour des vacances d'hiver.

1. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n les événements « l'élève est en terminale » et « l'élève est un garçon » sont indépendants.
2. Pour $n = 24$, que dire de l'indépendance éventuelle des événements suivants ?
   (a) « l'élève est en terminale » et « l'élève est une fille »,
   (b) « l'élève est en première » et « l'élève est un garçon ».

Exercice 18 On considère que 2 % des mathématiciens professionnels se dopent, pour la plupart au thé de l'Himalaya.

1. Un test anti-dopage très inconfortable (nécessitant par exemple l'usage de la calculatrice et la correction de plusieurs copies) répond aux spécificités suivantes : si un mathématicien ne se dope pas, le test est négatif dans 99,9 % des cas et s'il se dope, le test est positif dans 99 % des cas.
   Déterminer la probabilité qu'un mathématicien pris au hasard soit contrôlé positif avec ce test.
2. Si un mathématicien professionnel est contrôlé positif avec le premier test, on lui en fait passer un second encore plus douloureux (incluant entre autres l'obligation d'écouter des radios musicales commerciales ciblées sur la jeunesse) ayant des spécificités identiques au premier. Si ce mathématicien est également positif, il est déclaré coupable et il doit alors lire la presse people hebdomadaire pendant deux années consécutives, cinq en cas de récidive, sinon, il est innocenté et, en guise de compensation, il est alors dispensé de remarques désobligeantes bien qu'avérées sur sa calligraphie pendant trois jours ouvrés.
   On choisit un mathématicien subissant un contrôle anti-dopage et l'on considère les événements suivants :
   ◦ T : « le mathématicien est dopé au thé de l'Himalaya »
   ◦ P : « le premier test est positif »
   ◦ S : « le second test est positif »
   (a) Montrer que la probabilité que le mathématicien soit déclaré coupable est $0,01960298$ en admettant que $p_{T\cap P}(S) = p_T(S)$ et $p_{\overline{T}\cap P}(S) = p_{\overline{T}}(S)$.

(b) Un personnage très officiel affirme qu'avec ce protocole, il est presque impossible qu'un mathématicien professionnel soit déclaré coupable à tort.
Que penser de cette affirmation ?

3. On tire au sort, au hasard (et aux pigeons) 50 mathématiciens professionnels, ceci étant assimilé à un tirage avec remise tellement la population de mathématiciens professionnels est nombreuse.
   (a) En moyenne, combien de ces mathématiciens seront déclarés coupables ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 2 et 10 déclarés coupables ?
4. Chaque test anti-dopage coûte 500 € à réaliser. On considère C la variable aléatoire donnant le coût d'un contrôle, c.-à-d. pour un ou deux tests.
   (a) Quelle est la loi de C (valeurs et probabilités associées) ?
   (b) La fédération internationale des activités mathématiques (F.I.A.M) prévoit de réaliser $10\,000$ contrôles l'année prochaine. Quelle somme globale « moyenne » devrait-elle prévoir pour tous ces contrôles dans son budget ?

Exercice 19 La mucoviscidose est une maladie rare due à l'altération d'un gène situé sur le chromosome n° 7. Ce gène est constitué de deux versions, ou allèles : N le gène normal, dominant, et m le gène modifié, récessif. Les chromosomes allant par paires, chaque gène est présent deux fois dans le génotype qui peut alors être (NN), (N,m) ou (m,m), seul ce dernier étant pathogène. On dit que le génotype (N,m) est porteur.
D'autre part, un homme atteint de mucoviscidose ne peut avoir d'enfant en général alors qu'une femme le peut. Lors de la reproduction, chacun des deux allèles du génotype a la même probabilité d'être choisi, avec indépendance.
Des études statistiques effectuées sur un échantillon de la population française montrent qu'une personne sur 32 est porteuse, ceci servant de référence pour l'exercice.

1. Un couple de parents est choisi au hasard dans la population.
   Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux porteurs ?
2. Deux parents sont porteurs. Quelle est la probabilité que leur enfant soit atteint de la maladie ?
3. Le père est porteur et la mère atteinte de la maladie.
   Quelle est la probabilité que leur enfant soit atteint de la maladie ?
4. Dans cette question, on néglige le nombre d'enfants de mère malade eux-mêmes atteints par la maladie, on ne considère que les enfants de parents sains ou porteurs.
   Quelle est la probabilité pour que, dans cette population, un enfant choisi au hasard soit atteint de mucoviscidose ?

Exercice 20 Une maladie atteint 10 % de la population. Un test de dépistage vise à détecter si un individu est malade (positif s'il l'est, négatif sinon) mais il est imparfait :

- la probabilité qu'un test soit positif sachant que l'individu est sain est de 0,008 ;
- la probabilité qu'un test soit négatif sachant que l'individu est malade est de 0,02.

On choisit un individu au hasard dans la population et l'on note les événements
M : « l'individu est atteint de la maladie » et T : « le test est positif ».

On appelle *valeur diagnostique* d'un test la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit malade, c.-à-d. $P_T(M)$.
On appelle *fiabilité* d'un test, la probabilité $P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap \overline{T})$.

1. Étude du test
   (a) Valeur diagnostique
      i. Dresser un arbre de probabilité schématisant la situation.
      ii. Calculer la valeur diagnostique du test.
   (b) Fiabilité du test.
   Un erreur survient soit lorsque l'individu est sain et le test positif (« faux positif »), soit lorsque l'individu est malade et le test négatif (« faux négatif »).
      i. Dresser un tableau à double entrée pertinent.
      ii. Quelle est la probabilité qu'un individu sur lequel on a pratiqué un test soit un « faux positif » ? Un « faux négatif » ?
      iii. Calculer la probabilité d'erreur et en déduire la fiabilité du test.
2. Influence de la proportion de malades
   On se place dans le cas où la proportion de malades dans la population est $x \in]\,0\,;1\,[$.
   (a) Influence sur la valeur diagnostique
      i. Exprimer la valeur diagnostique, notée $d(x)$, en fonction de x puis étudier ses variations sur $]\,0\,;1\,[$.
      ii. À partir de quelle valeur de x la valeur diagnostique dépasse-t-elle 0,9 ?
   (b) Influence sur la fiabilité du test
      i. Exprimer la fiabilité du test, notée $f(x)$ en fonction de x.
      ii. Pour quelles valeurs de x cette fiabilité dépasse-t-elle 0,99 ?

Commentaires : La valeur diagnostique et la fiabilité dépendent de la proportion d'individus malades. Pour une maladie rare, un cas de test positif n'assure pas le diagnostic et il est alors nécessaire d'effectuer d'autres tests indépendants. En outre, un dépistage systématique de la population présente l'inconvénient de produire une quantité non négligeable de « faux positifs » ce qui pose des problèmes éthiques.

Exercice 21 Gaspard, Melchior et Balthazar sont en vacances itinérantes et dorment au camping. Après s'être largement repus de leur huitième galette quotidienne, ils décident de tirer à la courte-paille la corvée de vaisselle. Gaspard et Melchior se disputent déjà pour savoir qui tirera le premier, l'un désire même tirer à la courte-paille pour savoir qui tirera le premier ! Balthazar leur dit d'arrêter de se disputer puisqu'ils ont autant de chances de tirer la petite paille au premier et au deuxième tirage et d'ailleurs autant au troisième tirage. A-t-il raison ? Et si comme le suggère Michel Tournier, leur ami Taor s'était joint à eux ?

Exercice 22 Lors d'un spectacle de radio-crochet, deux candidats sont en lice : Justin et Bébert. Les deux adolescents ont les mêmes caractéristiques et maîtrisent difficilement deux styles de répertoire, la variété française et le rock-FM américain, qu'ils se doivent d'entonner à la demande.

D'après une étude sur les choix des spectateurs, 70 % des votants choisissent Justin et, parmi eux, 60 % préfèrent la variété française. Par ailleurs, 20 % des spectateurs votant pour Bébert désirent du rock-FM américain.

On choisit un spectateur au hasard et il leur impose son choix.

1. La probabilité que le spectateur ait voté pour Bébert chantant de la variété française est :
   Réponse **A :** $\frac{3}{5}$ Réponse **B :** $\frac{4}{5}$ Réponse **C :** $\frac{3}{50}$ Réponse **D :** $\frac{6}{25}$
2. La probabilité que le spectateur choisi au hasard ait voté pour de la variété française est :
   Réponse **A :** $\frac{21}{50}$ Réponse **B :** $\frac{33}{50}$ Réponse **C :** $\frac{3}{5}$ Réponse **D :** $\frac{12}{25}$
3. Le spectateur a choisi de la variété française. La probabilité qu'il ait choisi Bébert est :
   Réponse **A :** $\frac{4}{11}$ Réponse **B :** $\frac{6}{25}$ Réponse **C :** $\frac{7}{11}$ Réponse **D :** $\frac{33}{50}$
4. Le style de répertoire choisi par le spectateur est-il indépendant du chanteur choisi ?
   A : Oui **B :** Ni oui, ni non **C :** Non **D :** Cela dépend

Exercice 23 Paradoxal ?

1. M. Dupond a deux enfants. L'aîné est une fille prénommée Bianca.
   Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
   M. Dupont a lui aussi deux enfants. Au moins l'un des deux est un garçon prénommé Archibald. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?
2. On lance trois pièces de monnaie. Quelle est la probabilité que toutes trois retombent du même côté, que ce soit pile ou face ? Une sur quatre. Soit. Pourtant, si je lance trois pièces, il y en a forcément deux qui seront déjà du même côté ; la troisième y sera avec une chance sur deux. Candide affirme donc qu'il y a une chance sur deux que toutes trois tombent du même côté. Qu'en penser ?
3. On vous présente trois boîtes. Deux contiennent chacune une sucette et l'autre un séjour d'une semaine à Zanzibar. Vous en choisissez une et immédiatement après, le présentateur de ce jeu débile, Pierre-Jean Faucceult, en retire une des deux restantes en affirmant avec raison qu'elle contient l'une des sucettes. Il vous propose alors d'échanger votre boîte avec la dernière. Que faites-vous ?
4. Clotaire sait qu'il va subir trois devoirs surveillés cette semaine mais il ne se sait ni de quoi ni quand. Étant mardi soir, il ne lui reste plus que trois jours. Pour enfin préparer celui de mathématiques éventuel, il se demande s'il est plus probable qu'il en ait un par jour ou qu'il n'en ait pas vendredi. Peux-tu l'aider ?

Musardez donc vers les pages 265 et 269 afin de réaliser les devoirs n°s 10 et 11.

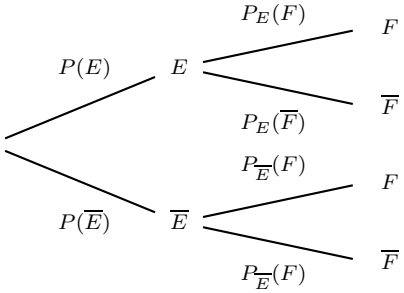
Corrigé des exercices

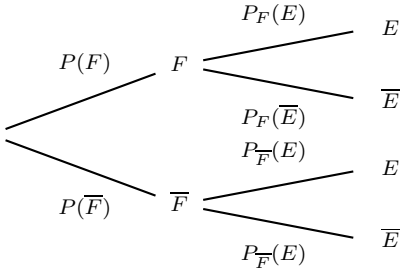
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Par manque de ~~courage~~ ~~temps~~ place, je n'ai pas rédigé les phrases réponses et parfois, je n'ai même pas déclaré les événements. C'est mal !

Activité de la page 136.

1. 25 % des employés de cette fabrique de machines à machin-trucs sont des hommes gagnant plus de 20 000 € annuels et 35 % sont des femmes gagnant moins de 20 000 € annuels.
2. (a) $P(E \cap F) = 0,35$.
   (b) $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap \overline{F}) = 0,35 + 0,3 = 0,65$.
   (c) $P(F) = P(E \cap F) + P(\overline{E} \cap F) = 0,35 + 0,1 = 0,45$.
   (d) $P(E) \times P(F) = 0,2925 \neq 0,35 = P(E \cap F)$.
3. (a) $\frac{0,35}{0,35+0,1} = \frac{7}{9} \simeq 0,78$.
   (b) $\frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0,35}{0,45} = \frac{7}{9}$. On note ce quotient $P_F(E)$.
4. $P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0,35}{0,35+0,3} = \frac{7}{13} \simeq 0,54$
5. $P_{\overline{F}}(E) = \frac{P(E \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(E) - P(E \cap F)}{1 - P(F)} = \frac{0,65-0,35}{1-0,45} \simeq 0,55$: la probabilité que l'employé choisi au hasard gagne moins de 20 000 € sachant que c'est un homme.
6. Voici les deux arbres.





Exercice 1

1. Non.
2. Oui.
3. Non.
4. Non.
5. Oui.

Exercice 2

1. $P_C(G) = \frac{1}{4}$.
2. $P_G(C) = \frac{1}{3}$.
3. $P(C \cap G) = \frac{1}{5}$.
4. $P_{\overline{G}}(C) = \frac{1}{5}$.

Exercice 3

1. $P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P_A(B)} = \frac{1}{2}$.
2. $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B) = 0,14$.
3. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,1$, $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{7}$ et $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$.
   $P(A)\times P(B) = 0,21 \neq 0,1 = P(A\cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.
4. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 3P(A) - 0,5$ et $0,5 = P_A(B) = \frac{3P(A)-0,5}{P(A)}$ d'où $0,5P(A) = 3P(A)-0,5$, $P(A) = \frac{0,5}{2,5} = \frac{1}{5}$.
   $P(B) = \frac{2}{5} \neq 0,5 = P_A(B)$: A et B non indépendants.
5. $P(A\cap B) = 0,5P(A) = 0,3P(B) = 0,3(P(A)+0,3)$ d'où $P(A) = \frac{0,09}{0,2} = \frac{9}{20}$, $P(B) = \frac{9}{20}+\frac{6}{20} = \frac{3}{4}$ et $P(A\cap B) = 0,5P(A) = \frac{9}{40} \neq \frac{9}{20}\times\frac{3}{4} = P(A)\times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 4 $P_A(A) = \frac{P(A\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$, $P_A(\overline{A}) = \frac{P(A\cap\overline{A})}{P(A)} = \frac{P(\varnothing)}{P(A)} = 0$, $P_{A\cap B}(A) = \frac{P(A\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)} = 1$ et $P_B(A\cup B) = \frac{P(B\cap(A\cup B))}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

Exercice 5 On a $P(C) = 0,8$, $P(D) = 0,4$ et $P_D(C) = \frac{3}{4}$.

1. (a) $P(C \cap D) = P(D) \times P_D(C) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$.

   (b) $P(\overline{C}) = P(\overline{C} \cap D) + P(\overline{C} \cap \overline{D})$
   d'où $P(\overline{C} \cap \overline{D}) = P(\overline{C}) - P(\overline{C} \cap D) = (1 - P(C)) - P(D) \times P_D(\overline{C})$
   $= 1-P(C)-P(D)\times(1-P_D(C)) = 1-0,8-0,4\times(1-0,75) = 0,1$.
2. $P_C(\overline{D}) = 1 - P_C(D) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.
3. $P_{\overline{C}}(\overline{D}) = \frac{P(\overline{C}\cap\overline{D})}{P(\overline{C})} = \frac{0,1}{1-0,8} = \frac{1}{2}$.
4. $P(C)\times P(D) = 0,32 \neq 0,3 = P(C\cap D)$ donc C et D ne sont pas indépendants.

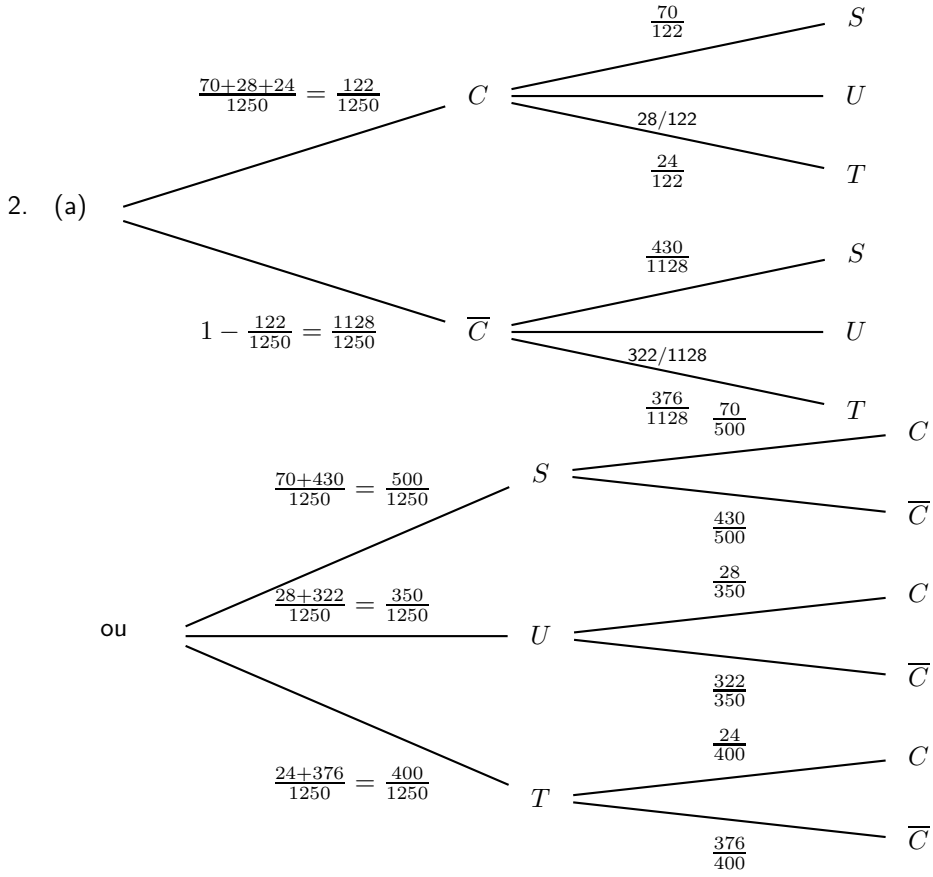
Exercice 6 On a $P(C_0) = 0,25$, $P(C_1) = 0,5$, $P_{C_1}(F) = 0,7$, $P(C_2) = 0,25$, $P_{C_2}(F) = 0,8$ et $\{C_0, C_1, C_2\}$ est une partition de l'univers.

1. $P(C_1 \cup C_2) = 1 - P(C_0) = 0,75$.
2. D'après les probabilités totales,
   $P(F) = P(F \cap C_0) + P(F \cap C_1) + P(F \cap C_2)$
   $= P_{C_0}(F) \times P(C_0) + P_{C_1}(F) \times P(C_1) + P_{C_2}(F) \times P(C_2)$
   $P(F) = 0 + 0,7 \times 0,5 + 0,8 \times 0,25 = 0,55$.
3. $P(C_1 \cup C_2) \times P(F) = 0,75 \times 0,55 \neq P(F) = P((C_1 \cup C_2) \cap F)$: $C_1 \cup C_2$ et F ne sont pas indépendants.

Exercice 7 Math Max, le club

1. On a $P_S(C) = \frac{70}{70+430} = \frac{7}{50}$.

2. (a)



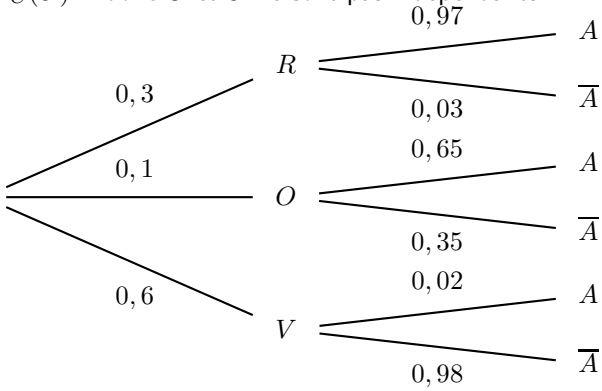
(b) On a $P(S \cap C) = P(S) \times P_S(C) = P(C) \times P_C(S) = \frac{70}{1250}$.

(c) $P(C) = \frac{122}{1250}$.

(d) $P_C(U) = \frac{28}{122}$.

(e) $P(U) \neq P_C(U)$ donc C et U ne sont pas indépendants.

Exercice 8

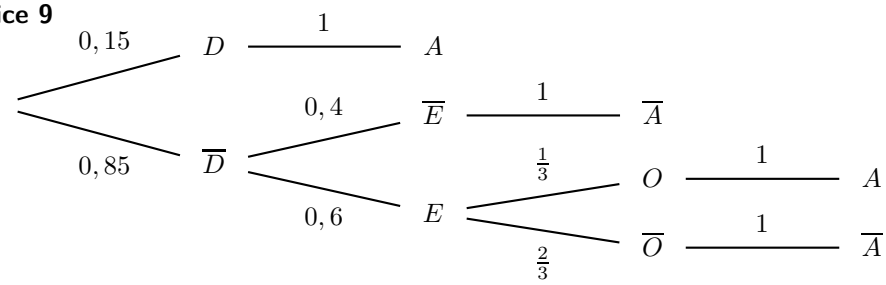


1. $P(A) = P(A \cap R) + P(A \cap O) + P(A \cap V)$
$= P(R).P_R(A) + P(O).P_O(A) + P(V).P_V(A)$
$= 0,3 \times 0,97 + 0,1 \times 0,65 + 0,6 \times 0,02 = 0,368.$

CORRIGÉS

2. $P_{\overline{A}}(R) = \frac{P(\overline{A}\cap R)}{P(\overline{A})} = \frac{P(R)(1-P_R(A))}{1-P(A)} = \frac{0,3\times 0,03}{1-0,368} \simeq 0,014.$
3. $P(A) \times P(R) = 0,368 \times 0,3 \neq 0,97 \times 0,3 = P(A \cap R)$ donc A et R ne sont pas indépendants, tout comme $\overline{A}$ et R.

Exercice 9

1. 

2. $P(E) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(E) = 0,85 \times 0,6 = 0,51$
et $P(O) = P(E) \times P_E(O) = 0,51 \times \frac{1}{3} = 0,17.$
3. D'après les probabilités totales, $P(A) = P(D) + P(O) = 0,15 + 0,17 = 0,32.$
4. $P_A(D) = \frac{P(A\cap D)}{P(A)} = \frac{P(D)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,32} = \frac{15}{32}.$
5. $P(D) \neq P_A(D)$ donc A et D ne sont pas indépendants.

Exercice 10

1. Compatible seulement lorsque A ou B est de probabilité nulle.
2. Compatible. Toutefois, il faut que $P(A) \neq 0$ pour écrire $P_A(B) = P(B)$.
3. Compatible seulement lorsque A ou B est de probabilité nulle.
4. Compatible seulement lorsque $P(B) = 1$ ou $P(A) = 0$.
5. Toujours compatible.

Exercice 11

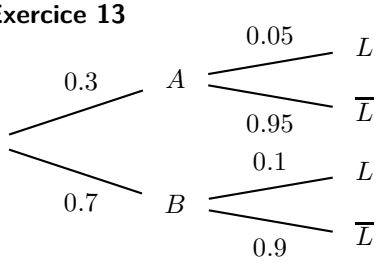
1. (a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,12$
et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,58.$
(b) $P(A\cap B) = P(\varnothing) = 0$ et $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = 0,7.$
2. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,12 = 0,3 \times 0,4 = P(A) \times P(B)$: A et B sont indépendants.
3. $P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) \iff P(B)(1 - P(A)) = 0,75 - 0,5$
$\iff P(B) = \frac{0,25}{1-0,5} = \frac{1}{2}.$
4. $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(B)} = \frac{0,24}{0,3} = 0,8 = P(A)$: A et B sont indépendants.

Exercice 12

1. On a $S = (R \cap V) \cup (\overline{R} \cap \overline{V})$ et R et V sont indépendants bien sûr.
D'où $P(S) = P(R).P(V) + P(\overline{R}).P(\overline{V}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
et $P_V(S) = P_V(R) = P(R) = \frac{1}{2} = P(S)$. S et V sont donc indépendants.
2. $P_R(S) = P_R(V) = P(V) = \frac{1}{2} = P(S)$ donc S et R sont indépendants.

3. $V \cap R \subset S$ donc $P((V \cap R) \cap S) = P(V \cap R) \neq P(V \cap R) \times P(S)$ car $P(V \cap R) \neq 0$ et $P(S) \neq 1$. $V \cap R$ et S ne sont donc pas indépendants.

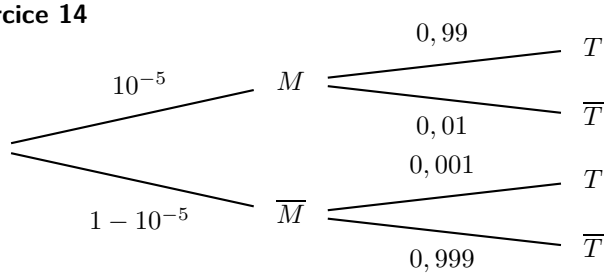
Exercice 13



$$\begin{aligned} P(L) &= P(L \cap A) + P(L \cap B) \\ &= P(A)P_A(L) + P(B)P_B(L) \\ &= P(A)P_A(L) + (1 - P(A))P_B(L) \\ &= 0.3 \times 0.05 + (1 - 0.3) \times 0.1 = 0.085. \end{aligned}$$

The probability that Elizabeth lectures William is of 8.5 %.

Exercice 14



$$\begin{aligned} P_{\overline{T}}(M) &= \frac{P(\overline{T} \cap M)}{P(\overline{T})} = \frac{P(\overline{T} \cap M)}{P(\overline{T} \cap M) + P(\overline{T} \cap \overline{M})} = \frac{P(M)P_M(\overline{T})}{P(M)P_M(\overline{T}) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(\overline{T})} \\ &= \frac{10^{-5} \times (1 - 0,99)}{10^{-5} \times (1 - 0,99) + (1 - 10^{-5}) \times (1 - 0,001)} \simeq 10^{-7}. \\ P_T(\overline{M}) &= \frac{P(\overline{M} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(\overline{M} \cap T)}{P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M})} = \frac{P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T)}{P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T)} \\ &= \frac{(1 - 10^{-5}) \times 0,001}{10^{-5} \times 0,99 + (1 - 10^{-5}) \times 0,001} \simeq 0,99. \end{aligned}$$

Ainsi, seule une personne sur 10 millions serait déclarée saine alors qu'elle est malade. En revanche, une personne positive a 99 % de chance de ne pas l'être. Si ce test est commercialisé, il ne peut être mis en œuvre qu'avec un autre test afin de corroborer les résultats.

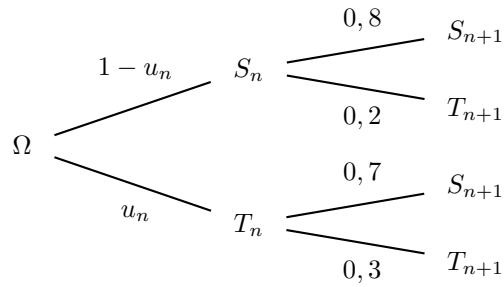
Exercice 15

1. (a) D'après l'énoncé, on a $P(T_1) = P(S_1) = \frac{1}{2}$, $P_{S_n}(S_{n+1}) = 0,8$ et $P_{T_n}(T_{n+1}) = 0,3$. Par ailleurs, $\{T_1; S_1\}$ réalise une partition de l'univers et la formule de probabilités totales affirme alors que

$$\begin{aligned} P(T_2) &= P(T_2 \cap T_1) + P(T_2 \cap S_1) = P(T_1)P_{T_1}(T_2) + P(S_1)P_{S_1}(T_2) \\ &= P(T_1)P_{T_1}(T_2) + P(S_1)(1 - P_{S_1}(S_2)) = \tfrac{1}{2} \times 0,3 + \tfrac{1}{2}(1 - 0,8) \\ P(T_2) &= 0,25. \end{aligned}$$

CORRIGÉS

(b)



(c) $\{T_n; S_n\}$ réalise une partition de l'univers et, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(T_{n+1}) = P(T_{n+1} \cap S_n) + P(T_{n+1} \cap T_n) \\ &= P(S_n)P_{S_n}(T_{n+1}) + P(T_n)P_{T_n}(T_{n+1}) \\ &= (1 - P(T_n))P_{S_n}(T_{n+1}) + P(T_n)P_{T_n}(T_{n+1}) \\ &= (1 - u_n) \times 0,2 + u_n \times 0,3 = 0,1u_n + 0,2. \end{aligned}$$

(d) À la calculatrice, la suite (u_n) semble converger vers $0,2222...$

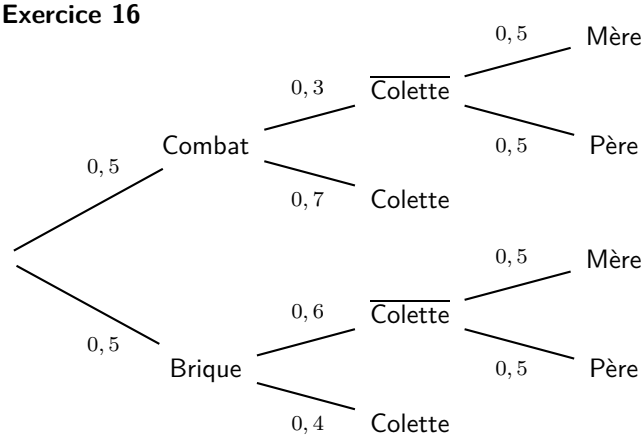
2. (a) On a $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} = 0,1u_n + \frac{18-20}{10\times 9}$

$v_{n+1} = 0,1u_n - \frac{2}{90} = 0,1(u_n - \frac{2}{9}) = 0,1v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$.

(b) Ainsi, $v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{5}{18}\frac{1}{10^{n-1}}$ et $u_n = v_n + \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{5}{18}\frac{1}{10^{n-1}}$.

(c) Puisque $q = \frac{1}{10} \in]-1\,;1[$, $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{9} = 0,2222...$

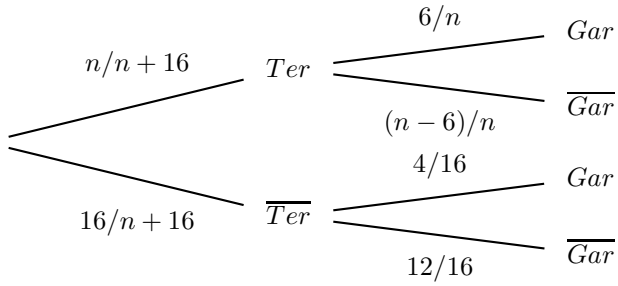
Exercice 16



On cherche $p_{P\text{ère}}(Brique)$. D'après la formule des probabilités totales,
$p(P\text{ère}) = p(P \cap \overline{E} \cap C) + p(P \cap \overline{E} \cap B) = 0,5 \times 0,3 \times 0,5 + 0,5 \times 0,6 \times 0,5 = \frac{9}{40}$
et $p_P(B) = \dfrac{p(B \cap P)}{p(P)} = \frac{6/40}{9/40} = \frac{2}{3}$.

Exercice 17

1. D'après l'énoncé, il y a $n + 16$ élèves dont 10 garçons. On peut alors dresser l'arbre suivant.



On a $P(T\cap G)=P(T)P_T(G)=\frac{n}{n+16}.\frac{6}{n}=\frac{6}{n+16}$, $P(T)=\frac{n}{n+16}$ et d'après les probabilités totales, $P(G)=P(T\cap G)+P(\overline{T}\cap G)$

$P(G)=P(T\cap G)+P(T)P_{\overline{T}}(G)=\frac{6}{n+16}+\frac{16}{n+16}.\frac{4}{16}=\frac{10}{n+16}$.

Ainsi, les événements « l'élève est en terminale » et « l'élève est un garçon » sont indépendants ssi $P(T\cap G)=P(G).P(T) \iff \frac{6}{n+16}=\frac{n}{n+16}.\frac{10}{n+16}$

$\iff 6(n+16)=10n \iff n=24$.

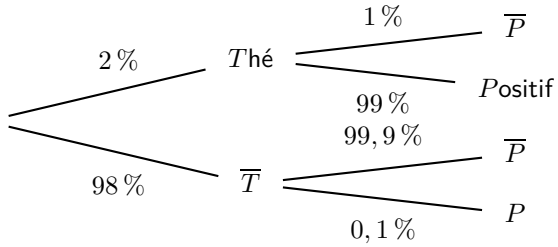
2. Pour $n=24$, les événements T et G sont indépendants.

   (a) Puisque $F=\overline{G}$, les événements T et F sont indépendants.

   (b) On a $P(G)=\frac{10}{24+16}=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=P_{1re}(G)$ donc $1re$ et G ne sont pas indépendants.

Exercice 18

1.



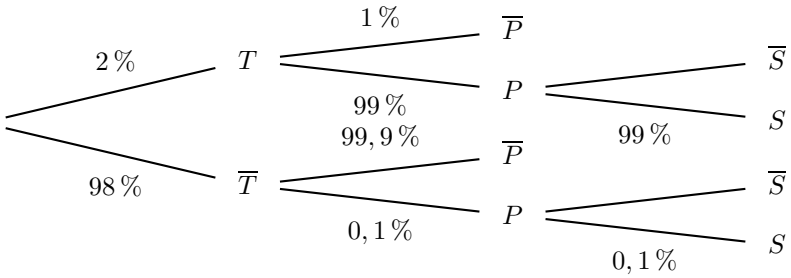
D'après la formule des probabilités totales, on a

$p(P)=p(T\cap P)+p(\overline{T}\cap P)=p(T)p_T(P)+p(\overline{T})p_{\overline{T}}(P)=\frac{2}{100}.\frac{99}{100}+\frac{98}{100}.\frac{0,1}{100}$

$p(P)=0,02078$

2. (a) Le second test a les mêmes spécificités que le premier donc

$p_{T\cap P}(S)=p_T(S)=p_T(P)=\frac{99}{100}$ et $p_{\overline{T}\cap P}(S)=p_{\overline{T}}(S)=p_{\overline{T}}(P)=\frac{0,1}{100}$.



$p(S)=p(S\cap P\cap T)+p(S\cap P\cap\overline{T})=p(T\cap P).p_{T\cap P}(S)+p(\overline{T}\cap P).p_{\overline{T}\cap P}(S)$

$=p(T).p_T(P).p_T(S)+p(\overline{T}).p_{\overline{T}}(P).p_{\overline{T}}(S)$

$=\frac{2}{100}.\frac{99}{100}.\frac{99}{100}+\frac{98}{100}.\frac{0,1}{100}.\frac{0,1}{100}=0,01960298.$

CORRIGÉS

(b) On a $p(\overline{T} \cap S) = p(\overline{T}).p_{\overline{T}}(P).p_{\overline{T}}(S) = \frac{98\times0,1\times0,1}{100^3} \simeq 10^{-6}$. L'officiel a donc plutôt raison car il n'y a qu'une chance sur un million qu'un mathématicien professionnel soit déclaré coupable à tort (et ce sera tant pis pour lui, on lui avait bien dit de faire un autre métier).

3. On désigne par N le nombre de désignés coupable. On a $N \sim \mathscr{B}(50; 0,02078)$ où $p = 0,02078$ a été trouvé à la question 1.

   (a) On a $\mathbb{E}(N) = np = 50 \times 0,02078 \simeq 1$ déclaré coupable en moyenne sur les 50 tirés aux pigeons.

   (b) On a $p(N \in [\,2\,;10\,]) = \sum_{k=2}^{k=10} \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k} \simeq 0,2787.$
   avec la calculatrice : BinomFRép(10)-BinomFRép(1)

4. (a) On a $p(C = 1000) = p(P) = 0,02078$
   et $p(C = 500) = p(\overline{P}) = 1 - 0,02078 = 0,97922.$

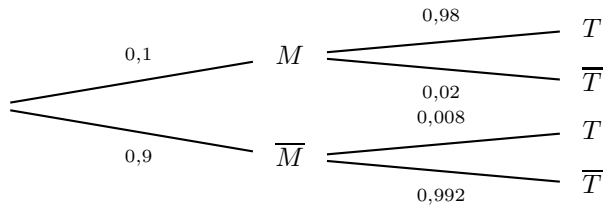
   (b) On a $10000.\mathbb{E}(C) = 10000\,(500 \times p(C = 500) + 1000 \times p(C = 1000))$
   $= 5\,103\,900.$
   La F.I.A.M. doit donc prévoir environ 5,1 millions d'euros.

Exercice 19

1. $P((N,m)_f \cap (N,m)_h) = P((N,m)_f) \times P((N,m)_h) = \frac{1}{32^2}$.
2. $P_{(N,m)_f \cap (N,m)_h}(m,m) = P_{(N,m)_f}(m_f) \times P_{m_f \cap (N,m)_h}(m_h)$
   $= P_{(N,m)_f}(m_f) \times P_{(N,m)_h}(m_h) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
3. $P_{(m,m)_f \cap (N,m)_h}(m,m) = \frac{1}{2}$.
4. $P(m,m) \simeq P((N,m)_f \cap (N,m)_h) \times P_{(N,m)_f \cap (N,m)_h}(m,m) = \frac{1}{32^2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4096}$.

Exercice 20

1. (a) i.



   ii. $P_T(M) = \frac{P(T\cap M)}{P(T)} = \frac{P(M)(1-P_M(\overline{T}))}{P(M)P_M(T)+(1-P(M))P_{\overline{M}}(T)} = \frac{0,1\times0,98}{0,1\times0,98+0,9\times0,008}$
   $P_T(M) \simeq 0,932.$

(b) i.

	M	$\overline{M}$
T	$0,1 \times 0,98$	$0,9 \times 0,008$
$\overline{T}$	$0,1 \times 0,02$	$0,9 \times 0,992$

   ii. « Faux positif » : $P(T \cap \overline{M}) = 0,0072$
   et « Faux négatif » : $P(\overline{T} \cap M) = 0,002.$

   iii. « Erreur » : $P(T \cap \overline{M}) + P(\overline{T} \cap M) = 0,0092.$
   Fiabilité : $P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap\overline{T}) = 1-(P(T\cap\overline{M})+P(\overline{T}\cap M)) = 0,9908.$

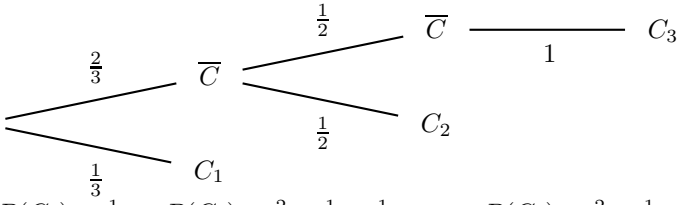
2. (a) i. $d(x) = P_T(M) = \frac{P(T\cap M)}{P(T)} = \frac{P(M)P_M(T)}{P(T\cap M)+P(T\cap\overline{M})} = \frac{0{,}98x}{0{,}98x+0{,}008(1-x)} = \frac{980x}{972x+8}$
de dérivée $d'(x) = \frac{(980x)'(972x+8)-980x(972x+8)'}{(972x+8)^2}$
$d'(x) = \frac{980\times 972x+980\times 8-980x\times 972}{(972x+8)^2} = \frac{7840}{(972x+8)^2} > 0$ donc d est strictement croissante, de $d(0) = 0$ à $d(1) = 1$.

ii. $d(x) > 0,9 \iff \frac{980x}{972x+8} > 0,9 \iff 980x > 0,9(972x+8)$
$\iff 105,2x > 7,2 \iff x \gtrsim 0,068.$

(b) i. $f(x) = P(M\cap T) + P(\overline{M}\cap\overline{T}) = 0,98x + 0,992(1-x) = 0,992 - 0,012x$ strictement décroisssante.

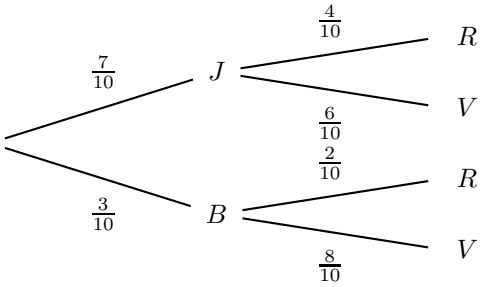
ii. $f(x) > 0,99 \Leftrightarrow 0,992 - 0,012x > 0,99 \Leftrightarrow 0,012x < 0,002 \Leftrightarrow x < \frac{1}{6}$.

Exercice 21 Il suffit de construire l'arbre suivant :



On a donc $P(C_1) = \frac{1}{3}$, $P(C_2) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ et $P(C_3) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{3}$.
S'il y a n rois mages, on a, pour $i \neq 1$, $P(C_i) = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n+1-i}{n+2-i}\times\frac{1}{n+1-i} = \frac{1}{n}$ et $P(C_1) = \frac{1}{n}$.

Exercice 22 On a l'arbre de probabilité suivant :



1. On a $p(B\cap V) = p(B)\times p_B(V) = \frac{3}{10}\times\frac{8}{10} = \frac{6}{25}$.
Réponse D.
2. On a $p(V) = p(J)\times p_J(V) + p(B)\times p_B(V) = \frac{7}{10}\times\frac{6}{10} + \frac{3}{10}\times\frac{8}{10} = \frac{33}{50}$.
Réponse B.
3. Il faut trouver $p_V(B) = \frac{p(V\cap B)}{p(V)} = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{33}{50}} = \frac{6}{25}\times\frac{50}{33} = \frac{4}{11}$.
Réponse A.
4. On a $p(B)\times p(V) = \frac{3}{10}\times\frac{33}{50} \neq \frac{6}{25} = p(B\cap V)$ (ou $p_V(B) \neq p(B)$).
Réponse C.

Exercice 23 Paradoxal ?

1. F_1 et F_2 sont indépendants donc
$P_{F_1}(F_1\cap F_2) = \frac{P(F_1\cap(F_1\cap F_2))}{P(F_1)} = \frac{P(F_1\cap F_2)}{P(F_1)} = \frac{P(F_1)P(F_2)}{P(F_1)} = P(F_2) = \frac{1}{2}$.

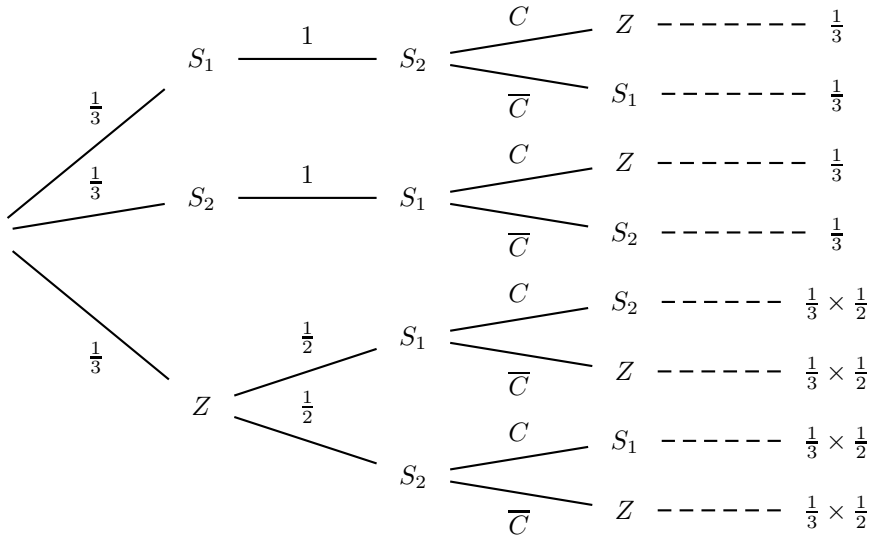
CORRIGÉS

$P_{G_1\cup G_2}(G_1\cap G2)=\frac{P((G_1\cup G_2)\cap(G_1\cap G_2))}{P(G_1\cup G_2)}=\frac{P(G_1\cap G_2)}{P(G_1)+P(G_2)-P(G_1\cap G_2)}$

$P_{G_1\cup G_2}(G_1\cap G2)=\frac{1/2\times 1/2}{1/2+1/2-1/4}=\frac{1}{3}$.

2. Le plus simple est d'énumérer les possibilités : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP et FFF. Seules PPP et FFF répondent au problème parmi les huit possibilités : il y a donc une chance sur quatre que toutes trois tombent du même côté. (les probas conditionnelles mènent à des calculs plus compliqués).
   Candide, quant à lui, présuppose que les deux « premières » sont déjà du même côté ce qui est une condition plus forte.

3. Dans l'arbre suivant, le premier nœud correspond à votre premier choix, le deuxième nœud à celui de Pierre-Jean et le troisième à votre choix définitif, selon que vous changez ou non de boîte.



   Si vous changez de boîte, $P(Z)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ alors que si vous ne changez pas , $P(Z)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.
   Il est en fait plus aisé de se convaincre de ce résultat apparemment paradoxal en pensant à éliminer les deux sucettes plutôt que de gagner le séjour.
   Pour plus d'informations, tapoter
   http ://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_de_Monty_Hall

4. Il y a 3 jours possibles pour le devoir A, 3 jours pour le B et 3 pour le C donc 27 possibilités au total qui sont toutes équiprobables.
   Pour qu'il y ait exactement un devoir par jour, il y a trois jours possibles pour le devoir A, reste alors 2 jours possibles pour le B puis un seul pour le C donc $3\times 2\times 1=6$ possibilités et la probabilité qu'il y ait un devoir par jour est de $\frac{6}{27}$.
   Pour qu'il n'y ait pas de devoir le vendredi, il y a deux jours possibles pour le A, deux jours pour le B et deux pour le C donc $2^3=8$ possibilités et la probabilité qu'il n'y ait pas de devoir le vendredi est donc de $\frac{8}{27}$.

Chapitre IX

Fonction exponentielle

Sommaire

Introduction 159
1 La fonction exponentielle 160
1.1 Théorème fondamental 160
1.2 Définition et premières propriétés 161
2 Propriétés algébriques de l'exponentielle 161
3 Étude de la fonction exponentielle 162
3.1 Signe et variations de la fonction exponentielle 162
3.2 Graphe de la fonction exponentielle 163
3.3 Fonction exponentielle et composition 164
3.4 Lien avec les suites géométriques 165
Exercices 167
Corrigé des exercices 172

Introduction

La fonction que l'on va définir et étudier dans ce chapitre est fondamentale à de multiples points de vue.

En mathématiques, elle est d'abord solution de la première équation différentielle venant à l'esprit : $f' = f$. Elle généralise ensuite la notion de puissance. C'est aussi une fonction « plus grande » que n'importe quel polynôme à l'infini.

Elle a des applications directes dans de très nombreux domaines : demi-vie d'une particule radioactive, tension aux bornes d'un condensateur, chute d'un corps dans un liquide, croissance des bactéries, concentration de médicament après injection, évolution de la population mondiale, certaines lois de probabilités, toute étude statistique assez large se comporte en fait comme une exponentielle,... Les exemples sont innombrables.

René Descartes †, en 1639, cherchait à construire une courbe connaissant une propriété de ses tangentes, inaugurant en cela tout un pan des mathématiques. La recherche d'une fonction connaissant une propriété caractéristique de sa dérivée occupa en effet moult scientifiques du XVIIe siècle. La résolution de ces équations, dites différentielles, permit de mieux comprendre l'univers et tracasse toujours nombre de mathématiciens et physiciens.

1 La fonction exponentielle

1.1 Théorème fondamental

Nous avons besoin en premier lieu du lemme suivant qui est très intuitif et important mais que nous ne pouvons pas démontrer ici. Sa réciproque, en revanche, vous est bien connue : elle est une conséquence immédiate de la définition de la dérivée d'une fonction.

Lemme 1 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.*
Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est une fonction constante.

Le résultat suivant est le théorème fondamental pour la fonction exponentielle.

Théorème 1
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Démonstration :
On admettra l'existence d'une telle fonction. Démontrons son unicité.
Soit donc f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout réel x et $f(0) = 1$.

• Prouvons premièrement que f ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction $\phi(x) = f(x) \times f(-x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et composition de fonctions l'étant. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [(-1) \times f'(-x)] = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$
et d'après le lemme 1 précédent, ϕ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
D'où, pour tout réel x, $\phi(x) = \phi(0) = f(0) \times f(-0) = 1^2 = 1$.
Puisque, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$, on a, pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

• Soit maintenant g une fonction vérifiant aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $g(0) = 1$.
Montrons que $g = f$. Puisque f ne s'annule pas, la fonction $\psi = \dfrac{g}{f}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a, sur $\mathbb{R}$, $\psi' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2} = \dfrac{gf - gf}{f^2} = 0$. Toujours d'après le lemme 1, ψ est une fonction constante.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \psi(x) = \psi(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$ et $g(x) = f(x)$. □

†. Formidable mathématicien que vous pourrez voir au non moins formidable Musée de l'Homme. Son crâne y est exposé.

Remarque : La fonction identiquement nulle, $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, vérifie bien sûr l'équation différentielle $f' = f$ mais pas la condition $f(0) = 1$.

1.2 Définition et premières propriétés

Le théorème fondamental 1 permet de définir la fonction exponentielle.

Définition 1 *La fonction exponentielle, notée* exp*, est la fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$*, étant sa propre dérivée et valant* 1 *en* 0*.*

La propriété suivante découle de la définition et de la démonstration de l'unicité de cette fonction.

Propriété 1 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{exp'(x) = exp(x)}$, $\mathbf{exp(x) \neq 0}$, $\mathbf{exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}}$ *et* $\mathbf{exp(0) = 1}$.

2 Propriétés algébriques de l'exponentielle

Théorème 2 *Soient a et b deux nombres réels et soit n un entier relatif. On a :*
$\mathbf{exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)}$,
$\mathbf{exp(a-b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}}$,
$\mathbf{exp(na) = \big(exp(a)\big)^n}$.

Démonstration : • Soit la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions l'étant.
On a $f(0) = \frac{\exp(0+b)}{\exp(b)} = 1$.
De plus, $f'(x) = \frac{(x+b)' \times \exp'(x+b)}{\exp(b)} = \frac{\exp(x+b)}{\exp(b)} = f(x)$.
f est donc la fonction exponentielle et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = f(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$ d'où $\exp(x+b) = \exp(x) \times \exp(b)$.

• $\exp(a-b) = \exp(a+(-b)) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

• Le dernier point peut s'obtenir en montrant que la dérivée de la fonction $\frac{\exp(nx)}{\big(\exp(x)\big)^n}$ est nulle (avec le théorème 4 p.164) puis en utilisant le lemme 1 p.160.
Nous allons ici le démontrer par récurrence (cf. terminale).
Pour $n \in \mathbb{Z}$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : $\exp(na) = \big(\exp(a)\big)^n$.

– *Initialisation :* On a $\exp(0 \times a) = \exp(0) = 1 = \big(\exp(a)\big)^0$ car $\exp(a) \neq 0$.
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

– *Hérédité :* Supposons la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie au rang n : $\exp(na) = \big(\exp(a)\big)^n$.
$\exp\big((n+1)a\big) = \exp(na+a) = \exp(na)\exp(a) = \big(\exp(a)\big)^n \exp(a) = \big(\exp(a)\big)^{n+1}$
et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

– *Conclusion :* La proposition $\mathcal{P}_n$: $\exp(na) = \big(\exp(a)\big)^n$ est donc vraie pour tout entier naturel n.

– *Relatifs :* Si n est un entier négatif, on peut écrire $n = -m$ où m est naturel. On a $\big(\exp(a)\big)^n = \big(\exp(a)\big)^{-m} = \frac{1}{\big(\exp(a)\big)^m} = \frac{1}{\exp(ma)} = \exp(-ma) = \exp(na)$ et $\mathcal{P}_n$ est vraie. □

Ce théorème 2 montre que **la fonction exponentielle transforme les sommes en produits**. Il est démontré que c'est « la seule » fonction continue ayant cette propriété :

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ et $f(1) = \exp(1)$, alors f est la fonction exponentielle $\exp(x)$.

Ainsi, la fonction exponentielle possède les propriétés algébriques des puissances. Ceci justifie donc la notation suivante, introduite en 1727 par le mathématicien suisse Leonhard Euler.

Définition & Propriété 2
On pose $\boldsymbol{e = \exp(1)}$ *et l'on note* $\boldsymbol{\exp(x) = e^x}$ *pour tout réel* x.
e^x *se lit indifféremment « exponentielle de* x *», « e exposant* x *» ou « e puissance* x *».*
Ainsi $\boldsymbol{e^0 = 1}$, $\boldsymbol{e^1 = e}$, *et, pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{Z}$,
$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$, $\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$, $\boldsymbol{e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}}$, $\boldsymbol{e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}}$, $\boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$.

Remarques : • On a $e \simeq 2,718$. C'est un nombre *transcendant*, comme π.
• On a bien $\exp(3) = \exp(1+1+1) = \exp(1) \times \exp(1) \times \exp(1) = e \times e \times e = e^3$ par exemple.

Exemple : $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = [(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2] - [e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x}]$
$= 2e^0 + 2 = 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
Sinon, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = [(e^x + e^{-x}) + (e^x - e^{-x})][(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})]$
$= 2e^x \times 2e^{-x} = 4e^{x-x} = 4.$

3 Étude de la fonction exponentielle

3.1 Signe et variations de la fonction exponentielle

Théorème 3 *La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *Pour tous réels* x *et* y,
$\boldsymbol{e^x > 0}$, $\boldsymbol{e^x < e^y \iff x < y}$, $\boldsymbol{e^x = e^y \iff x = y}$.

Démonstration : • Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un réel a tel que $e^a < 0$.
Puisque $e^0 = 1 > 0$, la fonction exponentielle changerait de signe entre 0 et a et l'on voit bien que c'est impossible car la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (cf. propriété 1 en page précédente). On utilise ici le théorème des valeurs intermédiaires que vous étudierez l'année prochaine.

• Ainsi, $\big(\exp(x)\big)' = \exp(x) > 0$ et la fonction exponentielle est strictement croissante.

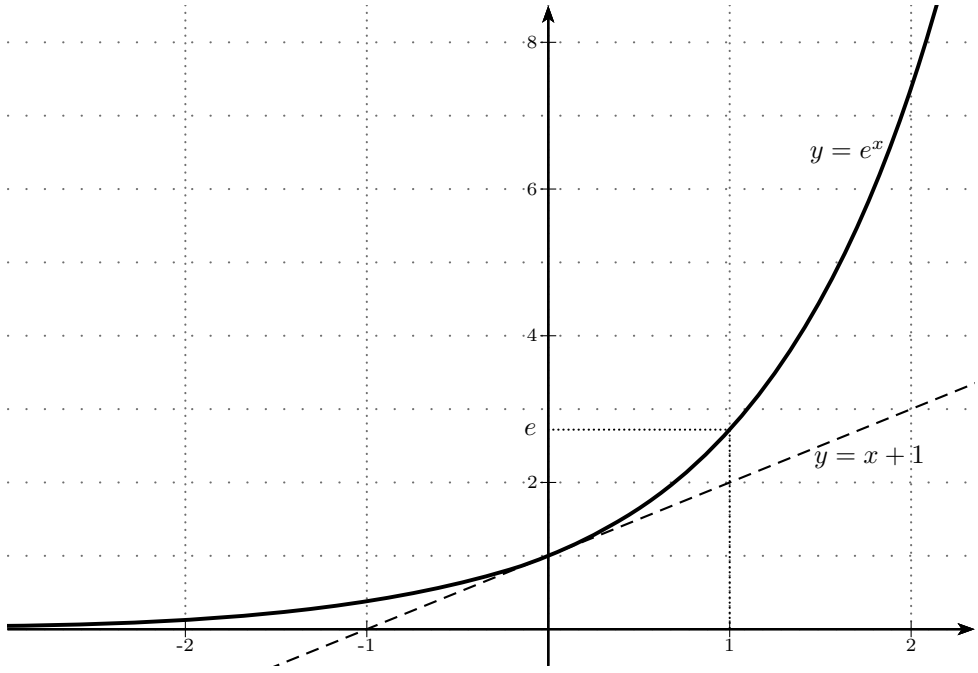
• On déduit immédiatement de la stricte croissance que $e^x < e^y \iff x < y$ et $e^x = e^y \iff x = y$. □

3.2 Graphe de la fonction exponentielle

Voici donc le tableau de variations de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		$+$	1	$+$	
e^x		↗	1	↗	

La tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 admet pour équation $y = e^0(x-0) + e^0 = x + 1$. Il s'avère que la courbe est toujours située au-dessus de celle-ci.
Nous pouvons désormais tracer le graphe de la fonction exponentielle.



Afin d'illustrer la propriété fondamentale de l'exponentielle $f' = f$, tracer différentes droites tangentes, mesurer leur coefficient directeur et le comparer à la valeur en ce même point.

Par ailleurs, nous remarquons graphiquement que $exp(x)$ parcourt $]\,0\,;+\infty\,[$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, c.-à-d. pour les savants, que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, tout réel $y > 0$ admet un unique antécédent par la fonction exponentielle : $\forall y \in\,]\,0\,;+\infty\,[\ \exists! x \in \mathbb{R}$ tq. $e^x = y$.

Pour calculer des valeurs approchées des images, on signale la limite suivante

$\forall x \in \mathbb{R},\quad \exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (cf. exercice n° 15 p. 176)

ainsi que le développement en *série entière* :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \exp(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i\,!} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{i=n} \frac{x^i}{i\,!}\right)$$

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + \ \ldots\ + \tfrac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} + \tfrac{x^n}{n\,!}\right).$$

En dérivant formellement cette belle expression : on obtient la même expression mais au rang $n-1$ et puisque $n \to \infty$, on ne voit plus vraiment la différence.

Il s'avère que la fonction exponentielle « l'emporte » sur toutes les puissances de x et donc sur tous les polynômes à l'infini. C'est une fonction à croissance et décroissance très rapides à l'infini. On parle de croissances (vers l'infini) et de décroissances (vers 0) exponentielles. Par exemple, $\frac{e^{42}}{42^5} \simeq 1,3\,.10^{10}$ et $(-51)^6.e^{-51} \simeq 1,2\,.10^{-12}$.

3.3 Fonction exponentielle et composition

Théorème 4 *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.*
La fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est alors définie et dérivable sur I et de fonction dérivée $x \longmapsto u'(x)\,e^{u(x)}$.

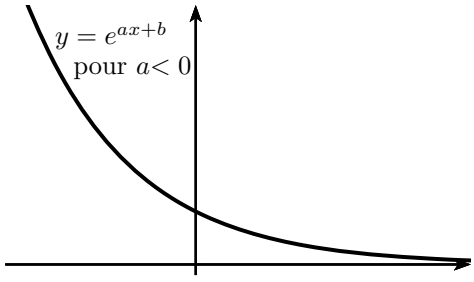
$$\boldsymbol{(e^u)' = u'\,e^u}$$

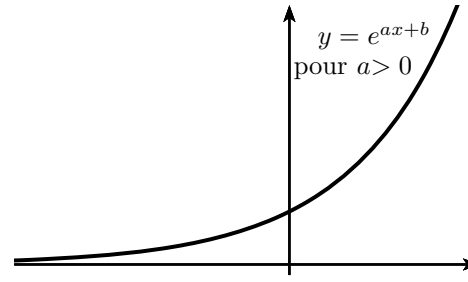
Démonstration : Nous allons le démontrer lorsque $u(x) \neq u(a)$ au voisinage de a.
Tout d'abord, $f : x \longmapsto e^{u(x)}$ est définie car l'exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.
Soient a et $x \in \mathbb{R}$ distincts.
On a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{e^{u(x)}-e^{u(a)}}{u(x)-u(a)} \times \frac{u(x)-u(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} (\exp)'\big(u(a)\big) \times u'(a)$ car u est dérivable donc, en particulier, $u(x) \xrightarrow[x\to a]{} u(a)$ et $u(x) - u(a) \neq 0$ pour $x \simeq a$. □

Remarque : Les fonctions u et e^u ont donc mêmes variations : leurs dérivées ont même signe, celui de u'.

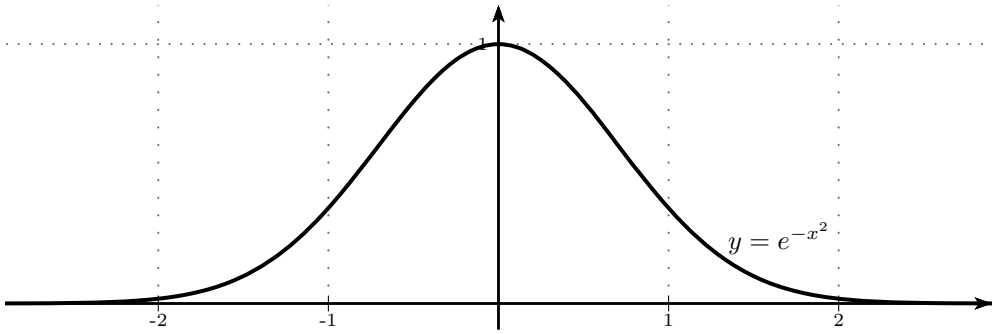
Cas particuliers qui apparaissent dans de nombreux domaines et modélisations :

- On a $\left(e^{ax+b}\right)' = a\,e^{ax+b}$. En voici les deux types :





• On a $\left(e^{-x^2}\right)' = -2x\,e^{-x^2}$ et l'on obtient le graphe le plus extraordinaire de l'univers :



3.4 Lien avec les suites géométriques

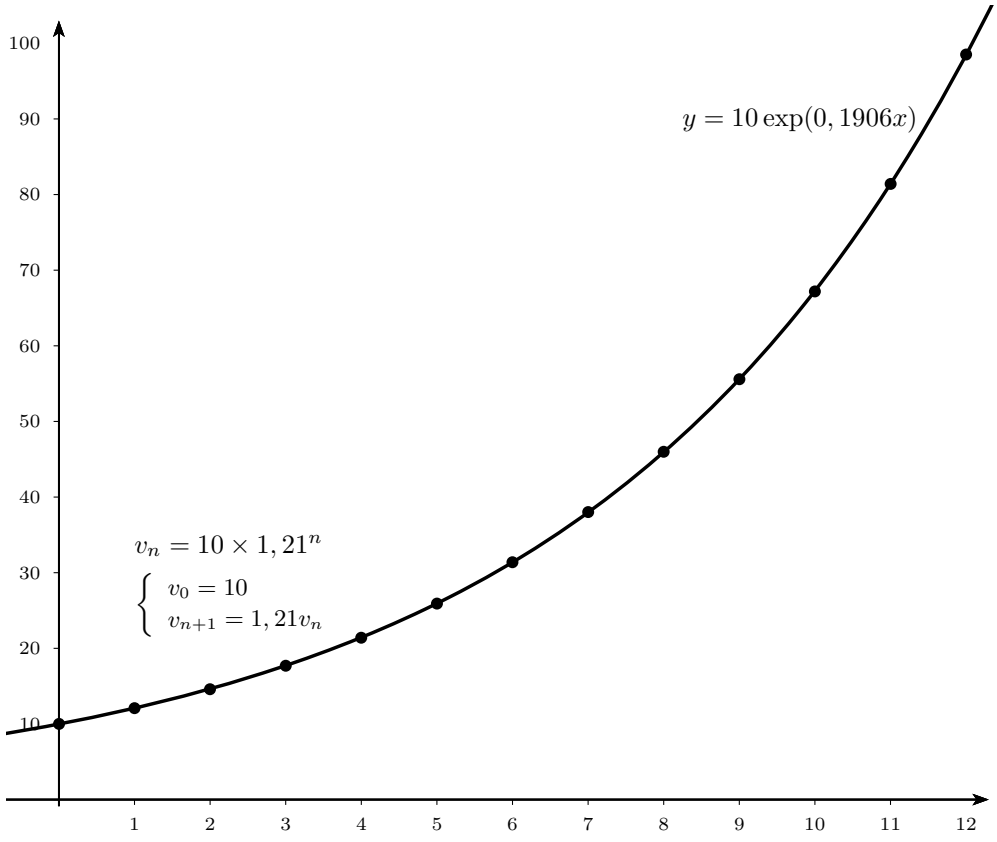
La propriété 2 en page 162 nous donne directement le résultat suivant.

Propriété 3 *Pour tout réel a, la suite $(e^{na})_{\mathbb{N}}$ est géométrique.*

Dém. : En effet, $e^{(n+1)a} = e^{a+na} = e^a e^{na}$: géométrique de raison e^a et de premier terme $e^0 = 1$. □

De plus, la suite $(e^{na})_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante, tendant vers $+\infty$ lorsque $a > 0$ et $(e^{na})_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, tendant vers 0 lorsque $a < 0$ puisque $e^a > 1 \iff a > 0$.

La fonction exponentielle permet ainsi de modéliser de façon continue des évolutions discrètes liées aux suites géométriques. Par exemple, lorsqu'un virus se propage rapidement depuis 10 postes et contamine hebdomadairement 21 % d'ordinateurs supplémentaires, on modélise sa progression par la suite $v_0 = 10$, $v_{n+1} = 1,21 v_n$ c.-à-d. $v_n = 10 \times 1,21^n$. On recherche alors un nombre a tel que $e^a = 1,21$ (on trouve $a \simeq 0,1906$) et l'on peut alors écrire $v_n \simeq 10(e^{0,1906})^n = 10e^{0,1906n} = f(n)$ pour $f(x) = 10e^{0,1906x}$, modèle continue de la propagation. On remarque bien graphiquement que le graphe de f « prolonge continûment » les points de la suite. Pour trouver une valeur approchée de a, on peut réaliser un tableau de valeurs à la calculatrice mais vous verrez en terminale que $a = \ln(1,21)$, logarithme népérien de $1,21$.
Le graphe suivant montre bien la concordance entre les points de la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ et la courbe de f.


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
$y = 10\exp(0,1906x)$
$v_n = 10 \times 1,21^n$
$\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = 1,21v_n \end{cases}$

Exercices

FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1 Cela ne peut pas faire de mal.

1. Effectuer, sans calculatrice, les calculs suivants.

(a) 19^2	(c) 2×4^2	(e) -1^0	(g) $\frac{12^2}{3^4}$
(b) $3^2 - 2^3$	(d) $37, 2^0$	(f) $3^3 - 2^2$	(h) $5^3 \times 2^4$

2. Transformer les écritures : $2^3.5^3$ $\frac{4^5}{8^5}$ $2^4.2^3$ $\frac{6^2}{6^3}$ $3^2.3^{-5}$ $(2^3)^{-4}$ $6^4.15^{-2}$
3. Écrire sous la forme $a^p.b^q$ où $p, q \in \mathbb{Z}$: $a^{2^3}\, a^{-5}$ $\frac{(a^4)^2.b^{-5}}{(ab)^{-1}}$ $(\frac{a}{b^{-1}})^5.\frac{b}{a\times a^3}$

Exercice 2

1. Simplifier les écritures suivantes :
   (a) $e^{-x}e^2$ (b) $(e^x)^3\, e^{-2x}$ (c) $\dfrac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$ (d) $\dfrac{e^{3u-2}\, e^{7-3u}}{e^{3-u}\, e^{u+2}}$
2. Développer puis réduire :

(a) $(e^x + e^{-2x})^2$	(c) $(e^{3x} - e^{5x})^2$
(b) $(e^{-2x} - e^x)(e^{-2x} + e^x)$	(d) $(e^x+e^{2x}+e^{3x})(e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x})$

3. Démontrer :

(a) $\dfrac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$	(c) $(e^x + e^{-x})(e^{2x})^2 = e^{3x}(e^{2x} + 1)$
(b) $\dfrac{1}{e^x + 1} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$	(d) $\dfrac{1 - e^{2x}}{e^x} = e^{-x} - e^x$

Exercice 3 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $e^{3-x} = 1$	(f) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$	(k) $e^{2x+1} \leqslant e^{\frac{3}{x}}$
(b) $e^{x^2} = e^{-x}$	(g) $e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}}$	(l) $e^{x^2-5} > e^{-4x}$
(c) $e^{2x} < e^x$	(h) $3e^{2x} + e^x - 4 = 0$	(m) $e^x + e^{-x} - 2 \geqslant 0$
(d) $e^{x+1} \leqslant 1$	(i) $e^{x^2} = (e^{-x})^2\, e^3$	
(e) $e^{x^3-2x+\frac{3}{x}} > 0$	(j) $e^x \leqslant e^{x^2-12}$	

Exercice 4 On cherche une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'*équation différentielle* $4f' + 3f = 0$, c.-à-d. $\forall x \in \mathbb{R},\ 4f'(x) + 3f(x) = 0$.
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont solutions de cette équation ?

$a(x) = e^x$ $b(x) = 0$ $c(x) = e^{-\frac{3x}{4}}$ $d(x) = 4e^{-3x}$

EXERCICES

Exercice 5 Dériver les fonctions suivantes sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

$a(x) = e^{2x+1}$	$g(x) = x\,e^{\sqrt{x}}$	$j(x) = \dfrac{1}{x}e^{x}$
$b(x) = -3e^{-x}+1$	$h(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}$	$k(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}}$
$c(x) = e^{-x}+\sqrt{e^{2x}}$	$i(x) = \dfrac{e^{x}-1}{2e^{x}+1}$	$l(x) = (1+\frac{1}{x})\,e^{-\frac{1}{x}}$
$d(x) = e^{x}-x-4$		
$f(x) = (x+1)e^{-x}$		

Exercice 6 On définit les fonctions f et g par $\quad f(x) = e^{2x} \quad$ et $\quad g(x) = \dfrac{2e^{x}}{1+e^{x}}$ de représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère du plan.

1. Déterminer les ensembles de définition $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$ des fonctions f et g.
2. Étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. (a) Démontrer que pour tout réel x, $\quad g(x)+g(-x)=2$.
   (b) En déduire que le point $J\,(\,0\,;\,1\,)$ est le centre de symétrie de $\mathscr{C}_g$.
4. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\quad f(x) \geqslant g(x)$.
   (b) En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 $\mathscr{C}_{exp}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \longmapsto e^{x}$ dans un repère du plan. M est un point quelconque de $\mathscr{C}_{exp}$ d'abscisse m.

1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_m$ à $\mathscr{C}_{exp}$ en M.
2. Prouver que la courbe $\mathscr{C}_{exp}$ est située au-dessus de la tangente $\mathcal{T}_m$.
   On dit que la fonction $\exp$ est *convexe*.
3. En déduire que, pour tout réel x, $\quad e^{x} \geqslant x+1$.

Exercice 8 f est la fonction définie par $\quad f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^{x}}$ de représentation $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Démontrer que pour tout réel x, $\quad f(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5. Pour tout réel x, on pose $\quad d(x) = f(x)-x$.
   (a) Vérifier que pour tout x, $\quad d'(x) = \dfrac{(e^{x}-1)^2}{2e^{x}}$.
   (b) Dresser le tableau de variation de d.
   (c) En déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente $\mathcal{T}_0$.
   On dit que O est un *point d'inflexion* de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 9 Étudier le sens de variation des suites définies pour tout $n \geqslant 1$ par
$u_n = n\,e^{1-n}$ et $v_n = \dfrac{n+1}{e^{2n}}$.

Exercice 10

1. Démontrer que les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{-\frac{n}{2}}$ et $v_n = e^{1-\frac{n}{3}}$ sont géométriques.
2. On pose $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$. Prouver que $P_n = e^{\frac{-n^2+5n+6}{6}}$.

Exercice 11 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$.

1. Justifier que, pour tout n, $u_n > 0$.
2. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.
3. On suppose que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

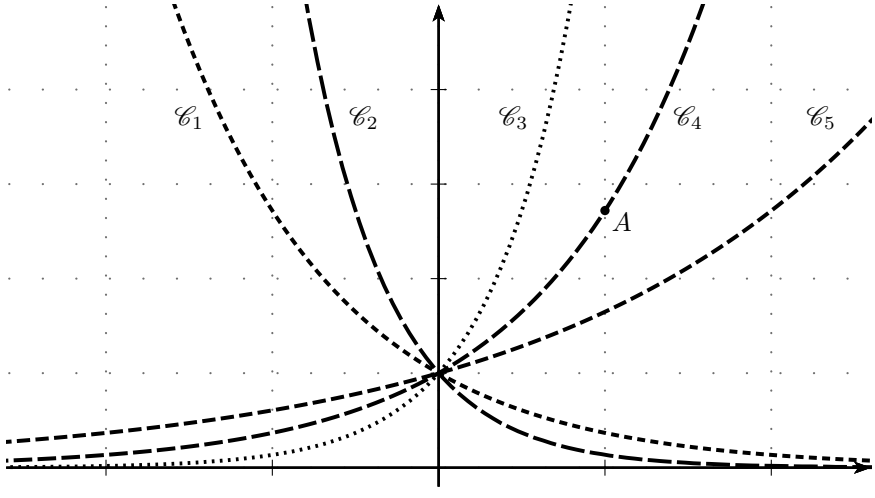
Exercice 12 Associer chaque évolution annuelle à sa modélisation continue.

Augmentation de 5 %	$a(t) = e^{0,0488t}$
Hausse de 20 %	$b(t) = e^{-0,105t}$
Baisse de 10 %	$c(t) = e^{-0,051t}$
Diminution de 5 %	$d(t) = e^{0,1823t}$

Exercice 13 Le Plastikistan, lui, a décidé de prendre le taureau par les cornes et a enfin pris des mesures visant à la réduction annuelle de 16 % de la commercialisation des pots de yaourts non recyclables.

1. À quel pourcentage de diminution mensuel cela correspond-il ?
2. Quand donc la commercialisation des pots de yaourts non recyclables aura-t-elle diminué de 96 % ?

Exercice 14 On a tracé les courbes $\mathscr{C}_i$, pour $i \in \{1, ..., 5\}$, représentant les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$, $g(x) = e^x$, $h(x) = e^{2x}$, $p(x) = e^{-x}$ et $q(x) = e^{\frac{1}{2}x}$. Sachant que A a pour coordonnées $(\,1\,;\,e\,)$, associer chaque fonction à son graphe.



Exercice 15 (∫) On pose $E_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Il est démontré que, pour tout x réel, la suite $(E_n(x))_{\mathbb{N}^*}$ converge vers $\exp(x)$: $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = \exp(x)$.

1. Vérifier cette affirmation pour $x = 0$.
2. (a) Quelle est la limite de $(E_n(1))_{\mathbb{N}^*}$?
   (b) Écrire une fonction Python `exproche` donnant le plus petit entier n tel que $E_n(1)$ soit une valeur approchée de cette limite à 10^{-k} près, pour $k \in \mathbb{N}$ donné.
   (c) Tester cette fonction pour différentes valeurs de k. Que remarque-t-on ?

Exercice 16 Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Quel est son domaine de définition ?
2. Étudier sa parité. Qu'en déduire graphiquement ?
3. Montrer que h est solution de l'équation différentielle $h' = 1 - h^2$.

Exercice 17 Une entreprise fabrique x centaines de trucs à bidule où $x \in [\,0\,;40\,]$. On suppose que toute la production de l'entreprise est vendue et que le bénéfice, en milliers d'euros, peut être modélisé par une fonction f définie sur $[\,0\,;40\,]$ par
$f(x) = (10x - 10)e^{-0,1x}$.

1. Déterminer le déficit de l'entreprise lorsque sa production de trucs à bidule est nulle ?
2. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser une bénéfice maximal ? De combien est-il alors ?
3. À partir de quelle quantité produite et vendue l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

Exercice 18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-\lambda t}$ où $\lambda > 0$.
Montrer qu'il existe un unique réel positif T tel que, pour tout réel t, $f(t+T) = \dfrac{f(t)}{2}$.
Il s'avère que la décomposition d'un radionucléide suit une telle loi exponentielle. Le nombre T alors correspondant est appelé *demi-vie* du nucléide : il correspond la durée au bout de laquelle le nombre de radionucléides présents dans l'échantillon est réduit de moitié.

Exercice 19 Équation $e^y = x$ d'inconnue y

1. On désigne par y_x une solution de l'équation $e^y = x$, d'inconnue y.
   Justifier que l'application f donnée par $f(x) = y_x$ définit bien une fonction sur un domaine que l'on précisera.
2. Que valent $f(1)$ et $f(e)$?
3. Démontrer que, pour tous a et b strictement positifs, $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Cette fonction f est appelée *logarithme népérien* et donne l'antécédent par $\exp$ d'un réel strictement positif. Elle sera définie et étudiée en terminale mais on remarque d'ors et déjà qu'elle transforme les produits en sommes.

Exercice 20 Un parachutiste de 80 kg s'élance d'une altitude de 1000 m avec une vitesse verticale initiale de $1\,\text{m.s}^{-1}$. La distance $d(t)$, où t est exprimé en secondes, parcourue par le parachutiste depuis son saut est donnée par la formule : $d(t) = 50t + C(e^{-t} - 1)$ où la constante C dépend de la vitesse initiale du parachutiste au moment du saut.

1. La vitesse $v(t)$ du parachutiste à l'instant t est donnée par $v(t) = d'(t)$.
   (a) Déterminer $v(t)$.
   (b) Sachant que $v(0) = 1$, déterminer la valeur de C.
2. Tracer la courbe de d à la calculatrice et déterminer graphiquement le moment où le parachutiste atteint une altitude de 300 m et doit ouvrir son parachute.
3. Trouver un lien entre la fonction v et sa dérivée.



Exercice 21 A heated metal ball is dropped into a liquid. As the ball cools, its temperature T (in °C), t minutes after it enters the liquid, is given by the formula : $T = 400e^{-0.05t} + 25$.

1. Find the temperature of the ball as it enters the liquid.
2. Find the value of t for which $T = 300$, giving your answer to three significant figures.
3. Find the rate at which the temperature of the ball is decreasing at the instant $t = 50$. Give your answer in °C per minute to three significant figures.
4. Explain why the temperature of the ball can never fall to 20°C.
5. What does the number 25 in the formula giving T stand for ?

Dirigez-vous vers la page 273 afin de faire le devoir n° 12.

Corrigé des exercices

FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1 Cela ne peut pas faire de mal.

1. (a) $19^2 = 361$
   (b) $3^2 - 2^3 = 1$
   (c) $2 \times 4^2 = 32$
   (d) $37, 2^0 = 1$
   (e) $-1^0 = -1$
   (f) $3^3 - 2^2 = 23$
   (g) $\frac{12^2}{3^4} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$
   (h) $5^3 \times 2^4 = 10^3 \times 2 = 2000$

2. $2^3.5^3 = (2 \times 5)^3$, $\frac{4^5}{8^5} = \frac{4^5}{(2\times 4)^5} = \frac{1}{2^5}$, $2^4.2^3 = 2^{3+4} = 2^7$,
   $\frac{6^2}{6^3} = 6^{2-3} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$, $3^2.3^{-5} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$,
   $(2^3)^{-4} = 2^{3\times(-4)} = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}}$, $6^4.15^{-2} = \frac{2^4.3^4}{3^2.5^2} = 2^4.3^2.5^{-2}$.

3. $a^{2^3}a^{-5} = a^{8-5} = a^3$, $\frac{(a^4)^2.b^{-5}}{(ab)^{-1}} = a^{4\times 2-(-1)}b^{-5-(-1)} = a^9b^{-6}$,
   $(\frac{a}{b^{-1}})^5.\frac{b}{a\times a^3} = a^{5-1-3}b^{-1\times 5+1} = a^1b^{-4}$.

Exercice 2

1. (a) $e^{-x}e^2 = e^{2-x}$.
   (b) $(e^x)^3\, e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x$.
   (c) $\dfrac{e^{x-1}}{e^{x+2}} = e^{(x-1)-(x+2)} = e^{-3}$.
   (d) $\dfrac{e^{3u-2}\, e^{7-3u}}{e^{3-u}\, e^{u+2}} = e^{(3u-2+7-3u)-(3-u+u+2)} = e^0 = 1$.

2. (a) $(e^x + e^{-2x})^2 = (e^x)^2 + 2e^xe^{-2x} + (e^{-2x})^2 = e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-4x}$
   (b) $(e^{-2x} - e^x)(e^{-2x} + e^x) = (e^{-2x})^2 - (e^x)^2 = e^{-4x} - e^{2x}$
   (c) $(e^{3x} - e^{5x})^2 = (e^{3x})^2 - 2e^{3x}e^{5x} + (e^{5x})^2 = e^{6x} - 2e^{8x} + e^{10x}$
   (d) $(e^x + e^{2x} + e^{3x})(e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x})$
   $= e^xe^{-x} + e^xe^{-2x} + e^xe^{-3x} + e^{2x}e^{-x} + e^{2x}e^{-2x} + e^{2x}e^{-3x}$
   $+ e^{3x}e^{-x} + e^{3x}e^{-2x} + e^{3x}e^{-3x}$
   $= e^0 + e^{-x} + e^{-2x} + e^x + e^0 + e^{-x} + e^{2x} + e^x + e^0 = e^{-2x} + 2e^{-x} + 3 + 2e^x + e^{2x}$

3. (a) $\frac{e^x-1}{e^x} = 1 - e^{-x} \iff e^x - 1 = (1 - e^{-x})e^x \iff e^x - 1 = e^x - e^{-x}e^x$
   $\iff -1 = -e^0$
   (b) $\frac{e^x-1}{e^{2x}-1} = \frac{e^x-1}{(e^x)^2-1^2} = \frac{e^x-1}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{1}{e^x+1}$
   (c) $(e^x + e^{-x})(e^{2x})^2 = (e^x + e^{-x})e^{4x} = e^{3x}e^x(e^x + e^{-x}) = e^{3x}(e^xe^x + e^xe^{-x})$
   $= e^{3x}(e^{2x} + 1)$
   (d) $\frac{1-e^{2x}}{e^x} = \frac{e^x(e^{-x}-e^{2x-x})}{e^x} = e^{-x} - e^x$

Exercice 3

(a) $e^{3-x} = 1 \iff x = 3$.

(b) $e^{x^2} = e^{-x} \iff x^2 + x = 0 \iff x = 0$ ou $x = -1$.

(c) $e^{2x} < e^x \iff x < 0$.

(d) $e^{x+1} \leqslant 1 \iff x \leqslant -1$.

(e) $e^{x^3-2x+\frac{3}{x}} > 0 \iff x \neq 0 \quad (\exp(y) > 0)$.

(f) $e^{2x^2+3} = e^{7x} \iff 2x^2 - 7x + 3 = 0 \iff x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$.

(g) $e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}} \iff x + 1 = \frac{2}{x} \overset{x\neq 0}{\iff} x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -2$.

(h) $3e^{2x} + e^x - 4 = 0 \overset{y=e^x>0}{\iff} 3y^2 + y - 4 = 0$
$\iff y = 1 = e^0$ ou $y = -\frac{4}{3} < 0 \Longrightarrow x = 0$.

(i) $e^{x^2} = (e^{-x})^2\, e^3 \iff x^2 = 3 - 2x \iff x = 1$ ou $x = -3$.

(j) $e^x \leqslant e^{x^2-12} \iff e^{x^2-12-x} \geqslant e^0 \overset{\exp \text{strict.}\nearrow}{\iff} x^2 - x - 12 \geqslant 0$
$\iff x \in]-\infty\,;-3\,] \cup [\,4\,;+\infty\,[$.

(k) Soit $x \neq 0$. $e^{2x+1} \leqslant e^{\frac{3}{x}} \overset{\exp \text{strict.}\nearrow}{\iff} 2x + 1 \leqslant \frac{3}{x}$
$\iff \begin{cases} 2x^2 + x \leqslant 3 & \text{si } x > 0 \\ 2x^2 + x \geqslant 3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)(2x+3) \leqslant 0 & \text{si } x > 0 \\ (x-1)(2x+3) \geqslant 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
$\iff x \in \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right] \cup]\,0\,;1\,]$.

(l) $e^{x^2-5} > e^{-4x} \overset{\exp \text{strict.}\nearrow}{\iff} x^2 + 4x - 5 > 0 \iff x \in]-\infty\,;-5\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[$.

(m) $e^x + e^{-x} - 2 \geqslant 0 \overset{\times e^x>0}{\iff} (e^x)^2 - 2e^x + 1 \geqslant 0 \overset{y=e^x>0}{\iff} y^2 - 2y + 1 \geqslant 0$
$\iff (y-1)^2 \geqslant 0 \iff y \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 $(E) : 4f' + 3f = 0$

$a(x) = e^x$: On a $a'(x) = e^x$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $4a'(x) + 3a(x) = 4e^x + 3e^x = 7e^x \neq 0$. La fonction a n'est pas solution de l'équation différentielle (E).

$b(x) = 0$: On a $b'(x) = 0$ et $4b'(x) + 3b(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ donc b est solution de (E).

$c(x) = e^{-\frac{3x}{4}}$: On a $c'(x) = \left(-\frac{3x}{4}\right)' e^{-\frac{3x}{4}} = -\frac{3}{4}e^{-\frac{3x}{4}}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$4c'(x) + 3c(x) = 4\left(-\frac{3}{4}e^{-\frac{3x}{4}}\right) + 3e^{-\frac{3x}{4}} = 0e^{-\frac{3x}{4}} = 0$ donc c est solution de (E).

$d(x) = 4e^{-3x}$: On a $d'(x) = 4\,(-3x)'\, e^{-3x} = -12e^{-3x}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$4d'(x) + 3d(x) = 4\left(-12e^{-3x}\right) + 3 \times 4e^{-3x} = -36e^{-3x} \neq 0$ donc d n'est pas solution de (E).

Exercice 5 Pour $x > 0$,

$a'(x) = \left(e^{2x+1}\right)' = (2x+1)'e^{2x+1} = 2e^{2x+1}$.

$b'(x) = \left(-3e^{-x} + 1\right)' = -3(-x)'e^{-x} + 0 = 3e^{-x}$.

$c'(x) = \left(e^{-x} + \sqrt{e^{2x}}\right)' = e^x - e^{-x}$ avec $\sqrt{e^{2x}} = \sqrt{(e^x)^2} = e^x$.

$d'(x) = (e^x - x - 4)' = e^x - 1$.

$f'(x) = [(x+1)e^{-x}]' = (x+1)'e^{-x} + (x+1)(e^{-x})' = 1e^{-x} + (x+1)(-1)e^{-x} = -xe^{-x}$.

CORRIGÉS

$$g'(x) = \left[x\,e^{\sqrt{x}}\right]' = x'e^{\sqrt{x}} + x\left[e^{\sqrt{x}}\right]' = e^{\sqrt{x}} + x\left[\sqrt{x}\right]'e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} + x\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$$
$$= e^{\sqrt{x}}(1+\tfrac{\sqrt{x}}{2}).$$

$$h'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)' = \frac{(e^x)'(e^x-1) - e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2} = \frac{(e^x)(e^x-1) - e^x\,e^x}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{-e^x}{(e^x-1)^2}.$$

$$i'(x) = \frac{(e^x-1)'(2e^x+1) - (e^x-1)(2e^x+1)'}{(2e^x+1)^2} = \frac{e^x(2e^x+1) - 2e^x(e^x-1)}{(2e^x+1)^2}$$
$$= \frac{3e^x}{(2e^x+1)^2}.$$

$$j'(x) = \left(\frac{1}{x}e^x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)'e^x + \frac{1}{x}(e^x)' = -\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x = \frac{x-1}{x^2}\,e^x.$$

$$k'(x) = \left(e^{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)'e^{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-1(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2}\,e^{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1+x)^2}\,e^{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$l'(x) = (1+\tfrac{1}{x})'\,e^{-\frac{1}{x}} + (1+\tfrac{1}{x})\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' = -\tfrac{1}{x^2}\,e^{-\frac{1}{x}} + (1+\tfrac{1}{x})\left(\tfrac{-1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}$$
$$= \tfrac{1}{x^2}\,e^{-\frac{1}{x}}\,(-1+1+\tfrac{1}{x}) = \tfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}.$$

Exercice 6 $\quad f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = \dfrac{2e^x}{1+e^x}$

1. L'exponentielle est définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_g = \mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = g(x) \iff e^{2x}(1+e^x) = 2e^x \iff e^x + e^{2x} - 2 = 0$
   $\iff (e^x-1)(e^x+2) = 0 \iff e^x = 1$ ou $e^x = -2 \iff x = 0$.
   Puisque $f(0) = g(0) = 1$, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se croisent au point $(\,0\,;\,1\,)$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $g(x) + g(-x) = \dfrac{2e^x}{1+e^x} + \dfrac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$
   $$g(x) + g(-x) = \frac{2e^x(1+e^{-x}) + 2e^{-x}(1+e^x)}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = 2\frac{e^x+1+e^{-x}+1}{1+e^{-x}+e^x+1} = 2$$
   (b) Le symétrique par rapport à $J\,(\,0\,;\,1\,)$ d'un point $(\,x\,;\,y\,)$ a pour coordonnées $(\,-x\,;\,2-y\,)$ (J est au milieu). Or $g(-x) = 2 - g(x)$ donc, si $(\,x\,;\,g(x)\,) \in \mathscr{C}_g$, alors $(\,-x\,;\,2-g(x)\,) \in \mathscr{C}_g$.
4. (a) $f(x) \geqslant g(x) \iff e^{2x}(1+e^x) \geqslant 2e^x \iff e^x + e^{2x} - 2 \geqslant 0$
   $\iff (e^x-1)(e^x+2) \geqslant 0 \overset{e^x>0}{\iff} e^x \geqslant 1$.
   Sinon, on peut vérifier que $f(1) > g(1)$ et, puisqu'elles sont continues et ne sont égales qu'en $x = 0$, on a $f(x) > g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$. De même sur $\mathbb{R}^-$ avec $f(-1) < g(-1)$.
   (b) Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ pour $x > 0$ et au-dessous sinon.

Exercice 7

1. La tangente $\mathcal{T}_m$ à $\mathscr{C}_{exp}$ en M admet pour équation
   $y = \exp'(m)(x-m) + \exp(m) = e^m\,x + e^m(1-m)$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - [e^m\,x + e^m(1-m)]$. On a $f'(x) = e^x - e^m$ qui est du signe de $x-m$. f admet donc un minimum en $x = m$

valant $f(m) = e^m - [e^m\, m + e^m(1-m)] = 0$. Ainsi, f est positive sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_{exp}$ est toujours située au-dessus de $\mathcal{T}_m$ pour tout m.

3. En particulier, pour $m = 0$, $\mathcal{T}_0 : y = e^0\, x + e^0(1-0) = x + 1$ et $\mathscr{C}_{exp}$ est au-dessus de $y = x + 1$.

Exercice 8 $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x}$

1. L'exponentielle ne peut s'annuler donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \dfrac{e^x(e^x - e^{-x})}{2e^x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = \dfrac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. La tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1+1}{2}x + \frac{1-1}{2} = x$.
5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $d'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{e^x - 2 + e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x(e^x - 2 + e^{-x})}{2e^x}$
   $d'(x) = \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2e^x} = \dfrac{(e^x - 1)^2}{2e^x}$.
   (b) Donc $d'(x) \geqslant 0$ et d est croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Puisque $d(0) = f(0) - 0 = 0$, d est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc située au-dessous de sa tangente $\mathcal{T}_0$ pour $x < 0$ et au-dessus sinon.

Exercice 9 Pour $n \geqslant 1$, $u_n = n\, e^{1-n}$ et $v_n = \dfrac{n+1}{e^{2n}}$.

• Posons $f(x) = x\, e^{1-x}$ pour $x \geqslant 1$. On a $f'(x) = 1e^{1-x} + x(-1)e^{1-x}$
$f'(x) = (1-x)e^{1-x} \leqslant 0$ pour $x \geqslant 1$ donc f est décroissante et $u_n = f(n)$ aussi.

• Posons $g(x) = \dfrac{x+1}{e^{2x}}$ pour $x \geqslant 1$. On a $g'(x) = \dfrac{1e^{2x} - (x+1) \times 2e^{2x}}{(e^{2x})^2}$
$g'(x) = \dfrac{-2x-1}{e^{2x}} \leqslant 0$ pour $x \geqslant 1$ donc g est décroissante et $v_n = g(n)$ aussi.

Exercice 10

1. • On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e^{-\frac{n+1}{2}}}{e^{-\frac{n}{2}}} = \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{n}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}}$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $e^{-\frac{1}{2}}$.
   • On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{e^{1-\frac{n+1}{3}}}{e^{1-\frac{n}{3}}} = \dfrac{e^{-\frac{1}{3}}e^{1-\frac{n}{3}}}{e^{1-\frac{n}{3}}} = e^{-\frac{1}{3}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $e^{-\frac{1}{3}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^n = ee^{-\frac{n}{3}}$ et $P_n = v_0.v_1...v_n$
   $P_n = e.ee^{-\frac{1}{3}}.ee^{-\frac{2}{3}}...ee^{-\frac{n}{3}} = e^{n+1}.e^{-\frac{1}{3}(1+2+...+n)} = e^{n+1-\frac{1}{3}\frac{n(n+1)}{2}}$
   $= e^{\frac{6n+6-n^2-n}{6}} = e^{\frac{-n^2+5n+6}{6}}$.

Exercice 11 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$.

1. On a $u_0 > 0$ et si $u_n > 0$, alors $u_n u_n\, e^{-u_n} = u_{n+1}$ reste strictement positif. Ainsi, ils le sont tous. On effectue ici ce que l'on appellera l'an prochain un *raisonnement par récurrence*.

CORRIGÉS

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = u_n\, e^{-u_n} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1)$. Puisque $u_n > 0$, $e^{-u_n} < e^0 = 1$ et $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est donc décroissante. ($\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est très bien aussi).
3. On sait que si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, cette limite est nécessairement un point fixe de la fonction de récurrence $f(x) = xe^{-x}$. Or $f(\ell) = \ell \iff \ell e^{-\ell} = \ell$
$\iff \ell(e^{-\ell} - 1) = 0 \iff \ell = 0$ ou $e^{-\ell} = 1 = e^0 \iff \ell = 0$.
Donc, si la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers 0.

Exercice 12 Modélisation continue d'une évolution périodique

$a(t) = e^{0,0488t}$. $a(1) = e^{0,0488} \simeq 1,05$, donc a est associée à une augmentation de 5 %.
$b(t) = e^{-0,105t}$. Puisque $b(1) = e^{-0,105} \simeq 0,90$, b est associée à une baisse de 10 %.
$c(t) = e^{-0,051t}$. Puisque $c(1) = e^{-0,051} \simeq 0,95$, c est associée à une diminution de 5 %.
$d(t) = e^{0,1823t}$. Puisque $d(1) = e^{0,1823} \simeq 1,20$, d est associée à une hausse de 20 %.

Exercice 13 Le Plastikistan réduit l'utilisation des pots de yaourts non recyclables.

1. $16\,\%$ de réduction annuelle correspond à un coefficient multiplicateur de $CM_{an} = 1 - \frac{16}{100} = 0,84$ et l'on cherche alors un coefficient mensuel vérifiant $CM_{mois}^{12} = CM_{an} = 0,84$. Un tableau de valeurs (ou alors $\ln(0,84)$...) montre que $0,84 \simeq e^{-0,1744}$. Ainsi, $\left(e^{-\frac{0,1744}{12}}\right)^{12} = e^{-0,1744} \simeq 0,84$ et le coefficient multiplicateur mensuel est d'environ $CM_{mois} \simeq e^{-\frac{0,1744}{12}} \simeq 0,98558$ c.-à-d. une diminution de 1,44 %.
2. Une diminution de 96 % correspond à un coefficient multiplicateur global de $1 - 0,96 = 0,04$. On cherche alors m, le nombre de mois tels que $CM_{mois}^{m} = e^{-\frac{0,1744}{12}m} \leqslant 0,04$. Un tableau de valeurs donne $m \geqslant 222$ mois. La commercialisation des pots de yaourts non recyclables devrait avoir donc diminué de 96 % dans 18 ans et demi. Il aurait été moins fastidieux de trouver d'abord entre 18 et 19 ans avec CM_{an}^{n} puis d'affiner avec CM_{mois}^{m}. En terminale, vous pourrez trouver directement cette valeur : $m \geqslant -\frac{12}{0,1744}\ln(0,04)$.

Exercice 14 Ces cinq fonctions sont du type $\exp(ax)$. D'après le signe des coefficients, g, h, q se répartissent $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$, $\mathscr{C}_5$ et f, p se répartissent $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$. Puisque $g(1) = e^1 = e$, on a $A\,(\,1\,;\,e\,) \in \mathscr{C}_{\exp}$ et $\mathscr{C}_4 = \mathscr{C}_g$.
Puisque $\frac{1}{2} < 1 < 2$, on a $q(1) = e^{0,5} < g(1) = e^1 < h(1) = e^{2\times 1}$ ($\exp(x)$ est $\nearrow$) : $\mathscr{C}_q = \mathscr{C}_5$ et $\mathscr{C}_h = \mathscr{C}_3$.
Puisque $\left(\,-1\,;\,e = e^{-(-1)}\,\right) \in \mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_p = \mathscr{C}_1$.
Puisque $-2 < -1$, on a $f(-1) = e^{-2(-1)} > e^{-(-1)} = p(-1)$ ($\exp(-x)$ est $\searrow$) et $\mathscr{C}_f = \mathscr{C}_2$.

Exercice 15 $\left(\int\right)$ $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $E_n(0) = (1 + \frac{0}{n})^n = 1^n = 1 = \exp(0)$.
2. (a) On a $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \exp(1) = e$.
   (b) La fonction suivante donne le plus petit entier n tel que $E_n(1)$ soit une valeur approchée de e à 10^{-k} près, pour $k \in \mathbb{N}$ donné.

```
1| def exproche(k) :
2|     n=1
3|     while abs(exp(1)-(1+1/n)**n)>10**(-k) :
4|         n=n+1
5|     return(n)
```

(c) On remarque que `exproche(1)` donne 13, `exproche(2)` donne 135 et `exproche(6)` donne 1358611 : la convergence semble très lente.

Exercice 16 Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}\ e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, le dénominateur ne peut pas s'annuler et la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $h(-x) = \frac{e^{-x}-e^{+x}}{e^{-x}+e^{+x}} = \frac{-(e^x-e^{-x})}{e^x+e^{-x}} = -h(x)$ et h est une fonction impaire. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.
3. Par quotient de fonctions dérivables, h est dérivable. Posons $u = e^x - e^{-x}$, $v = e^x + e^{-x}$. On a $u' = e^x - (-1)e^{-x} = e^x + e^{-x} = v$, $v' = e^x - e^{-x} = u$. Puisque $h = \frac{u}{v}$, $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{v^2-u^2}{v^2} = \frac{v^2}{v^2} - \frac{u^2}{v^2} = 1 - (\frac{u}{v})^2 = 1 - h^2$.

Exercice 17 Une entreprise fabrique des centaines de trucs à bidule.

1. On a $f(0) = (10 \times 0 - 10)e^{-0,1\times 0} = -10e^0 = -10$. Lorsque la production est nulle, l'entreprise est en déficit de 10.000 €.
2. f est dérivable sur $[\,0\,;40\,]$ et l'on a
   $f'(x) = (10x-10)'e^{-0,1x} + (10x-10)(e^{-0,1x})'$
   $= 10e^{-0,1x} + (10x-10)(-0,1)e^{-0,1x} = e^{-0,1x}(10 - 0,1(10x-10))$
   $= (11-x)e^{-0,1x}$ du signe de $11-x$.
   De plus, $f(11) = (10 \times 11 - 10)e^{-0,1\times 11} \simeq 33,29$
   et $f(40) = (10 \times 40 - 10)e^{-0,1\times 40} \simeq 7,14$. D'où le tableau de variations suivant.

x	0		11		40
$11-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-10	↗	33.3	↘	7.1

   Afin de réaliser un bénéfice maximal, l'entreprise doit produire 11 centaines (1100) de trucs à bidule. Ce bénéfice maximal sera alors d'environ 33.300 €.
3. On a $f(1) = (10-10)e^{-0,1} = 0$ et d'après le tableau de variations, pour $x \in [\,1\,;40\,]$, $f(x) \geqslant f(1) = 0$. L'entreprise réalise donc un bénéfice à partir d'une centaine (100) de trucs à bidule produits.

Exercice 18 $f(t+T) = \dfrac{f(t)}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda(t+T)} = \dfrac{e^{-\lambda t}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{e^{-\lambda t}e^{-\lambda T}}{e^{-\lambda t}} = \dfrac{1}{2}$
$\Leftrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\lambda T} = 2\,(>0)$. λT est donc l'unique antécédent de 2 par la fonction exponentielle. Si on le désigne par $\ln(2)$, on doit avoir $T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$, la *demi-vie* du nucléide.

Exercice 19 Équation $e^y = x$ d'inconnue y

1. On sait que $\exp\colon \mathbb{R} \longmapsto]\,0\,;+\infty\,[$ est strictement croissante et que $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$. Ainsi, tout $x > 0$ admet un unique antécédent y_x par la fonction $\exp$. La fonction f qui à $x > 0$ associe son antécédent y_x par $\exp$ est donc bien définie et $\mathscr{D}_f =]\,0\,;+\infty\,[$.
On remarque que, $\forall x > 0, \quad e^{f(x)} = x$.
2. On a $e^0 = 1$ donc 0 est l'antécédent de 1 par $\exp$ et $f(1) = 0$. De même, $e^1 = e$ donc 1 est l'antécédent de e par $\exp$ et $f(e) = 1$.
3. Soient $a, b \in]\,0\,;+\infty\,[$. On a $e^{f(a)+f(b)} = e^{f(a)}.e^{f(b)} = a.b = e^{f(ab)}$ donc, par stricte monotonie de $\exp$, $f(a) + f(b) = f(ab)$. Cette fonction f est appelée *logarithme népérien* et donne l'antécédent par $\exp$ d'un réel strictement positif. Elle sera définie et étudiée en terminale mais on remarque d'ors et déjà qu'elle transforme les produits en sommes.

Exercice 20

1. (a) On a $v(t) = d'(t) = (50t + C(e^{-t} - 1))' = 50 - Ce^{-t}$.
   (b) $v(0) = 1 \iff 50 - Ce^{-0} = 1 \iff C = 49$ et $v(t) = 50 - 49e^{-t}$.
2. Graphiquement, on trouve $d(t) = 700\,\text{m}$ pour $t \simeq 15\,\text{s}$.
3. On a $v'(t) = 49e^{-t}$ donc $v + v' = 50$: ceci s'appelle une *équation différentielle*.

Exercice 21 A heated metal ball is dropped into a liquid.

1. We have $T(0) = 400e^{-0.05\times0} + 25 = 425°\,\text{C}$, temperature of the ball as it enters the liquid.
2. $T = 400e^{-0.05t} + 25 = 300 \iff e^{-0.05t} = \frac{275}{400} \iff e^{0.05t} = \frac{400}{275} = \frac{16}{11}$
   $\iff 0.05t \simeq 0.3747 \Leftrightarrow t \simeq 7.494\,s$.
3. We have $T'(t) = -0.05 \times 400e^{-0.05t} = -20e^{-0.05t}$ so the rate at which the temperature of the ball is decreasing at the instant $t = 50$ is
   $|T'(50)| = 20e^{-2.5} \simeq 1.64°\,\text{C}.s^{-1}$.
4. Since $e^x > 0, \quad T(t) > 25 + 0 > 20$ hence the temperature of the ball can never fall to $20°\,\text{C}$.
5. In the formula, the number 25 is the limit at $+\infty$ of $T(t)$. Therefore, it is the temperature the ball will be at the end of time.

Chapitre X

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Sommaire

1 Introduction 180

2 Variables aléatoires réelles 181

3 Espérance, variance et écart-type 182

4 Expérimentation 184

Exercices 185

Corrigé des exercices 191

Voici déjà le second chapitre sur les probabilités. Nous savons bien que les éventualités d'une expérience aléatoire ne sont pas toutes numériques comme, par exemple, lorsque l'on joue à pile ou face, que l'on s'intéresse au goût prononcé pour les brocolis en salade, qu'on choisit une teinte de gris au hasard, qu'on lance une fléchette sur une cible, etc. Il nous est alors difficile de faire des calculs avec ces résultats potentiels et il est alors pratique de les transformer en données numériques : 1 et 0 pour Pile et Face ou Oui et Non, $n \in \{1; \dots; 50\}$ pour la teinte de gris, d pour la distance au centre de la cible, etc. Ainsi, il nous est plus aisé de traiter ces résultats potentiels, les nombres sont bien plus pratiques lorsque l'on souhaite effectuer des calculs, n'est-ce pas ? La notion de variable aléatoire réelle formalise précisément cette association d'un nombre à un résultat d'une expérience. Nous pourrons alors définir l'espérance et l'écart-type d'une telle variable, correspondant au couple moyenne et écart-type en statistiques.

Dans tout le chapitre, nous nous plaçons dans le cadre d'une expérience aléatoire d'**univers fini** $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.

1 Introduction

Commençons par quelques rappels et un exemple que nous suivrons tout au long du chapitre.

Définition 1 *Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un réel p_i de l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ tel que la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.*

$$P\,:\,x_i \mapsto p_i \quad \textit{tel que} \quad 0 \leqslant p_i \leqslant 1 \quad \textit{et} \quad \sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1.$$

Le nombre p_i est appelé probabilité de l'événement élémentaire x_i et on note $p_i = P(\{x_i\})$.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de toutes les issues qui le réalisent :

$$\textit{Si} \quad A = \{x_{i_1}\,, x_{i_2}\,\ldots, x_{i_m}\} \quad \textit{alors} \quad P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \,\ldots\, + p_{i_m}\,.$$

On a toujours • $P(\Omega) = 1$ et • $P(\varnothing) = 0$.

Exemple : Nous disposons d'un dé cubique aux faces de teintes diverses : safran, mandarine, ocre, abricot, carotte et tangerine.

1. Nous supposons que contrairement au rédacteur de cet exemple, ce dé est très bien équilibré.

   (a) Quelle est la loi de probabilité suivi par ce dé ?
   Puisqu'il est bien équilibré, ce dé suit la loi d'équiprobabilité et les faces ont toutes la même probabilité d'apparition, $\frac{1}{6}$.

   (b) Calculons la probabilité de l'événement A : « obtenir une teinte fruitée ».
   $P(A) = P(\{m; a; t\}) = p_m + p_a + p_t = 3p_m = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

   (c) Calculons la probabilité de l'événement B : « obtenir une teinte sans "e" ».
   $P(B) = P(\{s; a\}) = p_s + p_a = 2p_s = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. Nous avons été informé que ce dé est peut-être pipé selon la loi suivante :

x_i	Safran	Mandarine	Ocre	Abricot	Carotte	Tangerine
p_i	0, 1	0, 2	0, 3	0, 1	0, 2	0, 1

   (a) Justifions que ceci définit bien une loi de probabilité.
   On a bien $p_i \in [\,0\,;1\,]$ et $\sum p_i = 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 + 0,2 + 0,1 = 1$.

   (b) Calculons la probabilité de l'événement A : « obtenir une teinte fruitée ».
   $P(A) = P(\{m; a; t\}) = p_m + p_a + p_t = 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,4$.

   (c) Calculons la probabilité de l'événement B : « obtenir une teinte sans "e" ».
   $P(B) = P(\{s; a\}) = p_s + p_a = 0,1 + 0,1 = 0,2$.

Nous voyons bien que nous sommes limités non seulement mathématiquement mais aussi en pratique, pour décrire et comparer, étudier les résultats obtenus avec cet étrange dé teinté. Aussi, nous nous empressons de le « numériser ».

2 Variables aléatoires réelles

On associe fréquemment un nombre à tout résultat d'une expérience aléatoire. La notion de variable aléatoire formalise cette situation.

Définition & Propriété 1
*Une **variable aléatoire** T sur un univers $\Omega = \{x_1; \ldots; x_n\}$ est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$:* $T : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$.
L'ensemble de toutes les images de toutes les éventualités est fini :
$T(\Omega) = \{t_1; t_2; \ldots; t_k\} \subset \mathbb{R}$ *où* $k \leqslant n$.
On note $\{T = t_j\} = \{x_i \in \Omega / T(x_i) = t_j\} \subset \Omega$ *l'événement « T prend la valeur t_j ». C'est l'ensemble des éventualités qui ont t_j pour image par T. On définit de même* $\{T \leqslant t_j\}$, $\{T > t_j\}$,...

Exemple : ◦ À chaque teinte du dé précédent, on peut associer un nombre au moyen d'une variable aléatoire $T : \{s; m; o; a; c; t\} \longmapsto \{1; \ldots; 6\}$.
Donnons par exemple l'association suivante.

x_i	Safran	Mandarine	Ocre	Abricot	Carotte	Tangerine
t_i	1	2	3	4	5	6

L'événement $\{T = 3\}$ est « on obtient une teinte ocre ».
L'événement $\{T \geqslant 5\}$ est « on obtient une teinte carotte ou tangerine ».
L'événement $\{T$ est pair$\}$ est « on obtient une teinte m, a ou t » (l'événement A précédent).
L'événement $\{T$ est un carré parfait$\}$ est « on obtient une teinte s ou a » (l'événement B précédent).
On peut aussi jouer avec les résultats obtenus et définir de nouvelles règles.
◦ Si T est impair, vous gagnez deux euros et s'il est pair, vous en perdez trois. On définit ainsi une variable aléatoire I de l'univers $\{1; 2; \ldots; 6\}$ sur $\{-3; 2\}$ (ici, $k = 2$).
On a $\{I = -3\} = \{\text{T pair}\} = \{2; 4; 6\} = A$ et $\{I = 2\} = \{1; 3; 5\}$.
◦ On change la règle. Cette fois, vous gagnez (1) si T est un carré parfait et vous perdez (0) sinon.
Les valeurs de la variable aléatoire C sont alors $\{0\,; 1\}$ et l'on a $\{C = 0\} = \{2; 3; 5; 6\}$ et $\{C = 1\} = \{T$ carré parfait$\} = \{1; 4\} = B$.

Nous pouvons alors définir une loi de probabilité de la variable aléatoire à partir de celle de l'expérience initiale :

Définition & Propriété 2
Soit P une loi de probabilité sur Ω et soit T une variable aléatoire associée à Ω prenant les valeurs t_1, t_2, ..., t_k.
La loi de probabilité de T est définie sur l'univers $\{t_1; t_2; \ldots; t_k\}$ par :

Valeur	t_1	t_2	...	t_k
Probabilité	$P(T = t_1)$	$P(T = t_2)$	...	$P(T = t_k)$

Démonstration : Puisque $T\colon \Omega \longmapsto \{t_1; \ldots; t_k\}$ est une fonction, les événements $\{T = t_1\}, \ldots, \{T = t_k\}$ réalisent une partition de l'univers et l'on a bien
$\sum_{j=1}^{j=k} P(T = t_j) = \sum_{i=1}^{i=n} P(x_i) = 1.$ □

Exemple : Reprenons l'exemple du dé puisque nous avons déjà effectué les calculs de probabilité en page 180. Par exemple, $P(I = -3) = P(A)$ et $P(C = 1) = P(B)$.

◦ Si le dé n'est pas truqué, nous avons les lois suivantes.

t_i	1	2	3	4	5	6
$P(T = t_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

v_i	-3	2
$P(I = v_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

c_i	0	1
$P(C = c_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

◦ Si le dé est pipé, nous avons les lois suivantes.

t_i	1	2	3	4	5	6
$P(T = t_i)$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.1

v_i	-3	2
$P(I = v_i)$	0.4	0.6

c_i	0	1
$P(C = c_i)$	0.8	0.2

3 Espérance, variance et écart-type

Désormais, les issues sont des nombres réels et nous pouvons donc effectuer des calculs et par exemple, obtenir une moyenne théorique des valeurs obtenues.

Définition 2

Soit T une variable aléatoire de loi de probabilité :

Valeurs t_i	t_1	t_2	$\ldots$	t_k
$P(T = t_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

- *L'**espérance** mathématique de T est le nombre*
$$\mathbb{E}(\boldsymbol{T}) = p_1\, t_1 + p_2\, t_2 + \ldots + p_k\, t_k = \sum_{i=1}^{i=k} p_i\, t_i\,.$$
- *La **variance** de T est le réel*
$$\boldsymbol{V(T)} = p_1\,(t_1 - \mathbb{E}(T))^2 + p_2\,(t_2 - \mathbb{E}(T))^2 + \ldots + p_k\,(t_k - \mathbb{E}(T))^2$$
$$= \sum_{i=1}^{i=k} p_i\,(t_i - \mathbb{E}(T))^2 = \mathbb{E}\big((T - \mathbb{E}(T))^2\big).$$
- *L'**écart-type** de T est alors la racine carrée de la variance :* $\boldsymbol{\sigma(T)} = \sqrt{V(T)}$.

Exemple : ◦ Si le dé précédent n'est pas truqué, on a :
$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = 3,5.$
$V(T) = \frac{1}{6}\,(1 - 3,5)^2 + \frac{1}{6}\,(2 - 3,5)^2 + \ldots + \frac{1}{6}\,(6 - 3,5)^2 \simeq 2,9.$
$\sigma(T) = \sqrt{V(T)} \simeq 1,7.$

◦ Et s'il est pipé, on a :
$\mathbb{E}(T) = 0,1 \times 1 + 0,2 \times 2 + 0,3 \times 3 + 0,1 \times 4 + 0,2 \times 5 + 0,1 \times 6 = 3,4.$
$V(T) = 0,1\,(1 - 3,4)^2 + 0,2\,(2 - 3,4)^2 + \ldots + 0,1\,(6 - 3,4)^2 \simeq 2,24.$

$\sigma(T) = \sqrt{V(T)} \simeq 1,5.$

L'espérance mathématique d'une loi mesure en quelque sorte la moyenne théorique de l'expérience aléatoire, ce que l'on peut espérer obtenir théoriquement en réalisant cette expérience. Elle est à rapprocher de la formule donnant la moyenne d'une série statistique $\overline{x} = \sum_{i=1}^{i=n} f_i\, x_i$ et la loi des grands nombres nous dit que cette moyenne se rapproche de l'espérance $\mathbb{E}(T)$ lorsque la taille de l'échantillon augmente.

La variance mesure les carrés des écarts à l'espérance, pondérés par les probabilités et sa racine remet le tout à la même « échelle » que $\mathbb{E}(T)$. L'écart-type mesure la dispersion théorique des résultats de l'expérience aléatoire. Ces deux indices sont à rapprocher de leur homonyme pour les séries statistiques. Il s'avère, par exemple, qu'environ 70% des valeurs d'une série statistique appartiennent à l'intervalle $[\,\overline{x} - \sigma\,;\overline{x} + \sigma\,]$.

Exemple : Pour le dé précédent, on a donc :
- s'il est équilibré, $[\mathbb{E}(T) \pm \sigma(T)] \simeq [\,3,5 - 1,7\,;3,5 + 1,7\,] = [\,1,8\,;5,2\,]$ de probabilité $P([\,2\,;5\,]) = P(\{2;3;4;5\}) = \frac{2}{3}$;
- s'il est pipé, $[\,\mathbb{E}(T) - \sigma(T)\,;\mathbb{E}(T) + \sigma(T)\,] \simeq [\,3,4 - 1,5\,;3,4 + 1,5\,] = [\,1,9\,;4,9\,]$ de probabilité $P([\,2\,;4\,]) = P(\{2;3;4\}) = 0,6$.

La propriété suivante donne une expression parfois plus facile à calculer.

Propriété 3 *La variance de la loi est égale à*
$$\boldsymbol{V(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \sum_{i=1}^{i=k} p_i\, t_i^2 - \mathbb{E}(T)^2}\,.$$

Démonstration :
$V = \sum_1^k p_i\,(t_i - \mathbb{E})^2 = \sum_1^k p_i\, t_i^2 - 2\,\mathbb{E}\sum_1^k p_i\, t_i + \sum_1^k p_i\,\mathbb{E}^2 = \sum_1^k p_i\, t_i^2 - 2\,\mathbb{E}\,\mathbb{E} + 1 \times \mathbb{E}^2.$ □

Exemple : On reprend l'exemple du dé teinté en le supposant bien équilibré.

- Pair ou non : La loi de probabilité de I est

v_i	-3	2
$P(I = v_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

  Son espérance est $\mathbb{E}(I) = -\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$, sa variance $V(I) = \frac{1}{2}(-3)^2 + \frac{1}{2}.2^2 - (-\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$ et son écart-type $\sigma(I) = \sqrt{V(I)} = \frac{5}{2}$ d'où $[\,\mathbb{E}(I) - \sigma(I)\,;\mathbb{E}(I) + \sigma(I)\,] = [\,-3\,;2\,]$, de probabilité 100 %.

- Carré parfait ou non : La loi de probabilité de C est

c_i	0	1
$P(C = c_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

  Son espérance est $\mathbb{E}(C) = 0\frac{2}{3} + 1.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, sa variance $V(C) = \frac{2}{3}.0^2 + \frac{1}{3}.1^2 - (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$ et son écart-type $\sigma(C) = \sqrt{V(C)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ d'où $[\,\mathbb{E}(C) - \sigma(C)\,;\mathbb{E}(C) + \sigma(C)\,] = \left[\,\frac{1-\sqrt{2}}{3}\,;\frac{1+\sqrt{2}}{3}\,\right]$, de probabilité $\frac{2}{3}$.

On reprend ces exemples mais cette fois en supposant que le dé est pipé.

- Pair ou non : La loi de probabilité de I est

v_i	-3	2
$P(I = v_i)$	0.4	0.6

  Son espérance est $\mathbb{E}(I) = -3 \times 0,4 + 2 \times 0,6 = 0$, sa variance $V(I) = 0,4(-3)^2 + 0,6.2^2 - 0^2 = 6$ et son écart-type $\sigma(I) = \sqrt{V(I)} = \sqrt{6}$ d'où $[\,\mathbb{E}(I) - \sigma(I)\,;\mathbb{E}(I) + \sigma(I)\,] = \left[\,-\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\,\right]$, de probabilité 60 %.

◦ Carré parfait ou non : La loi de probabilité de C est

c_i	0	1
$P(C=c_i)$	0.8	0.2

Son espérance est $\mathbb{E}(C) = 0 \times 0,8 + 0,2 \times 1 = 0,2$,
sa variance $V(C) = 0,8.0^2 + 0,2.1^2 - (0,2)^2 = 0,16$
et son écart-type $\sigma(C) = \sqrt{V(C)} = 0,4$
d'où $[\,\mathbb{E}(C) - \sigma(C)\,;\mathbb{E}(C) + \sigma(C)\,] = [\,-0,2\,;0,6\,]$, de probabilité 80 %.

Remarque : Lors de l'étude d'un jeu d'argent, on définit souvent la variable aléatoire *gain algébrique* d'un joueur comme étant la différence entre la somme reçue et celle dépensée, la mise.

Définition 3
Lorsque l'espérance du gain algébrique est nulle, on dit que le jeu est ***équitable****.*

Exemple : Le seul jeu équitable que l'on ait ici est celui de pair ou impair avec le dé pipé et la règle $-3€/+2€$.

Tout comme la moyenne d'une série statistique, l'espérance possède des propriétés de linéarité qui peuvent être utiles lorsque l'on modifie les règles de façon affine :

Définition & Propriété 4 *Soit T une variable aléatoire sur un univers Ω et soient a et b deux réels.*
On peut définir une nouvelle variable aléatoire $S = aT + b$ par ses images $s_i = at_i + b$.
S est alors d'espérance $\mathbb{E}(S) = a\mathbb{E}(T) + b$, de variance $V(S) = a^2V(T)$ et d'écart-type $\sigma(S) = |a|\,\sigma(T)$.

Démonstration : Démontrons que l'espérance d'une variable aléatoire est linéaire :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_1^k p_i s_i = \sum_1^k p_i(at_i + b) = \sum_1^k p_i a t_i + p_i b = \sum_1^k p_i a t_i + \sum_1^k p_i b$$
$$= a\sum_1^k p_i t_i + b\sum_1^k p_i = a\mathbb{E}(T) + b \times 1. \qquad \square$$

Exemple : Si l'on joue à pair ou impair avec le dé bien équilibré en doublant les gains et pertes et en donnant $1€$ au joueur pour qu'il s'y risque, l'espérance de gain est alors $\mathbb{E}(J) = \mathbb{E}(2I+1) = 2\mathbb{E}(I) + 1 = 2 \times (-\frac{1}{2}) + 1 = 0€$ et ce jeu devient équitable.

4 Expérimentation

Le résultat suivant ne sera pas démontré mais l'idée est que, dans 95 % des cas, l'expérience est proche de la théorie à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ près.

Propriété 5 *Soit T une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ.*
On répète n fois, de manière indépendante, l'expérience aléatoire associée et l'on calcule la moyenne m des résultats obtenus.
Il y a alors 95 % de chances pour que $m \in \left[\,\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\,;\mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\,\right]$.

Exercices

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Exercice 1

Un sac vermillon contient trois boules indiscernables au toucher étiquetées L, C et P.
Un sac rubis contient deux boules indiscernables au toucher étiquetées A et I.
Un sac bordeaux contient deux boules indiscernables au toucher étiquetées F et C.
On tire, au hasard et dans cet ordre, une boule du sac vermillon, puis une du sac rubis et enfin une du sac bordeaux. On obtient ainsi un « mot » de trois lettres.

1. À l'aide d'un arbre de choix, déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.
2. En déduire la probabilité de tirer le mot « PAF ».
3. On compte ensuite le nombre de lettres « C » dans le mot obtenu. Quelle est la loi de probabilité de cette variable aléatoire ? En calculer l'espérance, la variance et l'écart-type.

Exercice 2

A. On lance deux dés cubiques bien équilibrés et l'on note la somme des deux nombres obtenus.
   1. À l'aide d'un tableau, décrire l'univers associé à cette expérience aléatoire.
   2. Quelle est la loi de probabilité qui modélise cette expérience ?
   3. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu soit inférieur ou égal à 4 ?
   4. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu soit strictement supérieur à 4 ?
   5. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu soit un nombre pair ?
   6. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu soit un nombre premier ?
   7. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de cette loi de probabilité puis expliciter $[\,\mathbb{E}-\sigma\,;\mathbb{E}+\sigma\,]$.
   8. Ignace et Philomène jouent à un jeu. Chacun met un tic-tac dans un pot puis Philomène lance les dés. Si la somme est paire, elle remporte les tic-tac du pot. Sinon, c'est Ignace qui les remporte.
      Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire du gain algébrique de Philomène puis en calculer l'espérance, la variance et l'écart-type. Ce jeu est-il équitable ?

B. Même exercice en notant cette fois uniquement le plus grand des nombres lus sur les faces supérieures.

C. Même exercice en notant cette fois le produit des deux nombres lus sur les faces supérieures (si vous en avez le courage).

Exercice 3 On donne la loi de probabilité suivante :

-2	-1	0	1	2
$0,2$	x	$0,3$	y	$0,1$

Déterminer les réels x et y sachant que l'espérance de cette loi est nulle.

Exercice 4

1. Un dé cubique est pipé : la probabilité d'apparition des faces et les nombres marqués sur ces faces sont proportionnels. Déterminer la loi de probabilité d'un lancer de ce dé puis en calculer l'espérance, la variance et l'écart-type.
2. Un autre dé est aussi pipé : la probabilité d'apparition des faces et les nombres marqués sur ces faces sont cette fois-ci inversement proportionnels. Déterminer la loi de probabilité d'un lancer de ce dé puis en calculer l'espérance, la variance et l'écart-type.

Exercice 5 $\Sigma\alpha\nu\sigma\ \Sigma\omega\upsilon\varepsilon\iota$!

1. Écrire sans symbole $\sum$ les sommes suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=5} 2k$, (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=4} i^2$, (c) $\displaystyle\sum_{p=4}^{p=8} p \times 3^p$.
2. Écrire avec le symbole $\sum$ les sommes suivantes :
   (a) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}$,
   (b) $1+8+27+64+125+216$,
   (c) $3+5+9+17+33+65$.



Exercice 6 Vocabulary and Definition

Complete with the following words : subset, mutually exclusive, impossible event, universal space, exhaustive events, complementary event, outcomes, elementary event, equally likely.

1. In a random experimentation, Ω is called the ..... . Ω is the set of all possible ..... .
2. An outcome of Ω is an ..... . An event A is a ..... of Ω.
3. When an event A can never happen at the same time as the event B, the events A and B are said to be ..... .
4. When A and B are two mutually exclusive events, then $A \cap B$ is ..... and $P(A \cap B) =$ ....
5. When several events A_1, A_2, ..., A_n are such that every elementary event is at least in one of them, they are called ..... . Then, we have $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n =$ .... .
6. When A and B are two exhaustive events, then $A \cup B =$ ..... and $P(A \cup B) =$ ... .
7. When two events A and B have the same probability, they are said to be ..... .
8. When an outcome doesn't realize an event A, it is said to realize the..... .
9. If A is an event, the ..... of A is written $\overline{A}$ (read as A bar). If $\overline{A}$ occurs, then A doesn't. $A \cup \overline{A} =$ ...., $A \cap \overline{A} =$ ...., $P(\overline{A}) =$ ..... .

Exercice 7 La loi de probabilité suivante décrit le gain possible à une loterie sans tenir compte du prix du billet.

gain (en €)	0	5	10	100	500
probabilité p_i	$0,6$	$0,2$	$0,1$	$0,075$	$0,025$

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « le joueur est gagnant » ;
   B : « le joueur a gagné au moins 100 € » ;
   C : « le joueur a reçu au plus 10 € » ;
   $D = A \cap C$.
2. L'organisateur de la loterie prévoit de fixer le prix du billet à 15 €. Quel avenir peut-on lui prédire ?

Exercice 8 Colette a mis un grand nombre de dragées dans une boîte, les unes contenant des amandes, les autres non :

- 30% des dragées contiennent une amande ;
- 40% des dragées avec amandes sont bleues, les autres sont roses ;
- 75% des dragées sans amandes sont bleues, les autres sont roses.

Colette choisit au hasard une dragée. On admet qu'elles ont toutes la même probabilité d'être choisies.
On considère les événements A : « la dragée choisie contient une amande » et B : « la dragée choisie est bleue ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Décrire l'événement $A \cap B$ par une phrase puis calculer sa probabilité.
3. Calculer la probabilité de l'événement B.
4. Décrire l'événement $A \cup B$ par une phrase puis calculer sa probabilité.
5. Quel est le pourcentage de dragées roses ne contenant pas d'amande dans la boîte ?

Colette, gourmande, joue à un jeu :

- si la dragée qu'elle tire est bleue et contient une amande, elle gagne 2 points ;
- si elle est rose et contient une amande, elle gagne 1 point ;
- si elle est rose sans amande, elle perd 2 points ;
- tout autre configuration ne lui fait ni gagner ni perdre de points.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire du gain ainsi défini puis en calculer l'espérance, la variance et l'écart-type. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 9 Une urne opaque contient des boules indiscernables au toucher, une citron et trois mimosa. Agathe prélève successivement et sans remise chacune des quatre boules et note N le rang d'apparition de la boule citron. Déterminer, en justifiant, l'univers puis la loi de probabilité de N et en calculer l'espérance.

Exercice 10 On compose un jury en tirant au sort trois quidams lambda au hasard parmi sept volontaires : quatre hommes et trois femmes. F désigne la variable aléatoire qui associe à chaque jury le nombre de femmes qu'il présente.

1. Quelle est la probabilité le jury compte une seule femme ? Celle que le jury compte au moins une femme ?
2. Déterminer la loi de probabilité de F et calculer son espérance.

Exercice 11 Dans une urne opaque, on place quatre boules indiscernables au toucher : une bleue et trois orange. Pour pouvoir participer, la mise est de 2 € pour le joueur. Il tire alors au hasard une boule dans l'urne. Si elle est bleue, il reçoit 3 €. Si elle est orange, il effectue deux tirages de plus, sans remise : si la bleue n'apparaît pas, le joueur reçoit 5 € et sinon, il ne reçoit rien. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 12 Rodrigue joue aux dés avec Chimène. Ils disposent de deux dés tétraédriques pourpres bien équilibrés. Ils les lancent simultanément et font la somme des deux nombres situés sur les faces inférieures.

1. À l'aide d'un tableau, présenter l'ensemble de toutes les issues de cette expérience.
2. Donner l'univers Ω correspondant à cette expérience aléatoire.
3. Définir la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
4. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de cette loi.
5. Pâques passe et Chimène, gourmande, propose un enjeu à Rodrigue : « Si la somme est un nombre pair, je te donne trois œufs en chocolat ; sinon, tu m'en donnes quatre. C'est normal, c'est le nombre de pairs et d'impairs possibles. » Rodrigue s'empresse d'accepter.
   On note C la variable aléatoire du gain en œufs de Chimène.
   (a) Décrire l'univers puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire C.
   (b) Calculer l'espérance de C.
   (c) Qui des deux devrait théoriquement manger les œufs de son camarade ?

Exercice 13 X est une variable aléatoire réelle sur un univers fini, d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $V(X)$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbb{E}\left[(X-x)^2\right]$.

1. Montrer que f est un trinôme du second degré de la forme $f(x) = x^2 - 2\mathbb{E}(X)x + \mathbb{E}(X^2)$.
2. Montrer que le discriminant de f est $\Delta = -4V(X)$.
3. Déterminer le signe de f. Ce résultat est-il surprenant ?
4. Quel est l'extremum de f ? Interpréter ce résultat.

Exercice 14 Un QCM mathématique passionnant ne comporte malheureusement que trois questions. Pour chacune de ces questions, quatre réponses sont raisonnablement proposées, dont une seule est juste. Une bonne réponse rapporte généreusement n points tandis qu'une mauvaise réponse enlève fatalement un point.
Quelle valeur faut-il donner judicieusement à n si l'on veut que la note obtenue en répondant bêtement au hasard soit généralement de 1,5 ?

Exercice 15 Adélaïde a truqué un dé tétraédrique de telle sorte que $p_2 = p_4 = 2p_1 = 2p_3$ où p_i est la probabilité que la face inférieure porte le numéro i. Dédé et Amédée lancent le dé d'Adélaïde. Si le résultat est pair, Dédé donne x orchidées à Amédée, sinon, il reçoit y orchidées de la part d'Amédée. Craignant des dégâts, Adélaïde doit veiller à ce que ce jeu soit équitable et que la variance du gain égale 8. Aide-la en nommant D la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Dédé.

Exercice 16 Afin de financer leur voyage à Plassans, les deux frères Émile et Tom Bola en ont organisé une.
Émile propose 100 billets dont 30 sont gagnants : 1 lot de 250€, 4 lots de 50€ et 25 lots de 2€.
Tom propose également 100 billets mais annonce 50 gagnants : 5 lots de 20€, 10 lots de 15€, 15 lots de 10€ et 20 lots de 5€.
On note $\mathscr{E}$ et $\mathcal{T}$ les gains d'un joueur aux tombolas d'Émile et de Tom respectivement.

1. Calculer pour chaque tombola :
   (a) la probabilité d'avoir un billet gagnant ;
   (b) la probabilité de gagner au plus 5€ ;
   (c) la probabilité de gagner au moins 15€.
2. (a) Calculer l'espérance de $\mathscr{E}$ et de $\mathcal{T}$. Comparer et interpréter.
   (b) Afin de ne pas se concurrencer directement, ils décident de vendre leurs tickets au même prix. Quel doit-il être s'il souhaitent avoir 300€ de bénéfice chacun, en supposant qu'ils les vendent tous ?
3. (a) Calculer la variance et l'écart-type de $\mathscr{E}$ et de $\mathcal{T}$.
   (b) Que pouvez-vous conseiller à Nana qui hésite entre (les tombolas de) Tom et Émile, sachant qu'elle n'a pas le goût du risque ?

Exercice 17 Domino-ci, Domino-là

On utilise un jeu de dominos classique : chaque domino est partagé en deux parties, chacune portant des points noirs incrustés dont le nombre varie de 0 à 6. Tous les couplages sont présents une seule fois dans le jeu, y compris les « doubles ».
Tous les dominos étant placés dans un sac, on propose le jeu suivant : pour une certaine mise, un joueur prend au hasard l'un des dominos. S'il tire un « double », il remporte le nombre de points, en euros, marqués sur un des carrés du domino. S'il tire un « simple », il remporte, en euros, la valeur absolue de la différence entre les points inscrits.
La variable aléatoire qui associe au domino tiré le gain du joueur, sans tenir compte de la mise, est notée D.

1. Déterminer le nombre de dominos « doubles » et le nombre de « simples ».
2. Déterminer la loi de probabilité de D.
3. La mise à ce jeu est un nombre entier d'euros. Quel doit être son montant pour que ce jeu soit le plus équitable possible ?
4. Calculer l'écart-type σ de la variable de D puis déterminer l'intervalle $[\,\mathbb{E} - \sigma\,;\mathbb{E} + \sigma\,]$. Que représente cet intervalle ?

Exercice 18 ⟨∫⟩ Passe ou File

1. Écrire une fonction Python `PouF` simulant un échantillon de taille `n` d'une expérience de lancer d'une pièce bien équilibrée.
2. (a) Une pièce est déséquilibrée de telle sorte que pile soit trois fois plus probable que face. Q désigne la variable aléatoire valant 1 lorsque pile est obtenue et 0 si c'est face. Déterminer la loi de Q, son espérance μ et son écart-type σ.
   (b) Modifier alors la fonction `PouF`.
3. (a) Écrire une fonction `FreqPouF` donnant la fréquence de piles dans une telle simulation d'un échantillon de taille `n`.
   (b) Exécuter la fonction `FreqPouF` pour des valeurs de plus en plus grandes de `n`. Qu'observe-t-on ?
4. (a) Écrire une fonction `EcartPouF` qui, dans `N` échantillons de taille `n`, retourne la proportion des cas où l'écart entre l'espérance μ et la fréquence de piles obtenues est inférieur à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.
   (b) L'exécuter pour des valeurs de plus en plus grandes. Qu'observe-t-on ?

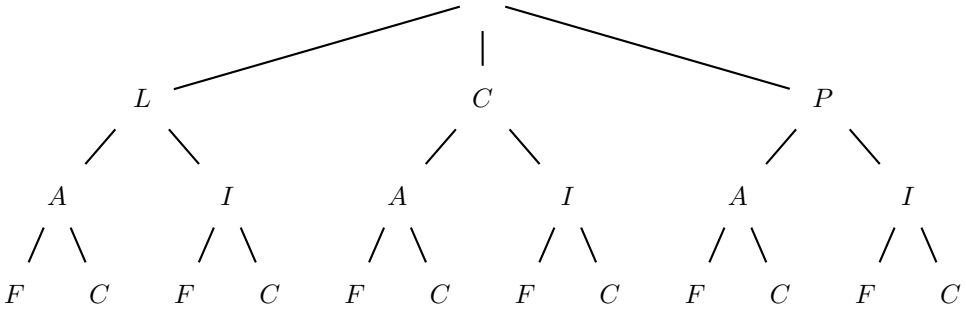
Précipitez-vous donc en page 277 afin de faire le devoir n° 13.

Corrigé des exercices

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

Exercice 1

1.



2. On a $P(PAF) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.
3. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de C dans le mot. On a la loi : $P(X=0) = \frac{2}{3}\frac{2}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}, P(X=1) = \frac{1}{3}\frac{2}{2}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{2}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $P(X=2) = \frac{1}{3}\frac{2}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$,
d'espérance $\mathbb{E}(X) = \sum i\,P(X=i) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$,
de variance $V = \sum i^2\,P(X=i) - \mathbb{E}^2(X) = 0 + \frac{1}{2} + 4\frac{1}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}$ et
d'écart-type $\sigma = \sqrt{V} = \frac{\sqrt{17}}{6}$.

Exercice 2

A. 1.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. Le dé étant bien équilibré, les cases du tableau précédent sont équiprobables et l'on a alors la loi suivante :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

3. On a $P(S \leqslant 4) = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
4. On a $P(S > 4) = P(\overline{S \leqslant 4}) = 1 - P(S \leqslant 4) = \frac{5}{6}$.
5. On a $P(S\ pair) = p_2 + p_4 + p_6 + p_8 + p_{10} + p_{12} = \frac{1+3+5+5+3+1}{36} = \frac{1}{2}$.
6. On a $P(S\ premier) = p_2 + p_3 + p_5 + p_7 + p_{11} = \frac{1+2+4+6+2}{36} = \frac{5}{12}$.

7. On a $\mathbb{E}(S) = \sum_2^{12} p_i s_i = \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7$,
$V(S) = \sum p_i s_i^2 - \mathbb{E}^2 = \frac{4+18+48+\ldots+144}{36} - 49 \simeq 5,8$ et $\sigma(S) = \sqrt{V} \simeq 2,4$.
D'où $[\,\mathbb{E}-\sigma\,;\mathbb{E}+\sigma\,] \simeq [\,4,6\,;9,4\,]$.
8. Pour T le gain algébrique de tic-tac de Philomène, on a la loi :
$P(T=-1) = P(S\ impair) = \frac{1}{2}$ et $P(T=1) = P(S\ pair) = \frac{1}{2}$.
$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, $V = \sigma = 1$, et ce jeu est équitable.

B. 1.

Max	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

2. Le dé étant bien équilibré, les cases du tableau précédent sont équiprobables et l'on a alors la loi suivante :

m_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

3. On a $P(M \leqslant 4) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.
4. On a $P(M > 4) = P(\overline{M \leqslant 4}) = 1 - P(M \leqslant 4) = \frac{5}{9}$.
5. On a $P(M\ pair) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{3+7+11}{36} = \frac{7}{12}$.
6. On a $P(M\ premier) = p_2 + p_3 + p_5 = \frac{3+5+9}{36} = \frac{17}{36}$.
7. On a $\mathbb{E}(M) = \sum_2^{12} p_i m_i = \frac{1+6+15+28+45+66}{36} \simeq 4,5$,
$V(M) = \sum p_i m_i^2 - \mathbb{E}^2 = \frac{1+12+\ldots+36\times11}{36} - \mathbb{E}^2 \simeq 1,97$ et $\sigma(M) = \sqrt{v} \simeq 1,4$.
D'où $[\,\mathbb{E}-\sigma\,;\mathbb{E}+\sigma\,] \simeq [\,3,1\,;5,9\,]$.
8. Pour T le gain algébrique de tic-tac de Philomène, on a la loi :
$P(T=-1) = P(M\ impair) = \frac{5}{12}$ et $P(T=1) = P(M\ pair) = \frac{7}{12}$
d'espérance $\mathbb{E}(T) = \frac{7-5}{12} = \frac{1}{6}$ et ce jeu n'est pas équitable.

C. Pour la règle du produit, on procède de manière analogue en étant patient car il y a beaucoup plus d'issues.

Exercice 3 On doit avoir $0,2 + x + 0,3 + y + 0,1 = 1$ car c'est une loi de probabilité, et l'espérance nulle donne $-2 \times 0,2 - 1x + 0 + y + 2 \times 0,1 = 0$. Ainsi, $y = 1 - 0,6 - x = 0,4 - x$ et $-0,4 - x + 0,4 - x + 0,2 = 0$ d'où $x = \frac{0,2}{2} = 0,1$ et $y = 0,4 - 0,1 = 0,3$.

Exercice 4

1. Le tableau suivant est de proportionnalité.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

Ainsi, $p_i = i \times p_1$ et puisque l'on a une loi de probabilité,

$$1 = \sum_1^6 p_i = \sum_1^6 i \times p_1 = \frac{6(6+1)}{2} p_1 \quad \text{d'où} \quad p_1 = \tfrac{1}{21} \quad \text{et} \quad p_i = \tfrac{i}{21}.$$

D'où $\mathbb{E} = \sum_1^6 x_i\, p_i = \sum_1^6 i \times \frac{i}{21} = \frac{1}{21}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{21} = \frac{13}{3}$,

$$Var = \sum_1^6 i^2 p_i - E^2 = \frac{1+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3}{21} - \frac{91^2}{21^2} \simeq 2,22 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{Var} \simeq 1,49.$$

2. Cette fois-ci, c'est le tableau suivant qui est de proportionnalité.

x_i	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{p_i}$	$\frac{1}{p_1}$	$\frac{1}{p_2}$	$\frac{1}{p_3}$	$\frac{1}{p_4}$	$\frac{1}{p_5}$	$\frac{1}{p_6}$

D'où $\frac{1}{p_i} = \frac{i}{p_1}$ et $1 = \sum_1^6 p_i = \sum_1^6 \frac{p_1}{i} = p_1 \frac{60+30+20+15+12+10}{60}$

et $p_1 = \frac{60}{147} = \frac{20}{49}$, $p_i = \frac{20}{49i}$.

Ainsi, $\mathbb{E} = \sum_1^6 p_i\, x_i = \sum_1^6 \frac{20}{49\,i}\, i = 6 \times \frac{20}{49} = \frac{120}{49}$, $V = \sum_1^6 i^2 p_i - E^2 \simeq 2,57$

et $\sigma = \sqrt{Var} \simeq 1,6$.

Exercice 5 *Sans Soucis !*

1. (a) $\sum_{k=0}^{k=5} 2k = 2\times0+2\times1+2\times2+\ldots+2\times5 = 2(1+2+\ldots+5) = 2\frac{5(5+1)}{2} = 30$,

   (b) $\sum_{i=1}^{i=4} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 1+4+9+16 = 30$,

   (c) $\sum_{p=4}^{p=8} p \times 3^p = 4\times3^4+5\times3^5+6\times3^6+7\times3^7+8\times3^8 = 73\,710$.

2. (a) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5} = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{5} = \sum_{n=1}^{n=5} \sqrt{n}$,

   (b) $1+8+27+64+125+216 = 0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^6 = \sum_{q=0}^{q=6} q^3$,

   (c) $3+5+9+17+33+65$
   $= (2^1+1)+(2^2+1)+(2^3+1)+(2^4+1)+(2^5+1)+(2^6+1) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=6}(1+2^\alpha)$.

Exercice 6 Vocabulary and Definition

1. In a random experimentation, Ω is called the *universal space*. Ω is the set of all possible *outcomes*.
2. An outcome of Ω is an *elementary event*. An event A is a *subset* of Ω.
3. When an event A can never happen at the same time as the event B, the events A and B are said to be *mutually exclusive*.

CORRIGÉS

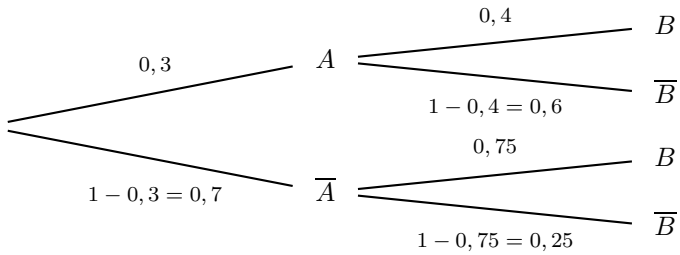
4. When A and B are two mutually exclusive events, then $A \cap B$ is *the impossible event* and $P(A \cap B) = 0$.
5. When several events A_1, $A_2, \ldots,$ A_n are such that every elementary event is at least in one of them, they are called *exhaustive events*.
   Then, we have $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.
6. When A and B are two exhaustive events, then $A \cup B = \Omega$ and $P(A \cup B) = 1$.
7. When two events A and B have the same probability, they are said to be *equally likely*.
8. When an outcome doesn't realize an event A, it is said to realize the *complementary event*.
9. If A is an event, the *complementary event* of A is written $\overline{A}$ (read as A bar). If $\overline{A}$ occurs, then A doesn't. $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exercice 7

1. On a $P(A) = P(\{5;10;10;500\}) = 0,2 + 0,1 + 0,075 + 0,025 = 0,4$, $P(B) = P(\{100;500\}) = 0,1$, $P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0,9$ et $P(D) = P(A \cap C) = P(\{5;10\}) = 0,2 + 01 = 0,3$.
2. On a $Mise - \mathbb{E}(gain) = 15 - \sum p_i\, g_i = -7$€ : l'organisateur risque bien de faire faillite.

Exercice 8

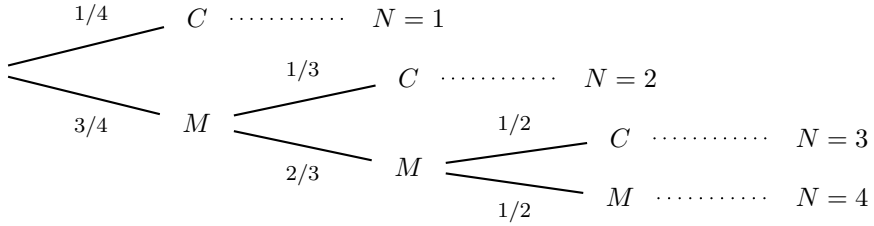
1.



2. $A \cap B$ est « la dragée choisie par Colette est bleue et contient une amande ».
   $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.
3. On a $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0,12 + (1 - 0,3) \times 0,75 = 0,645$.
4. $A \cup B$ est l'événement « la dragée choisie par Colette est bleue ou contient une amande », de probabilité :
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,645 - 0,12 = 0,825$.
5. $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = (1 - 0,3)(1 - 0,75) = 0,175$ $\Big(= P(\overline{(A \cup B)}) = 1 - P(A \cup B)\Big)$.

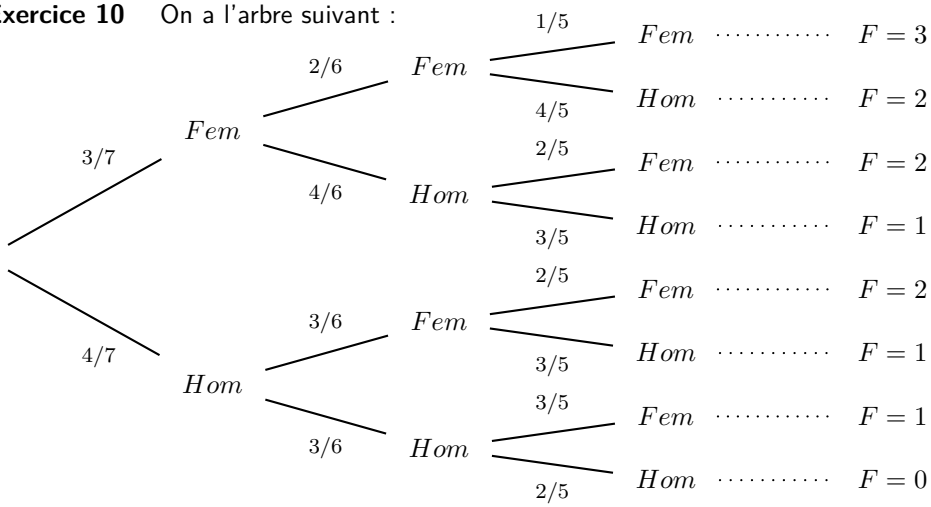
La variable aléatoire Z donnant le gain en points suit la loi de probabilité :
$P(Z = 2) = P(B \cap A) = 0,12$, $P(Z = 1) = P(\overline{B} \cap A) = (1 - 0,4)0,3 = 0,18$, $P(Z = 0) = P(B \cap \overline{A}) = 0,75(1 - 0,3) = 0,525$, $P(Z = -2) = P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 0,175$
d'espérance $E(Z) = \sum p_i\, z_i = 2 \times 0,12 + 1 \times 0,18 + 0 \times 0,525 - 2 \times 0,175 = 0,07$ ($\neq 0$ donc ce jeu n'est pas équitable),
de variance $V(Z) = \sum p_i\ z_i^2 - E^2 = 0,12 \times 4 + 0,18 + 0,175 \times 4 - 0,07^2 \simeq 1,35$
et d'écart-type $\sigma(Z) = \sqrt{V} \simeq 1,16$ point.

Exercice 9 On appelle C l'événement « la boule citron a été tirée » et M l'événement « une boule mimosa a été tirée » et l'on peut dresser l'arbre suivant :



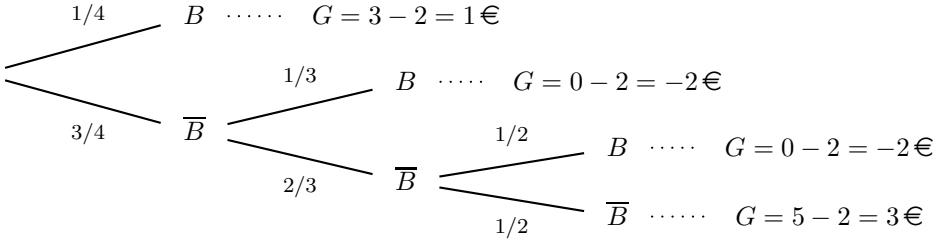
Ainsi, $\Omega = \{1;2;3;4\}$, $P(N=1) = \frac{1}{4}$, $P(N=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, $P(N=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $P(N=4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, d'espérance $\mathbb{E}(N) = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = 2,5$.

Exercice 10 On a l'arbre suivant :



1. Ainsi, $P(F=1) = \frac{3}{7}.\frac{4}{6}.\frac{3}{5} + \frac{4}{7}.\frac{3}{6}\frac{3}{5} + \frac{4}{7}.\frac{3}{6}.\frac{3}{5} = \frac{18}{35}$
   et $P(F \geqslant 1) = P(\overline{F=0}) = 1 - P(F=0) = 1 - \frac{4}{7}.\frac{3}{6}.\frac{2}{5} = \frac{31}{35}$.
2. D'après l'arbre, $P(F=0) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6}.\frac{2}{5} = \frac{4}{35}$, $P(F=1) = \frac{18}{35}$,
   $P(F=2) = \frac{3}{7}.\frac{2}{6}.\frac{4}{5} + \frac{3}{7}.\frac{4}{6}.\frac{2}{5} + \frac{4}{7}.\frac{3}{6}.\frac{2}{5} = \frac{12}{35}$ et $P(F=3) = \frac{3}{7}.\frac{2}{6}.\frac{1}{5} = \frac{1}{35}$,
   d'espérance $\mathbb{E}(F) = \sum p_i x_i = \frac{0+18+24+3}{35} = \frac{9}{7}$ de femmes dans le jury.

Exercice 11 Dressons un arbre.



On a $\mathbb{E}(G) = \sum p_i g_i = 1 \times \frac{1}{4} - 2(\frac{3}{4}.\frac{1}{3} + \frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}) + 3.\frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = 0$ €
et ce jeu est équitable.
En effet, la Terre n'est-elle point bleue comme une orange ?

CORRIGÉS

Exercice 12

1.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

2. L'univers correspondant à cette expérience aléatoire est ainsi :
$$\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$$

3. Chaque face et donc chaque case étant équiprobable, on peut appliquer la règle $\frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$ et on obtient la loi de probabilité suivante.

Somme s_i	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

On a bien $p_i \in [0; 1]$ et $\sum_{1}^{7} p_i = 1$.

4. $\mathbb{E} = \sum_{i=1}^{i=7} p_i\, s_i = \frac{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+3\times6+2\times7+1\times8}{16} = \frac{80}{16} = 5.$
$Var = \sum_{i=1}^{i=7} p_i\,(s_i - E)^2 = \frac{1\times(2-5)^2+2\times(3-5)^2+3\times(4-5)^2+4\times0^2+3\times1^2+2\times2^2+1\times3^2}{16} = 2,5.$
$\sigma = \sqrt{Var} \simeq 1,58.$
Aussi : $Var = \sum_{i=1}^{i=7} p_i\, s_i^2 - E^2 = \frac{1\times4+2\times9+3\times16+4\times25+3\times36+2\times49+1\times64}{16} - 25 = 2,5.$

5. Soit C la variable aléatoire donnant le nombre d'œufs reçus par Chimène.
On a « $C = -3$ » $= \{2; 4; 6; 8\}$ et « $C = 4$ » $= \{3; 5; 7\}$ de probabilités la somme des probabilités des événements élémentaires les constituant.
Donc $P(C = -3) = \frac{1+3+3+1}{16} = \frac{1}{2}$ et $P(C = 4) = \frac{2+4+2}{16} = \frac{1}{2}$.
D'où l'espérance de gain de Chimène $\mathbb{E}(\boldsymbol{C}) = -3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$.

c_i	-3	4
$P(C = c_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Puisque son espérance de gain est d'un demi-œuf, le jeu lui est favorable et Chimène a plus de chance de manger les œufs de Rodrigue que Rodrigue d'avoir les œufs de Chimène.

Exercice 13 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathbb{E}\left[(X - x)^2\right].$

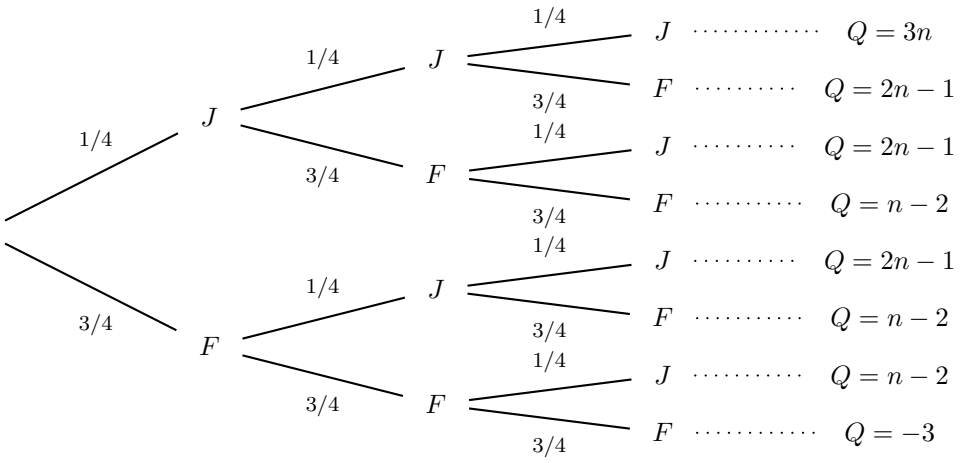
1. On a $f(x) = \mathbb{E}\left[(X - x)^2\right] = \sum_{i=1}^{i=k} p_i (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^{i=k} (p_i x_i^2 - 2p_i x_i x + p_i x^2)$
$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=k} p_i x_i^2 - 2x \sum_{i=1}^{i=k} p_i x_i + x^2 \sum_{i=1}^{i=k} p_i = \mathbb{E}(X^2) - 2x\mathbb{E}(X) + x^2 \times 1$$
$$f(x) = x^2 - 2\mathbb{E}(X)x + \mathbb{E}(X^2).$$

2. De discriminant $\Delta = (-2\mathbb{E}(X))^2 - 4 \times \mathbb{E}(X^2) = 4(\mathbb{E}(X))^2 + 4\mathbb{E}(X^2)$
$\Delta(X) = -4(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)) = -4V(X).$

3. La variance étant un nombre positif, $\Delta \leqslant 0$ et f est du signe de son coefficient dominant $a = 1 : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.$ Ceci ne nous surprend pas car f est l'espérance d'une variable aléatoire positive.

4. L'extremum de ce trinôme est un minimum,atteint en $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2\mathbb{E}(X)}{2} = \mathbb{E}(X)$ et vaut $f(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = V(X)$. La variance réalise donc le minimum des carrés des écarts aux valeurs pondérés par leur probabilité d'apparition.

Exercice 14 Soit Q la variable aléatoire comptant le nombre de points obtenus à l'issue du QCM. Pour chaque question, on peut obtenir n points si l'on fait juste, avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, ou -1 point sinon, avec une probabilité de $\frac{3}{4}$. On a alors l'arbre suivant :



D'où, la loi de Q :
$P(Q = 3n) = (\frac{1}{4})^3$, $P(Q = 2n-1) = 3(\frac{1}{4})^2.\frac{3}{4}$, $P(Q = n-2) = 3.\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^2$ et $P(Q = -3) = (\frac{3}{4})^3$,
d'espérance $\mathbb{E}(Q) = 3n(\frac{1}{4})^3 + (2n-1).3(\frac{1}{4})^2.\frac{3}{4} + (n-2).3.\frac{1}{4}(\frac{3}{4})^2 - 3(\frac{3}{4})^3$
$\mathbb{E}(Q) = \frac{3n+9(2n-1)+27(n-2)-81}{4^3} = \frac{48n-144}{4^3} = \frac{3}{4}(n-3)$
et $\mathbb{E}(Q) = 1,5 \Leftrightarrow \frac{3}{4}(n-3) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow n-3 = 2 \Leftrightarrow n = 5$.
Si l'on souhaite avoir une note moyenne de $1,5$ en répondant au hasard, il faut accorder 5 points par bonne réponse.

Exercice 15

D'après la loi d'un lancer du dé, on doit avoir $\sum p_i = 1$
donc $p_1 + 2p_1 + p_1 + 2p_1 = 1$ et $p_1 = \frac{1}{6}$.
Si D est le gain d'orchidées de Dédé, on a
$P(D = -x) = p_2 + p_4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $P(D = y) = p_1 + p_3 = \frac{1}{3}$.
On a $\mathbb{E}(D) = \sum p_i o_i = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y$ donc $\mathbb{E}(D) = 0 \Longrightarrow y = 2x$.
$Var(D) = \sum p_i o_i^2 - \mathbb{E}^2 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 0^2 = \frac{1}{3}(2x^2 + (2x)^2) = 2x^2$
d'où $Var(D) = 8 \Longrightarrow x^2 = 4$ et $x = 2$, $y = 2x = 4$.

Exercice 16

1. (a) On a $P(\mathscr{E} > 0) = \frac{\text{30 billets gagnants}}{\text{100 billets}} = 0,3$
et $P(\mathcal{T} > 0) = \frac{\text{50 billets gagnants}}{\text{100 billets}} = 0,5$.

   (b) On a $P(\mathscr{E} \leqslant 5) = P(\mathscr{E} = 0) + P(\mathscr{E} = 2) = \frac{70+25}{100} = 0,95$
et $P(\mathcal{T} \leqslant 5) = P(\mathcal{T} = 0) + P(\mathcal{T} = 5) = \frac{50+20}{100} = 0,7$.

CORRIGÉS

(c) On a $P(\mathscr{E} \geqslant 15) = P(\mathscr{E} = 50) + P(\mathscr{E} = 250) = \frac{4+1}{100} = 0,05$
et $P(\mathcal{T} \geqslant 15) = P(\mathcal{T} = 15) + P(\mathcal{T} = 20) = \frac{5+10}{100} = 0,15$.

2. (a) On a $\mathbb{E}(\mathscr{E}) = \sum p_i x_i = 250 \times \frac{1}{100} + 50 \times \frac{4}{100} + 2 \times \frac{25}{100} = \frac{500}{100} = 5$€
et $\mathbb{E}(\mathcal{T}) = 20 \times \frac{5}{100} + 10 \times \frac{15}{100} + 15 \times \frac{10}{100} + 5 \times \frac{20}{100} = \frac{500}{100} = 5$€.
Ces tombolas ont la même espérance de gain, 5€ : ils devraient théoriquement récolter la même somme.

(b) Puisque $300 = 3 \times 100$ tickets, pour avoir 300€ de bénéfice, chaque joueur devraient avoir une espérance de gain de -3€. L'espérance hors mise étant de 5€, le prix du billet doit être fixé à 8€.

3. (a) On a $Var(\mathscr{E}) = \sum p_i x_i^2 - \mathbb{E}^2 = \frac{250^2+4\times50^2+2\times25^2}{100} - 5^2 = 712,5$
et $\sigma(\mathscr{E}) = \sqrt{Var(\mathscr{E})} \simeq 26,69$€.
On a $Var(\mathcal{T}) = \sum p_i x_i^2 - \mathbb{E}^2 = \frac{5\times20^2+10\times15^2+15\times10^2+20\times5^2}{100} - 5^2 = 37,5$
et $\sigma(\mathcal{T}) = \sqrt{Var(\mathcal{T})} \simeq 6,12$€.

(b) Avec Tom, on gagne peu mais plus souvent qu'avec Émile, le tout avec la même espérance de gain. Nous conseillons donc Tom à Nana.

Exercice 17 Domino-ci, Domino-là

1. On a sept valeurs différentes inscrites sur les carrés donc sept « doubles » différents et six dominos associés à 0, cinq autres associés à 1 et pas à 0, quatre autres associés à 2 mais pas à 0 ni à 1,... donc $6+5+4+3+2+1 = 21$ dominos « simples ».

2. On a le tableau à double entrée suivant.

D	0	1	2	3	4	5	6
6	6	5	4	3	2	1	6
5	5	4	3	2	1	5	
4	4	3	2	1	4		
3	3	2	1	3			
2	2	1	2				
1	1	1					
0	0						

Chaque case étant équiprobable, on en déduit la loi de probabilité de D :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	$1/28$	$7/28$	$6/28$	$5/28$	$4/28$	$3/28$	$2/28$

3. La différence entre l'espérance de gain et la mise de départ doit être la plus proche possible de 0.
Calculons $\mathbb{E}(D) = \sum x_i.p_i = \frac{0\times0+1\times7+2\times6+3\times5+4\times4+5\times3+6\times2}{28} = \frac{77}{28} = 2,75$.
La mise de départ doit alors être de 3€ (et l'espérance de gain + mise sera négative, comme tout jeu d'argent...).

4. $Var(D) = \sum p_i.x_i^2 - \mathbb{E}^2(D) = 2,6875$ et $\sigma(D) = \sqrt{Var(D)} \simeq 1,64$.
Cet écart-type mesure la dispersion théorique des valeurs effectivement prises par le gain autour de l'espérance lors de la réalisation de l'expérience. En règle générale, on peut dire, avec de nombreuses réserves, qu'environ 70 % des valeurs effectives se situent dans l'intervalle $[\mathbb{E} - \sigma\,;\mathbb{E} + \sigma] = [1,11\,;4,39]$.

Exercice 18 Passe ou File

Voici les fonctions demandées avec la version bien équilibrée neutralisée par des $\#$.
La version déséquilibrée doit vérifier $P(face)+P(pile)=P(face)+3P(face)=1$ donc $P(Q=0)=P(Face)=\frac{1}{4}$ et $P(Q=1)=P(pile)=\frac{3}{4}$.
D'où $\mathbb{E}(Q)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ et $\sigma(Q)=\sqrt{0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Le décalage de $+0,75$ en ligne 6 fait que la commande donne un nombre aléatoire dans $[\,0,75\,;1,75\,[$ et il y a bien trois fois plus de chance qu'un tel nombre ait une partie entière égale à 1 qu'égale à 0.
On observe que plus `n` est grand, plus la fonction `FreqPouF` retourne un nombre proche de 0,75 (ou 0,5 selon la version).
Dans la fonction `EcartPouF`, il est essentiel que la boucle calcule à chaque fois une fréquence dans un nouvel échantillon et elle doit donc faire appel à `FreqPouF` à chaque passage. L'écart lui est fixe, il ne dépend que de `n` et l'on peut donc le calculer une bonne fois pour toutes : $e=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{3}{n}}$. On observe assez rapidement que la fonction `EcartPouF` retourne une proportion supérieure à 0,95. Essayer plusieurs `EcartPouF(50,50)` par exemple.

```
 1| from math import sqrt
 2| from random import *
 3| def PouF(n) :
 4|    for i in range(n) :
 5|       # if randint(0,1)==0 :
 6|       if int(random()+0.75)==0 :
 7|          print("Face")
 8|       else :
 9|          print("Pile")
10| def FreqPouF(n) :
11|    q=0
12|    for i in range(n) :
13|       # if randint(0,1)==1 :
14|       if int(random()+0.75)==1 :
15|          q=q+1
16|    return(q/n)
17| def EcartPouF(N,n) :
18|    c=0
19|    e=sqrt(3)/sqrt(n)
20|    for i in range(N) :
21|       # if abs(FreqPouF(n)-0.5)<=e :
22|       if abs(FreqPouF(n)-0.75)<=e :
23|          c=c+1
24|    return(c/N)
```

Chapitre XI

APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Sommaire

1 Rappels 201
2 Vecteurs normaux et équations cartésiennes 202
3 Cercles 204
4 Dans un triangle 205
4.1 Centre de gravité 205
4.2 Théorème de la médiane 205
Exercices 207
Corrigé des exercices 210

Nous poursuivons ici avec grand plaisir l'étude du produit scalaire de deux vecteurs. Bien que récent dans l'histoire des mathématiques (XIXe s.), vous verrez qu'il nous permettra de démontrer des théorèmes datant de l'Antiquité. Les cercles font partie des plus vieux objets mathématiques et la caractérisation d'un cercle de diamètre donné comme ensemble des points formant un triangle rectangle d'hypoténuse ce diamètre semble remonter à Thalès mais ce n'est qu'au XVIIe s. que Descartes élabore la méthode des coordonnées et écrit l'équation d'un cercle en repère orthonormé. Par ailleurs, l'utilité physique du produit scalaire n'est plus à justifier : il sert entre autres à calculer le travail d'une force qui s'applique sur un corps en mouvement.

1 Rappels

Commençons par un résumé ~~de l'épisode~~ du chapitre VI précédent.

Définition & Propriété 1 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.*
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel défini par
$\boldsymbol{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}} = \frac{1}{2}\left[\, ||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 \,\right]$.
Dans un repère orthonormé, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\boldsymbol{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}} = xx' + yy'$.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, on a $\boldsymbol{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soient A, B, C distincts et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont même sens,} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont sens contraire.} \end{cases}$$

Remarques : On note $\boldsymbol{\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$.

Propriété 2
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ $\qquad$ $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ $\qquad$ $(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \times (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

Définition & Propriété 3
Deux vecteurs sont dits orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul :
$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
Soient A et C deux points distincts respectivement des points B et D. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Propriété 4 *Dans un* ***repère orthonormé*** *$(O\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath})$,*
si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on a $\boldsymbol{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff xx' + yy' = 0}$.
De plus, on a $\boldsymbol{x = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\imath}}$ *et* $\boldsymbol{y = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\jmath}}$
et donc $\boldsymbol{\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\imath})\,\overrightarrow{\imath} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\jmath})\,\overrightarrow{\jmath}}$.

Remarque : Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ sont toujours orthogonaux.
En effet, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a(-b) + ba = 0$.

2 Vecteurs normaux et équations cartésiennes

Maintenant que vous avez ravivé vos souvenirs d'enfance au moyen de la planche *Droites et fines* en page 341, vous savez qu'une droite dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$ admet $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Nous pouvons aussi la caractériser au moyen d'une direction transverse, perpendiculaire.

Propriété 5 ***Équation d'une droite de vecteur normal donné***
Soit A un point du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

- *L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de direction perpendiculaire à celle de $\vec{n}$. On dit que $\vec{n}$ est un* ***vecteur normal*** *à $\mathscr{D}$.*
- *Dans un repère orthonormé, une droite $\mathscr{D}$ admet $\vec{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ pour* ***vecteur normal*** *ssi il existe un réel c tel que $\mathscr{D}$ ait pour équation : $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$.*

Démonstration : • Soit B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{n} \neq \vec{0}$. On a
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ ou $(AM) \perp (AB)$
$\iff M$ appartient à la perpendiculaire à (AB) en A.
• Avec $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, on a :
$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
$\iff ax + by + c = 0$ pour $c = -ax_A - by_A$.
Réciproquement, on choisit $A\,(\,x_A\,;\,y_A\,)$ tel que $-ax_A - by_A = c$
et $\{ax + by + c = 0\}$ est la droite normale à $\vec{n}$ en A. □

Remarque : Le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ sont bien orthogonaux.

Ainsi, une droite est entièrement caractérisée par un vecteur normal et un de ses points. Bien évidemment, pour une droite donnée, il existe une infinité de possibilités pour chacun des deux critères – tout vecteur colinéaire non nul à un vecteur normal est normal et tout point de la droite est possible – et l'on sait bien qu'une équation cartésienne n'est pas unique mais elles sont toutes proportionnelles.

Exemple : Toute droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $4x + 5y + \lambda = 0$. La seule qui passe par le point $P\,(\,2\,;\,-1\,)$ admet $4x + 5y - 3 = 0$ comme équation.

Propriété 6 *Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites du plan de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ et de vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ respectivement. On a :*
- *$\mathscr{D}_1 // \mathscr{D}_2 \iff \vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ colinéaires $\iff \vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ colinéaires*
$\iff \vec{u}_1 \perp \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{u}_2$
- *$\mathscr{D}_1 \perp \mathscr{D}_2 \iff \vec{u}_1$ et $\vec{n}_2$ colinéaires $\iff \vec{n}_1$ et $\vec{u}_2$ colinéaires*
$\iff \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \iff \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

Dém. : Il suffit de faire une figure pour s'en convaincre. □

3 Cercles

Définition & Propriété 7 ***Équation d'un cercle avec centre et rayon***
Le cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points du plan à distance r du point Ω. Dans un r.o.n., on peut écrire
$M \in \mathscr{C}(\Omega; r) \iff \Omega M^2 = r^2 \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2.$

Démonstration : Il suffit d'écrire l'expression de la distance ΩM dans un r.o.n. □

Exemple : Le cercle de centre $\Omega\,(2\,;\,-1)$ et de rayon $r = 5$ a pour équation $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Nous allons écrire en termes de produit scalaire le superbe théorème de géométrie classique ($\sim$IVe s. av. J.C.) qui affirme qu'un triangle est rectangle *ssi* son cercle circonscrit a pour diamètre l'un de ses côtés.

Propriété 8 *Soient A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que* $\boldsymbol{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0}$ *est le* ***cercle de diamètre*** $\boldsymbol{[AB]}$.

Démonstration : En effet, si M est distinct de A et de B,
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \iff (MA) \perp (MB) \iff MAB$ est rectangle en M, d'hypoténuse $[AB]$, diamètre de son cercle circonscrit. Si M et A sont confondus, M appartient aussi à ce cercle et $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$. □

L'expression du produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ dans un r.o.n. permet d'obtenir une autre équation du cercle.

Propriété 9 ***Équation d'un cercle de diamètre donné***
Dans un r.o.n., $M(x;y) \in \mathscr{C}_{\varnothing[AB]} \iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B) = 0.$

Remarque : On peut retrouver l'équation précédente en utilisant $\Omega M^2 = \overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M}$ et $r^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}{4}$ avec $\Omega(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$.

Propriété 10 ***Équation cartésienne d'un cercle***
Dans un r.o.n., tout cercle admet une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c = 0.$

Démonstration : Il suffit de développer l'une ou l'autre des équations précédentes. □

Remarque : Contrairement aux équations cartésiennes des droites, celles des cercles sont uniques car les coefficients des termes de degré 2 sont imposés : 1.

Exemple : $M\,(x\,;\,y)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ pour $A\,(-2\,;\,2)$ et $B\,(6\,;\,-4)$ dans un r.o.n. *ssi* $(x+2)(x-6) + (y-2)(y+4) = 0$
$\iff x^2 + y^2 - 4x + y - 20 = 0.$
On peut remarquer que le point de coordonnées $(-1\,;\,3)$ appartient à ce cercle.
Son centre est $\Omega\,(2\,;\,-1)$ et son rayon $r = \Omega A = \ldots = 5$ et l'on a bien (cf. exemple précédent) : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \iff x^2 + y^2 - 4x + y - 20 = 0.$

Qu'en est-il de la réciproque de cette dernière propriété ? Étudions les formes canoniques des deux trinômes.
$x^2+y^2+ax+by+c=0 \iff x^2+ax+y^2+by+c=0$
$\iff x^2+2\times\frac{1}{2}ax+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2+y^2+2\times\frac{1}{2}bx+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}b^2+c=0$
$\iff (x+\frac{1}{2}a)^2+(y+\frac{1}{2}b)^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2)+c=0$
$\overset{\Omega(-\frac{1}{2}a\,;-\frac{1}{2}b)}{\iff} (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)-c$
$\iff \Omega M^2=r^2$ à condition que $\frac{1}{4}(a^2+b^2)-c$ soit positif. Sinon, aucun point ne peut vérifier cette équation car le membre de gauche est positif. Nous pratiquerons ceci en exercice et ce sera beaucoup plus simple avec des nombres connus.

4 Dans un triangle

4.1 Centre de gravité

On rappelle qu'une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé à celui-ci. Le théorème suivant vous est certainement connu mais je ne suis pas certain que vous l'ayez déjà démontré.

Théorème 1 *Soit ABC un triangle.*
Il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. On le nomme centre de gravité du triangle.
Les trois médianes du triangle sont concourantes en ce centre de gravité.
Le centre de gravité est situé aux deux tiers des médianes en partant des sommets.

Le centre de gravité est le point d'équilibre du triangle, celui sur lequel le poids s'applique.

Démonstration : On a $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$
$\iff \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{GA} \iff \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$: un tel point existe et est unique.

Soient A', B' et C' les milieux des côtés opposés à A, B et C respectivement.
On a alors $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{0}$ et
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{0}$
$\iff 3\overrightarrow{A'G}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C} \iff \overrightarrow{A'G}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$ et le point G est au tiers de la médiane issue de A à partir du milieu A' *i.e.* $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. Par permutation, il en est de même pour les autres médianes. □

4.2 Théorème de la médiane

Théorème 2 *Soient A, B et M trois points et soit I le milieu de $[AB]$. On a :*
- $MA^2+MB^2=2\,MI^2+2\,IA^2=2\,MI^2+\dfrac{1}{2}\,AB^2$
- $MA^2-MB^2=2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-IA^2$

Démonstration :

- $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$
  $= 2\,\overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$
  $= 2MI^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{0} + 2IA^2 = 2MI^2 + 2IA^2$
  $= 2MI^2 + 2(\frac{1}{2}AB)^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$
- $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$
  $= (2\,\overrightarrow{MI}) \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}) = 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}.$
- $MI^2 - IA^2 = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{AI})$
  $= \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$ □

Ceci peut être utile pour calculer des longueurs ou déterminer des lieux géométriques.

Exemple : On donne $AB = 4$ et l'on veut déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 = MB^2 + 8$.
On a $MA^2 = MB^2 + 8 \iff MA^2 - MB^2 = 8 \iff \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 4$
$\iff \overrightarrow{M'I} \cdot \overrightarrow{BA} = 4$ où M' est le projeté orthogonal de M sur (AB). On doit avoir $M'I = \frac{4}{BA\cos\left(\overrightarrow{M'I};\overrightarrow{BA}\right)} \iff M'I = 1$ et $M' \in [IB]$. Le lieu géométrique recherché est donc la perpendiculaire à (AB) passant par le milieu M' de $[IB]$.

Exercices

APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M vérifiant la condition donnée dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

(a) $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{\imath}=-3$

(b) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{\imath}=-3$ et $A(1\,;2)$

(c) $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{\imath}=2$ et $OM=\sqrt{5}$

(d) $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{\imath}=2$ et $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{\jmath}=-3$

Exercice 2 VouF ? Justifier la réponse.

(a) Si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

(b) Si $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$, $\vec{u}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

(c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+\sqrt{3}\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-\sqrt{2}\\-1/6\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

(d) Dans un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix}1+m\\2m-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2-m\\m+4\end{pmatrix}$ sont orthogonaux pour exactement deux valeurs du réel m.

Exercice 3 $ABCD$ est un carré de côté 1, K est un point du segment $[AC]$ et on désigne par M et N les projetés orthogonaux respectifs de K sur (DC) et (DA).

(a) Démontrer que les droites (MN) et (BK) sont perpendiculaires. On appellera x l'abscisse du point K dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD})$.

(b) En est-il de même pour les droites (BM) et (CN) ? Justifier.

Exercice 4 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, trouver le vecteur $\vec{v}$ de norme 1, colinéaire à $\vec{u}$ et de même sens ainsi que le vecteur $\vec{w}$ tel que le repère $(O\,;\,\vec{v},\,\vec{w})$ soit orthonormé direct.

(a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. (b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$. (c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\tan\alpha\end{pmatrix}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5 Dans un r.o.n., déterminer de deux façons différentes une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $D(5\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{d}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

Exercice 6 Pour chacune des droites suivantes dont on donne l'équation dans un r.o.n., déterminer un vecteur directeur, un vecteur normal, les coordonnées d'un point et l'équation réduite. Lesquelles sont parallèles ? Lesquelles sont perpendiculaires ?

$\mathscr{D}_1\,:\,5x-6y+3=0$

$\mathscr{D}_2\,:\,10y+12x=5$

$\mathscr{D}_3\,:\,\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y=2$

$\mathscr{D}_4\,:\,y=x$

$\mathscr{D}_5\,:\,y-\frac{7}{3}=0$

$\mathscr{D}_6\,:\,x+4=0$

Exercice 7 On donne $P\,(1\,;2)$, $I\,(4\,;5)$ et $F\,(4\,;3)$ dans un r.o.n. Déterminer les coordonnées du point S, projeté orthogonal du point F sur la droite (PI).

Exercice 8 Dans un r.o.n., on donne $A(1;4)$, $B(-3;5)$ et $C(3;7)$.

1. Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et (CA).
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC issue de A puis de celle issue de B.
3. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de ces deux hauteurs.
4. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$. Quel résultat connu retrouve-t-on ?

Exercice 9 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. (a) Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2+y^2-6x+4y-3=0$.
   (b) Déterminer l'intersection de ce cercle avec la droite d'équation $y=0$, avec la droite d'équation $x=-1$ puis celle d'équation $x=-2$.
2. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $2x^2+2y^2+2x-6y-15=0$.
3. Déterminer un diamètre du cercle d'équation $x^2+y^2-x-2y-5=0$.

Exercice 10 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. On donne les points $A(-2;3)$ et $B(4;1)$. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et s'en servir pour en trouver le centre et le rayon.
2. Soit Γ le cercle d'équation $x^2+y^2-4x-5y+7=0$.
   (a) Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle Γ.
   (b) Vérifier que le point $K(3;4)$ appartient à Γ puis déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à Γ en K.

Exercice 11 On considère les points $A\,(1\,;-1)$, $B\,(5\,;1)$, $C\,(9\,;-7)$, $Z\,(6\,;5)$, $U\,(-3\,;8)$ et $T\,(2\,;1)$ dans un r.o.n. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle BAC puis une du cercle circonscrit au triangle ZUT.

Exercice 12 Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on définit les droites $\mathscr{D}_\lambda : x=\lambda$ et $\Delta_\lambda : y=\lambda$ dans un r.o.n. et on appelle $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2-4x+2y-4=0$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de $\mathscr{C}$ et des droites $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_{-1}$, $\mathscr{D}_7$, Δ_0, Δ_2 puis Δ_{-5}.
2. Ces résultats sont-ils surprenants ?

Exercice 13 Démontrer que le centre de gravité d'un triangle est aussi celui du triangle formé par les trois milieux des côtés.

Exercice 14 Soient deux points A et B du plan tels que $AB=6$ et soit I le milieu du segment $[AB]$.

1. Soit M un point du plan. Montrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-9$.
2. Existe-t-il des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-15$? Justifier.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_7$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=7$.
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_0$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Exercice 15 Soient Q et I deux points du plan.
Déterminer le point P qui minimise la quantité $PQ^2 + PI^2$.

Exercice 16 Soient le point $F\,(\,0\,;\,1\,)$ et la droite $\Delta : y = -1$ dans un r.o.n.
Déterminer l'ensemble des points $M\,(\,x\,;\,y\,)$ du plan à équidistance du point F et de la droite Δ.
F est alors appelé le foyer et Δ la directrice de cet ensemble que l'on reconnaît bien.
Dans une fenêtre GeoGebra, tracer la courbe obtenue et vérifier qu'elle répond bien au problème posé.
Visitez donc l'extra *Conic Strip* en page 349 pour de plus amples informations.

Pointez vers la page 281 afin de réaliser le devoir n° 14.

Corrigé des exercices

APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 Une fois que l'on a remarqué que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\imath} = x_{\overrightarrow{u}}$, tout est plus facile.

(a) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{\imath} = -3 \iff x_M = -3 \iff M$ est sur la perpendiculaire à l'axe des abscisses au point $(-3\,;0)$.

(b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\imath} = -3$ et $A(1\,;2) \iff x_M - x_A = -3 \iff x_M = -2$
$\iff M$ appartient à la perpendiculaire à l'axe des abscisses au point $(-2\,;0)$.

(c) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{\imath} = 2$ et $OM = \sqrt{5} \iff M$ est à l'intersection de la perpendiculaire à l'axe des abscisses au point $(2\,;0)$ et du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$
$\iff 2^2 + y_M^2 = \sqrt{5}^2 \iff y_M = \pm 1 :$ $M(2\,;\pm 1)$.

(d) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{\imath} = 2$ et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{\jmath} = -3 \iff x_M = 2$ et $y_M = -3 :$ $M(2\,;-3)$.

Exercice 2 VouF ?

(a) Vrai : $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2) = 0$
$\Longrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

(b) Vrai : $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$
$\Longrightarrow (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\,\|\overrightarrow{u}\|\,.\,\|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{v}\|^2$
$\Longrightarrow 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2\,\|\overrightarrow{u}\|\,.\,\|\overrightarrow{v}\| \Longrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires (et de même sens)
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non orthogonaux.

(c) Faux : $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - 6\frac{1}{6} = \sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 - 1 = 0$ mais on ne peut affirmer que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+\sqrt{3}\\ 6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-\sqrt{2}\\ -1/6\end{pmatrix}$ sont orthogonaux que dans le cas d'un repère orthonormé.

(d) Vrai : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1+m\\ 2m-5\end{pmatrix} \perp \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2-m\\ m+4\end{pmatrix} \iff (1+m)(2-m) + (2m-5)(m+4) = 0$
$\iff m^2 + 4m - 18 = 0$ qui admet deux racines ($\Delta = 88 > 0$).

Exercice 3 $ABCD$ carré de côté 1, $K \in [AC]$, M et N les projetés orthogonaux de K sur (DC) et (DA).

(a) Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$, on a $B(1\,;0)$, $K(x\,;x)$ car (AC) d'équation $y = x$, $M(x\,;1)$ et $N(0\,;x)$ donc $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-x\\ x-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}x-1\\ x\end{pmatrix}$.
D'où, $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BK} = -x(x-1)+(x-1)x = 0$ et les vecteurs sont orthogonaux.
Étant non nuls (x et $x-1$ ne pouvant l'être concomitamment), les droites (MN) et (BK) sont perpendiculaires.

(b) Puisque $C(1\,;1)$, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\ 1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}-1\\ x-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CN} = -(x-1)+(x-1) = 0$ donc $(BM) \perp (CN)$.

Exercice 4 Si l'on se rappelle que, pour $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{q}=\frac{1}{\|\overrightarrow{p}\|}\overrightarrow{p}$ est de norme 1, colinéaire à $\overrightarrow{p}$ et de même sens, et que $\overrightarrow{r}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est de même norme que $\overrightarrow{p}$ et $(\overrightarrow{p}\,;\overrightarrow{r})\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, tout s'éclaire.

(a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$: $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ d'où $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

(b) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$: $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$ d'où $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-1/2\\-\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$.

(c) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\\tan\alpha\end{pmatrix}$ avec $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$:

$$\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\sqrt{\tfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\sqrt{\tfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\tfrac{1}{\cos\alpha}>0$$

d'où $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\cos\alpha.\tan\alpha\end{pmatrix}=\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}=\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\pi/2)\\\sin(\alpha+\pi/2)\end{pmatrix}$.

Exercice 5 Puisque $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est normal à la droite $\mathscr{D}$, une équation est de la forme $2x-3y+c=0$. Puisque $D\,(5\,;-1\,)\in\mathscr{D}$, on a $2\times5-3(-1)+c=0$ donc $c=-13$ d'où $\mathscr{D}\colon 2x-3y-13=0$.
Si $M\,(x\,;y\,)\in\mathscr{D}$, le vecteur $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x-5\\y+1\end{pmatrix}$ est directeur de $\mathscr{D}$ et il est orthogonal à $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{d}=0\iff2(x-5)-3(y+1)=0\iff2x-3y-13=0$.

Exercice 6
Si $\mathscr{D}\colon ax+by+c=0$ dans un r.o.n., alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est directeur et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal.

$\mathscr{D}_1$: $5x-6y+3=0$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_1\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$, de vecteur normal $\overrightarrow{n}_1\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$, d'équation réduite $y=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}$, passant par le point $P_1\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$.

$\mathscr{D}_2$: $10y+12x=5$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_2\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$, de vecteur normal $\overrightarrow{n}_2\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$, d'équation réduite $y=-\frac{6}{5}x+\frac{1}{2}$, passant par le point $P_2\left(\frac{5}{12}\,;0\right)$.

$\mathscr{D}_3$: $\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y=2$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, de vecteur normal $\overrightarrow{n}_3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, d'équation réduite $y=x-\sqrt{2}$, passant par le point $P_3\left(\sqrt{2}\,;0\right)$.

$\mathscr{D}_4$: $y=x$ (équation réduite) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, de vecteur normal $\overrightarrow{n}_4\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, passant par le point $P_4\,(1\,;1\,)$.

$\mathscr{D}_5$: $y-\frac{7}{3}=0$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, de vecteur normal $\overrightarrow{n}_5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, d'équation réduite $y=\frac{7}{3}$, passant par le point $P_5\left(\pi\,;\frac{7}{3}\right)$.

$\mathscr{D}_6$: $x+4=0$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}_6\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, de vecteur normal $\overrightarrow{n}_6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, d'équation réduite $x=-4$, passant par le point $P_6\left(-4\,;\sqrt{3}\right)$.

Les droites $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$ sont parallèles et les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont perpendiculaires ainsi que les droites $\mathscr{D}_5$ et $\mathscr{D}_6$.

Exercice 7 Soient $P\,(1\,;2\,)$, $I\,(4\,;5\,)$, $F\,(4\,;3\,)$ et $S\,(x\,;y\,)$ le projeté orthogonal du point F sur la droite (PI) dans un r.o.n. Soit . On a $(FS)\perp(PI)$ et $S\in(PI)$ donc $\overrightarrow{FS}\begin{pmatrix}x-4\\y-3\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{PI}\begin{pmatrix}4-1\\5-2\end{pmatrix}=0$ et $\overrightarrow{PS}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PI}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

D'où le système $\left\{\begin{array}{l}3(x-4)+3(y-3)=0\\3(x-1)-3(y-2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3x+3y-21=0\\3x-3y+3=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=7-x\\x-(7-x)+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x-6=0\\y=7-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=3\\y=7-3=4\end{array}\right.\quad\text{et } S\,(3\,;4\,).$$

CORRIGÉS

Exercice 8 Dans un r.o.n., on donne $A(1;4)$, $B(-3;5)$ et $C(3;7)$.

1. $M \in (AB) \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-1 \\ 5-4 \end{pmatrix}$ colinéaires
$\iff 1(x-1)-4(y-4)=0 \iff x-4y-17=0.$
On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Puisque $\overrightarrow{CA}$ est directeur, une équation cartésienne de (CA) est $3x-2y+\delta=0$. Comme $A \in (CA)$, on a $3\times 1-2\times 4+\delta=0$ et $\delta=5$. D'où $(CA) : 3x-2y+5=0$.

2. La hauteur $\mathscr{D}_B$ de ABC issue de B est perpendiculaire à (AC) donc le vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}_B$ qui admet donc $2x+3y+\gamma=0$ pour équation. Puisque $B \in \mathscr{D}_B$, $2(-3)+3\times 5+\gamma=0$ et $\gamma=-9$.
D'où $\mathscr{D}_B : 2x+3y-9=0$.
On a $M \in \mathscr{D}_A$ la hauteur de ABC issue de $A \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}=0$
$\iff 6(x-1)+2(y-4)=0.$
D'où, en divisant tout par deux pour simplifier, $\mathscr{D}_A : 3x+y-7=0.$

3. Si $H(x\,;y)$, on a $\begin{cases} 3x+y-7=0 \\ 2x+3y-9=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=7-3x \\ 2x+3(7-3x)-9=0 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} -7x+12=0 \\ y=7-3x \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{12}{7} \\ y=7-3\times\frac{12}{7}=\frac{13}{7} \end{cases}$ et $H\left(\frac{12}{7}\,;\frac{13}{7}\right)$.

4. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} \frac{12}{7}-3 \\ \frac{13}{7}-7 \end{pmatrix} = (-4)(-\frac{9}{7})+1(-\frac{36}{7})=0$ donc $(AB)\perp(CH)$.
La droite (CH) est donc bien la troisième hauteur du triangle.

Exercice 9 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. (a) On a $x^2+y^2-6x+4y-3=0 \iff x^2-6x+y^2+4y-3=0$
$\iff (x^2-2\times 3x+3^2)-9+(y^2+2\times 2y+2^2)-4-3=0$
$\iff (x-3)^2+(y+2)^2=16=4^2$: équation du cercle de centre $\Omega_1(3\,;-2)$ et de rayon $r_1=4$.

(b) Soit $M(x\,;y) \in \Omega_1 \cap \{y=0\}$. On a $x^2+0^2-6x+4\times 0-3=0$
$\iff x^2-6x-3=0 \overset{\Delta=48}{\iff} x=\frac{6\pm\sqrt{16\times 3}}{2}=3\pm 2\sqrt{3}$
et $\Omega_1 \cap \{y=0\} = \left\{\left(3-2\sqrt{3}\,;0\right);\left(3+2\sqrt{3}\,;0\right)\right\}$.
Soit $M(x\,;y) \in \Omega_1 \cap \{x=-1\}$. On a $(-1)^2+y^2-6(-1)+4y-3=0$
$\iff y^2+4y+4=0 \iff (y-2)^2=0 \iff y=2$
et $\Omega_1 \cap \{x=-1\} = \{(-1\,;2)\}$.
Soit $M(x\,;y) \in \Omega_1 \cap \{x=-2\}$. On a $(-2)^2+y^2-6(-2)+4y-3=0$
$\iff y^2+4y+13=0$ de discriminant $\Delta=-36<0$
donc $\Omega_1 \cap \{x=-2\}=\varnothing$.

2. On a $2x^2+2y^2+2x-6y-15=0 \iff x^2+x+y^2-3y-\frac{15}{2}=0$
$\iff (x^2+2\times\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}+(y^2-2\times\frac{3}{2}y+\frac{9}{4})-\frac{9}{4}-\frac{15}{2}=0$
$\iff (x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=10$: équation du cercle de centre $\Omega_2\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r_2=\sqrt{10}$.

3. Avec un peu d'astuce et des racines évidentes, on a $x^2+y^2-x-2y-5=0$
$\iff (x^2-x-2)+(y^2-2y-3)=0 \iff (x+1)(x-2)+(y-3)(y+1)=0$: équation du cercle de diamètre $[AB]$ pour $A(-1\,;3)$ et $B(2\,;-1)$.

Exercice 10

1. On a $M \in \mathscr{C}(\varnothing[AB]) \iff \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}x-4\\y-1\end{pmatrix} = 0$
   $\iff (x+2)(x-4)+(y-3)(y-1)=0 \iff x^2-2x+y^2-4y-5=0$
   $\iff x^2-2x+1^2+y^2-2\times 2y+2^2-1-4-5=0$
   $\iff (x-1)^2+(y-2)^2=\sqrt{10}^2$
   et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $(1\,;2)$ et de rayon $\sqrt{10}$.
2. (a) On a $x^2+y^2-4x-5y+7=0$
   $\iff (x^2-2\times 2x+4)-4+(y^2-2\times\frac{5}{2}y+(\frac{5}{2})^2)-\frac{25}{4}+7=0$
   $\iff (x-2)^2+(y-\frac{5}{2})^2=(\frac{\sqrt{13}}{2})^2$
   et Γ est le cercle de centre $\Omega\left(2\,;\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$.
   (b) On a $3^2+4^2-4\times 3-5\times 4+7=\ldots=0$ donc $K(3;4)\in\Gamma$. $\mathcal{T}$ est la perpendiculaire à (ΩK) en K donc $M\in\mathcal{T} \iff \overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{\Omega K}\begin{pmatrix}1\\3/2\end{pmatrix}=0$
   $\iff 1(x-3)+\frac{3}{2}(y-4)=0 \iff x+\frac{3}{2}y-9=0$.

Exercice 11 • BAC : On a $AB^2=(5-1)^2+(1+1)^2=20$, $AC^2=(9-1)^2+(-7+1)^2=100$ et $BC^2=(9-5)^2+(-7-1)^2=80$. La réciproque du théorème de Pythagore permet donc d'affirmer que le triangle BAC est rectangle en B. Son cercle circonscrit a donc pour diamètre son hypoténuse $[AC]$ d'où l'équation $\mathscr{C}_{BAC}$: $(x-1)(x-9)+(y+1)(y+7)=0$ c.-à-d. $x^2+y^2-10x+8y+16=0$.

• ZUT : Cette fois-ci, le triangle n'est pas rectangle mais nous allons chercher le centre Ω du cercle circonscrit : il est équidistant des sommets.

On a $\Omega Z^2=\Omega U^2 \iff (x-6)^2+(y-5)^2=(x+3)^2+(y-8)^2$
$\iff 18x-6y+12=0 \iff 3x-y+2=0\ (L1)$
et $\Omega Z^2=\Omega T^2 \iff (x-6)^2+(y-5)^2=(x-2)^2+(y-1)^2$
$\iff 8x+8y-56=0 \iff x+y-7=0\ (L2)$
donc $(L1+L2)$: $4x-5=0 \iff x=\frac{5}{4}$ et $(L1)$: $y=3x+2=\frac{23}{4}$: $\Omega\left(\frac{5}{4}\,;\frac{23}{4}\right)$.
Calculons le carré de son rayon $\Omega T^2=(\frac{5}{4}-2)^2+(\frac{23}{4}-1)^2=\frac{370}{16}=\frac{185}{8}$.
Le cercle circonscrit à ZUT est donc de centre $\Omega\left(\frac{5}{4}\,;\frac{23}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{370}}{4}$ d'où l'équation $\mathscr{C}_{ZUT}$: $(x-\frac{5}{4})^2+(y-\frac{23}{4})^2=\frac{185}{8}$.

Exercice 12 $\mathscr{D}_\lambda$: $x=\lambda$, Δ_λ : $y=\lambda$, $\mathscr{C}$: $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ dans un r.o.n.

1. Soit $M(x\,;y)\in\mathscr{C}$.
   Si $M\in\mathscr{D}_0$: $x=0$ alors $0^2+y^2-4\times 0+2y-4=0 \iff y=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}$: $\mathscr{D}_0\cap\mathscr{C}=\{(0\,;-1-\sqrt{5})\,;(0\,;-1+\sqrt{5})\}$.
   Si $M\in\mathscr{D}_{-1}$: $x=-1$ alors $(-1)^2+y^2-4\times(-1)+2y-4=0 \iff y=-1$: $\mathscr{D}_{-1}\cap\mathscr{C}=\{(-1\,;-1)\}$.
   Si $M\in\mathscr{D}_7$: $x=7$ alors $7^2+y^2-4\times 7+2y-4=0 \iff y^2+2y+17=0$ sans solution réelle : $\mathscr{D}_7\cap\mathscr{C}=\varnothing$.
   Si $M\in\Delta_0$: $y=0$ alors $x^2+0^2-4x+2\times 0-4=0 \iff x=\frac{4\pm\sqrt{32}}{2}$: $\Delta_0\cap\mathscr{C}=\{(2-2\sqrt{2}\,;0)\,;(2-2\sqrt{2}\,;0)\}$.
   Si $M\in\Delta_2$: $y=2$ alors $x^2+2^2-4x+2\times 2-4=0 \iff x=2$: $\Delta_2\cap\mathscr{C}=\{(2\,;0)\}$.
   Si $M\in\Delta_{-5}$: $y=-5$ alors $x^2+(-5)^2-4x+2\times(-5)-4=0 \iff x^2-4x+11=0$ sans solution réelle : $\Delta_{-5}\cap\mathscr{C}=\varnothing$.

CORRIGÉS

2. Ces résultats ne sont pas si surprenants car on sait bien qu'une droite croise un cercle en zéro, un ou deux points.

Exercice 13 Soient A', B' et C' les milieux des côtes opposés aux sommets A, B et C respectivement et soit G le centre de gravité du triangle ABC.
On sait que $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ et $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
D'où $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{0}$
$\iff \overrightarrow{GA'} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{GB'} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{GC'} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{0}$
$\iff \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} \frac{1}{2}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ et G est bien le centre de gravité de $A'B'C'$.

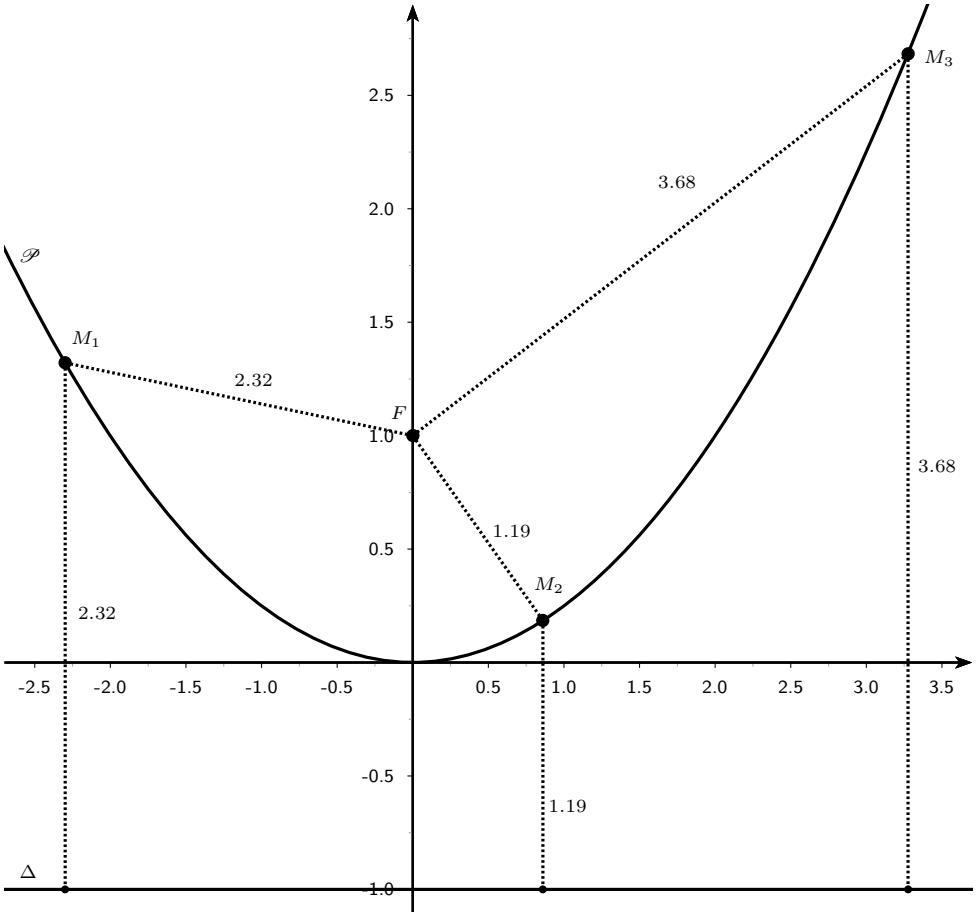
Exercice 14 $AB = 6$ et I est le milieu de $[AB]$.

1. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$
$= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{0} - IA \times IB = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{0} - IA^2 = MI^2 - 9.$
2. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -15 \iff MI^2 - 9 = -15 \iff MI^2 = -6$ ce qui est impossible. Il n'existe donc pas de tels points M du plan.
3. On a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7 \iff MI^2 - 9 = 7 \iff MI^2 = 16 \iff MI = 4.$
L'ensemble $\mathcal{E}_7$ est donc le cercle de centre I et de rayon 4.
4. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ *ssi* $M \in$ Cercle de diamètre $[AB]$ (BAM rectangle en M).
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 - 9 = 0 \iff MI = 3$: $\mathcal{E}_0$ est aussi le cercle de centre I et de rayon 3.

Exercice 15 Soit U le milieu du segment $[QI]$. D'après le théorème de la médiane, on a $PQ^2 + PI^2 = 2\,PU^2 + \frac{1}{2}\,QI^2$. Puisque $\frac{1}{2}\,QI^2 \geqslant 0$, il nous faut minimiser $2\,PU^2$. Ce minimum vaut 0 et il est atteint lorsque P et U sont confondus.

Exercice 16 Soient $M\,(\,x\,;\,y\,)$, $F\,(\,0\,;\,1\,)$ et $\Delta : y = -1$ dans un r.o.n.
On a $MF^2 = x^2 + (y-1)^2$. Le projeté orthogonal de M sur Δ est le point $H\,(\,x\,;\,-1\,)$. D'où $dist^2(M,\Delta) = MH^2 = (x-x)^2 + (y-(-1))^2 = (y+1)^2$.
Ainsi, M est équidistant de F et de Δ *ssi*
$MF^2 = dist^2(M;\Delta) \iff x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \iff x^2 - 4y = 0$
et le lieu géométrique recherché est la parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$.
La figure est en page suivante.

Plus généralement, une parabole est l'ensemble des points équidistants d'un foyer et d'une directrice. Elle fait partie de la famille de courbes des coniques, avec les ellipses et les hyperboles.


$\mathscr{P}$
M_1
M_2
M_3
F
Δ
2.32
3.68
1.19
2.32
3.68
1.19
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
-0.5
-1.0
-2.5
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5

Chapitre XII

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Sommaire

1 Rappels 217
2 Fonctions trigonométriques 219
Exercices 222
Corrigé des exercices 226

Pour terminer l'année, nous étudions les fonctions trigonométriques. Au delà de leur intérêt propre, elles sont très utiles dans de nombreux domaines mathématiques : géométrie bien sûr mais aussi algèbre, nombres complexes, analyse,... En physique, elles sont par exemple à la base de tout traitement du signal et donc de toutes les communications.

L'étude de la fonction tangente n'est pas au programme mais cela rajoute tout de même un peu de piment. Et puis, elle est si belle.

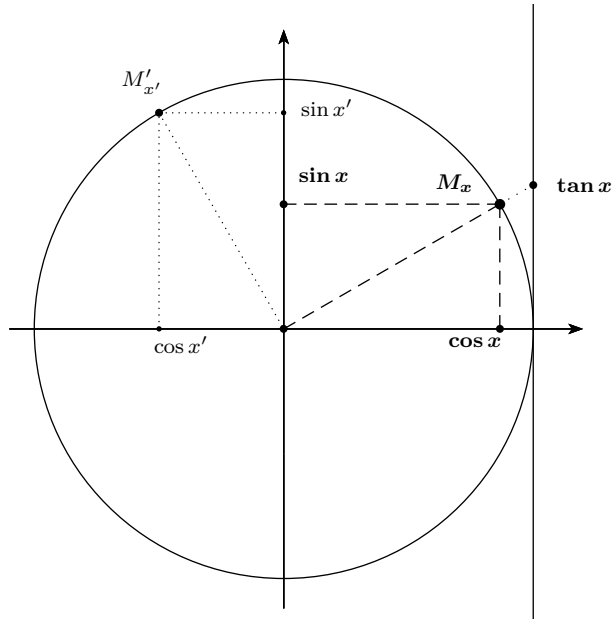
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1 Rappels

Un nombre réel x est associé à un point de la droite tangente au cercle trigonométrique, à un point du cercle par enroulement de la droite et à l'angle entre l'axe des abscisses et le point du cercle.
Parmi tous les réels associés à un même angle et qui diffèrent ainsi d'un multiple de 2π, un seul appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$. On l'appelle mesure principale de cet angle.

Définition 1 *Soit α un réel et soit $M(x_M\,;\,y_M)$ le point qui lui est associé sur le cercle trigonométrique. On définit*

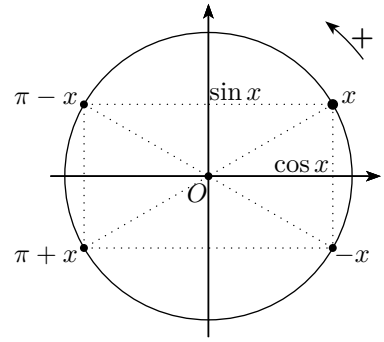
$$\boldsymbol{\cos\alpha = x_M}, \qquad \boldsymbol{\sin\alpha = y_M} \quad \textit{et, pour } \boldsymbol{x_M \neq 0}, \quad \boldsymbol{\tan\alpha = \frac{y_M}{x_M}}.$$



Propriété 1 *On a, pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et tout* $k \in \mathbb{Z}$,
$\cos\alpha \in [\,-1\,;1\,]$, $\sin\alpha \in [\,-1\,;1\,]$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,
$\cos(\alpha + k\times 2\pi) = \cos\alpha$ *et* $\sin(\alpha + k\times 2\pi) = \sin\alpha$.

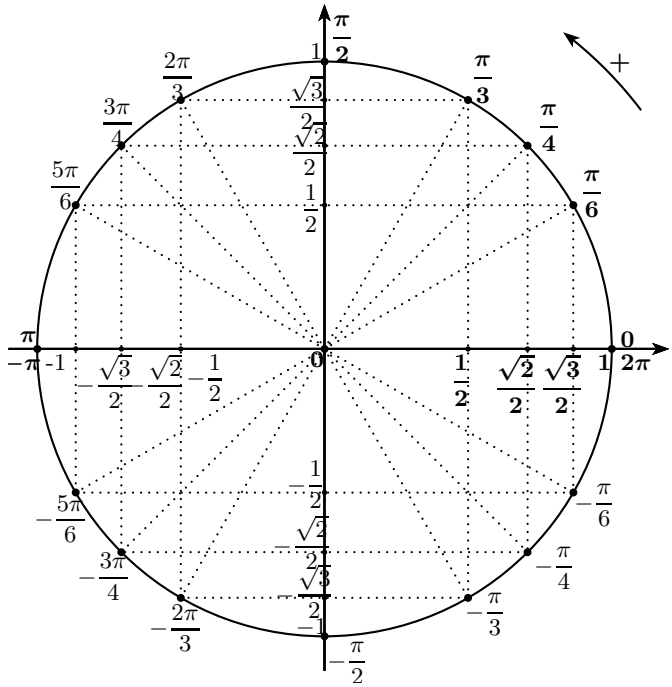
Démonstration : Le repère étant orthonormé, on a, pour tout point M de $\mathscr{C}$, $1^2 = OM^2 = x_M^2 + y_M^2$. Ainsi, $0 \leqslant \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \leqslant 1$ et $\cos\alpha \in [\,-1\,;1\,]$. De même pour le sinus. En effet, tout point du cercle a ses coordonnées dans l'intervalle $[\,-1\,;1\,]$, encadrées par celles des points I, I', J et J'.
Les points du cercle trigonométrique repérés par les réels $\alpha + k\times 2\pi$ et α sont confondus. Ils ont donc les mêmes coordonnées. □

Par symétrie du cercle trigonométrique, on obtient facilement la propriété suivante qui nous permet de « changer de cadran ».



Propriété 2 *Pour tout réel* x, *on a*
$\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$,
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

Valeurs remarquables :



Propriété 3 ***Équations*** *Soit a un réel. On a :*
$\cos x = \cos a \iff x \equiv a\,[2\pi]$ *ou* $x \equiv -a\,[2\pi]$
$\sin x = \sin a \iff x \equiv a\,[2\pi]$ *ou* $x \equiv \pi - a\,[2\pi]$

2 Fonctions trigonométriques

Les définitions et propriétés qui suivent vont nous sembler maintenant bien naturelles.

Définition 2 *La fonction cosinus, notée* cos, *associe à un nombre, son cosinus. La fonction sinus, notée* sin, *lui associe son sinus et la fonction tangente, notée* tan, *sa tangente c.-à-d.* $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Les fonctions cos *et* sin *sont définies sur* $\mathbb{R}$, *la fonction* tan *est définie sur* $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$.

Propriété 4 ***Périodicité***
Les fonctions cos *et* sin *sont* 2π*-périodiques :*
pour tous $k \in \mathbb{Z}$ *et* $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + k.2\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + k.2\pi) = \sin(x)$.
La fonctions tan *est* π*-périodique :*
pour tous $k \in \mathbb{Z}$ *et* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$, $\tan(x + k.\pi) = \tan(x)$.

Démonstration : Les points du cercle associés aux réels x et $x + 2\pi$ sont confondus donc ils ont les mêmes coordonnées.
Pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$. □

Il suffit donc d'étudier cos et sin sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple $]-\pi\,;\pi\,]$, pour les connaître partout. Leur graphe est une réplication à l'infini d'une portion de cette même largeur. Pour la tangente, $\left]\,-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$ est un intervalle pertinent.

La symétrie du cercle trigonométrique nous donne cette propriété :

Propriété 5 ***Parité***
La fonction cosinus est paire, les fonctions sinus et tangente sont impaires.
$\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(-x) = \cos x,\quad \sin(-x) = -\sin x$
et $\quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\},\quad \tan(-x) = -\tan x.$

Ainsi, il suffit d'étudier cos et sin sur un intervalle d'amplitude π, par exemple $[\,0\,;\pi\,]$ pour les connaître sur l'intervalle symétrique puis donc partout. Pour la tangente, $\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$ est bien suffisant. Le graphe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ceux des fonctions sinus et tangente est symétrique par rapport à l'origine du repère.

En tournant autour du cercle, on remarque la propriété suivante.

Propriété 6 ***Valeurs remarquables***

$\cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\qquad \sin(x) = 0 \iff x \equiv 0\ [\pi]$,
$\cos(x) = 1 \iff x \equiv 0\ [2\pi]$, $\qquad \sin(x) = 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$,
$\cos(x) = -1 \iff x \equiv \pi\ [2\pi]$. $\qquad \sin(x) = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
$\tan(x) = 0 \iff x \equiv 0\ [\pi]$.

Il ne nous manque plus que les variations qui sont obtenues avec les dérivées suivantes.

Propriété 7 ***Dérivées***
Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ *et*
$$\boldsymbol{(\cos x)' = -\sin x}, \qquad \boldsymbol{(\sin x)' = \cos x}.$$
La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$ *et* $\quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x).$

Démonstration : Nous admettrons les dérivées de cos et sin.
On a $\quad \tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos\cos - \sin(-\sin)}{\cos^2} = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$
$\tan' = \frac{\cos^2}{\cos^2} + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$. □

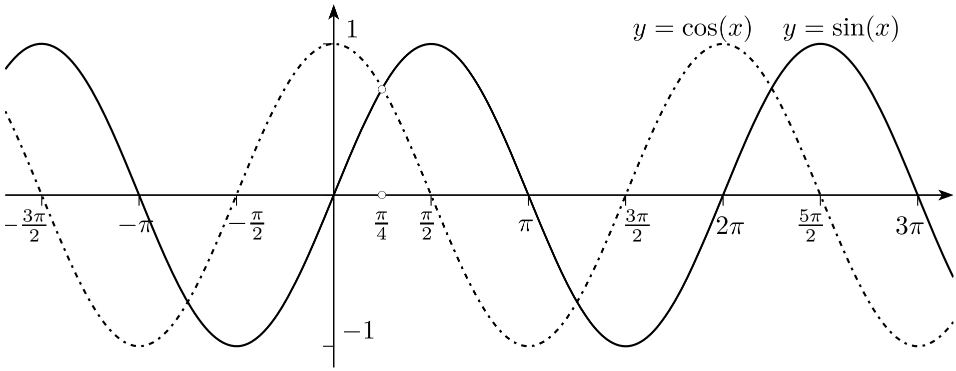
On peut maintenant dresser leur tableau de signe et de variations.

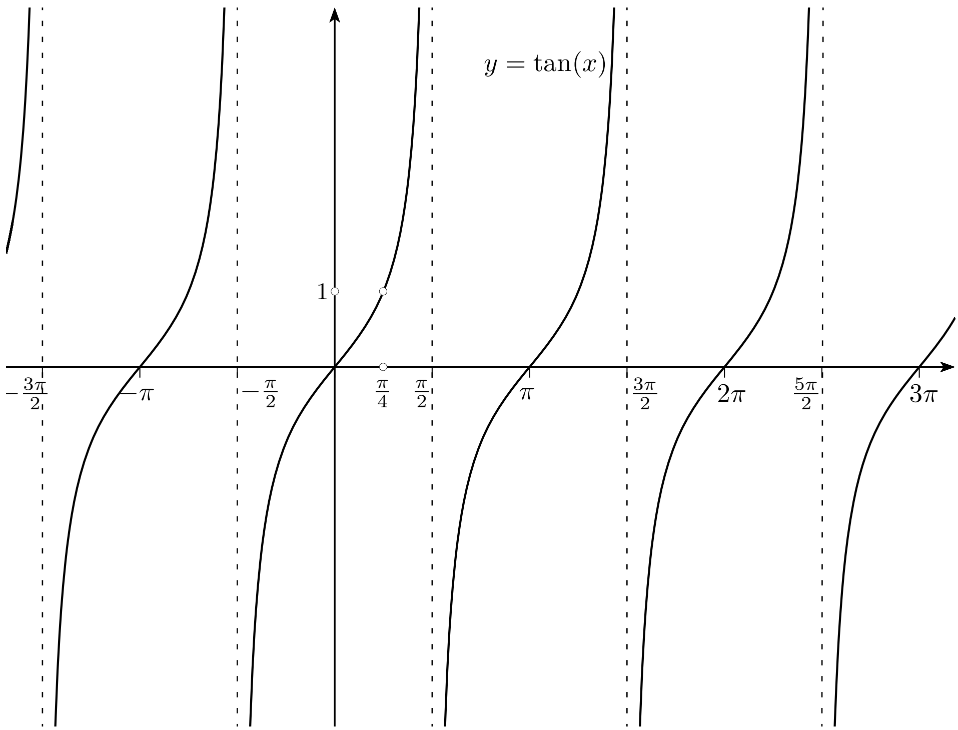
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\cos'(x)$		$-$	⋮	$-$	
cos	1	↘		↘	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$		$+$	⋮	$+$	
$\sin'(x)$		$+$	0	$-$	
sin	0	↗	1	↘	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	$+$	
$\tan'(x)$	$+$	
$\tan$	0 ↗	$+\infty$

Il ne nous reste plus qu'à admirer leur graphe, si remarquables.





Exercices

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

$a(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ | $c(x) = \sqrt{\sin(x)}$

$b(x) = \dfrac{1}{\sin(x)-1}$ | $d(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$

Exercice 2 Étudier le signe des fonctions suivantes.

$e(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ $\qquad$ $f(x) = \cos(x)\sin^3(x)$ sur $[-\pi\,;\pi]$

Exercice 3 Étudier la parité des fonctions suivantes.

$g(x) = x\sin(x)$ | $j(x) = x+\cos(x)$ | $m(x) = \sin^2(x)$

$h(x) = x\cos(x)$ | $k(x) = x+\tan(x)$ | $n(x) = 1+\tan^2(x)$

$i(x) = x\cos(x)\sin(x)$ | $l(x) = x^2-\sin(x)$ | $o(x) = \dfrac{x^3}{2+\cos(x)}$

Exercice 4 Étudier la périodicité des fonctions suivantes.

$p(x) = \sin(2x)$ | $r(x) = \tan(x-3)$ | $t(x) = \cos^2(2x)$

$q(x) = \cos(\pi x)$ | $s(x) = \sin(5x+2)$ | $u(x) = 3\cos(x)\sin(\frac{x}{3})$

Exercice 5 Dériver formellement les fonctions suivantes.

$\alpha(x) = \cos(3x-4)$ | $\varepsilon(x) = x^2\sin(x)$

$\beta(x) = \cos(x)\sin(x)$ | $\zeta(x) = \sin^2(x)$

$\gamma(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ | $\eta(x) = \cos(-4x+2)\sin(3x-5)$

$\delta(x) = 2\cos(3x)-x^2$ | $\theta(x) = \cos(-2x+4)\sin(-2x+4)$

Exercice 6 VouF ? Justifier.

1. $\cos(x)$ est 4π-périodique.
2. Une fonction impaire s'annule nécessairement en 0.
3. Pour les fonctions sinus et cosinus, dériver, c'est ajouter $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 7 Étudier les fonctions suivantes.

$f(x) = \cos^2(x)$ | $h(x) = 4\cos(x)+\cos^2(x)$

$g(x) = \sin(x)+\cos(x)$ | $k(x) = \cos(x)\sin(x)$

On pourra utiliser l'identité $\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x)$ pour la dernière fonction.

Exercice 8 Soient $f\colon x \longmapsto 4\cos(4x+5)$ et $g\colon x \longmapsto -25\sin(5x-3)$ définies sur $\mathbb{R}$.

1. Trouver une primitive de f, c.-à-d. une fonction F telle que $F' = f$.
2. Trouver une fonction Γ telle que $\Gamma'' = g$.

Exercice 9 L'étude d'oscillateurs harmoniques, ceux de type LC en électricité par exemple, mène à la recherche de fonctions vérifiant l'équation différentielle suivante.
$(E)\colon f'' + \omega^2 f = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions $f(t) = \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $g(t) = \sin(\omega t + \varphi_2)$ vérifient (E).
2. Trouver une valeur de φ_1 telle que $f(0) = 0$ et une valeur de φ_2 telle que $g(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 10 (S) Connaissez-vous le principe d'approche par dichotomie ? Il est très simple. Si vous souhaitez aller à une certaine page d'un dictionnaire, vous l'ouvrez en deux, au milieu, et si vous êtes trop loin, vous ouvrez en deux, au milieu, la partie gauche ; si vous êtes trop court, vous ouvrez la partie droite. Vous continuez ensuite le processus jusqu'à la bonne page, ou aux environs si vous ne souhaitez qu'une certaine précision.

On souhaite approcher la solution x de l'équation $\sin(x) = c$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ au moyen d'un algorithme de dichotomie avec une une précision p et l'on a commencé à écrire le programme suivant.

```
1| from math import *
2| def dicho_sinus(c,p) :
3|    if ... or ...   :
4|       return("Pas de solution")
5|    else :
6|       a=-pi/2
7|       b=pi/2
8|       while b-a>=p :
9|          sol=(a+b)/2
10|         if sin(sol)>c :
11|            ... = ...
12|         else :
13|            ... = ...
14|      return (sol)
```

1. Compléter la ligne 3.
2. À quoi correspondent les variables a et b ?
3. Que teste-t-on à la ligne 8 ?
4. Compléter le programme et le tester.

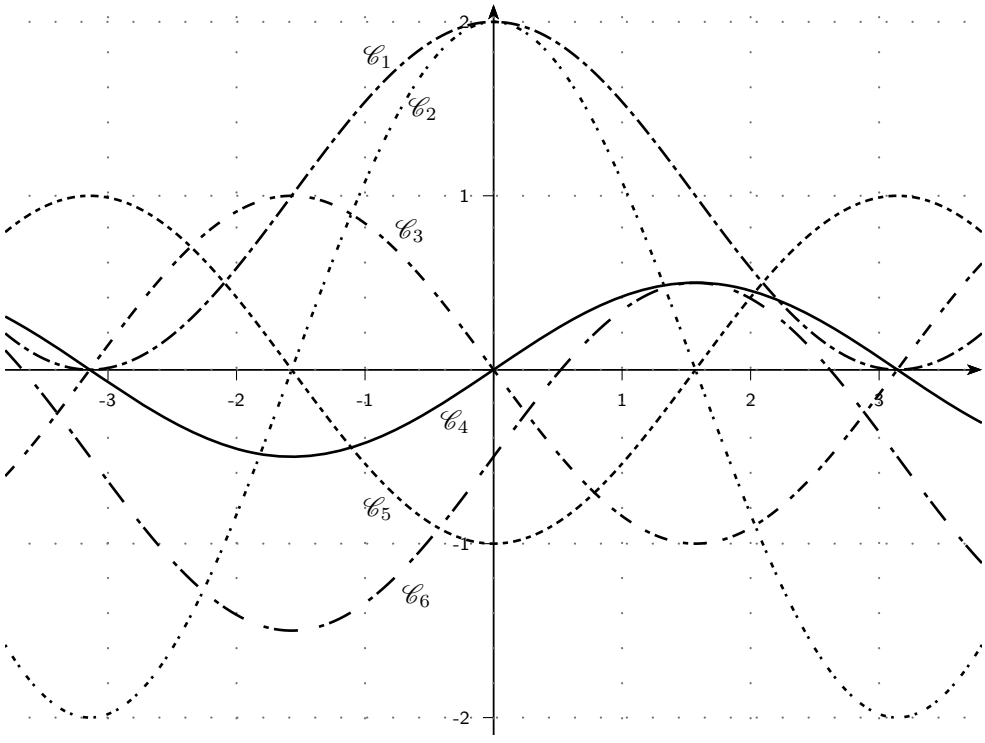
Exercice 11 Math de mer

En pleine mer, on peut observer un phénomène de houle qui, une fois formée, continue de se déplacer et peut être modélisée par une onde courte à surface périodique. On y distingue des creux et des crêtes, sa longueur d'onde qui est l'écart entre deux crêtes ou deux creux, son amplitude qui est la moitié de l'écart de hauteur entre les creux et les crêtes. On admet que la hauteur relative d'un point de la surface par rapport à une mer d'huile en fonction de sa position x en mètres est donnée par la fonction h définie par $h(x) = a\cos(\omega x)$.

1. Quel lien y a-t-il entre la longueur d'onde et la fonction h ? Et l'amplitude ?
2. On note λ la longueur d'onde de la houle. Exprimer ω en fonction de λ.
3. Déterminer l'expression de h lorsque la houle a une longueur d'onde de 160 m et une amplitude de 2 m.
4. On a mesuré que la houle se déplace à une vitesse de $v = 16\,\text{m.s}^{-1}$. Combien de temps faut-il à une crête pour parcourir une longueur d'onde ?

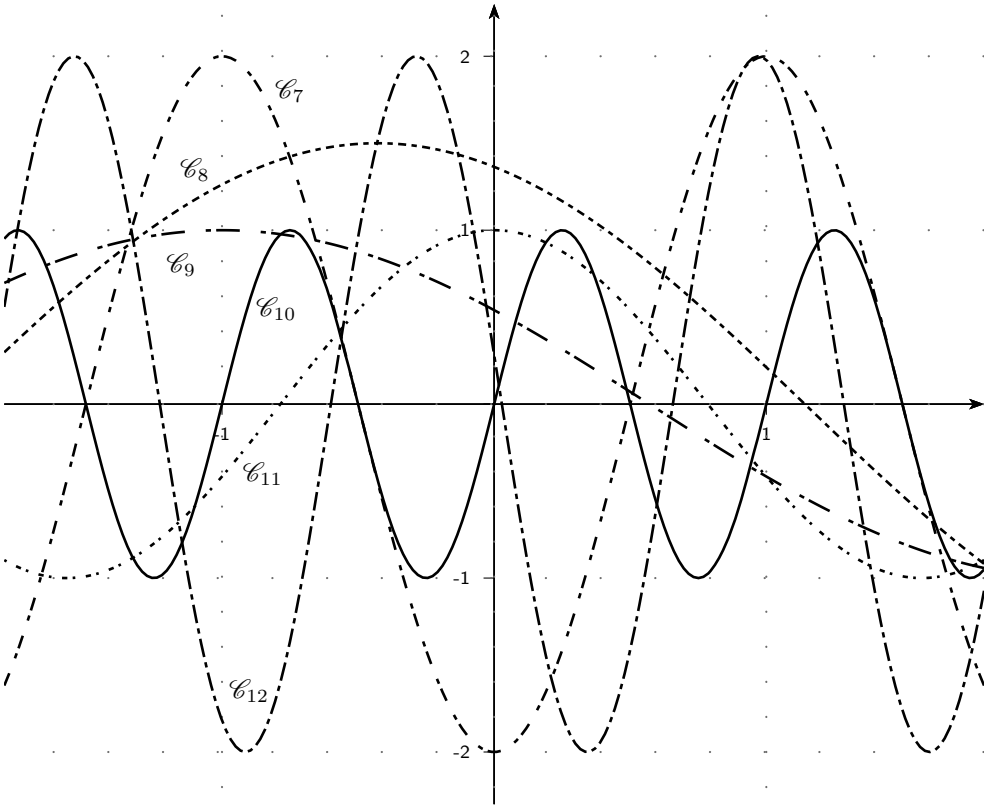
Exercice 12 Associer les fonctions et les graphes suivants.

$a(x) = 2\cos(x)$,	$c(x) = -\sin(x)$,	$e(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$,
$b(x) = -\cos(x)$,	$d(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}$,	$f(x) = \cos(x) + 1$.



Exercice 13 Associer les fonctions et les graphes suivants.

$g(x) = \cos(2x)$,	$i(x) = \cos(x+1)$,	$k(x) = 2\sin(5x+3)$,
$h(x) = \frac{3}{2}\sin(x+2)$,	$j(x) = -2\cos(\pi x)$,	$l(x) = \sin(2\pi x)$.



Exercice 14 Esquissez, sans l'aide de la calculatrice le graphe des fonctions suivantes.

$m(x) = \sin(x+\pi)$	$o(x) = \frac{1}{3}\cos(\pi - 4x)$
$n(x) = 2\cos(2\pi x)$	$p(x) = \sin(1-3x)$

Hasardez-vous à présent vers la page 283 afin de réaliser le devoir n° 15.

Corrigé des exercices

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Il vous est bien sûr possible, et même conseillé, de tracer les fonctions à la calculatrice pour conjecturer ou vérifier vos affirmations.

Exercice 1 Ensemble de définition

$a(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$: $\quad \mathscr{D}_a = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\,[\pi]\}$.

$b(x) = \frac{1}{\sin(x)-1}$: $\quad \mathscr{D}_b = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\}$

$c(x) = \sqrt{\sin(x)}$: $\quad \mathscr{D}_c = [\,0\,;\pi\,]\;[2\pi]$

$d(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$: $\quad \mathscr{D}_d = \mathbb{R} \setminus \{0\,[\pi]\}$.

Exercice 2 Signe

$e(x) = \frac{1}{\cos(x)} > 0$ sur $\left]\,-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\,\right[$, tout comme $\cos(x)$.

$f(x) = \cos(x)\sin^3(x) = \cos(x)\sin(x)\sin^2(x)$ du signe de $\cos(x)\sin(x)$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 3 Parité

Soit $x \in \mathbb{R}$ ($\not\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ si nécessaire).

$g(-x) = (-x)\sin(-x) = -x(-\sin x) = x\sin x = g(x)$: g est paire.

$h(-x) = (-x)\cos(-x) = -(x\cos x) = -h(x)$: h est impaire.

$i(-x) = -x\cos(-x)\sin(-x) = -x\cos(x)(-\sin x) = x\cos(x)\sin(x) = i(x)$:
i est paire.

$j(x) = x + \cos(x)$. $\quad j(-\pi) = -\pi + \cos(-\pi) = -\pi - 1$
et $\quad j(\pi) = \pi + \cos(\pi) = \pi - 1$. $\quad j(-\pi) \neq \pm j(\pi)$: j est ni paire ni impaire.

$k(-x) = -x + \tan(-x) = -x - \tan(x) = -(x + \tan(x)) = -k(x)$: k est impaire.

$l(x) = x^2 - \sin(x)$. $\quad l(-\frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2})^2 - \sin(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} + 1$
et $\quad l(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2 - \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - 1$. $\quad l(-\frac{\pi}{2}) \neq \pm l(\frac{\pi}{2})$: l est ni paire ni impaire.

$m(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2(x) = m(x)$: m est paire.

$n(-x) = 1 + \tan^2(-x) = 1 + (-\tan x)^2 = 1 + \tan^2(x) = n(x)$: n est paire.

$o(-x) = \frac{(-x)^3}{2+\cos(-x)} = -\frac{x^3}{2+\cos(x)} = -o(x)$: o est impaire.

Exercice 4 Périodicité

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$p(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x) = p(x)$: p est π-périodique.

$q(x+2) = \cos(\pi(x+2)) = \cos(\pi x + 2\pi) = \cos(\pi x) = q(x)$: q est 2-périodique.

$r(x+\pi) = \tan((x-3)+\pi) = \tan(x-3) = r(x)$: r est π-périodique.

$s(x+\frac{2}{5}\pi) = \sin(5(x+\frac{2}{5}\pi)+2) = \sin(5x+2+2\pi) = \sin(5x+2) = s(x)$:
s est $\frac{2}{5}\pi$-périodique.

$t(x+\frac{\pi}{2}) = \cos^2(2(x+\frac{\pi}{2})) = (\cos(2x+\pi))^2 = (-\cos(2x))^2 = \cos^2(2x) = t(x)$:
t est $\frac{\pi}{2}$-périodique.

$u(x+3\pi) = 3\cos(x+3\pi)\sin(\frac{x+3\pi}{3}) = 3\cos(x+\pi)\sin(\frac{x}{3}+\pi) = 3(-\cos x)(-\sin x)$
$= 3\cos(x)\sin(x) = u(x)$: u est 3π-périodique.

Exercice 5 Dérivée

$\alpha'(x) = (\cos(3x-4))' = 3\cos'(3x-4) = -3\sin(3x-4).$

$\beta'(x) = (\cos\sin)' = \cos'\sin + \cos\sin' = -\sin\sin + \cos\cos = \cos^2(x) - \sin^2(x).$

$\gamma'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{\sin'(x)x - \sin(x)x'}{x^2} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$

$\delta'(x) = (2\cos(3x) - x^2)' = 2\times 3\cos'(3x) - 2x = -6\sin(3x) - 2x$

$\varepsilon'(x) = (x^2\sin(x))' = (x^2)'\sin(x) + x^2\sin'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$

$\zeta'(x) = (\sin^2(x))' = 2\sin'(x)\sin(x) = 2\cos(x)\sin(x).$

$$\begin{aligned}\eta'(x) &= (\cos(-4x+2)\sin(3x-5))' \\ &= (\cos(-4x+2))'\sin(3x-5) + \cos(-4x+2)(\sin(3x-5))' \\ &= -4\cos'(-4x+2)\sin(3x-5) + \cos(-4x+2)\times 3\sin'(3x-5) \\ &= 4\sin(-4x+2)\sin(3x-5) + 3\cos(-4x+2)\cos(3x-5).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta'(x) &= (\cos(-2x+4)\sin(-2x+4))' \\ &= (\cos(-2x+4))'\sin(-2x+4) + \cos(-2x+4)(\sin(-2x+4))' \\ &= -2\cos'(-2x+4)\sin(-2x+4) + \cos(-2x+4)\times(-2)\sin'(-2x+4) \\ &= 2\sin(-2x+4)\sin(-2x+4) - 2\cos(-2x+4)\cos(-2x+4) \\ &= 2(\sin^2(-2x+4) - \cos^2(-2x+4)).\end{aligned}$$

Exercice 6 VouF ? Justifier.

1. $\cos(x)$ est 4π-périodique : Vrai. $\cos(x+2\pi+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos(x)$.
2. Une fonction impaire s'annule nécessairement en 0 : Faux. Elle peut ne pas être définie en 0 comme $x \mapsto \frac{1}{x}$. En revanche, si elle est définie en 0, elle s'y annule car $f(0) = f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$.
3. Pour les fonctions sinus et cosinus, dériver, c'est ajouter $\frac{\pi}{2}$: Vrai.
En traçant les angles x et $x+\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique, on observe que
$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x) = \cos'(x)$ et $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x) = \sin'(x)$.

Exercice 7 Étude de fonctions

$f(x) = \cos^2(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
$f(x+\pi) = \cos^2(x+\pi) = (-\cos(x))^2 = \cos^2(x) = f(x)$: f est π-périodique. Il suffit de l'étudier sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
$f(-x) = \cos^2(-x) = \cos^2(x) = f(x)$: f est paire. Il suffit de l'étudier sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
$f'(x) = (\cos^2(x))' = 2\cos'(x)\cos(x) = -2\sin(x)\cos(x)$ du signe opposé à la fonction de l'exercice 2.
On a $f(0) = \cos^2(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0$.
D'où le tableau que l'on commence sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et que l'on complète sur $[-\pi\,;\pi]$ par exemple.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
f	1	↘	0	↗	1	↘	0	↗	1

$g(x) = \sin(x) + \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
$g(x+2\pi) = \sin(x+2\pi)+\cos(x+2\pi) = \sin(x)+\cos(x) = g(x)$: g est 2π-périodique. Il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π.
$g'(x) = \sin'(x) + \cos'(x) = \cos(x) - \sin(x)$.
On a $\cos(x) = \sin(x) \iff x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$
et $g(x) > 0 \iff \cos(x) > \sin(x) \iff x \in \left]-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[\ [2\pi]$.
On a $g(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et $g(-\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}$.
D'où le tableau suivant.

x	$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
g	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	$-\sqrt{2}$

$h(x) = 4\cos(x) + \cos^2(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.
$h(-x) = 4\cos(-x) + \cos^2(-x) = 4\cos(x) + \cos^2(x) = h(x)$: h est paire. Il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.
$h(x+2\pi) = 4\cos(x+2\pi) + \cos^2(x+2\pi) = 4\cos(x) + \cos^2(x) = h(x)$: h est 2π-périodique. Il suffit de l'étudier sur $[0\,;\pi]$.
$h'(x) = 4\cos'(x) + (\cos^2(x))' = -4\sin +2\cos'\cos = -4\sin -2\sin\cos$
$h'(x) = -2\sin(x)(2+\cos(x))$ du signe opposé à $\sin(x)$ car $2+\cos(x) \geqslant 2-1 = 1 > 0$.
On a $h(0) = 4\cos(0) + \cos^2(0) = 5$ et $h(\pi) = 4\cos(\pi) + \cos^2(\pi) = -4+1 = -3$.
D'où le tableau que l'on commence sur $[0\,;\pi]$ et que l'on complète sur $[-\pi\,;\pi]$ par exemple.

x	$-\pi$		0		π
$\sin(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
h	-3	↗	5	↘	-3

$k(x) = \cos(x)\sin(x)$

$k(-x) = \cos(-x)\sin(-x) = \cos(x)(-\sin(x)) = -k(x)$: k est impaire. Il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

$k(x+\pi) = \cos(x+\pi)\sin(x+\pi) = -\cos(x)(-\sin(x)) = \cos(x)\sin(x) = k(x)$: k est π-périodique. Il suffit de l'étudier sur $\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$.

$k'(x) = \cos'(x)\sin(x) + \cos(x)\sin'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x) = \cos(2x)$.

D'où, $k(x) \leqslant 0 \iff 2x \in \left[\,\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\,\right]\ [2\pi] \iff x \in \left[\,\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\,\right]\ [\pi]$.

On a $k(0) = \cos(0)\sin(0) = 0$ et $k(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$.

D'où le tableau que l'on commence sur $\left[\,\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\,\right]$ et que l'on complète sur $\left[\,-\pi\,;\pi\,\right]$ par exemple.

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
k	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$

Exercice 8 $f : x \longmapsto 4\cos(4x+5)$ et $g : x \longmapsto -25\sin(5x-3)$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $F(x) = \sin(4x+5) + 23$
   et l'on a bien $F'(x) = 4\sin'(4x+5) + 23' = 4\cos(4x+5) = f(x)$.
2. On pose $\Gamma(x) = \sin(5x-3) + 4x + 7$
   et l'on a $\Gamma'(x) = 5\sin'(5x-3) + (4x+7)' = 5\cos(5x-3) + 4$ d'où
   $\Gamma''(x) = 5\times 5\cos'(5x-3) + 4' = 25(-\sin(5x-3)) + 0 = -25\sin(5x-3) = g(x)$.

Exercice 9 $(E) : f'' + \omega^2 f = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}$.

1. Pour $f(t) = \cos(\omega t + \varphi_1)$, on a $f'(t) = \omega\cos'(\omega t + \varphi_1) = -\omega\sin(\omega t + \varphi_1)$
   et $f''(t) = -\omega \times \omega\sin'(\omega t + \varphi_1) = -\omega^2\cos(\omega t + \varphi_1)$
   d'où $f''(t) + \omega^2 f(t) = -\omega^2\cos(\omega t + \varphi_1) + \omega^2\cos(\omega t + \varphi_1) = 0$.
   Il en est exactement de même pour $g(t) = \sin(\omega t + \varphi_2)$
2. On a $f(0) = \cos(\omega \times 0 + \varphi_1) = \cos(\varphi_1)$ et $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ donne $f(0) = 0$.
   On a $g(0) = \sin(\omega \times 0 + \varphi_2) = \sin(\varphi_2)$ et $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ donne $g(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 10 (ʃ) $\sin(x) = c$ par dichotomie dans $\left[\,-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$.

1. La ligne 3 est `" if c<-pi/2 or c>pi/2 : "` On teste si c est une valeur possible.

CORRIGÉS

2. Les variables `a` et `b` correspondent aux bornes successives de l'encadrement de la solution.
3. À la ligne 8, on teste si l'amplitude de l'encadrement est suffisamment petite.
4. Il suffit de compléter par `"b=sol"` à la ligne 11 et par `"a=sol"` à la ligne 13 pour qu'il fonctionne très bien.

Exercice 11 Math de mer

1. La longueur d'onde de la houle correspond bien sûr à la période de la fonction h et l'amplitude est précisement le coefficient a.
2. On a $h(x+\frac{2\pi}{\omega}) = a\cos(\omega(x+\frac{2\pi}{\omega})) = a\cos(\omega x + \omega\frac{2\pi}{\omega})) = a\cos(\omega x + 2\pi)$
   $h(x+\frac{2\pi}{\omega}) = a\cos(\omega x) = h(x)$. h est donc $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$-périodique et $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$.
3. Si la longueur d'onde est de $\lambda = 160$m alors $\omega = \frac{2\pi}{160} = \frac{\pi}{80}\text{m}^{-1}$ et si l'amplitude est de $a = 2$m, on a $h(x) = 2\cos(\frac{\pi}{80}x)$.
4. La crête doit parcourir une longueur de 160m à une vitesse de 16m.s^{-1} : il lui faut donc 10s.

Exercice 12

$a(x) = 2\cos(x)$: $\mathscr{C}_2$, amplitude 2
$b(x) = -\cos(x)$: $\mathscr{C}_5$, symétrique de $\cos$ / abscisses
$c(x) = -\sin(x)$: $\mathscr{C}_3$, symétrique de $\sin$ / abscisses
$d(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}$: $\mathscr{C}_6$, $\sin$ "descendue"
$e(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$: $\mathscr{C}_4$, amplitude $\frac{1}{2}$
$f(x) = \cos(x) + 1$: $\mathscr{C}_1$, $\cos$ "montée"

Exercice 13

$g(x) = \cos(2x)$: $\mathscr{C}_{11}$, période π
$h(x) = \frac{3}{2}\sin(x+2)$: $\mathscr{C}_8$, amplitude $\frac{3}{2}$
$i(x) = \cos(x+1)$: $\mathscr{C}_9$, $\cos$ "décalée" à gauche
$j(x) = -2\cos(\pi x)$: $\mathscr{C}_7$, amplitude et période 2
$k(x) = 2\sin(5x+3)$: $\mathscr{C}_{12}$, amplitude 2, période $\frac{2}{5}\pi$
$l(x) = \sin(2\pi x)$: $\mathscr{C}_{10}$, période 1

Exercice 14

$m(x) = \sin(x+\pi)$: courbe identique à celle de $\sin$ avec un décalage de π vers la gauche, une translation de vecteur $\binom{-\pi}{0}$ de $\mathscr{C}_{\sin}$.

$n(x) = 2\cos(2\pi x)$: à partir de la courbe de $\cos$, on double l'amplitude et on la resserre sur une période 1.

$o(x) = \frac{1}{3}\cos(\pi - 4x) = -\frac{1}{3}\cos(4x)$: on prend la symétrique de $\mathscr{C}_{\cos}$ par rapport à l'axe des abscisses, on la resserre sur une période de $\frac{\pi}{2}$ et on l'écrase pour une amplitude de $\frac{1}{3}$.

$p(x) = \sin(1-3x) = -\sin(3x-1)$: on prend la symétrique de $\mathscr{C}_{\sin}$ par rapport à l'axe des abscisses, on la resserre sur une période de $\frac{2\pi}{3}$ puis on la décale de 1 vers la droite.

DEVOIRS CORRIGÉS

Devoir n° 1

CINÉMATHS

Ce devoir est associé au chapitre I, *Polynômes du second degré*.

On rappelle la formule bien utile $\boxed{v = \dfrac{d}{t}}$ où chaque lettre représente effectivement ce que l'on pense dans les unités adéquates.

Exercice 1 À bicyclette...

Partant du hameau de Bômary, Jules et Jim doivent rallier à vélo le village de Belamand, distant de 195 km, afin de rejoindre leur amie Catherine. Bien que Jules soit parti à 8 h et Jim à 9 h, les deux amis arrivent simultanément. Sachant que la vitesse moyenne de Jim est supérieure de $4\,\text{km.h}^{-1}$ à celle de Jules, déterminer l'heure de leurs retrouvailles.

Indice : exprimer le temps de parcours et la vitesse moyenne de Jules en fonction de ceux de Jim puis résoudre l'équation obtenue.

Exercice 2 Le son de la chute libre

Thelma et Louise se trouvent au bord d'un profond canyon. Désirant connaître sa profondeur, Louise y précipite sa Ford Thunderbird décapotable verte de 1966. Elle entend le bruit d'impact de sa voiture 10 secondes après. Thelma sait que la distance d parcourue par un corps en chute libre lâché sans vitesse initiale pendant un temps t est donné par la formule : $d = \dfrac{1}{2}.\text{g}.t^2$ où $\text{g} \simeq 9,8\,\text{m.s}^{-2}$. Louise rappelle à Thelma que le son se propage dans l'air à la vitesse de $340\,\text{m.s}^{-1}$.

Déterminer, au mètre près, la profondeur du canyon.

Indice : décomposer le temps écoulé en *descente* et *montée* puis mettre en équation.

Bonus Un homme d'exception

Le mathématicien américain John Forbes Nash Jr. (1928-2015) a reçu le prix Nobel d'économie en 1994 et le prix Abel en 2015. Ses travaux, réalisés en dépit de sa maladie mentale, sont d'une importance capitale tant en théorie des jeux et en économie qu'en cryptographie. Ce film de Ron Howard romance-t-il agréablement son parcours ?

Indice : Se trouve dans toutes les bonnes « vidéothèques-à-la-demande ».

Corrigé du devoir n° 1

CINÉMATHS

Exercice 1 À bicyclette...

Les durées sont exprimées en heures, les distances en kilomètres et les vitesses en kilomètres par heure.

Posons t_u et t_i les temps de parcours respectifs de Jules et Jim et $v_u = \frac{d}{t_u}$, $v_i = \frac{d}{t_i}$ leur vitesse moyenne.

D'après l'énoncé, on a $d = 195$, $t_u = t_i + 1$ et $v_i = v_u + 4$.
Ainsi, $\frac{195}{t_i} = \frac{195}{t_i+1} + 4$ puis, en multipliant par $t_i(t_i+1)$,
$195(t_i+1) = 195t_i + 4t_i(t_i+1)$ *i.e.* $4t_i^2 + 4t_i - 195 = 0$
de discriminant $\Delta = 4^2 + 4 \times 195 = 56^2 > 0$ et donc de racines
$t_1 = \frac{-4-\sqrt{56^2}}{2\times 4} < 0$ et $t_2 = \frac{-4+56}{8} = \frac{13}{2} > 0$.

Jim a donc pédalé pendant 6 h 30 (seule solution positive) et les amis se sont retrouvés à 9h + 6h30 = 15 h 30.

Exercice 2 Le son de la chute libre

Les durées sont exprimées en secondes et les distances en mètres, tout étant positif.

Posons t_c la durée de la chute de la voiture et t_s le temps mis par le bruit de l'impact pour remonter aux oreilles des amies. On note d la profondeur du canyon.

On a $d = \frac{1}{2}\,\mathrm{g}\,t_c^2$ et $\dfrac{d}{t_s} = 340$ donc $t_c = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{g}}d}$ et $t_s = \dfrac{d}{340}$.

Puisque les amies entendent le bruit après 10 secondes, on a $t_c + t_s = 10$ d'où $\frac{1}{340}d + \sqrt{\frac{2}{\mathrm{g}}}\sqrt{d} - 10 = 0$.

En posant $u = \sqrt{d}$ $(\geqslant 0)$, on obtient l'équation $\frac{1}{340}u^2 + \sqrt{\frac{2}{\mathrm{g}}}\,u - 10 = 0$ de discriminant $\Delta = \frac{2}{\mathrm{g}} + \frac{40}{340} \simeq 0,3217 > 0$ donc de racines

$$u_1 = \frac{-\sqrt{\frac{2}{\mathrm{g}}} - \sqrt{\Delta}}{2 \times \frac{1}{340}} < 0 \qquad \text{et} \qquad u_2 = 170 \times \left(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\tfrac{2}{\mathrm{g}}}\right) \simeq 19,62.$$

Enfin, $d = u^2 \simeq 385$.

Thelma et Louise estiment donc la profondeur du canyon à 385 m, au mètre près.

Devoir n° 2

LA FONCTION DÉRIVE DU NOMBRE

Ce devoir est associé au chapitre II, *Limites & Nombres dérivés*.

Exercice

Soient f et g les deux fonctions suivantes, de représentation graphique $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$.

$$f(x) = x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{13}{3} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x-1}{x+1}.$$

1. Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g.
2. (a) Montrer que, si un point $M(x;y)$ du plan appartient aux courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$, alors $\quad x^3 - \frac{8}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{16}{3} = 0$.
   (b) Après avoir remarqué que $f(2) = g(2)$, factoriser entièrement la fonction polynômiale ci-dessus.
   (c) En déduire les coordonnées des deux points d'intersection I, J des courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$.
3. Démontrer que les courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ admettent une tangente commune Δ_2 au point I d'abscisse 2 et en donner une équation.
4. Tracer, dans un repère d'unités graphiques 2 cm en abscisse, les courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ ainsi que la droite Δ_2 puis, en observant leur graphe, dresser les tableaux de variations de f et de g.
5. (a) Soit a un réel. Démontrer que, pour tout x différent de a,
   $$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x + a - \frac{11}{3}\,.$$
   (b) En déduire que f est dérivable en a et donner, en fonction de a, la valeur $f'(a)$ du nombre dérivé de f en a.
   (c) L'application $a \in \mathbb{R} \longmapsto f'(a) \in \mathbb{R}$ s'appelle la fonction dérivée f' de f. Dresser son tableau de signe et le comparer avec le tableau de variations de f obtenu à la question 4.
6. (a) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Démontrer que, pour tout x différent de -1 et a,
   $$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{3}{(x+1)(a+1)}\,.$$
   (b) En déduire que g est dérivable en a et donner, en fonction de a, la valeur $g'(a)$ du nombre dérivé de g en a.
   (c) L'application $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longmapsto g'(a) \in \mathbb{R}$ s'appelle la fonction dérivée g' de g. Dresser son tableau de signe et le comparer avec le tableau de variations de g obtenu à la question 4.

Bonus Puisqu'il est temps d'émettre vos souhaits, je vous conseille de rajouter une ligne au texto que vous allez envoyer au Père Noël : *Le théorème du perroquet* de Denis Guedj. Vous pouvez aussi le trouver en bibliothèque, faire un 50-50 en le partageant avec votre voisine, l'emprunter à un ami, faire un appel sur les réseaux sociaux ou user de tout autre moyen caritatif et légal mais vous ne pourrez qu'apprécier ce roman policier qui retrace avec talent, humour et suspense l'avènement des plus grandes avancées dans l'histoire des mathématiques.

Corrigé du devoir n° 2

LA FONCTION DÉRIVE DU NOMBRE

1. f est un polynôme du second degré, donc défini sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. g est une fonction rationnelle, donc définie là où son dénominateur ne s'annule pas : $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. (a) Un point $M(x\,;y)$ du plan appartient aux deux courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient $\quad x \neq -1, \quad y = f(x) \quad$ et $\quad y = g(x)$.
Pour $x \neq -1$, on a :
$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff x^2 - \tfrac{11}{3}x + \tfrac{13}{3} = \tfrac{2x-1}{x+1} \\ &\iff (x^2 - \tfrac{11}{3}x + \tfrac{13}{3})(x+1) = 2x - 1 \\ &\iff x^3 - \tfrac{11}{3}x^2 + \tfrac{13}{3}x + x^2 - \tfrac{11}{3}x + \tfrac{13}{3} = 2x - 1 \\ &\iff x^3 + (-\tfrac{11}{3} + 1)x^2 + (\tfrac{13}{3} - \tfrac{11}{3} - 2)x + \tfrac{13}{3} + 1 = 0 \\ &\iff x^3 - \tfrac{8}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x + \tfrac{16}{3} = 0. \end{aligned}$$

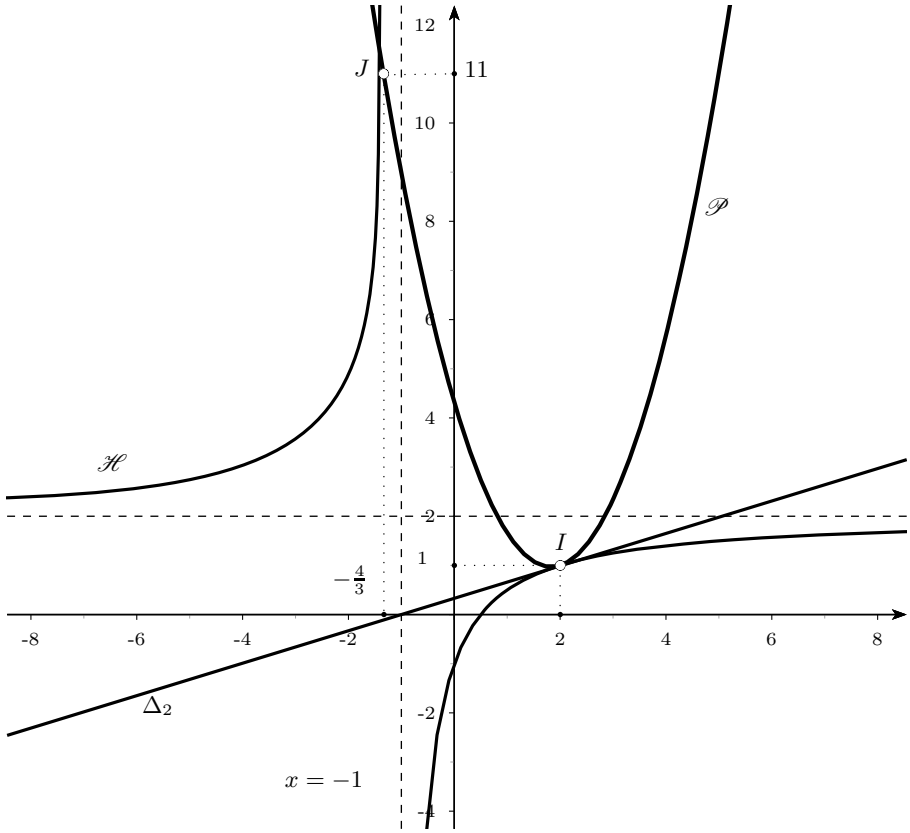
   (b) Puisque $\quad f(2) = 4 - \tfrac{22}{3} + \tfrac{13}{3} = \tfrac{12-22+13}{3} = 1 \quad$ et $\quad g(2) = \tfrac{4-1}{2+1} = 1 = f(2)$, 2 est une racine du polynôme précédent $\quad (3 \times 2^3 - 8 \times 4 - 4 \times 2 + 16 = 0)$ qui se factorise donc par $(x-2)$.
On a $\quad x^3 - \tfrac{8}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x + \tfrac{16}{3} = (x-2)(x^2 + bx - \tfrac{8}{3})$
où, après développement, $\quad -2 + b = -\tfrac{8}{3} \quad$ et $\quad -2b - \tfrac{8}{3} = -\tfrac{4}{3} : b = -\tfrac{2}{3}$.
Donc $\quad x^3 - \tfrac{8}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x + \tfrac{16}{3} = (x-2)(x^2 - \tfrac{2}{3}x - \tfrac{8}{3}), \quad$ de discriminant $\tfrac{4}{9} + 4 \times \tfrac{8}{3} = \tfrac{100}{9} \quad$ et donc de racines $\quad 2, \quad \tfrac{\frac{2}{3} - \frac{10}{3}}{2} = -\tfrac{4}{3} \quad$ et $\quad \tfrac{\frac{2}{3} + \frac{10}{3}}{2} = 2$.
D'où $\quad x^3 - \tfrac{8}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x + \tfrac{16}{3} = (x-2)(x+\tfrac{4}{3})(x-2) = (x+\tfrac{4}{3})(x-2)^2$.

   (c) Un point $M(x\,;y)$ appartient donc aux deux courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ si $(x+\tfrac{4}{3})(x-2)^2 = 0 \quad$ c.-à-d. $\quad x = -\tfrac{4}{3} \quad$ ou $\quad x = 2$. On a $\quad g(2) = 1 \quad$ et $g(-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{-2 \times \frac{4}{3} - 1}{-\frac{4}{3} + 1} = 11$. Les points d'intersection des courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ sont donc $I(2\,;1)$ et $J(-\tfrac{4}{3}\,;11)$.

3. Soit $x \neq 2$, on a $\quad \tfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \tfrac{x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{13}{3} - 1}{x-2} = \tfrac{3x^2 - 11x + 10}{3(x-2)} = \tfrac{(x-2)(3x-5)}{3(x-2)} = x - \tfrac{5}{3}$
puisque 2 est une racine de $3x^2 - 11x + 10$.
D'où $\quad \lim\limits_{x \to 2} \tfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x - \tfrac{5}{3}) = 2 - \tfrac{5}{3} = \tfrac{1}{3} = f'(2)$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;2\}$, on a $\quad \tfrac{g(x)-g(2)}{x-2} = \tfrac{\frac{2x-1}{x+1} - 1}{x-2} = \tfrac{2x-1-(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \tfrac{x-2}{(x+1)(x-2)} = \tfrac{1}{x+1}$
d'où $\quad \lim\limits_{x \to 2} \tfrac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (\tfrac{1}{x+1}) = \tfrac{1}{3} = g'(2) \quad$ et $\quad f'(2) = g'(2)$.
On a vu de plus que $\quad f(2) = g(2) = 1$. Les tangentes aux courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{H}$ ont donc même équation $\quad y = f'(2)(x-2) + f(2) = \tfrac{1}{3}(x-2) + 1 = \dfrac{x+1}{3} \quad$ et sont ainsi confondues.

CORRIGÉS

4.



Le sommet de la parabole $\mathscr{P}$ se situe en $-\frac{-11/3}{2\times 1} = \frac{11}{6}$. Graphiquement,

x	$-\infty$	$\frac{11}{6}$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$f(\frac{11}{6})$	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	$+\infty$ ↗ **2**	‖	**2** ↗ $-\infty$

5. (a) Soit a un réel et $x \neq a$.
On a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{13}{3}-(a^2-\frac{11}{3}a+\frac{13}{3})}{x-a} = \frac{(x-a)(x+a)-\frac{11}{3}(x-a)}{x-a} = x+a-\frac{11}{3}$.

(b) Donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}(x+a-\frac{11}{3}) = 2a-\frac{11}{3} \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = 2a - \dfrac{11}{3}$.

(c) On a $f' : a \in \mathbb{R} \longmapsto 2a-\frac{11}{3}$ de tableau de signes suivant. On remarque que lorsque la fonction dérivée f' est positive, la fonction f est croissante et que f est décroissante lorsque f' est négative.

a	$-\infty$		$\frac{11}{6}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	

6. (a) Soit a un réel différent de -1 et x un réel différent de -1 et de a. On a :
$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{\frac{2x-1}{x+1}-\frac{2a-1}{a+1}}{x-a} = \frac{\frac{(2x-1)(a+1)-(2a-1)(x+1)}{(x+1)(a+1)}}{x-a} = \frac{2ax+2x-a-1-2ax-2a+x+1}{(x+1)(a+1)(x-a)}$
et $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{3(x-a)}{(x+1)(a+1)(x-a)} = \frac{3}{(x+1)(a+1)}$.

(b) Donc $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{3}{(x+1)(a+1)} = \frac{3}{(a+1)(a+1)} = \frac{3}{(a+1)^2} \in \mathbb{R}$.
g est donc dérivable en $a \neq -1$ et $g'(a) = \dfrac{3}{(a+1)^2}$.

(c) On a $g' : a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longmapsto \dfrac{3}{(a+1)^2}$ de tableau suivant.
On remarque que la fonction dérivée g' est positive et la fonction g croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.

a	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(a)$		$+$	‖	$+$	

Devoir n° 3

TRIGONOMÉTRIE DE L'ESPACE

Ce devoir est associé au chapitre III, *Trigonométrie*.

Il y a bien longtemps, dans une galaxie lointaine, très lointaine, aux confins de la constellation du *Grand Disque*, autour de l'étoile PI.3.14, tournait, dans le sens trigonométrique (vue de dessus), une planète qui elle-même tournicotait sur son axe de révolution dans le sens indirect (vue de côté). Cette planète était tout à fait quelconque, pour une planète habitée s'entend bien : un gigantesque « patatoïde » plus ou moins tempéré.

Toutefois, une peuplade que nous pouvons qualifier d'évoluée (comparée aux Terriens s'entend bien) y subsistait tant bien que mal et avait, au fil des millénaires, découvert concomitamment la parole et les maths.

Un matin, leur souverain, Radian Ier, décida de nommer sa planète le Sol (puisqu'il avait les pieds dessus). Il se dit ensuite qu'il était bien temps d'inventer la montre. Pour ce faire, il convoqua sur-le-champ un phalanstère de scientifiques honoraires qui, de gré ou de force, dut remettre un rapport dans les plus brefs délais. Celui-ci stipulait :

- Les journées durent douze heures et la nuit, on dort.
- En l'honneur du plus grand potentat de l'univers pâle, on désigne par ρ l'unité d'heure.
- À la fin de la troisième heure du jour, lorsque le Grand Doyen commence à s'exprimer, il est 0ρ.
- Afin de mesurer le temps, nous créons l'Horloge à partir du cercle trigonométrique primordial.
- L'Horloge possède une Aiguille unique en kryptonite qui réalise un tour complet en exactement une journée, dans le sens horaire.
- On ne sait ce que fait l'Aiguille la nuit puisque l'on dort.

Afin de parer au questionnement inquisiteur de leur bien-aimé tyran, les savants s'empressèrent de produire deux exemples éloquents : « Sire, ayez l'heur d'apprendre qu'à la fin de la première heure de la journée, il sera $\frac{\pi}{3}\rho$ et qu'à fin de la quatrième, $-\frac{\pi}{6}\rho$. Par ailleurs et contrairement aux simples Terriens qui en font un usage immodéré, veuillez prendre note que, sur l'Horloge, il n'est pas utilisé de banals chiffres romains mais une remarquable lettre grecque. »

(a) Quelle heure est-il au lever du jour ? À la mi-journée ? À la tombée de la nuit ?

(b) À quel moment de la journée correspond l'heure $\frac{\pi}{6}\rho$? Et l'heure $-\frac{\pi}{3}\rho$? Et $\frac{8\pi}{3}\rho$? $-\frac{5\pi}{2}\rho$? $-\frac{5\pi}{6}\rho$?

(c) Quelle heure est-il lorsque le sinus horaire est nul et le cosinus horaire négatif ? Et lorsque le sinus horaire vaut $\frac{1}{2}$ et le cosinus horaire $-\frac{\sqrt{3}}{2}$?

(d) À quel moment de la journée est-on lorsque le cosinus de l'heure est négatif ? Et lorsque le sinus de l'heure est positif ?

Le jeune Pierre Quarey s'aérait les sinus à sa fenêtre grande ouverte lorsqu'il eut la révélation. En effet, la multitude des dénominations des heures était source de nombreux quiproquos, débats, tergiversations et autres conflits. Cela allait même jusqu'à l'invective, c'est dire. Pierre Quarey inventa donc, en observant le doux soleil de $\frac{2\pi}{3}\rho$, la notion d'*heure principale*, l'unique dénomination appartenant au si amusant intervalle $]-\pi\,;\pi]$. À force de persuasion et, il faut bien l'admettre, avec l'aide inexorable du temps, les vieux sages récalcitrants ne furent plus très nombreux et il fut alors aisé de leur faire adopter l'invention de Pierre. Dorénavant, l'heure légale était principale.

(e) Quelle est l'heure légale de $\frac{7\pi}{4}\rho$, $\frac{11\pi}{12}\rho$, $-\frac{34\pi}{7}\rho$ et $-\frac{102\pi}{3}\rho$?

(f) Quelles sont les valeurs des cosinus et sinus des heures $\frac{7\pi}{4}\rho$, $\frac{11\pi}{3}\rho$, $-\frac{35\pi}{6}\rho$ et $-\frac{102\pi}{3}\rho$?

Plus tard, Pie l'Ancien, dans sa grande clairvoyance, fit observer que les heures aussi pouvaient être partagées. Par exemple, la fin de l'allocution quotidienne du Grand Doyen se situait généralement à l'heure $-\frac{\pi}{12}\rho$, lorsqu'il ne s'endormait pas inopinément.

(g) À quels moments de la journée correspondent chacune des heures $\frac{\pi}{12}\rho$, $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\rho$ et $\frac{7\pi}{12}\rho$?

(h) Quelle est l'heure principale cinq heures et demi après le lever du jour ? Dix heures et demi après ?

Pendant des siècles, tous vécurent en harmonie avec le temps, insouciants des petits tracas temporels. Malheureusement, cela ne dura point et ce qui était considéré comme un acquis intangible commença de vaciller. Les enfants rechignaient devant l'apprentissage du calcul *piaire* élémentaire, les adultes ergotaient sur la pertinence de différencier $\frac{67\pi}{69}\rho$ de $\frac{205\pi}{207}\rho$, les plus âgés se perdaient dans le modulo, les plus désorientés cherchaient même la droite de l'heure,... jusqu'à ce que survint la révolution co*pp*ernicienne et tous en prirent pour leur grade : une grande aiguille, en cuivre celle-ci, fut instaurée afin d'assister l'Aiguille dans sa tâche. Alors, le temps s'accéléra et les jours étaient désormais comptés.

(i) Quelle heure est-il ?

Corrigé du devoir n° 3

TRIGONOMÉTRIE DE L'ESPACE

En juxtaposant un cercle trigonométrique et une horloge classique, la résolution est facilitée. En effet, le « III » de l'horloge correspond à la fin de la troisième heure du jour, précisément l'instant où le Grand Doyen commence à s'exprimer : il est donc bien 0ρ. Puisque les journées durent douze heures, une heure correspond à un douzième de tour : $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Ainsi que les éloquents exemples le précisent, $\frac{\pi}{3}\rho$ correspond au « I » et $-\frac{\pi}{6}\rho$ au « IV » d'une horloge classique. Précisons toutefois que le début de la quatrième heure du jour est la fin de la troisième et que trois heures et non quatre se sont alors écoulées depuis le lever de l'astre solaire.

(a) Au lever du jour, il est $\frac{\pi}{2}\rho$ (« XII »), à la mi-journée $-\frac{\pi}{2}\rho$ (« VI ») et la tombée de la nuit $-\frac{3\pi}{2}\rho$ (« XII »).

(b) L'heure $\frac{\pi}{6}\rho$ correspond à la fin de la deuxième heure de la journée (le « II » d'une horloge classique). L'heure $-\frac{\pi}{3}\rho$ à la fin de la cinquième heure (« V »), l'heure $\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi\rho$ au début de la douzième heure (« XI »), l'heure $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi\rho$ au début de la septième heure, la mi-journée (« VI ») et l'heure $-\frac{5\pi}{6}\rho$ à la fin de la huitième heure (« VIII »).

(c) Lorsque le sinus horaire est nul et le cosinus horaire négatif, il est $\pi\rho$ (« IX »).
Lorsque le sinus horaire vaut $\frac{1}{2}$ et le cosinus horaire $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, il est $\frac{5\pi}{6}\rho$ (« X »).

(d) Lorsque le cosinus de l'heure est négatif, il est entre $-\frac{\pi}{2}\rho$ et $-\frac{3\pi}{2}\rho$ (« VI » et « XII ») : l'après-midi.
Lorsque le sinus de l'heure est positif, il est entre $\frac{\pi}{2}\rho$ et 0ρ (« XII » et « III ») ou entre $-\pi\rho$ et $-\frac{3\pi}{2}\rho$ (« IX » et « XII ») : début de matinée ou fin d'après-midi.
Lorsque le sinus de l'heure est inférieur à $\frac{1}{2}$, il est entre $\frac{\pi}{6}\rho$ et $\frac{5\pi}{6}\rho$ (« II » et « X ») : du début de matinée à la fin d'après-midi.

(e) ◦ $\frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$. ◦ $\frac{11\pi}{12} \in]-\pi\,;\pi]$.
◦ $-\frac{34\pi}{7} = -\frac{28\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} = -\frac{6\pi}{7} - 2\times 2\pi \equiv -\frac{6\pi}{7}\,[2\pi]$. ◦ $\frac{-102\pi}{3} = -17\times 2\pi \equiv 0\,[2\pi]$.

(f) ◦ $\cos(\frac{7\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\frac{7\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
◦ $\frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\times 2\pi \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ donc
$\cos(\frac{11\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{11\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
◦ $-\frac{35\pi}{6} = -\frac{36\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 3\times 2\pi \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$: $\cos(-\frac{35\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(-\frac{35\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.
◦ $\cos(\frac{-102\pi}{3}) = \cos(0) = 1$ et $\sin(\frac{-102\pi}{3}) = \sin(0) = 0$.

(g) ◦ $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi/6}{2}\rho$ correspond à une demi-heure avant 0ρ : deux heures et demi se sont écoulées depuis le début du jour (« II et demi »).
◦ $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\rho$ correspond à une demi-heure après le lever du soleil (« XII et demi »).

CORRIGÉS

◦ $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\rho$ correspond à une demi-heure avant le coucher du soleil (« XI et demi »).

(h) Cinq heures et demi après le lever du jour, il est $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} = -\frac{5\pi}{12}\rho$.
Dix heures et demi après le lever du jour, il est $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}\rho$.

(i) I know a White Rabbit who would have taken a watch out of its waistcoat-pocket, looked at it and said to itself : 'Oh dear ! Oh dear ! I shall be late !'.

Devoir n° 4

La dérive du sous-marin

Ce devoir est associé au chapitre IV, *Fonctions dérivées*.

Exercice

Lucy dispose de suffisamment de fraisiers pour un lopin rectangulaire de $98\,\mathrm{m}^2$. Afin de les protéger des ratons laveurs sans empêcher les merles de voler, elle souhaite l'entourer de fil de fer barbelé.

« Qu'il en soit ainsi ! Allons-y ensemble et conduis mon automobile, une rutilante coccinelle. », s'exclame sa sœur Michèle. Et, accompagnées de leur amie Julia à qui elles ont demandé de l'aide, elles empruntent de ce pas la longue route sinueuse à la lisière du bois norvégien et y rencontrent l'homme de nulle part, ou plutôt de l'autre côté de l'univers, tel un fou sur la colline. « Bonjour Au revoir », s'empressent-elles avant qu'il ne leur narre en détail les neuf révolutions avec sa guitare qui pleure.

Arrivées sur Penny Lane – artère renommée pour ses quincailleries si bien achalandées –, elles n'ont que quelques minutes pour déterminer les dimensions du lopin ayant un périmètre minimal afin ne pas dépenser plus que de raison car Julia ne lui donne jamais son argent et Lucy n'a toujours pas fini de payer son bathyscaphe jaune.

« Rentrons ! Le soleil arrive et la route de l'abbaye risque d'être bondée sur le retour, rappelle Julia. Ce n'est pas quand j'aurai soixante-quatre ans que je pourrai porter tout ce poids ! »

Grâce à toi, elles vont acheter le métrage minimal adéquat.

Bonus Se procurer l'intégrale des enregistrements, l'écouter en boucle et retrouver les vingt-sept allusions du texte ci-dessus.

Corrigé du devoir n° 4

La dérive du sous-marin

Exercice

Soient ℓ et L les dimensions du rectangle, en mètres.
On a $\ell \times L = 98$ donc $\ell = \frac{98}{\ell}$
d'où l'expression du périmètre
$\mathscr{P} = 2(L + \ell) = 2(L + \frac{98}{L})$
de dérivée
$\mathscr{P}' = 2(1 - \frac{98}{L^2}) = \frac{2}{L^2}(L^2 - 98) = \frac{2}{L^2}(L - \sqrt{98})(L + \sqrt{98})$
du signe de $L - \sqrt{98}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
$\mathscr{P}$ est donc décroissante puis croissante et admet ainsi un minimum en $L_0 = \sqrt{98}\,\text{m}$.
On a alors, $\ell_0 = \frac{98}{\sqrt{98}} = \sqrt{98}$.

Le périmètre est donc minimal lorsque l'on a un carré de $\sqrt{98}\,\text{m}$ de côté.

Bonus

- Yellow submarine
- Lucy in the sky with diamonds
- Strawberry fields
- Rocky raccoon
- Blackbird
- Let it be
- Come together
- Drive my car
- The beatles
- Michelle
- Julia
- Help
- The long and winding road
- Norwegian wood
- Nowhere man
- Across the universe
- The fool on the hill
- Hello Goodbye
- Revolution 9
- While my guitar gently weeps
- Penny lane
- You never give me your money
- Get back
- Here comes the sun
- Abbey road
- When I'm sixty-four
- Carry that weight

Devoir n° 5

VOYAGE AU BOUT DU LIEU-DIT

Ce devoir est associé au chapitre IV, *Fonctions dérivées*.

Lorsque Ferdinand, afin de rencontrer son amie Céline, se rend allègrement sur son Solex du hameau Nautomne au lieu-dit Quotaumie, distants de d kilomètres en montée, par l'unique chemin vicinal les reliant, il roule toujours à la vitesse moyenne de $20\,\text{km.h}^{-1}$. En revanche, habitant une région tourmentée et étant d'humeur changeante, il n'effectue pas toujours le retour à la même vitesse moyenne, selon sa forme, son moral et les conditions climatiques.
Notons x sa vitesse moyenne en km.h^{-1} sur le trajet retour.

1. Conjecturer rapidement les réponses aux questions suivantes :
   (a) Si Ferdinand effectue le retour à la vitesse de $30\,\text{km.h}^{-1}$, quelle est sa vitesse moyenne sur le trajet aller-retour ?
   (b) Que doit valoir x pour que la vitesse moyenne de Ferdinand sur le trajet aller-retour soit de $40\,\text{km.h}^{-1}$?
2. (a) Exprimer, en fonction de d, le temps t_1 mis par Ferdinand pour effectuer le trajet de Nautomne vers Quotaumie puis, en fonction de d et x, le temps t_2 mis pour le trajet retour.
   (b) En déduire la vitesse moyenne $f(x)$ de Ferdinand sur le trajet aller-retour en fonction de sa vitesse moyenne de retour x.
   (c) Les conjectures émises dans la question 1 sont-elles confirmées ? Expliquer cela.
3. On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par : $\quad f(x) = \dfrac{40x}{x+20}$.
   (a) Étudier les variations de f puis construire sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal (unités graphiques : 1 cm pour $4\,\text{km.h}^{-1}$ en abscisse et 1 cm pour $2\,\text{km.h}^{-1}$ en ordonnée).
   (b) Tracer dans le même repère la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $\quad y = \dfrac{x+20}{2}$.
   (c) Démontrer que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$.
4. Déterminer, graphiquement puis algébriquement, les valeurs de x pour lesquelles la différence entre la moyenne arithmétique des vitesses moyennes et la vitesse moyenne sur le parcours aller-retour est inférieure à $2\,\text{km.h}^{-1}$.
5. Connaissez-vous une ville debout ?

Corrigé du devoir n° 5

VOYAGE AU BOUT DU LIEU-DIT

1. (a) Puisque le trajet retour est de même longueur que le trajet aller, on peut penser que si Ferdinand effectue l'aller à la vitesse moyenne de $20\,\text{km.h}^{-1}$ et le retour à $30\,\text{km.h}^{-1}$, sa vitesse moyenne sur le trajet aller-retour serait de $\frac{20+30}{2} = 25\,\text{km.h}^{-1}$, la moyenne arithmétique des vitesses aller et retour.

   (b) $x = 60$ étant la solution de l'équation $\frac{20+x}{2} = 40$, on peut penser que si Ferdinand parcourt le retour à une vitesse moyenne de $60\,\text{km.h}^{-1}$, sa vitesse moyenne sur le trajet aller-retour serait de $40\,\text{km.h}^{-1}$, moyenne arithmétique des deux vitesses moyennes.

2. (a) En appliquant la formule $t = \dfrac{d}{v}$, on obtient $t_1 = \dfrac{d}{20}\,\text{h}$ et $t_2 = \dfrac{d}{x}\,\text{h}$.

   (b) Ainsi, la vitesse moyenne de Ferdinand sur le trajet aller-retour vaut :
   $$f(x) = \frac{d+d}{t_1+t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{20}+\frac{d}{x}} = \frac{2d}{\frac{xd+20d}{20x}} = \frac{2d\times 20x}{d(x+20)} = \frac{40x}{x+20}\,\text{km.h}^{-1}.$$

   (c) On a $f(30) = \frac{40\times 30}{30+20} = \frac{1200}{50} = 24 \neq 25\,\text{km.h}^{-1}$
   et $f(60) = \frac{40\times 60}{60+20} = \frac{2400}{80} = 30 \neq 40\,\text{km.h}^{-1}$.
   En calculant la moyenne arithmétique des vitesses dans la question 1, nous avons non seulement considéré que les distances étaient égales à l'aller comme au retour mais aussi que les temps globaux de parcours ne changeaient pas (ce qui est évidemment faux).

3. On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{40x}{x+20}$.

   (a) Pour $u = 40x$, $u' = 40$ et $v = x+20$, $v' = 1$, on a $f = \frac{u}{v}$ et en appliquant la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, on obtient $f'(x) = \left(\frac{40x}{x+20}\right)' = \frac{40(x+20)-40x\times 1}{(x+20)^2} = \frac{800}{(x+20)^2}$ qui est toujours positive.
   f est donc croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$. De plus, $f(0) = 0$.
   D'où le tableau suivant.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	40

(b) Puisque $\frac{0+20}{2} = 10$ et $\frac{20+20}{2} = 20$, la droite $\mathscr{D}$ passe par les points $(0\,;10)$ et $(20\,;20)$.

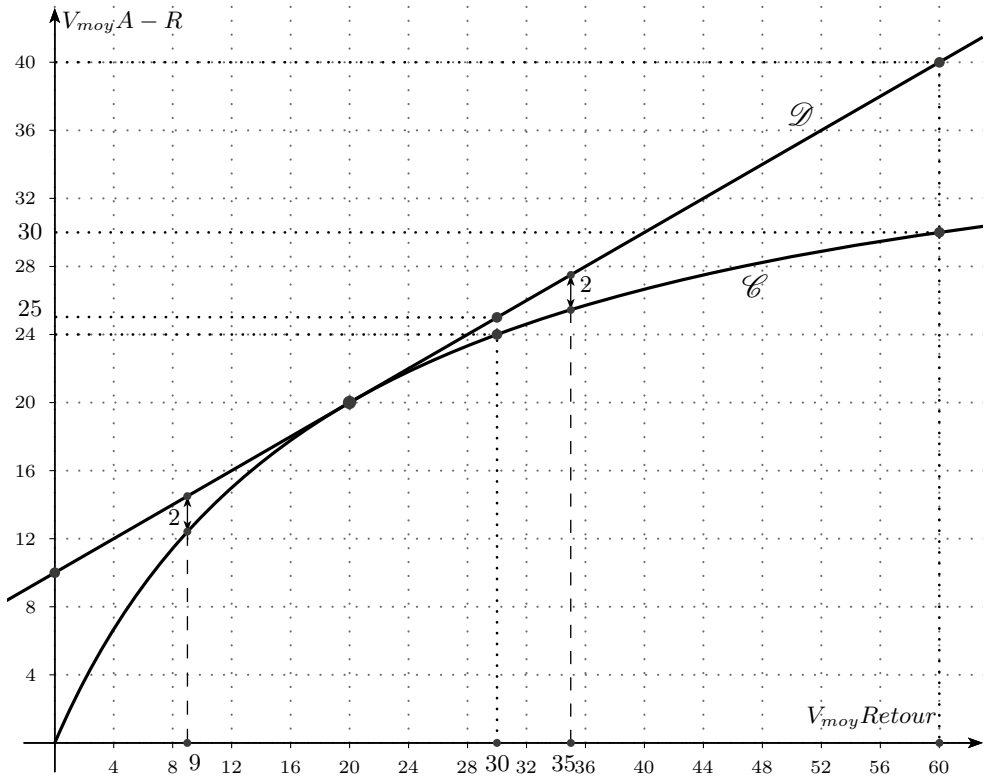
(c) La droite $\mathscr{D}$ semble être tangente à $\mathscr{C}$ au point $(20\,;20)$ (on résout sinon $f(x) = \frac{x+20}{2}$).
On a $f(20) = \frac{40\times20}{20+20} = 20$ et $f'(20) = \frac{800}{(20+20)^2} = \frac{800}{1600} = \frac{1}{2}$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 20 est donc
$y = f'(20)(x-20) + f(20) = \frac{1}{2}(x-20) + 20 = \frac{x-20+40}{2} = \frac{x+20}{2}$ qui est l'équation de $\mathscr{D}$.

4. La droite $\mathscr{D}$ est la représentation graphique de la moyenne arithmétique des vitesses moyennes $g(x) = \dfrac{x+20}{2}$ en fonction de x. On observe graphiquement que « l'écart vertical » entre la droite et la courbe, et donc la différence entre la moyenne arithmétique des vitesses moyennes et la vitesse moyenne sur le parcours aller-retour, sont inférieurs à $2\,\text{km.h}^{-1}$ lorsque $x \in [\,9\,;35\,]$.
Algébriquement, on cherche les valeurs de $x \geqslant 0$ telles que :
$$|g(x) - f(x)| \leq 2 \iff \left|\tfrac{x+20}{2} - \tfrac{40x}{x+20}\right| \leq 2 \iff -2 \leq \tfrac{x+20}{2} - \tfrac{40x}{x+20} \leq 2$$
$$\iff -2 \leq \tfrac{(x+20)^2 - 2\times40x}{2(x+20)} \leq 2$$
$$\iff -2\times2(x+20) \leq x^2 + 40x + 400 - 80x \leq 2\times2(x+20)$$
$$\iff -4(x+20) \leq x^2 - 40x + 400 \leq 4(x+20)$$
$$\iff -4(x+20) \leq 0 \leq (x-20)^2 \leq 4(x+20)$$
$$\iff x^2 - 40x + 400 - 4(x+20) \leq 0$$
$$\iff x^2 - 44x + 320 \leq 0.$$
Le polynôme $x^2 - 44x + 320$ est de discriminant $\Delta = 44^2 - 4\times320 = 656 > 0$ et il est donc négatif entre ses racines $x_1 = \frac{44-\sqrt{656}}{2} = \frac{44-4\sqrt{41}}{2} = 22 - 2\sqrt{41} \simeq 9,2$ et $x_2 = 22 + 2\sqrt{41} \simeq 34,8$.
La vitesse moyenne du trajet aller-retour de Ferdinand sera celle des moyennes de ses vitesses aller et retour à $2\,\text{km.h}^{-1}$ près s'il a une vitesse moyenne de retour comprise entre $22 - 2\sqrt{41}$ et $22 + 2\sqrt{41}\,\text{km.h}^{-1}$.
Remarque : l'intervalle est centré autour de 22 et non de 20...

5. Ce n'est pas à Assise mais bien à New York qu'arrive Ferdinand Bardamu :

Pour une surprise, c'en fut une. À travers la brume, c'était tellement étonnant ce qu'on découvrait soudain que nous nous refusâmes d'abord à y croire et puis tout de même quand nous fûmes en plein devant les choses, tout galérien qu'on était on s'est mis à bien rigoler, en voyant ça, droit devant nous...

Figurez-vous qu'elle était debout leur ville, absolument droite. New York c'est une ville debout. On en avait déjà vu nous des villes bien sûr, et des belles encore, et des ports et des fameux mêmes. Mais chez nous, n'est-ce pas, elles sont couchées les villes, au bord de la mer ou sur les fleuves, elles s'allongent sur le paysage, elles attendent le voyageur, tandis que celle-là l'Américaine, elle ne se pâmait pas, non, elle se tenait bien raide, là, pas baisante du tout, raide à faire peur.


$V_{moy}A-R$
40
36
32
30
28
25
24
20
16
12
8
4
$\mathscr{D}$
$\mathscr{C}$
2
2
$V_{moy}Retour$
4
8
9
12
16
20
24
28
30
32
35
36
40
44
48
52
56
60

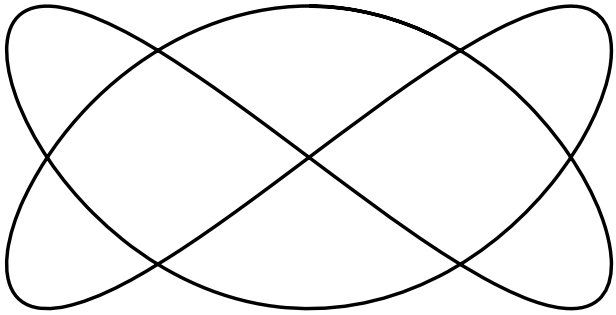
Devoir n° 6

Les courbes d'Esmeralda

Ce devoir est associé au chapitre IV, *Fonctions dérivées*.

Esmeralda dansait sur le parvis de Notre-Dame ; Quasimodo la regardait d'en haut. Ses jupons dessinaient de belles arabesques sur le sol. *C'est l'infini qui danse...*

Voici la courbe représentant les mouvements de la robe d'Esmeralda :



Soit j la fonction désignant la silhouette d'un des jupons d'Esmeralda.

La fonction j est définie par $\quad j(x) = \dfrac{-5x+1}{2x^2+x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction j.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $j(x) = -1$, lorsque le jupon s'envole au gré de ses mouvements ?
3. Dresser le tableau de variation de la fonction j.

La danse de la gitane se reflétait dans l'oeil du Bossu. De midi à minuit, il la regardait danser ; et elle s'en allait à minuit une, heureuse d'avoir donné au ciel un peu de sa couleur. Le Bossu rejoignait le monde d'en-bas ; et les gargouilles regardaient la bosse sombre descendre dans les ténèbres. L'Homme était maintenant sur le parvis de la Cathédrale. Il se sentait misérable, malheureux, laid, petit, car il était bossu. Il caressait la pierre somnolente comme un objet sacré. Elle était la mémoire d'Esmeralda. La pierre était son secret.

Sachant que Quasimodo se remémore la danse d'Esmeralda, on considère la fonction s de son souvenir sur l'intervalle $I = [\,-1\,;+\infty\,[$ par l'expression $\quad s(x) = \sqrt{1+x}$.
On note $\mathscr{C}_s$ la courbe représentative de la fonction s dans un repère.

4. Préciser $s(-1)$, $s(0)$ et $s(1)$.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction s désignant le souvenir de Quasimodo.

6. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_s$ au point d'abscisse 0.
7. Sur l'intervalle I, comparer $\sqrt{1+x}$ et $1+\frac{x}{2}$.
   En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_s$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1+\frac{x}{2}$.
8. Tracer le souvenir de Quasimodo, la silhouette du jupon d'Esmeralda ainsi que la droite $\mathscr{D}$ dans un même graphique GeoGebra.
9. Quelle figure mystérieuse Quasimodo contemple-t-il sur la pierre du parvis ?
   Dans un devoir d'invention, imitant l'esthétique romantique, vous montrerez comment la pierre, en reflétant les secrets de Quasimodo, lui ouvre les Portes du Temps.

Corrigé du devoir n° 6

LES COURBES D'ESMERALDA

Soient $j(x) = \frac{-5x+1}{2x^2+x+1}$ et $s(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Le dénominateur $2x^2 + x + 1$ étant de de discriminant $1^2 - 4 \times 2 = -7 < 0$, il ne peut s'annuler et la fonction j est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$j(x) = -1 \iff \frac{-5x+1}{2x^2+x+1} = -1 \iff -5x + 1 = -(2x^2 + x + 1)$
$\iff 2x^2 - 4x + 2 = 0 \iff 2(x^2 - 2x + 1) = 0 \iff 2(x-1)^2 = 0$
$\iff x = 1$.

3. Posons $u = -5x + 1$, $v = 2x^2 + x + 1$. On a $u' = -5$, $v' = 4x + 1$. Puisque $j = \frac{u}{v}$, $j' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $j'(x) = \frac{-5(2x^2+x+1)-(-5x+1)(4x+2)}{(2x^2+x+1)^2} = \frac{10x^2-4x-6}{(2x^2+x+1)^2} = \frac{2(5x^2-2x-3)}{(2x^2+x+1)^2}$, du signe de $5x^2 - 2x - 3 = (x-1)(5x+3)$ (1 est une racine évidente), positif ($5 > 0$) « à l'extérieur » de ses racines 1 et $-\frac{3}{5}$.
On a $j(1) = \frac{-5+1}{2+1+1} = -1$ et $j(-\frac{3}{5}) = \frac{3+1}{2(3/5)^2-3/5+1} = \frac{25}{7}$.
D'où le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
$j'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
j		↗	$\frac{25}{7}$	↘	-1	↗	

4. On a $s(-1) = \sqrt{1-1} = 0$, $s(0) = \sqrt{1+0} = 1$ et $s(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

5. Posons $ax + b = x + 1$, $u = \sqrt{x}$ pour $x > 0$. On a $(ax + b)' = 1$, $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Puisque $s = u(ax + b)$, $s' = a \times u'(ax + b)$, et pour tout $x > -1$, $s'(x) = 1 \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$.
D'où le tableau de variation suivant.

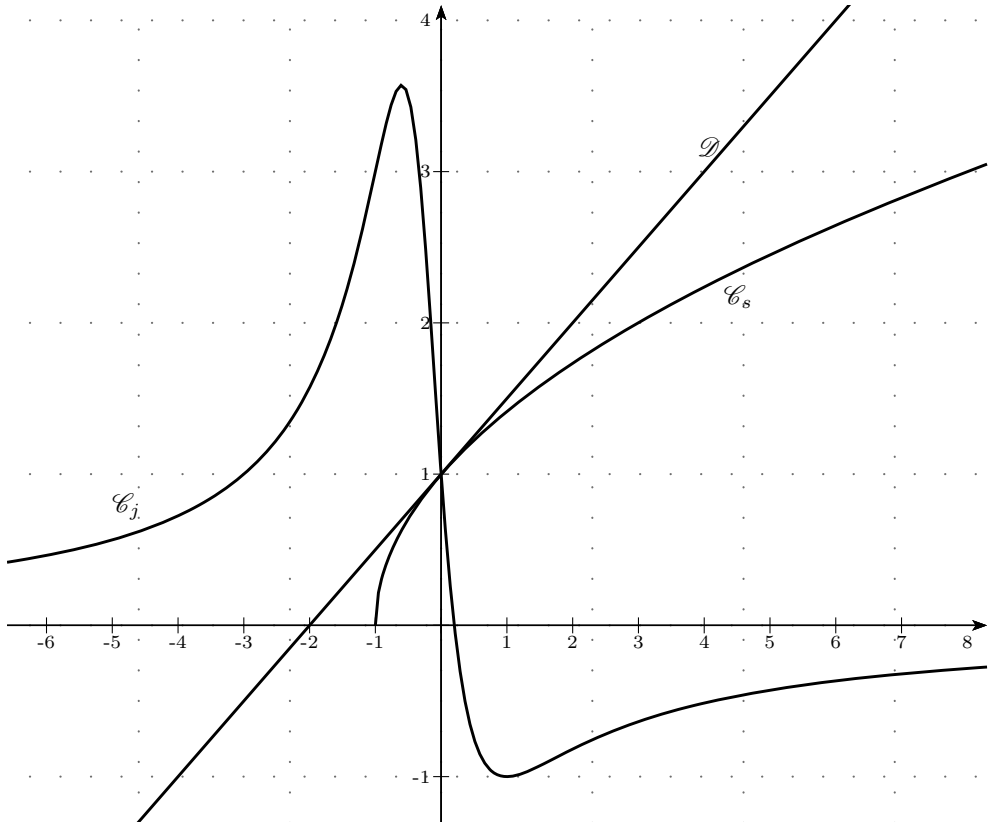
x	-1		$+\infty$
$s'(x)$	‖	$+$	
s	0	↗	

CORRIGÉS

6. On a $s(0) = 1$ et $s'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$ d'où l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_s$ au point d'abscisse 0 : $\mathscr{D} : y = s'(0)(x-0) + s(0) = \frac{1}{2}x + 1$.

7. Soit $x \geqslant -1$. On a
$\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2} \overset{tous \geqslant 0}{\iff} \sqrt{1+x}^2 \leqslant (1+\frac{x}{2})^2 \iff 1 + x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{4}$
$\iff \frac{x^2}{4} \geqslant 0$ ce qui est toujours vrai.
Rq : on peut aussi montrer que la fonction $s(x) - (1 + \frac{x}{2})$ admet 0 pour maximum en la dérivant mais cela est plus délicat.
Ainsi, pour $x \in I$, $s(x) \leqslant \frac{1}{2}x + 1$ et la courbe $\mathscr{C}_s$ est toujours située en dessous de sa tangente $\mathscr{D}$.

8. Voici les courbes dans un graphique adapté.



9. Votre professeur de lettres se fera certainement un plaisir de corriger votre devoir d'invention.

Devoir n° 7

À LA SUITE

Ce devoir est associé au chapitre V, *Généralités sur les suites numériques.*

Exercice 1 Suites *géométriques*

OA_0A_1 est un triangle rectangle isocèle en A_0 tel que $A_0A_1 = 1$. On construit un point A_2 tel que OA_1A_2 est rectangle en A_1 et $A_1A_2 = 1$ puis un point A_3 tel que OA_2A_3 est rectangle en A_2 et $A_2A_3 = 1$ et ainsi de suite.
On appelle u_n la distance OA_n.

1. Faire une figure succincte.
2. Déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.
3. Établir une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.
4. Conjecturer
   (a) l'expression de u_n en fonction de n ;
   (b) le nombre de points A_n qu'il faudra construire pour obtenir un triangle dont la longueur de l'hypoténuse dépasse 10.

Exercice 2 Foire à la suite

On pose $a_n = 10 - 4(n+2)\ \forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 7.\pi^{n-2}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$,

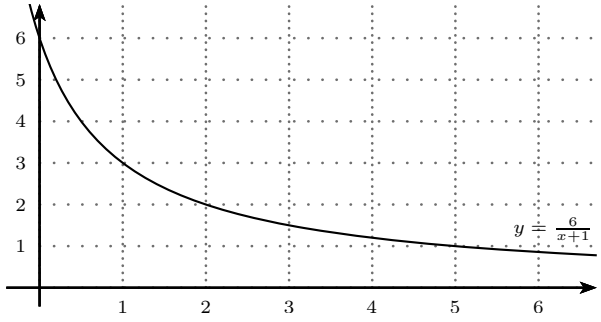
$c_n = -3n^2 + 2n + 5\ \forall n \in \mathbb{N}$, $(d_n)_{\mathbb{N}^*} : \begin{cases} d_1 = 2 \\ d_{n+1} = \dfrac{(n+1)d_n + n - 1}{2n}, \end{cases}$

$(e_n)_{\mathbb{N}} : \begin{cases} e_0 = 0 \\ e_{n+1} = \dfrac{6}{e_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$ $(f_n)_{\mathbb{N}} : \begin{cases} f_0 = 1 \\ f_{n+1} = -\dfrac{2}{3} f_n + 5, \ \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$

$g_n = \dfrac{6}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ et $(h_n)_{\mathbb{N}} : \begin{cases} h_0 = -1 \\ h_{n+1} = \sqrt{2h_n + 3}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

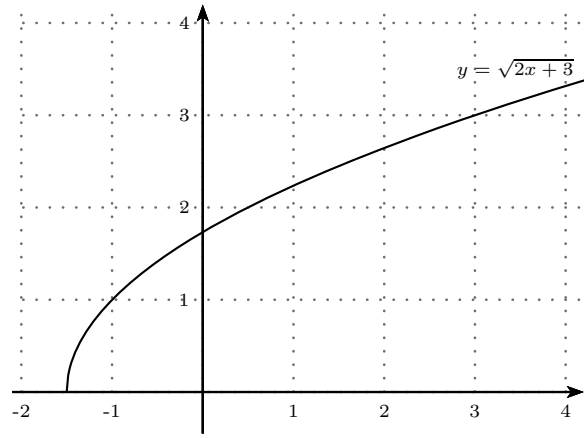
1. Déterminer les quatre premiers termes des suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$, $(c_n)_{\mathbb{N}}$, $(d_n)_{\mathbb{N}^*}$, $(e_n)_{\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{\mathbb{N}}$.
2. Étudier les variations des suites $(a_n)_{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$, $(g_n)_{\mathbb{N}}$, $(c_n)_{\mathbb{N}}$
3. Représenter les premiers termes des suites suivantes.

$(e_n)_{\mathbb{N}}$:
$\begin{cases} e_0 = 0 \\ e_{n+1} = \dfrac{6}{e_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

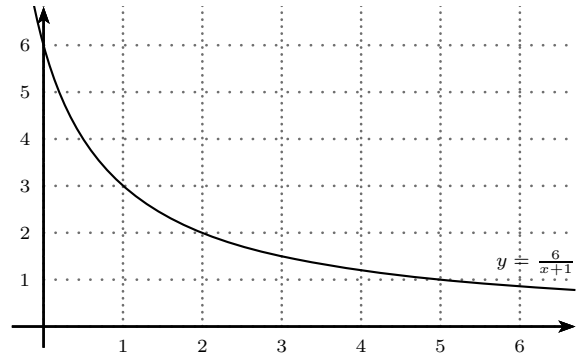


EXERCICES

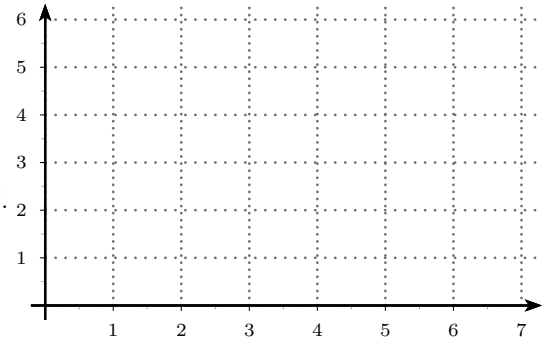
$(h_n)_{\mathbb{N}}$:
$\begin{cases} h_0 = -1 \\ h_{n+1} = \sqrt{2h_n + 3}\,, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$



$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \dfrac{6}{n+1}\,.$



$(f_n)_{\mathbb{N}}$:
$\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_{n+1} = -\dfrac{2}{3}\, f_n + 5\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$



Bonus Cette fois-ci, je vous exhorte à écouter les émissions d'Étienne Klein, les samedis après-midi sur France Culture :

www.franceculture.fr/emissions/la-conversation-scientifique.

La conversation scientifique est un moment de débats et d'échanges autour de la science mais aussi de la philosophie, la culture et les arts, l'histoire, la géographie, la nature,... et tout ceci est curieux, amusant, passionnant,... Bref, intelligent.

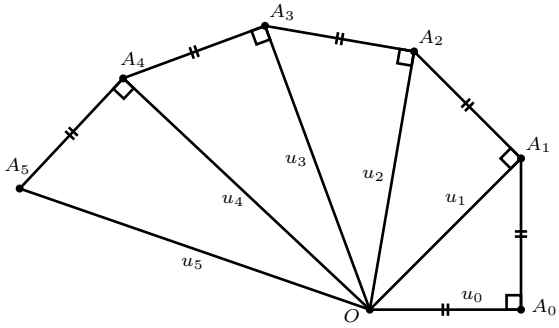
En effet, bien que physicien, Étienne Klein est quelqu'un de très bien : il pratique l'alpinisme.

Corrigé du devoir n° 7

À LA SUITE

Exercice 1 Suites *géométriques*

1. Voici la figure.



2. D'après le théorème de Pythagore, on a
$u_0 = OA_0 = 1, \quad u_1 = OA_1 = \sqrt{OA_0^2 + A_0A_1^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$
$u_2 = OA_2 = \sqrt{OA_1^2 + A_1A_2^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
et $\quad u_3 = OA_3 = \sqrt{OA_2^2 + A_2A_3^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$

3. Le même Pythagore permet d'affirmer que
$u_{n+1} = OA_{n+1} = \sqrt{OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2} = \sqrt{u_n^2 + 1}.$

4. (a) À partir des résultats précédents, on peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+1}$.

   (b) Puisque $\sqrt{n+1} \geqslant 10 \iff n+1 \geqslant 100 \iff n \geqslant 99,$ il faudrait alors construire 101 points (en comptant O et A_0) pour obtenir un triangle dont la longueur de l'hypoténuse dépasse 10.

Exercice 2 Foire à la suite

1. $(a_n)_{\mathbb{N}}$: On a $\quad a_0 = 10 - 4(0+2) = 2, \quad a_1 = 10 - 4(1+2) = -2,$
$a_2 = 10 - 4(2+2) = -6 \quad$ et $\quad a_3 = 10 - 4(3+2) = -10.$

   $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$: On a $\quad b_1 = 7.\pi^{1-2} = 7\pi^{-1} = \frac{7}{\pi}, \quad b_2 = 7.\pi^{2-2} = 7\pi^0 = 7,$
$b_3 = 7.\pi^{3-2} = 7\pi \quad$ et $\quad b_4 = 7.\pi^{4-2} = 7\pi^2.$

   $(c_n)_{\mathbb{N}}$: On a $\quad c_0 = -3 \times 0^2 + 2 \times 0 + 5 = 5, \quad c_1 = -3 \times 1^2 + 2 \times 1 + 5 = 4,$
$c_2 = -3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 5 = -3 \quad$ et $\quad c_3 = -3 \times 3^2 + 2 \times 3 + 5 = -16.$

   $(d_n)_{\mathbb{N}^*}$: On a $\quad d_1 = 2, \quad d_2 = d_{1+1} = \frac{(1+1)d_1+1-1}{2\times 1} = 2,$
$d_3 = d_{2+1} = \frac{(2+1)d_2+2-1}{2\times 2} = \frac{7}{4} \quad$ et $\quad d_4 = d_{3+1} = \frac{(3+1)d_3+3-1}{2\times 3} = \frac{3}{2}.$

CORRIGÉS

$(e_n)_{\mathbb{N}}$: On a $e_0 = 0$, $e_1 = \frac{6}{e_0+1} = \frac{6}{0+1} = 6$, $e_2 = \frac{6}{e_1+1} = \frac{6}{6+1} = \frac{6}{7}$ et $e_3 = \frac{6}{e_2+1} = \frac{6}{6/7+1} = \frac{42}{13}$.

$(f_n)_{\mathbb{N}}$: On a $f_0 = 1$, $f_1 = -\frac{2}{3} f_0 + 5 = \frac{13}{3}$, $f_2 = -\frac{2}{3} f_1 + 5 = \frac{19}{9}$ et $f_3 = -\frac{2}{3} f_2 + 5 = \frac{97}{27}$.

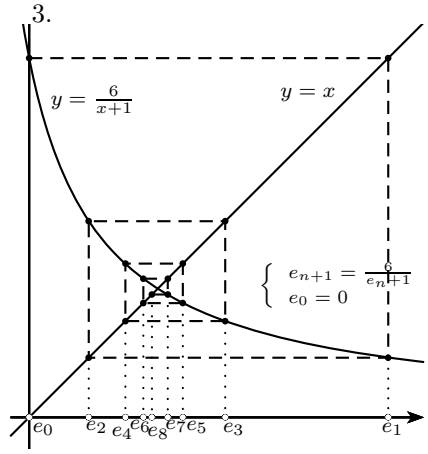
2. $(a_n)_{\mathbb{N}}$: Soit $n \in \mathbb{N}$. $a_{n+1} - a_n = (10 - 4(n+1+2)) - (10 - 4(n+2)) = -4 < 0$ donc $a_{n+1} < a_n$ et $(a_n)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

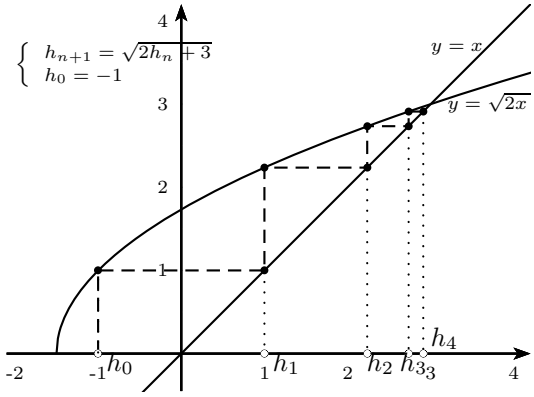
$(b_n)_{\mathbb{N}^*}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7.\pi^{n+1-2}}{7.\pi^{n-2}} = \pi^{n+1-2-n+2} = \pi > 1$.
Puisque $b_n > 0$, $b_{n+1} > b_n$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

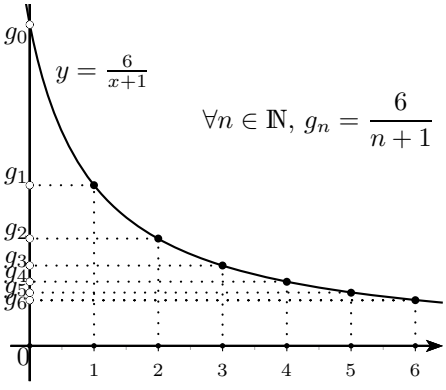
$(g_n)_{\mathbb{N}}$: Soit $n \in \mathbb{N}$. $g_{n+1} - g_n = \frac{6}{n+1+1} - \frac{6}{n+1} = \frac{6(n+1)-6(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-6}{(n+2)(n+1)} < 0$ donc $g_{n+1} < g_n$ et $(g_n)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

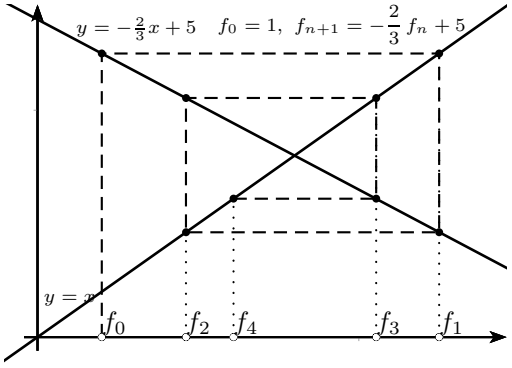
$(c_n)_{\mathbb{N}}$: On a $c_n = f(n)$ pour $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$, polynôme du second degré de maximum $(-3 < 0)$ atteint en $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$ donc (c_n) est strictement décroissante (tout comme f) à partir du rang 1. Puisque $c_0 > c_1$, $(c_n)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3.









Devoir n° 8

LIEUX PRODUITS

Ce devoir est associé au chapitre VI, *Produit scalaire*.

Exercice

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A.
On donne $AB = 5$ et $BC = 6$.
Soient I le milieu du segment $[BC]$ et D le symétrique de A par rapport au point I.

1. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.
   (b) Montrer que $AD = 8$.
   (c) En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$.
2. Si M et N sont deux points du plan, on nomme M' et N' leur projeté orthogonal sur la droite (BC).
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IM} = 12$.
   (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{B}$ des points N du plan tels que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AN} = -24$.

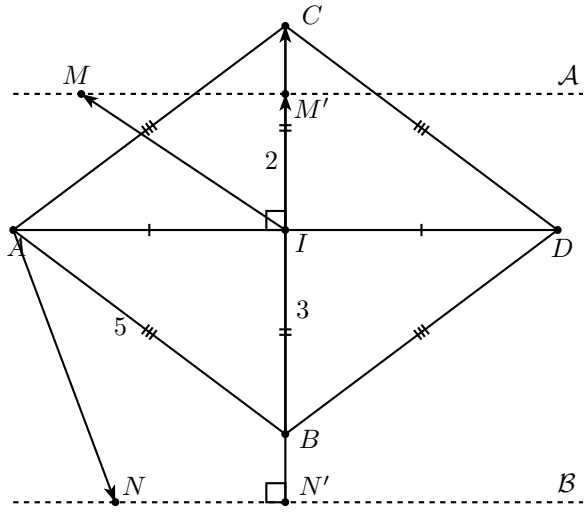
Bonus

Puisque vous y pensez déjà, je vous conseille de rajouter une ligne au texto que vous allez envoyer au Père Noël : *Théorème vivant* de Cédric Villani. Vous pouvez aussi le trouver en bibliothèque, faire un 50-50 en le partageant avec votre voisine, l'emprunter à un ami, faire un appel sur les réseaux sociaux ou user de tout autre moyen caritatif et légal mais vous devez impérativement lire ce chef-d'œuvre au moins une fois dans votre vie.

Corrigé du devoir n° 8

LIEUX PRODUITS

Exercice



1. (a) ABC étant isocèle, la médiane (AI) est la médiatrice de $[BC]$ et D est le symétrique de A par rapport à la droite (BC). Par conservation des longueurs AC et AB, $ABDC$ est un quadrilatère non croisé dont les quatre côtés ont même longueur. C'est un losange.

   (b) Le théorème de Pythagore dans le triangle ABI, rectangle en I affirme que $AI^2 = AB^2 - IB^2 = 5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 16$ et donc $AD = 2\,AI = 2 \times 4 = 8$.

   (c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2) = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{AD}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2)$
   $= \frac{1}{2}(8^2 - 2 \times 5^2) = 7.$

2. (a) Puisque M et A se projettent orthogonalement en M' et I sur la droite (BC),
   $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 12 \iff \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IM'} = 12 \iff BC \,.\, IM' \,.\, \cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{IM'}) = 12$
   $\iff IM' = \frac{12}{6} = 2$ et $\cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{IM'}) = 1.$
   Autrement dit, M' est situé sur la droite (BC), à une distance 2 du point I en direction de C et l'ensemble $\mathcal{A}$ est la droite perpendiculaire à (BC) passant par M' puisque M' doit être le projeté orthogonal de M sur (BC).

   (b) De même, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AN} = -24 \iff BC \,.\, IN' \,.\, \cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{IN'}) = -24$
   $\iff IN' = \frac{24}{6} = 4$ et $\cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{IN'}) = -1.$
   N' est situé sur la droite (BC), à une distance 4 du point I en direction de B et l'ensemble $\mathcal{B}$ est la droite perpendiculaire à (BC) passant par N'.

Devoir n° 9

BELLES SUITES

Ce devoir est associé au chapitre VII, *Compléments sur les suites numériques*.

Exercice 1 Suite de luxe

Ma montre est une magnifique Relax helvète à aiguilles avec un système ultra-sophistiqué : plus de pile, pas de capteur solaire portatif, pas de bouton à tourner. Le seul mouvement de mon bras suffit à la remonter. Sauf que je ne bouge pas assez, assis devant mon ordinateur à taper des sujets de mathématiques jour et nuit, à m'abimer les yeux, m'user le bout des doigts, fragiliser mes chaises, hurler après mes enfants, maudire mes élèves,... Bref, ma montre retarde. Voici donc pourquoi je mets autant de temps pour corriger les copies des élèves qui me sont confiés.
Le 31 décembre dernier, j'en ai profité pour la remettre à l'heure et le lendemain, elle perdait déjà 5 secondes. Depuis, elle perd quotidiennement 3 s de plus que la veille. Ainsi, le 2 janvier, elle perd encore 8 s et retarde alors globalement de 13 s.

1. Expliciter la suite $(t_n)_{\mathbb{N}^*}$ donnant le temps de retard sur la veille de ma superbe Relax, en secondes, le n-ième jour de l'année. Quelle est sa nature (à cette suite, pas à votre professeur) ?
2. Exprimer $(t_n)_{\mathbb{N}^*}$ en fonction de n.
3. Quel retard ma rutilante Relax prendra-t-elle encore aujourd'hui 24 mars (par rapport à hier) ?
4. Calculer le retard global de ma splendide Relax aujourd'hui, depuis que je l'ai remise à l'heure ?
5. Quand ma satanée Relax sera-t-elle à nouveau à l'heure ?

Exercice 2 Suite laborieuse

Marie-Edwige est élève en 1re. Le week-end dernier, elle a effectué un bilan horaire de l'année scolaire et s'est rendue compte que, chaque semaine, elle a travaillé une demi-heure de plus en mathématiques que la semaine précédente afin de comprendre et maîtriser le cours de son jeune et sémillant professeur.
Marie-Edwige se souvient aussi qu'elle n'a travaillé que deux heures durant les quelques jours de la semaine de la rentrée de septembre, numérotée 0, et qu'elle a été déçue par le résultat de sa première évaluation.

1. Expliciter la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ donnant le temps, en heures, de travail en mathématiques que Marie-Edwige a effectué la n-ième semaine pleine de l'année.
   Quelle est sa nature (à la suite, pas Marie-Edwige) ?
2. Exprimer h_n en fonction de n.

3. Sachant que le conseil de classe aura lieu à la fin de la quarantième semaine pleine de l'année scolaire, combien de temps Marie-Edwige travaillera-t-elle en mathématiques en fin d'année ?
4. Calculer le nombre d'heures de travail mathématique que Marie-Edwige aura effectué en cette année de 1re.

Exercice 3 Suites formiques

On étudie l'évolution de la population de fourmis de deux étranges fourmilières F_1 et F_2. Chaque mois, 20 % des fourmis de F_1 passent en F_2 et 30 % des fourmis de F_2 passent en F_1.
On notera u_n et v_n le nombre total de milliers de fourmis le mois n respectivement dans les fourmilières F_1 et F_2. Le nombre initial de fourmis dans les fourmilères est donné par $u_0 = 320$ milliers et $v_0 = 180$ milliers.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{10}v_n$.
   (b) Déterminer de même l'expression de v_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
2. On pose $s_n = u_n + v_n$ et $t_n = -2u_n + 3v_n$ pour tout entier n.
   (a) Montrer que la suite $(s_n)_{\mathbb{N}}$ est constante et donner la valeur de cette constante.
   (b) Montrer que la suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique et en donner les caractéristiques.
3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 20\left(\frac{1}{2}\right)^n + 300$ et $v_n = 200 - 20\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
4. (a) Déterminer la valeur de la limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (b) En déduire la valeur des limites $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.
5. Qu'en déduire pour les fourmilières F_1 et F_2 ?
6. Existe-t-il une fourmi de 18 m avec un chapeau sur la tête ?

Bonus Au cours des prochaines vacances, vous allez certainement avoir besoin de vous détendre. Alors je vous conseille la lecture de la trilogie d'Hortense de Jacques Roubaud, en commençant par *La belle Hortense*. Bien que mathématicien, Jacques Roubaud est un individu très amusant. Membre de l'Oulipo et donc adepte de l'écriture avec contraintes, il nous donne à lire un roman plein de trouvailles, intelligemment écrit et très divertissant.

Corrigé du devoir n° 9

BELLES SUITES

Exercice 1 Suite de luxe

1. Puisque ma Relax perd tous les jours 3 secondes de plus que ce qu'elle a perdu la veille, le temps de retard pris le jour $n+1$ peut s'exprimer par : $t_{n+1} = t_n + 3$ et la suite (t_n) est arithmétique de raison 3. Et puisqu'elle a perdu 5 secondes le premier jour, on a $t_1 = 5$ au premier janvier.
2. Ainsi, pout tout entier $n \neq 0$, $t_n = t_1 + (n-1)r = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$.
3. En cette année non bissextile, le 24 mars est le $31+28+24 = 83^{\text{e}}$ jour de l'année et l'on a $t_{83} = 3 \times 83 + 2 = 251$.
   Ma montre perdra donc 251 secondes (4 min 11 s) rien que pour aujourd'hui.
4. Puisque $(t_n)_{\mathbb{N}^*}$ est arithmétique, on a
   $S_{83} = t_1 + t_2 + \ldots + t_{83} = 83\,\frac{t_1+t_{83}}{2} = 83 \times \frac{5+251}{2} = 10\,624\,\text{s}$.
   Ma Relax retarde donc de 2 h 57 min 4 s.
5. Ma satanée montre Relax à aiguilles sera de nouveau à l'heure lorsqu'elle aura retardé de 12 h.
   On cherche donc $n \geqslant 1$ tel que $S_n = 12 \times 3\,600\,\text{s} \iff n\frac{t_1+t_n}{2} = 43\,200$
   $\iff n(5+3n+3) - 86400 = 0 \iff 3n^2 + 8n - 86400 = 0 \iff n \gtrsim 168$.
   Ma montre sera de nouveau à l'heure au cours du 169e jour de cette année : le 18 juin.

Exercice 2 Suite laborieuse

1. Puisque Marie-Edwige travaille une demi-heure de mathématiques de plus chaque semaine, on peut définir la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ donnant le temps, en heures, de travail en mathématiques de Marie-Edwige la n-ième semaine de l'année par $(h_n)_{\mathbb{N}} : \begin{cases} h_0 = 2, \\ h_{n+1} = h_n + \frac{1}{2}\,, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$ $(h_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.
2. Ainsi, pout tout entier n, $h_n = h_0 + nr = \frac{1}{2}\,n + 2$.
3. On a $h_{40} = \frac{1}{2} \times 40 + 2 = 22$. Marie-Edwige travaillera donc 22 heures en mathématiques la dernière semaine pleine de l'année.
4. Puisque $(h_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique, on a
   $h_0 + h_1 + \ldots + h_{40} = (40+1)\,\frac{h_0+h_{40}}{2} = 41 \times \frac{2+22}{2} = 492$.
   Marie-Edwige aura donc effectué 492 heures de travail en mathématiques en cette année de 1re.

Exercice 3 Suites formiques

1. Chaque mois, 20 % des fourmis de F_1 (*i.e.* $\frac{1}{5}\,u_n$) passent en F_2 donc 80 % des fourmis de F_1 (*i.e.* $\frac{4}{5}\,u_n$) y restent. Par ailleurs, 30 % des fourmis de F_2 (*i.e.* $\frac{3}{10}\,v_n$)

CORRIGÉS

passent en F_1 donc 70 % des fourmis de F_2 (*i.e.* $\frac{7}{10}\,v_n$) y restent.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a
$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{10}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{7}{10}v_n.$$

2. On pose $s_n = u_n + v_n$ et $t_n = -2u_n + 3v_n$ pour tout entier n.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= (u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) = \tfrac{4}{5}u_n + \tfrac{3}{10}v_n + \tfrac{1}{5}u_n + \tfrac{7}{10}v_n - u_n - v_n \\ &= (\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{5} - 1)\,u_n + (\tfrac{3}{10} + \tfrac{7}{10} - 1)\,v_n = 0 \end{aligned}$$
   donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$ et la suite $(s_n)_{\mathbb{N}}$ est constante, égale à $s_0 = u_0 + v_0 = 500$ milliers.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{aligned} t_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3v_{n+1} = -2(\tfrac{4}{5}u_n + \tfrac{3}{10}v_n) + 3(\tfrac{1}{5}u_n + \tfrac{7}{10}v_n) \\ &= (-\tfrac{8}{5} + \tfrac{3}{5})\,u_n + (-\tfrac{6}{10} + \tfrac{21}{10})\,v_n = -u_n + \tfrac{3}{2}\,v_n = \tfrac{1}{2}(-2\,u_n + 3\,v_n) = \tfrac{1}{2}\,t_n. \end{aligned}$$
   Ainsi, la suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $t_0 = -2u_0 + 3v_0 = -100$.

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} &\begin{cases} s_n = u_n + v_n = 500 \\ t_n = -2u_n + 3v_n = -100\,\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} v_n = 500 - u_n \\ -2u_n + 3(500 - u_n) = -100\,\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} u_n = -\frac{1}{5}\left(-100\,\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \times 500\right) \\ v_n = 500 - u_n \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} u_n = 20\,\left(\frac{1}{2}\right)^n + 300 \\ v_n = 500 - \left(20\,\left(\frac{1}{2}\right)^n + 300\right) = 200 - 20\,\left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{cases} \end{aligned}$$

4. (a) Puisque $\frac{1}{2} \in\,]-1\,;1\,[$, la suite géométrique $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0 : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

   (b) Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} [20\,\left(\frac{1}{2}\right)^n + 300] = 20 \times 0 + 300 = 300$
   et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} [200 - 20\,\left(\frac{1}{2}\right)^n] = 200 - 20 \times 0 = 200$.

5. Les fourmilières F_1 et F_2 ont donc une population de fourmis tendant respectivement vers 300 et 200 milliers.

6. Une fourmi de 18 mètres avec un chapeau sur la tête, ça n'existe pas ! Et pourquoi pas ? Demandez donc à Robert Desnos.

Bonus Surprenant, amusant, délicieux, fin, jubilatoire,... À relire !

Devoir n° 10

APAPOU ?

Ce devoir est associé au chapitre VIII, *Probabilités conditionnelles*.

Chez les papous, il y a des papous papas et des papous pas papas. Comme partout, il y a des papous à poux et des papous pas à poux. Ce qui complique tout, c'est qu'il y a aussi des poux papas et des poux pas papas. Et pour combler le tout, des poux à papous et des poux pas à papous.
On ne considérera que les mâles et l'on désignera par :

D : « le papou est papa », O : « le papou est à poux »,
F : « le pou est papa », A : « le pou est à papou ».

1. (a) Énoncer deux phrases, l'une vraie, l'autre non, comportant un nombre conséquent de *pa* et de *pou*.
   (b) Traduire $\overline{D}OF$ puis « le papou papa est à poux pas papas ».
   (c) Que dire de $D\overline{OF}A$?
2. Construire quatre arbres différents modélisant la situation suivant que l'on choisit un papou ou un pou au hasard.
3. On sait que 2 % des papous sont à poux, comme nous tous. 85 % des papous sont papas et alors que 96 % des poux le sont. Parmi les papas, 1,5 % des papous sont à poux et 1,8 % des poux sont à papous.
   Calculer la proportion de papous pas papas à poux parmi les papous pas papas.
4. De plus, 1,23 % des papous sont des papous papas à poux papas.
   En déduire la proportion de papous papas à poux pas papas parmi les papous papas à poux.
5. On observe que 95,8 % des poux de papous pas papas sont papas. Quel pourcentage de papous ne sont pas papas à poux pas papas ?
6. Compléter le second arbre « papou ».
7. Il s'avère que 1,9 % des poux sont à papous. En particulier, 1,54 % des poux sont papas à papous papas.
   (a) Compléter le plus possible les arbres « à poux ».
   (b) Quelle information manque-t-il pour compléter les deux arbres « à poux » ?
8. Les paternités des papous à poux et des poux portés par les papous sont-elles indépendantes ?
9. Lire le gag n° 464 dans l'album n° 6 « Des gaffes et des dégâts » de Gaston Lagaffe tout en écoutant les podcasts de l'émission « Des Papous dans la tête », autrefois radiodiffusée sur France Culture.

Corrigé du devoir n° 10

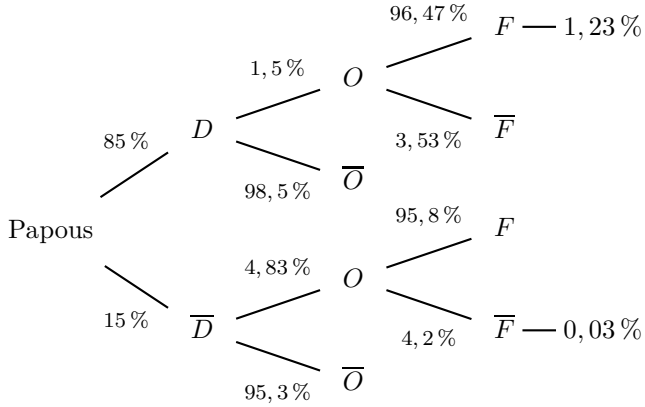
APAPOU ?

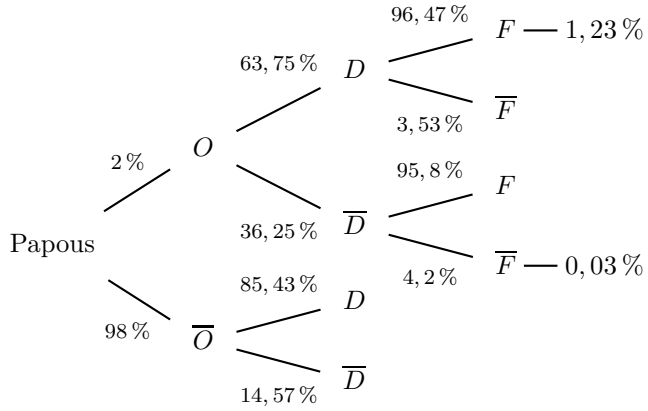
1. (a) • Les papous papas à poux pas papas sont des papas, des papous et sont à poux : Vrai.
   • Les poux papas à papous papas sont des papas papous à poux pas papas : Faux.

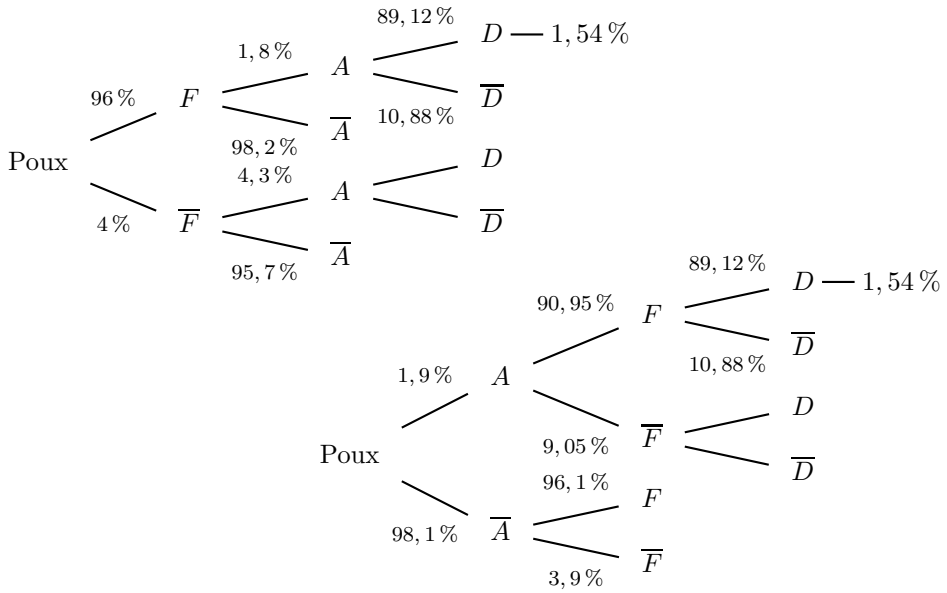
   (b) • $\overline{D}OF$: C'est un papou pas papa à poux papas.
   • « le papou papa est à poux pas papas » : $DO\overline{F}$.

   (c) $D\overline{OF}A$ n'existe pas car le papou n'est pas à poux mais ses poux ne sont pas papas mais à papous.

2. Voici quatre arbres modélisant la situation.







3. $P(O) = P(D \cap O) + P(\overline{D} \cap O)$
   donc $P_{\overline{D}}(O) = \frac{P(\overline{D} \cap O)}{P(\overline{D})} = \frac{P(O) - P(D \cap O)}{1 - P(D)} = \frac{0{,}02 - 0{,}85 \times 0{,}015}{0{,}15} \simeq 4{,}83\,\%$.

4. $P_{D \cap O}(\overline{F}) = 1 - P_{D \cap O}(F) = 1 - \frac{P(D \cap O \cap F)}{P(D \cap O)} = 1 - \frac{0{,}0123}{0{,}85 \times 0{,}015} = 100\,\% - 96{,}47\,\%$
   $= 3{,}53\,\%$.

5. $P_{\overline{D} \cap O}(F) = 0{,}958$ donc $P(\overline{D} \cap O \cap \overline{F}) = 0{,}15 \times 0{,}0483 \times 0{,}042 = 0{,}03\,\%$.

6. $P_O(D) = \frac{P(D \cap O)}{P(O)} = \frac{0{,}85 \times 0{,}015}{0{,}02} = 63{,}75\,\%$,
   $P_{\overline{O}}(D) = \frac{P(\overline{O} \cap D)}{P(\overline{O})} = \frac{0{,}85 \times 0{,}985}{0{,}98} = 85{,}43\,\%$,
   $P_{O \cap D}(F) = \frac{P(O \cap D \cap F)}{P(O \cap D)} = \frac{0{,}0123}{0{,}85 \times 0{,}015} = 96{,}47\,\%$,
   $P_{O \cap \overline{D}}(F) = \frac{P(O \cap \overline{D} \cap F)}{P(O \cap \overline{D})} = \frac{0{,}15 \times 0{,}0483 \times 0{,}958}{0{,}02 \times 0{,}3625}$.

7. (a) $P_{F \cap A}(D) = \frac{P(F \cap A \cap F)}{P(F \cap A)} = \frac{0{,}0154}{0{,}96 \times 0{,}018} = 89{,}12\,\%$,
   $P_{\overline{F}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(A) - P(A \cap F)}{1 - P(F)} = \frac{0{,}019 - 0{,}96 \times 0{,}018}{0{,}04} = 4{,}3\,\%$,
   $P_A(F) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}96 \times 0{,}018}{0{,}019} = 90{,}95\,\%$,
   $P_{\overline{A}}(F) = \frac{P(F \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}96 \times 0{,}982}{0{,}981} = 96{,}10\,\%$.

   (b) $P(\overline{F} \cap A \cap D)$ ou $P_{\overline{F} \cap A}(\overline{D})$ par exemple.

8. On a $P(O \cap F) = P(D \cap O \cap F) + P(\overline{D} \cap O \cap F)$
   $= 0{,}85 \times 0{,}015 \times 0{,}9647 + 0{,}15 \times 0{,}0483 \times 0{,}958 = 1{,}92\,\%$
   d'où $P_O(F) = \frac{P(F \cap O)}{P(O)} = \frac{0{,}0192}{0{,}02} = 96{,}2\,\% \neq 96{,}47\,\% = P_{O \cap D}(F)$
   et $P_{O \cap F}(D) = \frac{P(O \cap F \cap D)}{P(O \cap F)} = \frac{0{,}0123}{0{,}0192} = 63{,}93\,\% \neq 63{,}75 = P_O(D)$.
   Les paternités des papous à poux et des poux portés par les papous ne sont donc pas indépendantes.

9. Fous rires garantis.

Devoir n° 11

IMPROBABLES PETITS POIS

Ce devoir est associé au chapitre VIII, *Probabilités conditionnelles.*

Exercice

Les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A :

M. Haveraile est daltonien. Comme les 8% d'hommes atteints de cette même particularité, cela ne lui causait généralement que peu d'inconvénients avant qu'un événement tout autant prévisible qu'irréparable ne survienne... M. Haveraile est grossiste de métier et fait commerce de petits pois. Or, suite à une nouvelle manipulation malencontreuse du fabriquant universel et hégémonique des graines de pois pour la zone "Antarctique", un phénomène surprenant est apparu : certains petits pois sont rouges !

M. Haveraile achète ses boîtes de petits pois chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur Arand, les autres chez le fournisseur Bardot.

10 % des boîtes provenant du fournisseur Arand contiennent des petits pois rouges et 20 % de celles provenant de chez Bardot en contiennent aussi.

On prélève au hasard une boîte du stock de M. Haveraile et l'on considère :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur Arand » ;
- événement B : « la boîte provient du fournisseur Bardot » ;
- événement R : « la boîte contient des petits pois rouges ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. (a) Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \overline{R}$?
   (b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucun pois rouge est égale à $0,88$.
3. On constate que la boîte prélevée contient des petits pois rouges.
   Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur Bardot ?
4. Les événements B et R sont-ils indépendants ?

Partie B :

Le gestionnaire d'un lieu de restauration collective et néanmoins comestible achète trois boîtes chez M. Haveraile. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de trois boîtes avec remise.

1. Calculer la probabilité que les trois boîtes ne contiennent aucun petit pois rouge.

2. Calculer la probabilité qu'exactement deux boîtes ne contiennent aucun petit pois rouge.
3. Calculer la probabilité qu'exactement une boîte ne contienne aucun petit pois rouge.
4. Calculer la probabilité que toutes les boîtes contiennent des petits pois rouges.



Bonus Let's play Jeopardy : Flatland
Hint : It's a book, not a song.

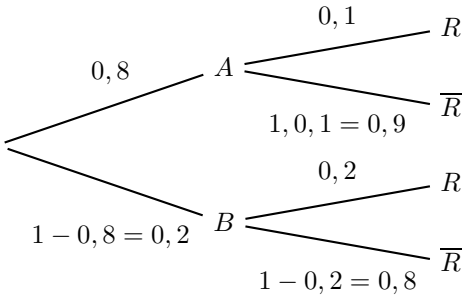
Corrigé du devoir n° 11

IMPROBABLES PETITS POIS

Exercice

Partie A :

1. M. Haveraile a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des petits pois rouges ou non. On a donc un arbre 2×2 :



2. (a) En suivant la 4e branche, $p\left(B \cap \overline{R}\right) = p(B) \times p_B\left(\overline{R}\right) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$.

   (b) On calcule de même $p\left(A \cap \overline{R}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{R}\right) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$.

   $\{A\ ;\ B\}$ étant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne : $p\left(\overline{R}\right) = p\left(A \cap \overline{R}\right) + p\left(B \cap \overline{R}\right) = 0,72 + 0,16 = 0,88$.

3. Il faut donc calculer $p_R(B) = \dfrac{p(R \cap B)}{p(R)} = \dfrac{p(B)p_B(R)}{p(R)}$.

   On a vu que $p\left(\overline{R}\right) = 0,88$, donc $p(R) = 1 - p\left(\overline{R}\right) = 0,12$.

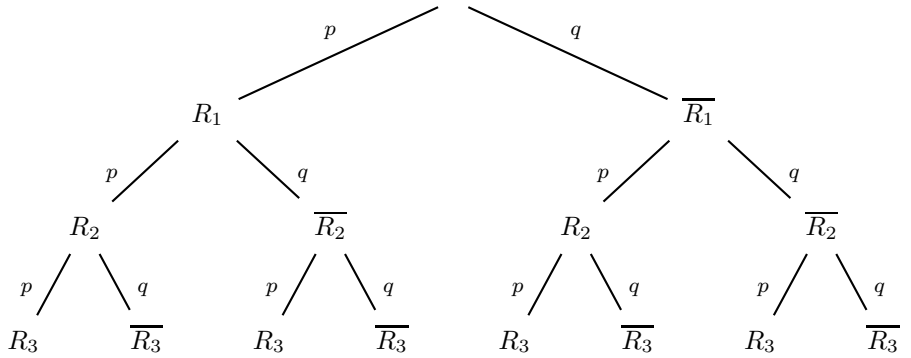
   Donc $p_R(B) = \dfrac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \simeq 0,33$ au centième près.

4. Puisque $P_R(B) \neq P(B)$, les événements R et B ne sont pas indépendants.

Partie B :

On note $p = P(R)$ et $q = P(\overline{R}) = 1 - p$. En achetant trois boîtes chez M. Haveraile, on obtient l'arbre suivant.

CORRIGÉS



1. Les événements R_i étant supposés indépendants, la probabilité que les trois boîtes ne contiennent aucun petit pois rouge est
   $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}) = P(\overline{R_1})P(\overline{R_2})P(\overline{R_3}) = q^3 = 0,88^3 \simeq 0,681.$
2. Exactement trois chemins mènent à deux boîtes sans pois rouge : les rouges peuvent être seulement dans la première, seulement dans la deuxième ou seulement dans la troisième boîte. La probabilité qu'exactement deux boîtes ne contiennent aucun petit pois rouge est donc $pqq + qpq + qqp = 3pq^2 = 3 \times 0,12 \times 0,88^2 \simeq 0,279.$
3. Exactement trois chemins mènent à une boîtes sans pois rouge : ce peut être seulement la première, seulement la deuxième ou seulement la troisième boîte. La probabilité qu'exactement une boîte ne contienne aucun petit pois rouge est donc $qpp + pqp + ppq = 3p^2q = 3 \times 0,12^2 \times 0,88 \simeq 0,038.$
4. La probabilité que les trois boîtes contiennent des petit pois rouges est
   $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P(R_2)P(R_3) = p^3 = 0,12^3 \simeq 0,002$
   $(= 1 - 0,681 - 0,279 - 0,038).$

Bonus Flatland

Quel est le titre du livre publié en 1884 par Edwin Abbott Abbott dans lequel les personnages sont des figures géométriques – triangles isocèles, carrés, polygones, cercles... – qui, dans leur monde plat, en deux dimensions, sont très hiérarchisées et ont des coutumes et des croyances bien ancrées et où l'on crie à l'hérésie lorsqu'un modeste carré doté d'une conscience découvre la troisième dimension lors de l'apparition soudaine et invraisemblable d'une sphère, et qui, on l'aura compris, est tout à la fois critique de la rigidité de la société victorienne et texte fondateur de la science-fiction et aborde la question troublante de la possibilité d'une quatrième dimension spatiale et qui, bien que n'ayant pas de rapport avec un texte de Jacques Brel, vous est néanmoins conseillé avec insistance par votre professeur, d'autant plus qu'il ne coûte pas même trois euros ?

Devoir n° 12

La chaînette

Ce devoir est associé au chapitre IX, *Fonction exponentielle*.

Voici deux fonctions définies à l'aide de la fonction exponentielle :
le **cosinus hyperbolique** (**ch**) et le **sinus hyperbolique** (**sh**).
Pour tout réel x, on pose $\mathbf{ch}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{e^x + e^{-x}}}{\mathbf{2}}$ et $\mathbf{sh}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{e^x - e^{-x}}}{\mathbf{2}}$
et l'on note $\mathscr{C}_c$ et $\mathscr{C}_s$ leur représentation graphique dans un repère orthonormal.

Étude mathématique du cosinus et du sinus hyperboliques

1. (a) Étudier la parité des fonctions ch et sh. Qu'en déduire graphiquement ?
   (b) Étudier les variations de la fonction sh et préciser son signe.
   (c) Étudier les variations de la fonction ch.
2. Déterminer les équations réduites des tangentes respectives Δ_c et Δ_s aux courbes $\mathscr{C}_c$ et $\mathscr{C}_s$ aux points d'abscisse 0.
3. Tracer les courbes $\mathscr{C}_c$ et $\mathscr{C}_s$ ainsi que les tangentes Δ_c et Δ_s puis conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions ch et sh.
4. Vérifier que pour tout réel x, $\quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$. Que cela vous rappelle-t-il ?
5. Montrer que pour tout réel x, $\quad \mathrm{ch}(2x) = 2\,\mathrm{ch}^2(x) - 1 \quad$ et $\quad \mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)$.
   Que cela vous rappelle-t-il ?
6. On définit la tangente hyperbolique sur $\mathbb{R}$ par $\quad \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.
   Montrer que $\quad \mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$. Que cela vous rappelle-t-il ?

Une chaînette

On appelle *chaînette* une courbe d'équation $\quad y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a\,\mathrm{ch}(\frac{x}{a})$ où a est un réel non nul.

Une chaînette est la forme prise par un « fil » pesant, homogène, flexible, inextensible, suspendu entre deux points. Galilée pensait que c'était un arc de parabole mais en 1691, cinquante ans après sa mort, Leibniz, Bernoulli et Huygens ont indépendamment démontré qu'il n'en était rien.

C'est aussi la forme que prend une voûte formée de pierres jointives tenant par leur propre poids.

Agathe et Colette habitent le même quartier mais elles souhaitent pouvoir se parler encore plus facilement et décident donc de fabriquer un immense téléphone à gobelets entre deux grands poteaux distants de 400 m. Il leur suffirait alors de grimper au poteau et d'utiliser les gobelets pour entendre la douce voix de leur chère amie au bout du fil. Elles savent que différentes contraintes physiques imposent que l'angle entre le câble leur servant à communiquer et les poteaux, au niveau des accroches, soit de $\theta = 82^\circ$. Pour $x \in [-200\,;200]$, on note $f(x) = a\,\mathrm{ch}(\frac{x}{a}) + b$ où $y = f(x)$ est l'équation de la courbe formée par le câble dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $f'(200) = \dfrac{1}{\tan\theta}$.
2. En déduire, avec la calculatrice, une valeur approchée de a pour $\theta = 82^\circ$.
3. La règlementation impose que le câble surplombe le terrain d'une hauteur minimale de 6,5 m.
   Quelle doit être la hauteur minimale des accroches sur les poteaux ?
4. Peut-on avoir un angle « idéal » de 90° ?

Aussi haut que large

On cherche à savoir si l'on peut construire un arc de chaînette aussi haut que large et si oui, s'il existe plusieurs arcs d'une même chaînette ayant cette propriété.

On considère un arc de chaînette d'équation $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a\,\mathrm{ch}(\frac{x}{a})$ de largeur 2ℓ, centré autour de $x = 0$, pour $a > 0$.

1. Que vaut la flèche de l'arc (sa hauteur) ?
2. Soit $f(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2) - 2x$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.
   (a) Déterminer $f'(x)$, conjecturer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f'.
   (b) Justifier qu'il existe un unique $\ell_0 > 0$ tel que $f'(\ell_0) = 0$. Dresser le tableau de signes de f'.
   (c) Conjecturer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
   (d) Justifier qu'il existe un unique $\ell_1 \in\,]\,0\,;+\infty\,[$ tel que $f(\ell_1) = 0$.
3. Répondre au problème posé.



La *Gateway to the West*, édifiée à Saint Louis, Missouri, durant les années 1960, a une forme d'arc de chaînette.
Elle mesure 192 m de large pour 192 m de haut.

Corrigé du devoir n° 12

La chaînette

Pour tout réel x, on pose $\quad \operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad$ et $\quad \operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Étude mathématique du cosinus et du sinus hyperboliques

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   (a) On a $\quad \operatorname{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch}(x)$:
   le cosinus hyperbolique est une fonction paire. Son graphe $\mathscr{C}_c$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   On a $\quad \operatorname{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh}(x)$:
   le sinus hyperbolique est une fonction impaire. Son graphe $\mathscr{C}_s$ est donc symétrique par rapport à l'origine.

   (b) $\operatorname{sh}'(x) = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$
   qui est toujours strictement positif donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   De plus, $\operatorname{sh}(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$ donc sh est strictement négative sur $]-\infty\,;0\,[$, strictement positive sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

   (c) On a $\quad \operatorname{ch}'(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$
   donc ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. On a $\Delta_c : y = \operatorname{ch}'(0)(x-0) + \operatorname{ch}(0) = \operatorname{sh}(0)x + 1 = 1$
   et $\quad \Delta_s : y = \operatorname{sh}'(0)(x-0) + \operatorname{sh}(0) = \operatorname{ch}(0)x + 0 = x$.

3. Par observation graphique, on conjecture que
   $$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x))$
   $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) = \frac{2e^x}{2}\,\frac{2e^{-x}}{2} = e^{x-x} = 1.$
   Cela rappelle la formule fondamentale $\quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \quad$ non ?

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\quad 2\operatorname{ch}^2(x) - 1 = 2(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - 1 = \frac{2}{4}(e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x}) - 1$
   $2\operatorname{ch}^2(x) - 1 = \frac{1}{2}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 2) = \operatorname{ch}(2x)$
   et $\quad 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x) = 2\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}((e^x)^2 - (e^{-x})^2) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh}(2x).$
   Cela rappelle les formules de duplication $\quad \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
   et $\quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x), \quad$ non ?

6. On a $\quad \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'\operatorname{ch} - \operatorname{sh}\operatorname{ch}'}{\operatorname{ch}^2} = \frac{\operatorname{ch}\operatorname{ch} - \operatorname{sh}\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2}{\operatorname{ch}^2} - \frac{\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2(x).$
   Cela rappelle les formules de dérivation $\quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x), \quad$ non ?

CORRIGÉS

Une chaînette Pour $x \in [\,-200\,;200\,]$, on note $f(x) = a\,\mathrm{ch}(\frac{x}{a}) + b$.

1. $f'(200)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'accroche du câble et, dans le repère orthonormé choisi, c'est aussi la tangente de l'angle entre cette droite et l'horizontale c.-à-d. l'inverse de la tangente de l'angle θ entre cette droite et la verticale ($\frac{o}{a}$ devient $\frac{a}{o}$). Ainsi, on a bien $f'(200) = \dfrac{1}{\tan\theta}$.
2. On a $f'(x) = \big(a\,\mathrm{ch}(\frac{x}{a}) + b\big)' = a(\frac{x}{a})'\mathrm{ch}'(\frac{x}{a}) = a\frac{1}{a}\mathrm{sh}(\frac{x}{a}) = \mathrm{sh}(\frac{x}{a})$ et l'on cherche a tel que $\mathrm{sh}(\frac{200}{a}) = \frac{1}{\tan(82^\circ)}$.
   Un tableau de valeur de $\mathrm{sh}(\frac{200}{x})$ nous donne $a \simeq 1428$.
3. $f(200)$ est la hauteur d'accroche du câble aux poteaux et $f(0) = a+b$ la hauteur minimale du câble entre les poteaux. On obtient alors $a + b = 6,5$ donc $b = 6,5 - a$ et $f(200) = a\,\mathrm{ch}(\frac{200}{a}) + 6,5 - a \simeq 20,5\,\mathrm{m}$ de hauteur minimale d'accroche.
4. On ne peut bien évidemment avoir un angle « idéal » de 90° puisque le câble sera toujours soumis à son propre poids. En effet, la tangente n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ *i.e.* 90° d'une part et d'autre part, chercher $f'(200) = 0$ revient à chercher a tel que $\mathrm{sh}(\frac{200}{a}) = 0 \iff \frac{200}{a} = 0$ ce qui n'est pas possible.

Aussi haut que large Soit l'arc de chaînette $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a\,\mathrm{ch}(\frac{x}{a})$ de largeur 2ℓ, centré autour de $x = 0$, pour $a > 0$.

1. La hauteur de l'arc est de $h(\ell) = a\,\mathrm{ch}(\frac{\ell}{a}) - a = \frac{a}{2}(e^{\frac{\ell}{a}} + e^{-\frac{\ell}{a}} - 2)$.
2. Soit $f(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2) - 2x$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.
   (a) On a $f'(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} - 2)' - (2x)' = \frac{a}{2}(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}} - 2) - 2 = \mathrm{sh}(\frac{x}{a}) - 2$.
   Puisque $a > 0$, $\frac{x}{a} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\mathrm{sh}(\frac{x}{a}) - 2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
   Puisque $a > 0$, $\frac{x}{a}$ est strictement croissante tout comme f' sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) On a $f'(0) = -2$, $\lim\limits_{+\infty} f'(x) = +\infty$ et f' strictement croissante donc f' s'annule en un point unique : il existe un unique $\ell_0 > 0$ tel que $f'(\ell_0) = 0$.
   (c) Graphiquement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $f(0) = \ldots = 0$. D'où :

x	0		ℓ_0		$+\infty$
$f'(x)$	-2	⟶		⟶	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	⟶	$f(\ell_0)$	⟶	$+\infty$

   (d) En observant le tableau de variations de f, on voit que $f(x) < 0$ sur $]\,0\,;\ell_0\,]$ et que f change une seule fois de signe après ℓ_0. Il existe donc un unique $\ell_1 \in\,]\,0\,;+\infty\,[$ tel que $f(\ell_1) = 0$.
3. Pour tout $a > 0$, on a montré qu'il existait un unique $\ell_1 > 0$ tel que $f(\ell_1) = 0$. Autrement dit, $h(\ell_1) = 2\ell_1$: l'arc de chaînette tracé entre $-\ell_1$ et ℓ_1 précisément est aussi haut que large, et c'est le seul.

Devoir n° 13

PASSE-TEMPS VARIÉS

Ce devoir est associé au chapitre X, *Variables aléatoires réelles.*

Exercice 1 Automobiles improbables

C'est un fait : il est de plus en plus rare de croiser des 2CV roulant sur la chaussée défraichie de nos bucoliques routes départementales. Pourtant, le pittoresque village d'*Eaux-Vives-les-Six-Troënes* résiste encore et toujours à cette inexorable disparition. En effet, 38 % des autos y sont des 2CV, les fameuses « deuch' », dont 29 % sont vertes. Parmi les autres illustres véhicules, Diane, DS, Traction Avant, Méhari, CX, BX et autres AX, 15 % sont verts.

André et Armand se prélassent sur un banc de la place de la mairie à l'ombre de l'un des six arbres mémorables et contemplent nonchalamment les automobiles chevrotantes passer. Armand décide qu'il aura 19 points à chaque 2CV verte qu'il verra. André réplique alors qu'il aura 4 points pour chaque voiture qui ne sera ni verte ni une « deuch' ».

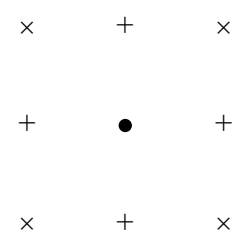
Qui devrait gagner ?

Exercice 2 Bons points

Entre deux passages de voitures, nos comparses tracent à leurs pieds le réseau de neuf points ci-contre et ils inventent un nouveau jeu :

- • On choisit au hasard trois points distincts.
- × Si ces trois points sont alignés, on gagne neuf bons.
- \+ Sinon, on en perd un.

Cette distraction très amusante est-elle équitable ?



On pourra distinguer les cas selon le type • , × ou + du premier point choisi. En effet, suivant le type, il y a d'ors et déjà un certain nombre d'impossibilités pour le deuxième point.

Bonus

Comme cadeau de rentrée, plutôt qu'une trousse azur, saumon ou citron, se faire offrir *Le Goût des Mathématiques*, ouvrage collectif de 128 toutes petites pages chez (Petit) Mercure de France. Tous y trouveront leur compte : vos parents puisque la somme dépensée est modique et vous puisque, même si l'on ne peut y mettre de crayons de couleur, c'est très divertissant.

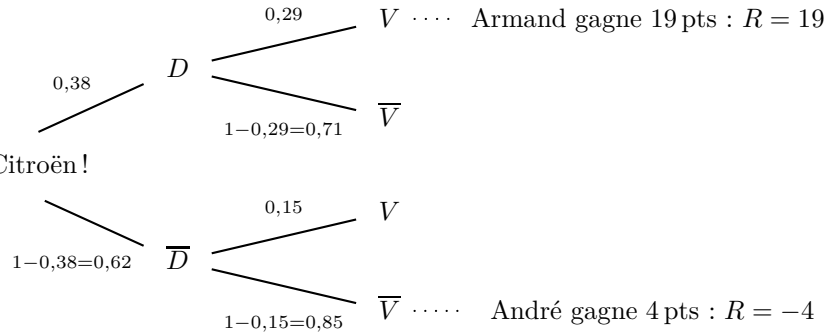
Corrigé du devoir n° 13

PASSE-TEMPS VARIÉS

Exercice 1 Automobiles improbables

Définissons les événements D : « l'automobile observée est une 2CV » et V : « l'automobile observée est de couleur verte ». R est la variable aléatoire donnant le résultat de la différence entre les points marqués par Armand et ceux marqués par André.

Nous pouvons alors dresser l'arbre de probabilités suivant :



On a alors la loi de R : $P(R = 19) = 0,38 \times 0,29 = 0,1102$
et $P(R = -4) = 0,62 \times 0,85 = 0,527$.
L'espérance de R est donc $\mathbb{E}(R) = 19 \times 0,38 \times 0,29 - 4 \times 0,62 \times 0,85 \simeq -0,0142 < 0$.
On peut aussi calculer l'espérance de gain d'Armand :
$\mathbb{E}(\text{Armand}) = 19 \times 0,38 \times 0,29 \simeq 2,09$ points
et celle d'André : $\mathbb{E}(\text{André}) = 4 \times 0,62 \times 0,85 \simeq 2,11$ points.

Ainsi, à la tombée du jour, lorsqu'ils ne distingueront plus les teintes des automobiles, le gagnant devrait théoriquement être André.

Exercice 2 Bons points

Si le premier point choisi est de type • , les huit points restants permettent un alignement futur mais il ne reste qu'une seule possibilité pour le dernier point parmi les sept restants.

Si le premier point choisi est de type ×, il y a deux possibilités parmi les huit points restants pour le deuxième point qui empêchent tout alignement futur : les deux + « opposées ». Et si l'on n'a pas choisi un tel point, il ne reste qu'une seule possibilité pour l'alignement parmi les sept points restants.

Si le premier point choisi est de type +, il y a quatre possibilités parmi les huit points restants pour le deuxième point qui empêchent tout alignement futur : les + « de côté » et les × « au loin ». Et si l'on n'a pas choisi un tel point, il ne reste qu'une seule possibilité pour l'alignement parmi les sept points restants.

Il est ici souhaitable de dresser un arbre mais je n'ai pas eu le courage de tout coder ici.

Ainsi, la probabilité de gagner neuf bons est
$P(G = 9 \text{ bons}) = \frac{1}{9} \times \frac{8}{8} \times \frac{1}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{6}{8} \times \frac{1}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{48}{504} = \frac{2}{21}$
et celle de perdre un bon est $P(G = -1 \text{ bon}) = 1 - P(G = 9 \text{ bons}) = \frac{19}{21}$.
D'où l'espérance de gain $\mathbb{E}(G) = 9P_9 - 1P_{-1} = -\frac{1}{21}$ bon $\neq 0$: ce jeu amusant n'est pas pleinement équitable.

Devoir n° 14

LIEUX ÉTRANGES

Ce devoir est associé au chapitre XI, *Applications du produit scalaire*.

Exercice 1 Cercle des milieux

Soient A, B, C et D quatre points distincts.
On désire construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0.$$

1. (a) Montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ où I est le milieu du segment $[AB]$.
   (b) Réduire de même la somme vectorielle $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
2. En déduire la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.
3. À quelle condition l'ensemble $\mathscr{E}$ est-il réduit à un point ?

Exercice 2 Le carré rond

$ABCD$ est un carré de côté 2 et de centre O,
$\mathscr{C}$ est le cercle inscrit dans ce carré, de centre O et de rayon 1,
E et F sont les intersections respectives de $\mathscr{C}$ et des segments $[OA]$ et $[OB]$.
Démontrer que la médiane issue de O du triangle OAF est aussi la hauteur issue de O du triangle BOE.
On pourra utiliser le fait que l'on a toujours $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MK}$ si K est le milieu du segment $[PQ]$ ou alors se placer dans un repère orthonormé adéquat.

Bonus Le 13 novembre 2014 décédait Alexandre Grothendieck, unanimement reconnu comme un des plus grands génies des mathématiques, après une disparition de 25 ans de la sphère publique et privée.
Apposer une souris et la faire cliquer sur le lien suivant, vous aurez un article approfondi sur son parcours, hébergé par le site toujours intéressant *Images des mathématiques* :
http ://images.math.cnrs.fr/Alexandre-Grothendieck.html
Aussi, un lien vers *Récoltes et Semailles*, ses écrits de réflexions et de témoignages d'un passé de mathématicien :
http ://lipn.univ-paris13.fr/ duchamp/Books&more/Grothendieck/RS/pdf/RetS.pdf

Corrigé du devoir n° 14

LIEUX ÉTRANGES

Exercice 1 Cercle des milieux

Soient A, B, C et D distincts et $\mathscr{E} = \left\{ M \ / \ (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0 \right\}$.

1. (a) On a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}$
$= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{0} = 2\overrightarrow{MI}$.

   (b) De même, si J est le milieu du segment $[CD]$, on a $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$.

2. Ainsi, $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0 \iff (2\overrightarrow{MI}) \cdot (2\overrightarrow{MJ}) = 0$
$\iff 4.\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0 \iff JIM$ rectangle en $M \iff M \in \mathscr{C}\,(\diagdown\!\!\diagdown [IJ]) = \mathscr{E}$.

3. L'ensemble $\mathscr{E}$ est réduit à un point lorsque le cercle est réduit à son centre *i.e.* I et J confondus et les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont même milieu *i.e.* $ACBD$ est un parallélogramme.

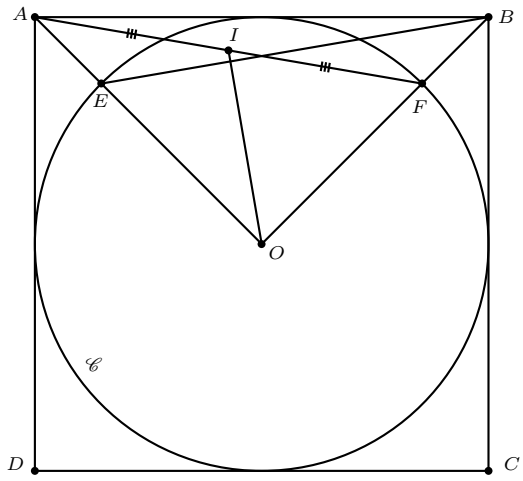
Exercice 2 Le carré rond

Appelons I le milieu du segment $[AF]$ et l'on a $2.\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF}$.

• Ainsi, $2.\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF}).(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}.\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OB}$
$2.\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{EB} = OA.EO.\cos\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{EO}\right) + 0 + 0 + OF.OB.\cos\left(\overrightarrow{OF}\,;\overrightarrow{OB}\right)$
$= -OA.EO + OA.EO = 0$ et $(OI) \perp (EB)$.

• En se plaçant dans le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}\right)$, on a $O\,(0\,;0)$, $E\,(1\,;0)$, $F\,(0\,;1)$, $A\left(\sqrt{2}\,;0\right)$, $B\left(0\,;\sqrt{2}\right)$ et $I\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\1/2\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$ et $(OI) \perp (EB)$.



Devoir n° 15

Math Wars

Ce devoir est associé au chapitre XII, *Fonctions trigonométriques*.

Il y a bien longtemps, dans une galaxie lointaine, très lointaine, aux confins de la constellation du *Grand Disque*, autour de l'étoile PI.3.14, tournait, dans le sens trigonométrique (vue de dessus), une planète qui elle-même tournicotait sur son axe de révolution dans le sens indirect (vue de côté). Cette planète était tout à fait quelconque, pour une planète habitée s'entend bien : un gigantesque « patatoïde » plus ou moins tempéré. Toutefois, sur son versant gauche, une peuplade que nous pouvons qualifier d'évoluée – plus que les Terriens en tout cas – y subsistait tant bien que mal, vénérant Radian Ier leur sénile souverain. Mais ceci est une toute autre histoire.

Isolé de l'autre côté de l'espace, Luke s'échine à fabriquer le sabre laser qui lui permettra de sauver l'Univers en compagnie de la princesse Leia, son flirt, sinon sa sœur, et avec l'aide de Chewbacca, son acolyte, sinon sa peluche. En solo, il fait ses plans : le sabre, en dursolidium pur, est d'architecture fine, élégante et simplissime.

Dans le repère orthonormé $(V; A; D; O)$, la sphère de centre V et de rayon 1 starmètre (sm), il trace et sur cette sphère, un point R, il place. Son sabre laser doit alors avoir les dimensions du cylindre inscrit dans cette sphère, d'axe (VO) et passant par R. L'angle θ entre la demi-droite $[VR)$ et le plan (VAD), il nomme, ce seul paramètre suffisant à déterminer entièrement le cylindre optimal. En effet, son sabre doit avoir une surface latérale adaptée à sa main et son volume doit permettre une puissance suffisante. Un peu décontenancé, il est, et l'aider, tu dois.
Que la Force soit avec toi !

1. Afin de préciser ta réflexion à Luke, une figure, tu feras.
2. Explique pourquoi considérer $\theta \in \left[\, 0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$, il pourra.
3. En fonction de θ, $\mathcal{V}(\theta)$ le volume du cylindre en sm^3 et $\mathscr{A}(\theta)$ l'aire de la surface latérale sans les deux disques en sm^2, tu exprimeras.
4. Afin d'avoir la meilleure préhension, Luke devra obtenir une surface latérale d'aire égale à la moitié de celle de la sphère. En t'aidant de l'identité $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, à Luke de trouver l'angle adéquat, tu permettras.
5. Par ailleurs, afin d'avoir une puissance sans pareille, le volume du sabre, être égal à la moitié de celui de la sphère, il devra.
   (a) Algébriquement, le volume du cylindre est inférieur à celui de la sphère, tu montreras. Rassurant, n'est-ce pas ?

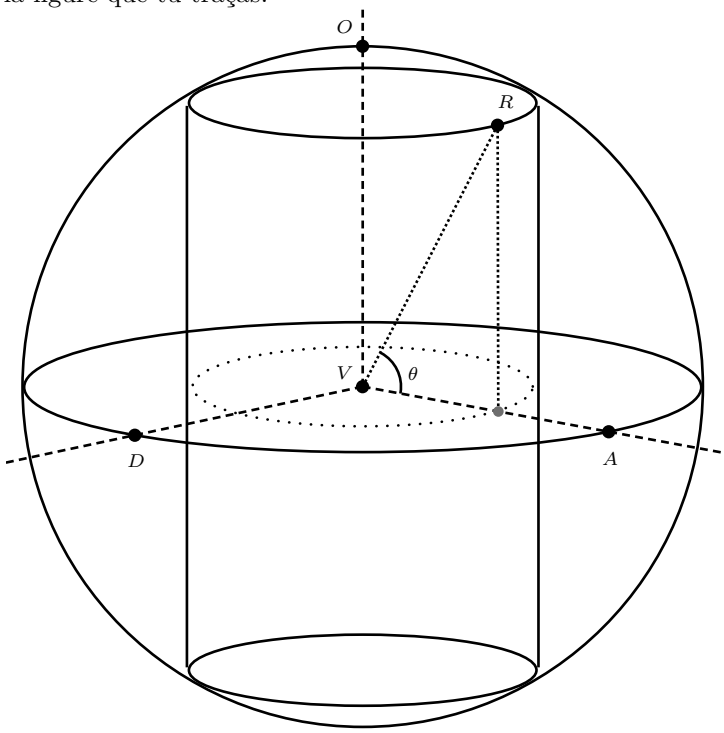
(b) En étudiant la fonction $w(x) = x(1 - x^2)$ et en cherchant les solutions de l'équation $w(x) = \frac{1}{3}$, l'existence de deux valeurs possibles de $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ pour obtenir un volume optimal, tu justifieras. Des valeurs approchées, ensuite tu donneras.

6. La meilleure configuration selon ton point de vue, à Luke, tu exposeras.

Corrigé du devoir n° 15

Math Wars

1. Voici donc la figure que tu traças.



2. Le cylindre étant symétrique par rapport à l'axe (VO), seule la hauteur du point R détermine le sabre. Puisqu'il est aussi symétrique par rapport au plan (VAD), les dimensions du sabre ne changent pas que ce point soit au-dessus ou en dessous du plan (VAD).
   Ainsi, tout sabre est déterminé uniquement par un point R situé un quart de cercle de rayon 1 sm joignant le plan (VAD) et l'axe $[VO)$. L'angle θ appartient bien à l'intervalle $\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$.

3. Puisque la sphère est de rayon 1 sm, le rayon du cylindre vaut $\cos(\theta)$ et sa hauteur $2\sin(\theta)$. Ainsi, l'aire du disque sommital est $\pi\cos^2(\theta)$ et son volume
   $\mathcal{V}(\theta) = 2\sin(\theta) \times \pi\cos^2(\theta) = 2\pi\sin(\theta)\cos^2(\theta)$.
   De plus, le périmètre du cercle sommital vaut $2\pi\cos(\theta)$ et l'aire latérale du cylindre, sans les deux disques, est
   $\mathscr{A}(\theta) = 2\pi\cos(\theta) \times 2\sin(\theta) = 4\pi\sin(\theta)\cos(\theta)$.

4. L'aire d'une sphère de rayon ρ vaut $4\pi\rho^2$ donc on doit résoudre l'équation

CORRIGÉS

$\mathscr{A}(\theta) = \frac{1}{2}4\pi \iff 4\pi\sin(\theta)\cos(\theta) = 2\pi \iff \sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}$
$\iff \frac{1}{2}\sin(2\theta) = \frac{1}{2} \iff \sin(2\theta) = 1 \iff 2\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff \theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.
L'angle $\theta \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$ idéal pour une meilleure préhension est donc de $\frac{\pi}{4}$.

5. (a) Le volume d'une sphère de rayon ρ vaut $\frac{4}{3}\pi\rho^3$ et
$\mathcal{V}(\theta) = 2\pi\sin(\theta)\cos^2(\theta) = 2\pi\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\theta) = 2\pi\frac{1}{2}\sin(2\theta)\cos(\theta)$
$\mathcal{V}(\theta) = \pi\sin(2\theta)\cos(\theta) \leqslant \pi$ donc $\mathcal{V}(\theta) < \frac{4}{3}\pi$, volume de notre sphère ce qui est bien rassurant, ce cylindre y étant inscrit.

(b) On cherche θ tel que $\mathcal{V}(\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi$:
$2\pi\sin(\theta)\cos^2(\theta) = \frac{2}{3}\pi \iff \sin(\theta)(1-\sin^2(\theta)) = \frac{1}{3}$.
En posant $w(x) = x(1-x^2) = x - x^3$, cette équation s'écrit $w(\sin(\theta)) = \frac{1}{3}$, pour $\theta \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$ donc $\sin(\theta) \in [\,0\,;1\,]$.
Étudions donc w sur $[\,0\,;1\,]$.
On a $w'(x) = 1 - 3x^2 = (1 - x\sqrt{3})(1 + x\sqrt{3})$, associé à une parabole en $\cap$ et de racines $\pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.
De plus, $w(0) = 0$, $w(\frac{3}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ et $w(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{8}(4-\pi^2) < 0$.
D'où le tableau de variations suivant.

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$w'(x)$		$+$	0	$-$	
w	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$w(\frac{\pi}{2})$

Puisque $w(\frac{\pi}{2}) < 0 < \frac{1}{3} < \frac{2\sqrt{3}}{9}$ (et que la fonction w est continue), on peut affirmer que l'équation $w(x) = \frac{1}{3}$ admet deux solutions : $x_1 \in \left]\,0\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\,\right[$ et $x_2 \in \left]\,\frac{\sqrt{3}}{3}\,;1\,\right[$.
Il existe ensuite un unique angle $\theta_1 \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$ tel que $\sin(\theta_1) = x_1$ et un unique angle $\theta_2 \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$ tel que $\sin(\theta_2) = x_2$. On a alors $w(\sin(\theta_i)) = w(x_i) = \frac{1}{3}$.
En cherchant les intersections de la courbe $y = \sin(\theta)(1-\sin^2(\theta))$ avec la droite $y = \frac{1}{3}$ à la calculatrice, on obtient $\theta_1 \simeq 0,40599\,\text{rad.} = 23,3°$ et $\theta_2 \simeq 0,8363\,\text{rad.} = 47,9°$.

6. Afin d'avoir la meilleure préhension, une puissance quasi-optimale et une construction aisée, un angle de $\frac{\pi}{4}$ à Luke, tu proposeras.

Devoir n° 16

Devoir parental

Échangeons les rôles pour une fois : ce devoir doit être fait par les parents, aidés de leur enfant.

Cet exercice est un Q.C.M. Pour chaque question, une seule réponse est juste et aucune justification n'est demandée.

1. Du point de vue des mathématiques, l'enjeu de cette année scolaire est
   - S. nul et non avenu.
   - A. majeur et vacciné.
   - V. multiple, riche et enthousiasmant.
2. Le travail demandé est
   - A. une simple répétition hebdomadaire de la formule apprise en septembre.
   - U. inutile et ennuyeux.
   - I. nécessaire, formateur et passionnant.
3. Il y aura un devoir
   - N. par an.
   - C. par hasard.
   - V. par thème, ou quasiment.
4. Les énoncés fantasques
   - S. n'ont aucun rapport avec les mathématiques.
   - U. n'existent pas, ou alors, je n'ai pas compris.
   - E. changent de l'ordinaire et apprennent à se focaliser sur l'essentiel.
5. Le rédacteur de cet ouvrage tape bien
   - S. sur les nerfs.
   - N. sur ses élèves.
   - L. sur ordinateur.
6. Les documents distribués seront
   - C. peu nombreux, confus, dans le désordre.
   - R. en couleur, écrits à la main et enluminés à l'or fin.
   - E. nombreux, trop peut-être, et seront notre outil de travail. Les élèves devront apprendre à travailler avec, quitte à en recopier une partie ou faire des fiches afin de se les approprier et de les mémoriser.

7. Le manuel numérique
   - R. est une pièce indispensable et doit être en permanence à portée de main.
   - A. est joli, coloré, et bien mieux que ce qui est fourni en classe.
   - S. une aide utile et riche, en complément de ce qui est fait en classe.
8. Le matériel est
   - U. imposé : un classeur petit format, des feuilles de teintes diverses à gros carreaux, un cahier de brouillon, un stylo vert clair, deux crayons HB gras, un compas de précision, un double décimètre, quelques feuilles de papier Canson, un stylo plume, pas d'effaceur, un taille crayon sans réserve. Équerre interdite.
   - P. inutile : tout se passe dans la tête.
   - M. conseillé : un classeur grand format, des feuilles doubles et simples à petits carreaux, une calculatrice (cf. question 9) et une perforatrice (si, si).
9. La calculatrice exigée est
   - P. un simple convertisseur francs nouveaux - euros.
   - P′. la même que celle demandée en eps.
   - A. scientifique, de type lycée.
10. Parti comme cela, au fil de l'année, votre enfant
    - U. aura perdu beaucoup de temps.
    - O. aura déjà un an de plus.
    - T. apprendra des concepts fascinants, tout en se faisant plaisir.
11. Parti comme cela, au fil de l'année, le professeur de mathématiques de votre enfant
    - L. aura perdu beaucoup de temps.
    - R. aura encore un an de plus.
    - H. enseignera des concepts fascinants, tout en se faisant plaisir.
12. Pour toute réclamation, demande d'informations, correction de coquilles ou autres doléances, le rédacteur est
    - E. joignable par l'intermédiaire du secrétariat de l'établissement après demande écrite auprès du professeur principal.
    - T. injoignable car en formation.
    - S. joignable à toute heure sur son courriel : mathmax@yahoo.com
13. Pour réussir, le plus important c'est
    - :-(le travail.
    - :-| le travail.
    - :-) le travail.

CAHIERS TRANSVERSAUX

Cahier α

Algo à gogo

Sommaire

1	**Installer Python**	**292**
2	**Les variables**	**292**
3	**Instructions conditionnelles**	**293**
4	**Boucle bornée**	**294**
5	**Boucle non bornée**	**295**
6	**Fonction**	**296**
7	**Liste**	**297**
8	**Foire de l'algo**	**299**
9	**Solutions**	**302**

Ce cahier est essentiel pour toute votre scolarité.

Le mot algorithme vient du nom d'un mathématicien perse du IXe s., Al-Khwarizmi. On trouve trace de méthodes algorithmiques dès le début des mathématiques et ce, dans toutes les cultures. L'algorithme d'Archimède donne une approximation du nombre π. Ératosthène, lui, a défini une procédure pour retrouver les nombres premiers en procédant par l'élimination des multiples successifs. Euclide trouve rapidement le *pgcd* de deux entiers. Dans son *Discours de la méthode*, René Descartes propose en 1637 de diviser chacune des difficultés qu'il examine, en autant de parcelles qu'il se peut et qui sont requises afin de mieux les résoudre. Au XIXe s., Ada Lovelace, fille de Lord Byron, est considérée comme la pionnière de la science informatique. Elle a réalisé le premier véritable programme informatique lors de son travail sur un ancêtre de l'ordinateur. En effet, on trouve dans ses notes le premier programme destiné à être exécuté par une machine. Elle a également entrevu et décrit certaines possibilités offertes par les calculateurs universels, allant bien au-delà du calcul numérique qu'imaginaient ses contemporains. Le langage informatique Ada a été nommé en son honneur.

Un algorithme est un enchaînement fini d'étapes ou d'instructions à effectuer dans un certain ordre et dont la réalisation permet la résolution en un temps fini d'un problème donné. Les structures que nous étudierons ici seront plutôt simples mais pourront tout de même user de tests (Sialors) et autres boucles (Pour et Tantque) et mettront en œuvre des fonctions, peut-être même des listes. Nos algorithmes seront ici écrits en langage *naturel* ou en langage Python, qui lui est très proche. Ceux-ci ont l'avantage de rester lisibles car, outre les problèmes de syntaxe, les mauvaises constructions sont sources de nombreuses erreurs et autres bugs et l'on sait qu'en informatique, on a rapidement la rage envers la machine.

1 Installer Python

Il faut au préalable installer une distribution Python. Rassurez-vous, c'est très facile, il suffit de visiter le site http ://www.python.org/ et de la télécharger. Des applications EduPython sur PC, Idle sur Mac ou Pydroid 3 sur tablette par exemple fonctionnent bien.

Le principe est toujours le même : on dispose d'une console Python, une fenêtre dans laquelle on peut effectuer des calculs, appliquer des fonctions et observer les résultats de sortie des programmes, ainsi que d'un éditeur de programmes, une fenêtre où l'on saisit les programmes.
Par exemple, dans la console :

```
⋙ from math import *
    # permet d'utiliser les commandes mathématiques
⋙ from random import *
    # permet d'utiliser les commandes de probabilité
⋙ 2**3   # ** signifie puissance
8
⋙ sqrt(3)
1.732050808
⋙ 13%8   # reste de la division euclidienne
5
⋙ b=3
⋙ h=4
⋙ Aire_Triangle=b*h/2
⋙ print(Aire_Triangle)
6
```

À partir de dorénavant, nous considérons que les modules `math` et `random` sont importés dès que nécessaire.

Dans l'éditeur, nous pouvons écrire un programme comme le suivant puis lancer son exécution dans la console.

```
1| Nom=input("Quel est ton prénom?")
2| Accueil="Bonjour "+Nom+". Bienvenue sur Python!"
3| print(Accueil)
```

L'éditeur permet de sauvegarder ses programmes dans un fichier « .py » ce qui est essentiel car la console oublie tout une fois qu'elle est fermée.

2 Les variables

Dans un programme, une variable est repérée par son nom et possède une valeur qui peut changer au fur et à mesure de l'exécution. On peut schématiser une variable par une boîte portant une étiquette, son nom, et ayant un contenu, sa valeur. C'est une différence fondamentale par rapport à ce qui est d'usage en mathématiques où l'on peut effectuer des calculs sans jamais connaître la valeur de la variable et si celle-ci est connue, elle ne peut changer.

On distingue plusieurs types de variables : les entiers (`int`), les décimaux (`float`), les chaînes de caractères (`str` pour string), les booléens (`bool`) : vrai et faux (ils ont aussi une valeur numérique : 1 et 0).
Une instruction d'affectation permet de donner une valeur à une variable, de remplir la boîte. En langage naturel, on écrit X⟵2 et en Python, « `X=2` ».
La demande d'une saisie de valeur s'écrit `X=float(input())` en Python. On remarque que l'on précise en même temps le type de la variable saisie. Pour l'afficher, `print(X)` fonctionne bien.

En mathématiques, le symbole = peut signifier une égalité ($3+5=8$), peut servir à définir un objet ($A=\pi R^2$) ou écrire une équation ($2x+3=5-x$) qui n'est pas toujours vérifiée et que l'on peut parfois résoudre. En Langage Python, = ne sert qu'à définir une variable. Pour tester une égalité, on utilisera `==`.

Exercice 1 Écrire un programme en langage Python appliquant l'algorithme suivant : saisir un nombre, l'élever au carré, en prendre le triple, retrancher 5 puis afficher le résultat.

3 Instructions conditionnelles

Une condition est un énoncé qui peut être vrai ou faux. Dans un programme, on peut tester si cette condition est vrai ou fausse et effectuer un traitement différent selon les cas.

Voici l'architecture d'un test :

```
Si condition Alors
    Traitement 1
Sinon
    Traitement 2
Fin Si
```

En Python, la fin de l'indentation (le décalage) marque la fin du traitement :

```
1| if condition :
2|     Traitement 1
3| else :
4|     Traitement 2
```

On peut ne pas effectuer de traitement dans le cas où la condition est fausse et l'on omet alors le « sinon/else ».
On peut aussi imbriquer plusieurs tests conditionnels et la commande « elif » combine un else suivi d'un if : cela permet de ne pas avoir un niveau d'indentation supplémentaire. Nous verrons cela en exercice.

Exercice 2 Agathe souhaite s'inscrire au club de mathématique de sa ville et on lui propose deux formules :

Formule α : une cotisation annuelle de 8 francs et chaque séance coûte 1,50 franc ;
Formule β : la séance coûte 1,70 franc.

Voici le programme incomplet qu'elle a écrit. Le compléter puis le saisir et l'exécuter.
À partir de combien de séances le programme α semble-t-il plus avantageux ?

```
1| n=int(input("Entrer n : "))
2| a=8+1,5*n
3| ................
4| if ........... :
```

```
5|    print("Le tarif .... est plus avantageux.")
6| ..................
7|    print("Le tarif beta est plus avantageux.")
```

Exercice 3 Saisir et exécuter le programme suivant. Que fait-il ?

```
1| x=int(input("Combien vois-tu de lignes ? |||||||||| "))
2| if x==10 :
3|    print("Bravo !")
4| elif x<=9 :
5|    print("Tu devrais consulter un ophtalmologue.")
6| else :
7|    print("Arrête de loucher !")
```

Exercice 4 Écrire un programme demandant à une personne si elle est majeure et le cas échéant, si elle a obtenu le permis de conduire. La féliciter si cela est le cas, l'encourager sinon.

4 Boucle bornée

Une boucle permet de répéter plusieurs fois de suite un même traitement. Lorsque le nombre n de répétition est connu à l'avance, on dit que la boucle est bornée et l'on utilise un compteur i qui s'incrémente à chaque itération : à chaque fois que le traitement est effectué, le compteur i augmente de 1. Lorsque i atteint la valeur n, on effectue une dernière fois le traitement puis on sort de la boucle.

Voici l'architecture d'une boucle bornée :

Pour i allant de 1 à n
    Traitement
Fin Pour

En Python, on utilise la commande range où la borne de droite est exclue et cela donne :

```
1| for i in range(1,n+1) :
2|     Traitement
```

Exercice 5 Ce programme affiche les puissances de 1 à n du nombre x. Le complèter.

```
1| x=....(input("De quel nombre souhaites-tu connaître les
   puissances ? "))
2| n=...(input("Quelle puissance maximale souhaites-tu obtenir ? "))
3| p=1
4| for i in range(0,...) :
5|    p=x*p
6|    print(...)
```

Que cela change-t-il si l'on omet l'indentation de la dernière ligne ?

Exercice 6 Soit la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 5$.

(a) Écrire un programme donnant les images par f de tous les entiers compris entre 0 et l'entier N.

(b) Le modifier afin qu'il donne les images de tous les multiples de $\frac{1}{2}$ compris entre 0 et l'entier N.

Exercice 7 Au cours de chaque semaine, tu doubles ton nombre de suiveurs sur ton compte Amstramgram mais tu en perds 7 le dimanche. Tu avais 9 suiveurs à l'aube du premier jour.

(a) Écris un programme donnant le nombre de suiveurs après n semaines et exécute-le.

(b) Que se passe-t-il si tu en avais seulement 6 au premier jour ? Et si tu en avais 7 ?

5 Boucle non bornée

Dans un boucle, le nombre de répétitions, d'itération n'est pas nécessairement connu à l'avance, il peut dépendre d'une condition et le traitement est alors répété tant que la condition est vérifiée puis on sort de la boucle. On parle de boucle non bornée (a priori) mais attention à ce que cette condition soit bien fausse après un certain nombre de répétitions, sinon le programme tournera *en boucle* sans jamais s'arrêter...

Voici l'architecture d'une boucle non bornée :

```
Tant que Condition
    Traitement
Fin Tant que
```

En Python, on utilise la commande while et cela donne :

```
1| while Condition :
2|     Traitement
```

Exercice 8 Écrire un programme affichant tous les entiers naturels compris entre 0 et un décimal positif D.

Exercice 9 Colette est un peu lassée de lancer son dé alors elle a écrit le programme suivant. À quoi peut-il donc bien servir ?

```
1| from random import *   # pour utiliser des fonctions de
   probabilités
2| f=randint(1,6)   # entier choisi au hasard
3| l=1
4| while f != 6 :   # différent de
5|    f=randint(1,6)
6|    l=l+1
7| print("Nombre de lancers : ", l)
```

Exercice 10 Ta capacité de concentration diminue de 16 % pour chaque heure passée quotidiennement devant un écran. Écris un programme donnant le nombre d'heures quotidiennes passées devant un écran à partir duquel ta capacité de concentration diminue de moitié.

Exercice 11 Il est bien connu que si l'on place un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième et ainsi de suite, on dépasse rapidement le nombre total de grains de riz disponibles. Complète le programme qu'a écrit Agathe afin qu'il détermine le nombre de cases que l'on peut complètement remplir avec un nombre R de grains de riz à disposition.

```
1| R=int(input("Nombre de grains de riz disponibles : "))
2| S=1
3| n=0
4| while S<=R :
5|    n=.......
6|    S=S+.....
7| print("Nombre de cases remplies : ", .... )
```

Exercice 12 On reprend la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 5$ de l'exercice 6.

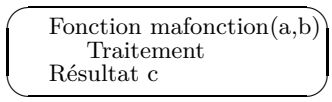
(a) Créer un programme donnant le premier entier naturel d'image strictement supérieure à un décimal M.

(b) Le modifier afin d'obtenir le premier multiple de $\frac{1}{2}$ vérifiant cette même condition.

6 Fonction

Une fonction d'un ou plusieurs arguments réalise un traitement et renvoie un résultat. Elle peut être appelée plusieurs fois par le programme principal et permet de mieux structurer celui-ci.

Voici l'architecture d'une fonction :



En Python, on utilise la commande def et cela donne :

```
1| def mafonction(a,b) :
2|    Traitement
3|    return c
```

Exercice 13 Écrire une fonction `airect` donnant l'aire d'un rectangle en fonction de la longueur de ses côtés.

Exercice 14

(a) Que calcule la fonction `so` suivante ?

```
1| def so(N) :
2|    S=0
3|    for i in range(1,N+1) :
4|       S=S+i
5|    return S
```

(b) Écrire une fonction `pr` calculant le produit de tous les entiers de 1 à N.

Exercice 15 Cette fonction `nbfois` détermine le nombre d'apparition d'un caractère dans un texte, une chaîne de caractères. Le compléter. Que signifient les lignes 2 et 5 ?

```
1| def nbfois(caractere,chaine) :   # doivent être mis entre " et "
2|    l=len(chaine)
3|    n=0
4|    for i in range(0,l) :   # ou range(l)
5|       if chaine[i]== caractere :
6|          n=......
7|    .........
```

Exercice 16 Écrire

(a) une fonction opposé donnant l'opposé d'un nombre,

(b) une fonction `valabs` donnant la valeur absolue d'un nombre,

(c) une fonction `max2` donnant le plus grand de deux nombres,

(d) une fonctions `max5` donnant le maximum de cinq nombres en utilisant la précédente,

(e) une fonction `puissmin` donnant le plus petit entier tel qu'un nombre donné élevé cette puissance soit supérieur ou égal à un autre nombre donné.

Quant l'architecture commence à être complexe, il ne faut pas hésiter à créer plusieurs fonctions et faire appel aux unes dans les autres. On peut très bien utiliser une fonction qui est écrite après dans l'éditeur mais il faut faire attention à ne pas les définir en boucle. Par exemple, si `mafonction1` fait appel à `mafonction2` et si `mafontion2` à `mafonction1`, vous risquez bien de tourner en rond. En revanche, dans une architecture correctement construite, une fonction peut très bien s'appeler elle-même sans problème. C'est ce qui s'appelle un algorithme récursif.

Exercice 17 Soit la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 2x - 4$. Écrire un programme donnant le maximum entre la valeur absolue d'un nombre et l'image par f de ce nombre en précisant duquel il s'agit.

Exercice 18 Tel Euclide, créez une fonction donnant le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels. Vous pourrez utiliser une version récursive.

7 Liste

Cette partie n'est pas au programme de seconde mais simplement à partir de la classe de première. Elle peut néanmoins être utile à tous.

Lorsque l'on a besoin de garder et d'utiliser plusieurs variables au cours d'un programme, on utilise des listes pour les stocker. Une liste est une collection d'objets de différents types (nombres, chaînes de caractères, booléens, listes,...). On peut ensuite la manipuler, faire appel à l'un de ses termes, l'utiliser dans une boucle, etc. Un exemple typique d'utilisation est la collecte des premiers termes d'un suite. Voici quelques commandes utiles en langage Python.

Un exemple de liste	`L=[2,"mai",7,True]`
Une liste vide	`L=[]`
Premier objet de la liste (rang 0)	`L[0]`
$(k+1)^e$ objet de la liste (rang k)	`L[k]`
Dernier objet de la liste	`L[-1]`
Longueur de la liste	`len(L)`
Ajouter un `objet` en fin de liste	`L.append(objet)`
Insérer un `objet` au rang k	`L.insert(k,objet)`
Supprimer l'objet de rang k	`del L[k]`
Supprimer l'objet `element`	`L.remove(element)`
Compte le nombre d'objets `element` dans la liste	`L.count(element)`
Trouve l'index de l'objet `element` dans la liste	`L.index(element)`
Concaténer (rassembler) deux listes	`L1+L2`
Inverser l'ordre des valeurs	`L.reverse()`
Afficher les objets par ordre croissant (si possible)	`sorted(L)`
Réarranger la liste par ordre croissant (si possible)	`L.sort()`

Exercice 19 On considère la fonction suivante.

```
1| def cettefonction(valeur,liste) :
2|     nombre=0
3|     for v in liste :
4|         if v>=valeur :
5|             nombre=nombre+1
6| return nombre
```

Pour `L=[1,2,4,2,1]`, `cettefonction(2,L)` donne 3, `cettefonction(3,L)` donne 1 et `cettefonction(6,L)` donne 0. Que fait cette fonction ?

Exercice 20

A. La ligne `L=[i**2 for i in range(6)]` donne la liste [0, 1, 4, 9, 16, 25]. Que fait cette instruction ?

B. Créer une liste des cubes des entiers naturels inférieurs ou égaux à douze.

C. Saisir les instructions suivantes. Que font-elles ?

(a) `L=[9-k for k in range(7)]`

(b) `M=[6]*5`

(c) `N=[randint(1,6) for i in range(8)]`

(d) `M[2]=1`

(e)
```
P=M+N
P.sort()
```

(f)
```
X=[0.5*i for i in range(-5,5)]
Y=[3*x**2-5 for x in X]
```

Exercice 21 Écrire une fonction calculant la somme des objets d'une liste de nombres.

Exercice 22 Écrire une fonction donnant la liste des diviseurs d'un entier naturel.

Exercice 23 Écrire un programme échangeant la place de deux objets d'une liste.

Exercice 24 Les notes de Colette en mathématiques augmentent de 2 % à chaque devoir jusqu'à ce qu'elle obtienne la note maximale. Écrire une fonction créant la liste de ses notes jusqu'à 20 en fonction de la note non nulle qu'elle a obtenue au premier devoir rendu.

8 Foire de l'algo

Les algorithmes seront rédigés ici en langage naturel mais je vous encourage à les saisir en Python afin de vérifier que vous maîtrisez bien ce que vous avez appris précédemment. Ils sont d'un niveau varié et peuvent parfois utiliser des résultats et notions mathématiques que vous ne connaissez pas encore mais vous pourrez tout de même comprendre leur architecture.

1. (a) Que contient la variable Z après exécution de l'algorithme (A) pour $Z = 0$, $Z = 1$ puis $Z = 3$?

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

Algo (A)
$Z \longleftarrow 2 - Z^2$

2. (a) Que contient la variable T après exécution de l'algorithme (B) pour $S = 0$, $S = 1$ puis $S = -2$?

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

(c) Le simplifier.

Algo (B)
$R \longleftarrow 2$
$T \longleftarrow -\pi$
$R \longleftarrow 2S + 3$
$R \longleftarrow 4R - 1$
$T \longleftarrow 3R^2 - 4$

3. (a) Que contient la variable U après exécution de l'algorithme (C) pour $N = 3$?

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

Algo (C)
$U \longleftarrow 7$
Pour I allant de 1 à N
  $U \longleftarrow \frac{3}{4} \times U$
Fin Pour
Afficher U

4. (a) Quelles valeurs affiche l'algorithme (D) pour $P = 5$ et $V = -3$?

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

Algo (D)
Pour K allant de 2 à P
  Affecter $V \longleftarrow 4 + V$
  Afficher V
Fin Pour

5. (a) Exécuter les algorithmes (E) pour $N = 3$, (F) pour $A = 4$ puis $A = 10$ et (G) pour $N = 4$.

(b) Quel est le rôle de chacun de ces algorithmes ?

Algo (E)
$U \longleftarrow 4$
$I \longleftarrow 0$
Tant que $I < N$
  $I \longleftarrow I + 1$
  $U \longleftarrow \frac{2}{5}U + 2$
Fin Tant que
Afficher U

Algo (F)
$X \longleftarrow 0$
$F \longleftarrow 2$
Tant que $F < A$
  $X \longleftarrow X + \frac{1}{2}$
  $F \longleftarrow X^2 + 2$
Fin Tant que
Afficher X

Algo (G)
$P \longleftarrow \pi$
Pour I allant de 0 à N
  $D \longleftarrow Ent(P)$
  $P \longleftarrow 10(P - D)$
  Afficher D
Fin Pour

6. (a) À quoi correspond la modification « Pour K allant de 1 à P » dans le (D) ?

(b) À quoi correspond la modification « $I \longleftarrow 1$ » dans l'algorithme (E) ?

7. Évariste est gallois et son cousin est Germain. Le premier raffole des boucles *Tant que* tandis que le second affectionne les boucles *Pour*.

(a) Aide Germain à transformer la boucle *Tant que* du (E) en boucle *Pour*.

(b) Peut-il transformer la boucle *Tant que* de l'algorithme (F) en boucle *Pour* ?

(c) Tel Évariste, transforme les boucles *Pour* des (C) et (D) en boucles *Tant que*.

8. (a) Observer et analyser l'algorithme (H).

(b) Le compléter afin qu'il réponde au problème donné dans $\mathbb{R}$.

Algo (H)
Saisir $A \neq 0$, B et C
$D \longleftarrow$ ...
Si D..., Alors
  $U \longleftarrow \frac{-B-\sqrt{D}}{2A}$
  $V \longleftarrow$ ...
  Afficher ....
Sinon
....
Fin Si

9. (a) Observer, analyser, compléter, modifier, exécuter pour différentes valeurs les algorithmes (I), (J), (K), (L) et (M).

(b) Quel est le rôle de chacun de ces algorithmes ?

Algo (I)
$K \longleftarrow 0$
$B \longleftarrow 2$
Saisir N
Pour K allant de 1 à N
  $B \longleftarrow A + 1$
  $A \longleftarrow B - 1$
Fin Pour
Afficher $A - B$

Algo (J)
$B \longleftarrow 3$
Saisir N
Tant que $K < N$
  $K \longleftarrow K + 1$
  $A \longleftarrow 3B$
  $C \longleftarrow A - 2$
  $A \longleftarrow \frac{C+2}{3}$
Fin Tant que
Afficher $A - B$

Algo (K)
$F \longleftarrow 1$
$U \longleftarrow 0$
Pour K allant de 1 à N
  Afficher F
  $V \longleftarrow F$
  $F \longleftarrow U + F$
  $U \longleftarrow V$
Fin Pour

Algo (L)
$U \longleftarrow 4$
$V \longleftarrow 1$
$I \longleftarrow 0$
Saisir M
Tant que $I < M$
  $W \longleftarrow V$
  $V \longleftarrow \frac{U+V}{2}$
  $U \longleftarrow W$
  Afficher U
Fin Tant que

Algo (M)
$X \longleftarrow 0$
Saisir A
$F \longleftarrow 1 - X^3$
Tant que $F < A$
  $X \longleftarrow X + 1$ à X
  $F \longleftarrow 1 - X^3$
Fin Tant que
Afficher X

10. (a) Observer, analyser, compléter, exécuter, au moyen de tableaux et pour différentes valeurs, l'algorithme (N) pour les fonctions $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = x^2 - 1$, $f(x) = \sin(x)$ puis $f(x) = 1 - x^2$.

(b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

(c) Le test « Si $f(A) \times f(B) > 0$ » est-il nécessaire ?

Algo (N)
f est une fonction .....ante et ...
Saisir A, B et E
$I \longleftarrow A$
Si $f(A) \times f(B) > 0$, Alors
  Afficher "Non mais ça ne va pas ?"
Sinon
  Tant que $|f(I)| > E$
    $I \longleftarrow \frac{A+B}{2}$
    Si $f(I) > 0$, Alors
      ... $\longleftarrow I$
    Sinon
      ... $\longleftarrow I$
    Fin Si
  Fin Tant que
  Afficher I
Fin Si

11. Rédiger puis exécuter pour différentes valeurs des algorithmes répondant aux problèmes suivants :

(a) Afficher l'image d'un réel x_0 à saisir par la fonction $f(x) = 3x^2 - 5\cos(x) + 7$.

(b) Afficher les coordonnées du milieu d'un segment dont on saisit les coordonnées des extrémités.

(c) Afficher tous les termes jusqu'au rang p de la suite $u_n = n^2 - 3n + 4$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) Afficher le $(n+1)$-ième terme de la suite $v_0 = 5$, $v_{n+1} = 2v_n - 3$.

(e) Afficher le terme numéro n de la suite $w_0 = 4$, $w_1 = 5$, $w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$.

(f) Calculer le produit scalaire de deux vecteurs dont on saisit les coordonnées dans un repère orthonormé, l'afficher puis déterminer leur éventuelle orthogonalité.

(g) Faire choisir un nombre entier entre 0 et 100 à la machine (*Aléat*) puis saisir des entiers jusqu'à ce qu'il soit trouvé. La machine doit préciser si la saisie est supérieure ou inférieure à la solution et féliciter chaleureusement le joueur lorsqu'il réussit enfin.

12. Implémenter le cas réel de l'algorithme du discriminant (H) dans votre calculatrice, cela pourra vous servir...

13. (ʃ) Implémenter ses algorithmes préférés en langage Python et les exécuter pour différentes valeurs.

9 Solutions

Exercice 1 Dans la console, cela donne :

```
⋙ x=float(input("Saisir un nombre : "))
⋙ x=x**2   # On utilise la même variable
⋙ x=3*x
    # Cela prend moins de « place » mais on perd l'information de
  départ
⋙ x=x-5
⋙ print(x)
```

Exercice 2 Avec ce programme, Agathe s'aperçoit qu'à partir de 40 séances, le tarif α est plus avantageux.

```
1| n=int(input("Entrer n : "))
2| a=8+1,5*n
3| b=1,7*n
4| if a<=b :
5|    print("Le tarif alpha est plus avantageux.")
6| else :
7|    print("Le tarif beta est plus avantageux.")
```

Exercice 3 Ce programme teste sommairement la vue du joueur. S'il voit 10 lignes, on le félicite, s'il en voit moins c'est qu'il devrait certainement porter des lunettes et s'il en voit plus, c'est qu'il louche.

Exercice 4

```
1| n=int(input("Quel âge as-tu? "))
2| if n>=18 :
3|    p=str(input("Tu es donc majeur(e). As-tu le permis de conduire?
  "))
4|    if p=="oui" :   # chaîne de caractères
5|       print("Bravo!")
6|    else :
7|       print("Rien n'est perdu.")
8| else :
9|    print("Tu es mineur(e) et tu ne peux pas encore avoir le permis
  de conduire.")
```

Exercice 5 Le programme suivant affiche les puissances de 1 à n du nombre x.

```
1| x=float(input("De quel nombre souhaites-tu connaître les
  puissances? "))
```

```
2| n=int(input("Quelle puissance maximale souhaites-tu obtenir? "))
3| p=1
4| for i in range(0,n) :
     # i va prendre n valeurs différentes, de 0 à n-1
5|    p=x*p
6|    print(p)
```

Si l'on omet l'indentation de la dernière ligne, seule la dernière puissance est affichée.

Exercice 6 Soit la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 - 5$.

(a) Voici un programme donnant les images par f de tous les entiers compris entre 0 et l'entier N.

```
1| N=int(input("Antécédent max : "))
2| for i in range(0,N+1) :
3|    y=3*i**2-5
4|    print(y)
```

(b) En voici un donnant les images de tous les multiples de $\frac{1}{2}$ compris entre 0 et N.

```
1| N=int(input("Antécédent max : "))
2| for i in range(0,N) :
3|    y1=3*i**2-5
4|    y2=3*(i+0.5)**2-5
5|    print(y1)
6|    print(y2)
7| print(3*N**2-5)   # Pour calculer et afficher l'image de N
```

Exercice 7 Compte Amstramgram

(a)
```
1| n=int(input("Depuis combien de semaines as-tu ton compte
   Amstramgram?"))
2| S=9
3| for i in range(n) :
     # On a omis la borne gauche, c'est alors 0 par défaut
4|    S=2*S-7
5| print("Tu as désormais ",S," suiveurs.")
```

(b) Si tu avais 6 suiveurs au premier jour, on s'aperçoit que tu n'en as plus dès la troisième semaine.
Et si tu en avais 7 à l'aube du premier jour, cela restera ainsi jusqu'à la fin des temps.

Exercice 8 Celui-ci affiche tous les entiers naturels entre 0 et un décimal positif D.

```
1| D=float(input("Quel nombre positif, je te prie?"))
2| k=0
```

```
3| while k<=D :
4|     print(k)
5|     k=k+1
```

Exercice 9 Le programme de Colette simule des lancers d'un dé cubique jusqu'à l'obtention d'un six et affiche le nombre de lancers qui ont été nécessaires.

Exercice 10 Grâce au programme suivant, tu sais que ta capacité de concentration aura diminuée de moitié si tu passes plus de 4 heures par jour devant un écran.

```
1| c=1   # Capacité initiale
2| h=0
3| while c>0.5 :
4|     c=0.84*c   # diminution de 16 % : multiplication par 1 - 16/100
5|     h=h+1
6| print("Nombre d'heures quotidiennes devant un écran: ", h)
```

Exercice 11 Grains de riz

```
1| R=int(input("Nombre de grains de riz disponibles : "))
2| S=1
3| n=0
4| while S<=R :
5|     n= n+1
6|     S=S+2**n
7| print("Nombre de cases remplies : ", n )
```

Exercice 12 $f : x \longmapsto 3x^2 - 5$

(a)
```
1| M=float(input("Borne à dépasser : "))
2| f=-5
3| n=0
4| while f<=M :
5|     n=n+1
6|     f=3*n**2-5
7| print("L'image de ",n," par f est strictement plus grande que ",M)
```

(b) Afin d'obtenir le premier multiple de $\frac{1}{2}$, il suffit de remplacer la ligne 5 par `n=n+0.5`.

Exercice 13 La fonction `airect` suivante donne l'aire d'un rectangle en fonction de la longueur de ses côtés.

```
1| def airect(l,L) :
```

```
2|    a=l*L
3|    return a
```

Exercice 14

(a) La fonction so calcule la somme des entiers entre 0 et N.

(b) La fonction pr suivante calcule le produit des entiers entre 1 et N.

```
1| def pr(N) :
2|    P=1
3|    for i in range(1,N+1) :
4|       P=P*i
5|    return P
```

Exercice 15 La fonction `nbfois` détermine le nombre d'apparition d'un caractère dans une chaîne de caractères.

```
1| def nbfois(caract,chain) :   # doivent être mis entre " et "
2|    l=len(chain)   # nombre de caractères dans la chaîne
3|    n=0
4|    for i in range(0,l) :   # ou range(l)
5|       if chain[i]== caract :
    # si le caractère de rang i est caract
6| # Rq : le premier caractère d'une chaîne est de rang 0 et le
   dernier, de rang len−1
7|          n=n+1
8|    return n
```

Exercice 16

(a)
```
1| def opposé(x) :
2|    return -x
```

(b)
```
1| def valabs(x):
2|    if x<0 :
3|       return -x
4|    else :
5|       return x
```

(c)
```
1| def max2(a,b) :
2|    if a<b :
3|       return b
4|    else :
5|       return a
```

(d)
```
1| def max5(a,b,c,d,e) :
2|    M=max2(a,max2(b,
        max2(c,max2(d,e))))
3|    return M
```

(e)
```
1| def puissmin(a,A) :
2|    n=0
3|    while a**n<A :
4|       n=n+1
5|    return(n)
```

Exercice 17 On va utiliser les fonctions `max2` et `valabs` de l'exercice précédent.

```
1| def monmaxf(x) :
```

CORRIGÉS

```
2|    f=3*x**2-2*x-4
3|    m=max2(f,valabs(x))
4|    if m==f :
5|       return print("Le maximum est l'image ",m)
6|    else :
7|       return print("Le maximum est l'antécédent ", m)
```

Exercice 18 Algorithme d'Euclide

```
1| def EuclideClassique(a,b) :
     # algorithme classique du pgcd de a et b
2|    while a%b != 0 :
3|    # le % donne le reste de la division euclidienne, != teste si
  différent
4|       a, b = b, a%b
5|    # on change les valeurs de a et b en même temps, cela évite de
  sauver l'ancien a pour l'utiliser dans le nouveau b
6|    return b
1| def EuclideRécursif(a,b) : # algorithme récursif du pgcd de a et b
2|    if (b==0) :
3|       return(a)
4|    else :
5|       r=a%b
6|       return EuclideRécursif(b,r)
```

Exercice 19 Cette fonction donne le nombre d'objets numériques ou bouléens (True valant 1 et False valant 0) de la liste ayant une valeur supérieure ou égale à la valeur en argument.

Exercice 20

A. `L=[i**2 for i in range(6)]` crée la liste des carrés des six premiers entiers (de 0 à 5).

B. `L=[i**3 for i in range(13)]` crée la liste des cubes des entiers jusqu'à douze.

C. (a) `L=[9-k for k in range(7)]` donne la liste `[9,8,7,6,5,4,3]`.

(b) `M=[6]*5` donne la liste `[6,6,6,6,6]`.

(c) `N=[randint(1,6) for i in range(8)]` donne une liste aléatoire de huit entiers entre 1 et 6.

(d) `M[2]=1` remplace l'objet de rang 2 (le troisième) par un 1 dans la liste `M`.

(e) `P=M+N` puis `P.sort()` crée la liste concaténée de `M` suivie de `N` puis la réorganise par ordre croissant.
La liste `P` est ici `[1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6]`.

(f) `X=[0.5*i for i in range(-5,5)]` crée la liste des multiples de $\frac{1}{2}$ dans $\left[-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right[$.
`Y=[3*x**2-5 for x in X]` crée la liste des images de ces mêmes multiples par $f(x)=3x^2-5$.

Exercice 21 La fonction suivante calcule la somme des objets d'une liste de nombres. Remarquons que la fonction intégrée `sum()` aurait donné le même résultat.

```
def sommeliste(L) :
    s=0
    for v in L :
        s=s+v
    return s
```

Exercice 22 Cette fonction affiche la liste des diviseurs d'un entier naturel.

```
def listediv(n) :
    div=[]
    for i in range(1,n+1) :
        if n
            div.append(i)
    print(div)
```

Exercice 23 Le programme suivant échange la place de deux objets d'une liste.

```
def echange(i,j,L) :
    if i>len(L) or j>=len(L) :
   # afin de ne pas dépasser les dimensions de la liste
        print("Liste trop courte")
    else :
        L[i],L[j]=L[j],L[i]   # échange simultané, c'est pratique
    return L
```

Exercice 24 Les notes de Colette en mathématiques sont données par ce programme.

```
def notesaugementées(n) :
    L=[]
    d=n
    while d<20 :
        L.append(d)
        d=1.02*d
    L.append(20)
    return L
```

Foire de l'algo

1. On obtient 2, 1 puis -7. L'algorithme (A) affiche l'image de Z par la fonction $f(x) = 2 - x^2$.

2. On obtient 359, 1079 puis 71. L'algorithme (B) affiche l'image de S par la fonction $192x^2 + 528x + 359$. Il est bien plus simple de reprendre alors l'algorithme (A) avec cette fonction f.

3. L'algorithme (C) affiche u_N pour $u_n = 7 \times (\frac{3}{4})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$U \longleftarrow 7$	$U \longleftarrow \frac{3}{4} \times 7$	$U \longleftarrow 7(\frac{3}{4})^3$
$N \longleftarrow 3$	$I \longleftarrow 2$	Fin Pour
Début Pour	$U \longleftarrow \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times 7$	"$\frac{189}{64}$"
$I \longleftarrow 1$	$I \longleftarrow 3$	

4. L'algorithme (D) affiche $v_2, v_3, ...v_P$ pour $v_1 = -3$, $v_{n+1} = v_n + 4$, $\forall n \geqslant 1$.

$P \longleftarrow 5$	$K \longleftarrow 3$	$K \longleftarrow 5$
$V \longleftarrow -3$	$V \longleftarrow 4 + 1 = 5$	$V \longleftarrow 4 + 9 = 13$
Début Pour	"5"	"13"
$K \longleftarrow 2$	$K \longleftarrow 4$	FinPour
$V \longleftarrow 4 - 3 = 1$	$V \longleftarrow 4 + 5 = 9$	
"1"	"9"	

5. • L'algorithme (E) affiche u_N pour $u_0 = 4$, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 2$, $\forall n \geqslant 0$.

$U \longleftarrow 4$	$I \longleftarrow 1 + 1 = 2$
$I \longleftarrow 0$	$U \longleftarrow \frac{2}{5} \times \frac{18}{5} + 2 = \frac{86}{25}$
$N \longleftarrow 3$	$2 < 3$
Début Tantque	$I \longleftarrow 2 + 1 = 3$
$0 < 3$	$U \longleftarrow \frac{2}{5} \times \frac{86}{25} + 2 = \frac{422}{125}$
$I \longleftarrow 0 + 1 = 1$	$3 \geqslant 3$
$U \longleftarrow \frac{2}{5} \times 4 + 2 = \frac{18}{5}$	FinTantque
$1 < 3$	"$\frac{422}{125}$"

• L'algorithme (F) affiche le premier multiple positif de $\frac{1}{2}$ tel que $f(X) = X^2 + 2 \geqslant A$.

$X \longleftarrow 0$	$\frac{9}{4} < 4$	FinTantque (pour $A = 4$)
$F \longleftarrow 2$	$X \longleftarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$	"$\frac{3}{2}$"
$A \longleftarrow 4$	$F \longleftarrow 1^2 + 2 = 3$	
Début Tantque	$3 < 4$	Pour $A = 10$, on continue jusqu'à $X = 3$.
$2 < 4$	$X \longleftarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	
$X \longleftarrow 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$F \longleftarrow (\frac{3}{2})^2 + 2 = \frac{17}{4}$	
$F \longleftarrow (\frac{1}{2})^2 + 2 = \frac{9}{4}$	$\frac{17}{4} \geqslant 4$	

• L'algorithme (G) affiche les $N + 1$ premières décimales de π (pour peu qu'on les connaisse auparavant).

$P \longleftarrow \pi = 3,14159...$	$D \longleftarrow Ent(\pi) = 3$
$N \longleftarrow 4$	$P \longleftarrow 10(\pi - 3) = 1,4159...$
Début Pour	"3"
$I \longleftarrow 0$	$I \longleftarrow 1$

$D \longleftarrow Ent(1, 4159...) = 1$
$P \longleftarrow 10(1, 4159... - 1) = 4, 159...$
"1"
$I \longleftarrow 2$
$D \longleftarrow Ent(4, 159...) = 4$
$P \longleftarrow 10(4, 159... - 4) = 1, 59...$
"4"
$I \longleftarrow 3$

$D \longleftarrow Ent(1, 59...) = 1$
$P \longleftarrow 10(1, 59... - 1) = 5, 9...$
"1"
$I \longleftarrow 4$
$D \longleftarrow Ent(5, 9...) = 5$
$P \longleftarrow 10(5, 9... - 5) = 9, ...$
"5"
FinPour

6. (a) Si K va de 1 à P alors, (D) affiche v_1, v_2,...v_P pour $v_0 = -3$, $v_{n+1} = v_n + 4$.

(b) Si on affecte 1 à I, alors (E) affiche u_N pour $u_1 = 4$, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 2, \forall n \geqslant 1$.

7. (a) La boucle *Tantque* de (E) devient « Pour I allant de 1 à N, $U \longleftarrow \frac{2}{5}U + 2$, Fin Pour », sans initialisation de I.

(b) Dans l'algorithme (F), on ne peut transformer la boucle *Tant que* en boucle *Pour* car on ne sait pas à l'avance à partir de quel multiple de $\frac{1}{2}$ la fonction f « dépasse » la borne A que l'on saisit.

(c) (C) : $I \in \mathbb{N}$, Init. : $I \longleftarrow 0$, Boucle : Tant que $I < N$, $I \longleftarrow I + 1$, $U \longleftarrow \frac{3}{4}U$, Fin Tantque.
(D) : $K \geqslant 1$, Init. : $K \longleftarrow 1$, Boucle : Tant que $K < P$, $K \longleftarrow K + 1$, $V \longleftarrow 4 + V$, Fin Tantque.

8. L'algorithme (H) est celui du discriminant d'un trinôme du second degré dans $\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Algo (H)
Saisir $A \neq 0$, B et C
$D \longleftarrow B^2 - 4AC$ à D
Si $D > 0$, Alors
  $U \longleftarrow \frac{-B-\sqrt{D}}{2A}$ et $V \longleftarrow \frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$
  Afficher "Deux racines réelles :" U "et" V "."
Sinon
  Si $D = 0$, Alors
    $U \longleftarrow \frac{-B}{2A}$
    Afficher "Une racine réelle double :" U "."
  Sinon
    Afficher "Pas de racine réelle."
  Fin Si
Fin Si

9. (I) : A n'est pas initialisé alors que B l'est sans que ce soit nécessaire. On peut donc « Affecter 2 à A » plutôt qu'à B. Par ailleurs, N ne doit pas être nul et l'initialisation de K est inutile tout comme cet algorithme qui affichera toujours $3 - 2 = 1$.
(J) : C n'est pas déclaré et K n'est pas initialisé à 0. Cet algorithme affichera toujours 0 ce qui est extrêmement inutile.
(K) : Il faut « Saisir N ($\geqslant 1$) » et la variable s'appelle K et non I. Cet algorithme affiche alors les termes f_1, f_2, ..., f_N de l'historique suite de Fibonacci : $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

(L) : Il manque l'incrémentation « $I \longleftarrow I+1$ » dans la boucle. Cet algorithme affiche les valeurs successives de la suite $u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}+u_n}{2}$.

(M) donne le premier entier naturel pour lequel la fonction $f(x) = 1 - x^3$ dépasse A. Le problème est que f est décroissante et ceci n'est donc pas pertinent du tout : cela donne généralement 0 ou pire, l'algorithme tourne à l'infini si $A > 1$. Il faut donc mieux imposer A négatif et faire un test « Tant que $F > A$ » pour voir quand elle passe en dessous.

10. L'algorithme (N) affiche une valeur approchée d'une racine de la fonction f sur l'intervalle $[\,A\,;B\,]$ par la *méthode de dichotomie*. Le réel strictement positif E donne la précision de l'approximation.

La fonction f doit être continue et monotone (Théorème des valeurs intermédiaires !). Pour f croissante, on affecte I à B lorsque $f(I)$ est positif et I à A lorsque $f(I)$ est négatif. On inverse B et A lorsque f est décroissante.

Si $f(A) \times f(B) < 0$, f change de signe entre A et B et s'annule donc : ce test est nécessaire.

Il est à noter que f n'admet pas nécessairement une unique racine et l'algorithme ne donne pas le même résultat selon les valeurs de A et de B saisies.

Vous avez peut-être besoin des explications de votre professeur alors, n'hésitez pas.

11. Voici des algorithmes répondant aux problèmes posés.

Algo (a)
Saisir X
$X \longleftarrow 3X^2 - 5\cos(X) + 7$
Afficher X

Algo (b)
Saisir xA, yA, xB et yB
$xA \longleftarrow \frac{xA+xB}{2}$
$yA \longleftarrow \frac{yA+yB}{2}$
Afficher xA et yA

Algo (c)
Saisir P
Pour I allant de 0 à P
  $U \longleftarrow I^2 - 3I + 4$
  Afficher U
Fin Pour

Algo (d)
$V \longleftarrow 5$
Saisir N ($\geqslant 1$)
Pour K allant de 1 à N
  $V \longleftarrow 2V - 3$
Fin Pour
Afficher V

Algo (e)
$W \longleftarrow 5$
$U \longleftarrow 4$
Saisir N ($\geqslant 2$)
Pour K allant de 1 à $N-1$
  $V \longleftarrow W$
  $W \longleftarrow 3U - 2W$
  $U \longleftarrow V$
Fin Pour
Afficher W

Algo (f)
Saisir Xu, Yu, Xv et Yv
$S \longleftarrow Xu \times Xv + Yu \times Yv$
Afficher "Leur produit scalaire est" S
Si $S = 0$, Alors
  Afficher "et ils sont orthogonaux"
Fin Si

```
Algo (g)
N ⟵ Aléat(0; 100)
I ⟵ 0
Tant que I < 101
   I ⟵ I + 1
   Saisir E
   Si E = N, Alors
      Afficher "Bravo !"
   Sinon
      Si E > N, Alors
         Si E ⩾ 101, Alors
            Afficher "Tu n'as rien compris !"
         Sinon
            Afficher "Trop grand !"
         Fin Si
      Sinon
         Afficher "Trop petit !"
      Fin Si
   Fin Si
Fin Tant que
Si I ⩾ 101, Alors
   Afficher "Tu n'es vraiment pas très doué !"
Fin Si
```

12. Voici le programme du "discriminant réel" sur une T.I.

Commentaires	**T.I.**
Écriture du programme	PROGRAM :DEGRE2
Initialisation	
Commencer par effacer l'écran	: ClrHome
Entrées	
Demander la valeur de a	: Prompt A
Demander la valeur de b	: Prompt B
Demander la valeur de c	: Prompt C
Traitement	
Calculer Δ *et Affecter la valeur à D*	: B^2-4×A×C → D
Afficher D	: Disp D
Si Δ *est strictement négatif*	: If D < 0
Alors	: Then
Afficher "Pas de solution réelle"	: Disp "Pas de solution réelle"
Fin de si	: End
Si Δ *est nul*	: If D = 0
Alors	: Then
Afficher "1 solution double"	: Disp "1 solution double"
Calculer la solution et affecter la valeur à X	: -B/(2A)→ X
Afficher la valeur de X	: Disp X
Fin de si	: End
Si Δ *est strictement positif*	: If D > 0
Alors	: Then
Afficher "2 solutions réelles"	: Disp "2 solutions réelles"
Calculer la première solution et affecter la valeur à X	: (-B - $\sqrt{D}$)/(2A) → X
Afficher la valeur de X	: Disp X
Calculer la deuxième solution et affecter la valeur à X	: (-B - $\sqrt{D}$)/(2A) → X
Afficher la valeur de X	: Disp X
Fin de si	: End

CORRIGÉS

Cahier β

EN TOUTE LOGIQUE

Sommaire

1 Diagrammes de Venn 313
2 Ensembles 316
3 Logique 318
3.1 Propositions 318
3.2 Implication 319
3.3 Équivalence 320
3.4 Exercices 320
4 Solutions 322

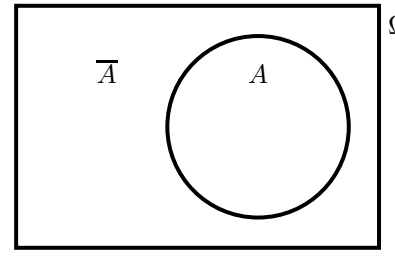
Ce cahier est fondamental pour votre scolarité et votre vie.

1 Diagrammes de Venn

Les diagrammes de Venn, ou diagrammes *en patates*, sont des représentations graphiques des relations entre plusieurs ensembles. Chaque ensemble est représenté par une forme géométrique simple comme un cercle, une ellipse ou un rectangle.

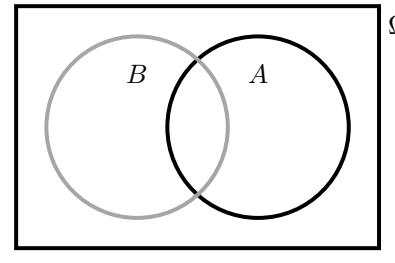
Un ensemble dans l'univers

Dans ce premier exemple, nous voyons Ω (l'intérieur du rectangle) et A, un *sous-ensemble* de Ω (l'intérieur du cercle). Le *complémentaire* de A, noté $\overline{A}$, est la partie du rectangle qui n'est pas dans le cercle.



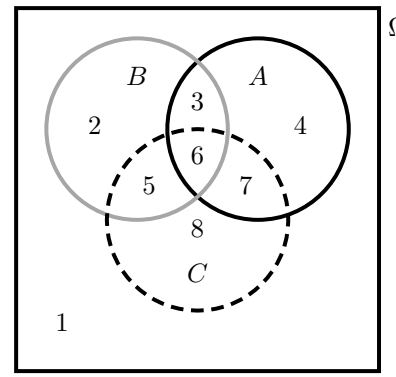
Deux ensembles dans l'univers

Dans ce second exemple, nous voyons l'univers Ω et deux sous-ensembles de Ω, A et B. L'*intersection* $A \cap B$ des deux ensembles est leur partie commune, ce qui est dans les deux cercles en même temps. L'*union* $A \cup B$ des deux ensembles est ce qui se situe dans au moins un des deux cercles, intersection incluse donc.



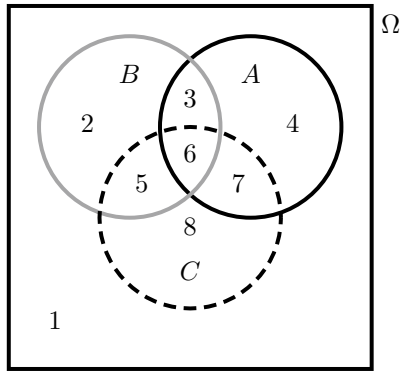
Trois ensembles dans l'univers

Dans ce troisième exemple, nous voyons l'univers Ω et trois sous-ensembles de Ω, A, B et C. Toutes les intersections et unions de deux ou trois de ces ensembles ainsi que leur complémentaire, y sont représentées.
Par exemple, la region 3 est $(A \cap B) \cap \overline{C}$, tandis que $(\overline{A} \cup B) \cap C$ est constitué des régions 5, 6 et 8.



Exercice 1

Décrire les différentes régions au moyen d'unions et d'intersections des ensembles A, B, C ainsi que leur complémentaire, et réciproquement.



(a) 1.
(b) 2.
(c) 3.
(d) 4.
(e) 5.
(f) 6.
(g) 7.
(h) 8.
(i) 3 et 6.
(j) 8 et 3.
(k) 5 et 7.
(l) 6 et 8.
(m) 1 et 7.
(n) $\overline{A \cap C}$.
(o) $\overline{A} \cup \overline{C}$.
(p) $\overline{B \cup C}$.
(q) $\overline{B} \cap \overline{C}$.
(r) $(B \cap C) \cup A$.
(s) $B \cap (C \cup A)$.
(t) $(B \cup A) \cap (C \cup A)$.
(u) $(B \cup C) \cap A$.
(v) $B \cup (C \cap A)$.
(w) $(B \cap A) \cup (C \cap A)$.
(x) $(\overline{A} \cup B) \cap C$.
(y) $\overline{B \cup C} \cap \overline{A}$.
(z) $\overline{\overline{A \cap C} \cup B}$.

Vous aurez donc remarqué que l'on a toujours $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$.

Exercice 2

Faire correspondre à chacun de ces ensembles, son diagramme de Venn parmi ceux des pages suivantes. Les décrire ensuite en termes d'unions et d'intersections.

A. Fonctions affines et fonctions trigonométriques telles que $f(0) = 0$.

B. Triangles isocèles non équilatéraux.

C. Parmi les réels, les entiers naturels et les nombres irrationnels.

D. Les entiers naturels qui ne sont ni multiples de 2 ni de 3.

E. Parallélogrammes dont les diagonales n'ont pas même longueur et ne sont pas perpendiculaires.

F. Parallélogrammes dont les diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires ou ni l'un, ni l'autre.

G. Entiers multiples de 7 ou de 2 mais pas de 14.

H. Parallélogrammes dont les diagonales ont même longueur ou sont perpendiculaires ou ni l'un, ni l'autre mais pas les deux.

I. Les réels n'étant pas décimaux.

J. Les fonctions telles que $f(0) \neq 0$ qui ne sont ni affines, ni trigonométriques.

K. Les nombres réels étant décimaux.

L. Parallélogrammes ayant leurs diagonales de même longueur ou perpendiculaires.

M. Les réels irrationnels ou décimaux.

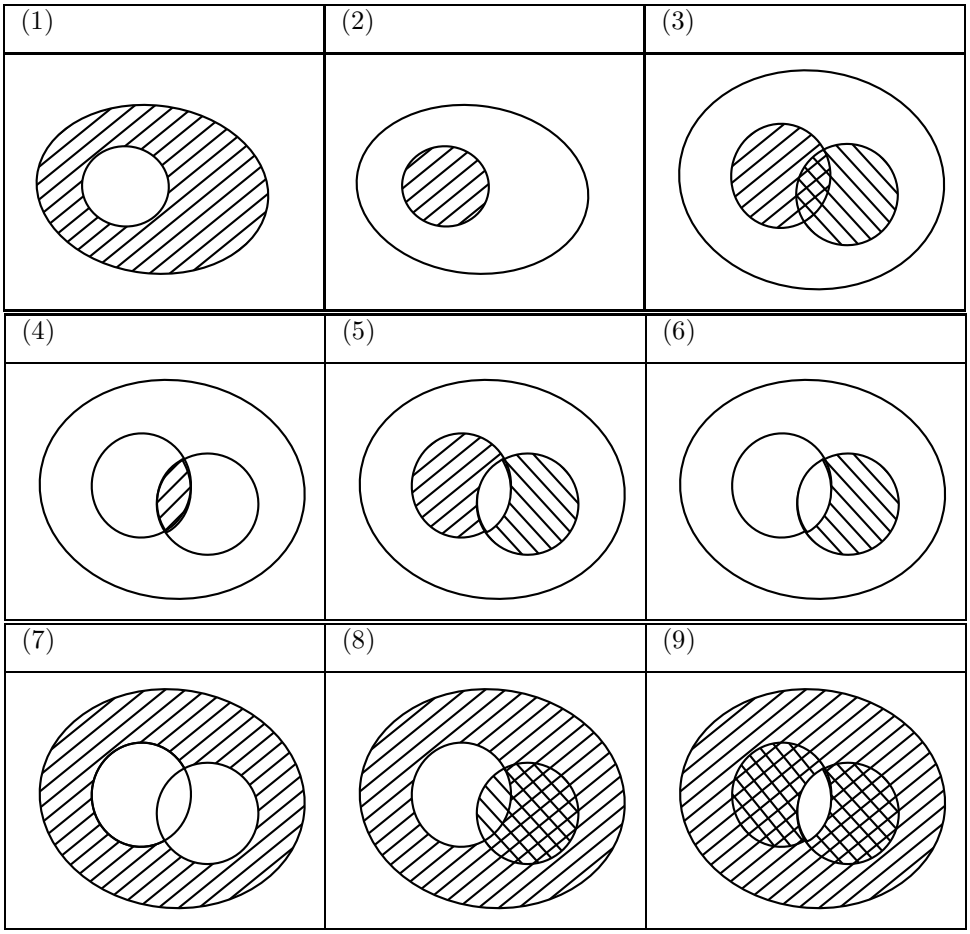
N. Les réels ni irrationnels, ni naturels.

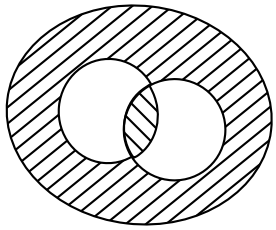
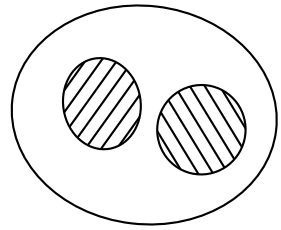
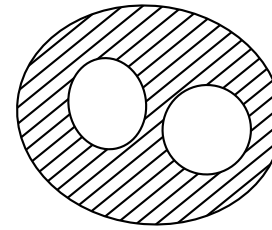
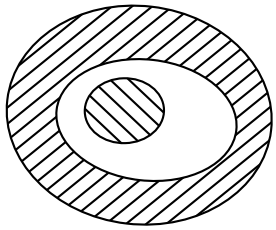
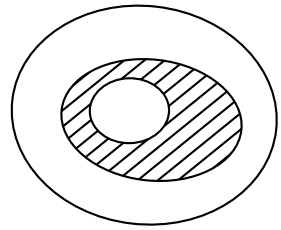
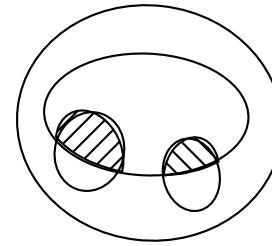
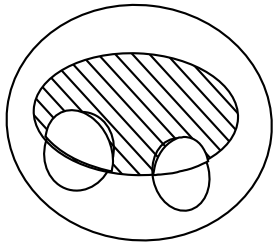
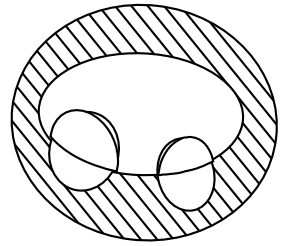
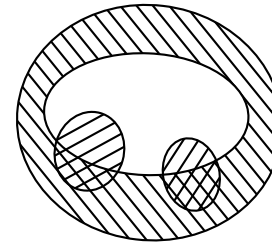
O. Parallélogrammes de diagonales de même longueur et perpendiculaires.

P. Les fonctions telles que $f(0) = 0$ qui ne sont ni affines, ni trigonométriques.

Q. Les fonctions affines, trigonométriques ou les fonctions telles que $f(0) \neq 0$.

R. Les entiers multiples de 7 qui ne sont pas pairs.



(10)	(11)	(12)
		
(13)	(14)	(15)
		
(16)	(17)	(18)
		

2 Ensembles

Vocabulaire

Notations ensemblistes

$\{\ldots\}$: un ensemble.
: ou | ou / : "tel que" (tq.).
$\setminus$: "privé de", $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ensembles de nombres

$\mathbb{N}$: les entiers naturels.
$\mathbb{Z}$: les entiers relatifs
$\mathbb{D}$: les nombre décimaux.

$\mathbb{Q}$: les nombres rationnels.

$\mathbb{R}$: les nombres réels.

$\mathbb{R}^*$: les réels non nuls.

$\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+$: les réels positifs.

$\mathbb{R}^-$ ou $\mathbb{R}_-$: les réels négatifs.

$\mathbb{R}_+^*$: les réels strictement positifs.

Ensemble, sous-ensembles, éléments

$\cap$: l'intersections de deux ensembles.

$\cup$: l'union de deux ensembles.

$\in$: "appartient à" ou "est un élément de".

$\subset$: "est un sous-ensemble de".

Opérateurs logiques

$\neg$: la négation d'une proposition, "non".

$\wedge$: la conjonction de deux proposition, "et".

$\vee$: la disjonction de deux propositions, "ou".

$\forall$: "pour tout".

$\exists$: "il existe".

$\exists!$: "il existe un unique".

$\nexists$: "il n'existe pas".

Un ensemble E est défini si, et seulement si, l'assertion $(x \in E) \wedge \neg(x \in E)$ est fausse.

Exercice 3 Faire correspondre chaque liste de nombres (à droite) avec l'ensemble qui la contient (à gauche).

$\{2k+1 \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ ... A

$\left\{n \ : \ n \in \mathbb{Z} \wedge \dfrac{12}{n} \in \mathbb{Z}\right\}$ ... B

$\{n^2 \ : \ n \in \mathbb{N} \cap [\,0\,;5\,]\}$ ... C

$\{3k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ ... D

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ 3x \in \mathbb{Z}\}$ ... E

$\{a+bi \ : \ a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$ ... F

$\{7k+1 \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$ ... G

$\{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists m \in \mathbb{Z}, m^2 = n\}$ ... H

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 = x\}$ ... I

$\{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \wedge xq = p\}$ ... J

$\{r \in \mathbb{R} \ : \ \exists k \in \mathbb{Z}, r^2 = k\}$ ... K

$\{n \in \mathbb{Z} \ : \ |n| \leqslant 5\}$ ... L

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \leqslant 5\}$ ... M

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ \forall y \in \mathbb{N}, x \leqslant y\}$ ... N

$\{(x;y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \ x+y=7\}$ ... O

$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leqslant -3 \vee \ x \geqslant 5\}$ ... P

$\{n \in \mathbb{Z} \ : \ \forall m \in \mathbb{Z}, n > m\}$ ... Q

$\left\{n \in \mathbb{N} : \nexists m \in \mathbb{N} \setminus \{1;n\}, \dfrac{n}{m} \in \mathbb{N}\right\}$ ... R

$\{(x;y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \ xy \leqslant 6\}$ ... S

$\{(x;y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \ y = 2x\}$ ... T

a ... 6, 21, 336, 4272

b ... $3+5i$, $\sqrt{2}-i$, 17, $-1+\pi i$

c ... -5, -2π, $-\frac{4}{7}$, -0.0001

d ... 0, 1, 9, 16

e ... -5, $-\sqrt{19}$, 17.25, 5

f ... 0, 9, 81, 196

g ... $\frac{12}{7}$, $-\frac{2}{3}$, 42, $\frac{-28}{2}$

h ... 3, 6, -12, 1

i ... 17, 2, 5, 43, 199

j ... 5, $\sqrt{2}$, -13, $\sqrt{13}$

k ... $(2;2)$; $(1;5)$; $(3;1)$; $(1;1)$

l ... -4, -2, 0, 3

m ... $\frac{7}{3}$, -17, $-\frac{52}{3}$, 0

n ... 0, 1

o ... -7, -3, 5, 17

p ... $(3;6)$; $(12;24)$; $(5;10)$; $(131;262)$

q ... $(2;5)$; $(1;6)$; $(4;3)$; $(3;4)$

r ... $\sqrt{2}$, $-\pi$, 2.256, -4.99

s ... -20, 1, 50, 778

t ... $\varnothing$

EXERCICES

Paradoxe de Russell †

L'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ?

Si l'on répond oui, alors, comme par définition les membres de cet ensemble n'appartiennent pas à eux-mêmes, il n'appartient pas à lui-même : contradiction. Mais si l'on répond non, alors il a la propriété requise pour appartenir à lui-même : contradiction de nouveau. On a donc une contradiction dans les deux cas, ce qui rend l'existence d'un tel ensemble paradoxale.

Plus formellement, si l'on pose $y = \{x \mid x \notin x\}$, on a immédiatement que $y \in y \iff y \notin y$ donc chacune des deux possibilités, $y \in y$ et $y \notin y$, mène à une contradiction.

Et de façon plus imagée : *Un barbier se propose de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Le barbier doit-il se raser lui-même ?*

3 Logique

3.1 Propositions

Définition 1 *Une proposition est une affirmation qui peut être vraie ou fausse, mais qui ne peut être les deux en même temps ou ni l'un ni l'autre.*

Exemples : Considérons les trois propositions suivantes :

- $\mathscr{P}_1$: « $x + 2 = 2 + x$ ».
- $\mathscr{P}_2$: « $2 \times 3 = 7$ ».
- $\mathscr{P}_3$: « $x^2 = 9$ ».

∗ La proposition $\mathscr{P}_1$ est toujours vraie.

∗ La proposition $\mathscr{P}_2$ est toujours fausse.

∗ La proposition $\mathscr{P}_3$ peut être vraie ou fausse suivant les valeurs de x : si $x = 3$, elle est vraie, si $x = -3$, elle est vraie et elle est fausse dans tous les autres cas.

Exercice 4 Les trois propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?

- $\mathscr{P}_4$: « $x - 2$ est strictement plus grand que x ».
- $\mathscr{P}_5$: « $2x$ est plus grand ou égal à x ».
- $\mathscr{P}_6$: « le carré d'un nombre pair est pair ».

Exercice 5 Énoncer une affirmation qui n'est pas une proposition.

Définition 2 *La négation d'une proposition, notée « non $\mathscr{P}$ » ou « $\neg\mathscr{P}$ », est une proposition qui est fausse lorsque $\mathscr{P}$ est vraie et qui est vraie lorsque $\mathscr{P}$ est fausse.*

Remarque : La proposition $\neg(\neg\mathscr{P})$ est précisément $\mathscr{P}$.

Exercice 6 Établir la négation des propositions $\mathscr{P}_1$ à $\mathscr{P}_6$. Sont-elles toujours vraies ?

†. Publié en 1903 par Bertrand Russell (1872–1970), troisième comte du nom. Mathématicien, logicien, épistémologue, écrivain (Nobel 1950), homme politique (membre du Parlement britannique) et moraliste gallois, Russell est considéré comme l'un des plus importants philosophes du XX^{e}s.

Exercice 7 Établir la négation des propositions suivantes. Lesquelles sont vraies ?

- $\mathscr{P}_7$: $\forall a \in \mathbb{R},\ a^2 > 0$.
- $\mathscr{P}_8$: $\exists b \in \mathbb{R}^+$ tq. $b - 3 < 0$.
- $\mathscr{P}_9$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tq. $x \leqslant y$.
- $\mathscr{P}_{10}$: $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ tq. $\forall \beta \in \mathbb{R},\ \beta^2 - \alpha < 0$.

Toutefois, il existe des propositions *indécidables*, dont on ne peut affirmer si elles sont vraies ou fausses. C'est un fameux résultat du mathématicien Kurt Gödel (1906-1978) et je ne peux que vous conseiller de lire *La Déesse des petites victoires*, brillant roman de Yannick Grannec autour de ce personnage.

3.2 Implication

Définition 3 *Pour affirmer que « si $\mathscr{P}$ (est vraie), alors $\mathscr{Q}$ (est vraie) », les mathématiciens disent que "$\mathscr{P}$ implique $\mathscr{Q}$" et écrivent $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$. $\mathscr{P}$ est la condition suffisante (l'hypothèse) et $\mathscr{Q}$ est la condition nécessaire (la conclusion).*

Exemples :
- Si $\underbrace{x = 3}_{\mathscr{P}}$, alors $\underbrace{x^2 = 9}_{\mathscr{Q}}$.
- Si $\underbrace{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}_{\mathscr{P}}$, alors $\underbrace{ABDC \text{ est un parallélogramme}}_{\mathscr{Q}}$.

Définition 4
L'implication $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ est appelée l'implication réciproque de $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$.
L'implication non $\mathscr{Q} \Longrightarrow$ non $\mathscr{P}$ est appelée la contraposée de $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$.

Exercice 8 VouF ?

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$	$\neg\mathscr{Q} \Rightarrow \neg\mathscr{P}$	$\neg\mathscr{P} \Rightarrow \neg\mathscr{Q}$
n est premier	$n = 3$				
$x \in \mathbb{D}$	$x \in \mathbb{Q}$				
$ab = 9$	$a = 3$ et $b = 3$				
$x \geqslant 2$	$x \geqslant 3$				
$x > 0$	$x \geqslant 0$				
$x < 0$	$x^3 < 0$				

Propriété 1
Si l'implication $(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q})$ est vraie,
alors sa contraposée $(non\ \mathscr{Q} \Rightarrow non\ \mathscr{P})$ est vraie.

Exercice 9 Quelle est la contraposée de l'implication $(non\ \mathscr{Q} \Rightarrow non\ \mathscr{P})$?

EXERCICES

3.3 Équivalence

Définition 5
Deux propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont dites équivalentes si $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ *et* $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$.
Si $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$, *alors* $\mathscr{P}$ *est vraie si, et seulement si,* $\mathscr{Q}$ *est vraie.*

Exemples : • $\underbrace{x = 3}_{\mathscr{P}} \iff \underbrace{2x = 6}_{\mathscr{Q}}$.

• Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$.
$\underbrace{M \text{ est un point de } \mathscr{C} \text{ différent de } A \text{ et } B}_{\mathscr{P}}$ si, et seulement si, $\underbrace{\widehat{AMB} = 90°}_{\mathscr{Q}}$.

Exercice 10 Donner un exemple d'implication qui n'est pas une équivalence.

3.4 Exercices

Exercice 11 Très facile

A. La phrase suivante est supposée vraie :
"Si la télé est allumée, alors il y a nécessairement quelqu'un qui la regarde."
Choisir la réponse correcte pour chaque question.

1. La télé est allumée. Quelqu'un la regarde-t-il ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
2. Personne ne regarde la télé. Est-elle allumée ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
3. La télé est éteinte. Quelqu'un la regarde-t-il ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
4. Quelqu'un regarde la télé. Est-elle allumée ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.

B. Même consigne pour la phrase : "L'équation (E) n'a pas de solution negative."

1. Est-ce que -2 est une solution de (E) ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
2. a est une solution de (E). Est-ce que a est négatif ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
3. 3 est-il une solution de (E) ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
4. b n'est pas une solution de (E). Est-ce que b est négatif ?
   A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.

Exercice 12 Facile
Compléter par « donc » ou « car ».

1. J'ai eu un accident ... j'ai grillé un feu rouge.
2. Il est malade ... il ne viendra pas.
3. J'ai eu un cadeau ... c'est mon anniversaire.

4. Je ne suis pas européen ... je ne suis pas allemand.
5. Jean est triste ... c'est la fin des vacances.
6. Il pleut ... la fête est annulée.
7. (AB) et (CD) sont parallèles ... $ABCD$ est un parallélogramme.
8. $ABCD$ possède deux angles droits ... c'est un rectangle.
9. Le triangle ABC est équilatéral ... il est isocèle.
10. $y^2 = 25$ ... $y = 5$.
11. $x \in [-1\,;4]$ ... $x \in [-2\,;5]$.
12. $u^2 \geqslant 49$ ... $u \geqslant 7$.
13. $\sqrt{x} \leqslant 6$ ... $x \leqslant 36$.

Exercice 13 Pas si facile

Préciser si les implications et équivalences suivantes sont vraies ou fausses.

A	B	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$	$A \Longleftrightarrow B$
Je vis en France	Je vis en Europe			
Je suis un adolescent	J'ai 16 ans			
$CDEF$ parallélogramme	$CDEF$ carré			
MNP rectangle en M	$MP^2 + MN^2 = NP^2$			
$x \in \mathbb{N}$	$x \in \mathbb{Z}$			
$a + b = 5$	$a = 2$ et $b = 3$			
$4x - (x - 5) = 11$	$x = 2$			
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ et $cx + d = 0$			
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$			

Exercice 14 Peu difficile

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse.

- Pour prouver qu'elle est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.
- Pour prouver qu'elle est vraie, il est nécessaire de trouver une démonstration.

1. Si $x^2 \geqslant 4$ alors $x \geqslant 2$.
2. Pour tous réels x et y, $(x + y)^3 = x^3 + y^3$.
3. Pour tout réel x, le réel $-10x$ est négatif.
4. Il existe une équation n'ayant aucune solution réelle.
5. Il existe une équation ayant cinq solutions réelles distinctes.
6. Si a et b sont deux entiers naturels, alors $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$ est un entier naturel.

Exercice 15 Assez difficile

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.
Démontrer que, si $(a^2 - b^2)$ est premier, alors a et b sont consécutifs.
La réciproque est-elle vraie ?

Bonus Très plaisant

Faites-vous donc offrir puis lisez le petit *Éloge des mathématiques* d'Alain Badiou qui nous explique avec ravissement pourquoi l'on se passionne logiquement pour cette discipline.

4 Solutions

Exercice 1

Ces solutions ne sont pas toujours uniques et vous pouvez en avoir trouvé d'autres.

(a) $1 : \overline{A \cup B \cup C}$.
(b) $2 : B \cap \overline{A \cup C}$.
(c) $3 : A \cap B \cap \overline{C}$.
(d) $4 : A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
(e) $5 : B \cap C \cap \overline{A}$.
(f) $6 : A \cap B \cap C$.
(g) $7 : A \cap C \cap \overline{B}$.
(h) $8 : C \cap \overline{A \cup B}$.
(i) 3 et $6 : A \cap B$.
(j) 8 et $3 : (C \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$.
(k) 5 et 7 : $[(C \cap A) \cup (C \cap B)] \cap (\overline{A \cap B})$.
(l) 6 et $8 : (C \cap \overline{A \cup B}) \cup (A \cap B \cap C)$.
(m) 1 et $7 : (\overline{A \cup B \cup C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$.

(n) $\overline{A \cap C}$: 1, 2, 3, 4, 5 et 8.
(o) $\overline{A} \cup \overline{C}$: 1, 2, 3, 4, 5 et 8.
(p) $\overline{B \cup C}$: 1 et 4.
(q) $\overline{B} \cap \overline{C}$: 1 et 4.
(r) $(B \cap C) \cup A$: 3, 4, 5, 6 et 7.
(s) $B \cap (C \cup A)$: 3, 5, 6.
(t) $(B \cup A) \cap (C \cup A)$: 3, 4, 5, 6, 7.
(u) $(B \cup C) \cap A$: 3, 6, 7.
(v) $B \cup (C \cap A)$: 2, 3, 5, 6, 7.
(w) $(B \cap A) \cup (C \cap A)$: 3, 6, 7.
(x) $(\overline{A} \cup B) \cap C$: 5, 6 et 8.
(y) $\overline{B \cup C} \cap \overline{A}$: 1.
(z) $\overline{\overline{A \cap C} \cup B}$: 7.

Ainsi, on a toujours, $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$.

Exercice 2 Ce qui suit est écrit de manière informelle.

(1) : (I). $\mathbb{R} \setminus \mathbb{D}$.
(2) : (K). $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$.
(3) : (L). $Diag.\text{Égal.} \cup Diag.Perp. \subset Parallélogrammes$.
(4) : (O). $Diag.\text{Égal.} \cap Diag.Perp. \subset Parallélogrammes$.
(5) : (G). $\{Multiples(7) \cup Multiples(2)\} \setminus Multiples(14) \ \subset \mathbb{Z}$.
(6) : (R). $Multiples(7) \setminus Multiples(14) \ \subset \mathbb{Z}$.
(7) : (D). $\mathbb{N} \setminus \{Multiples(2) \cup Multiples(3)\}$.
(8) : (E). $\overline{Rectangles} \cup Losanges \subset Parallélogrammes$.
(9) : (H). $\overline{Carrés} \subset Parallélogrammes$.
(10) : (F). $\overline{Rectangle \cup Losanges} \cup Carrés \subset Parallélogrammes$.
(11) : (C). $\mathbb{N} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$ ou (M). $\mathbb{D} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$.
(12) : (N). $\overline{\mathbb{N}} \cap \overline{Irrationnels} \subset \mathbb{R}$.
(13) : (M). $\mathbb{D} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$ ou (C). $\mathbb{N} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$.
(14) : (B). $Isocèles \setminus \text{Équilatéraux} \subset Triangles$.
(15) : (A). $(Trigos \cup Affines) \cap (0 \mapsto 0)$.

(16) : (P). $\overline{Trigos \cup Affines} \cap (0 \mapsto 0)$

(17) : (J). $\overline{Trigos \cup Affines} \cap \overline{0 \mapsto 0}$

(18) : (Q). $Trigos \cup Affines \cup \overline{0 \mapsto 0}$.

Exercice 3

A - o	D - a	G - s	J - g	M - r	P - e	S - k
B - h	E - m	H - f	K - j	N - c	Q - t	T - p
C - d	F - b	I - n	L - l	O - q	R - i	

Exercice 4

- $\mathscr{P}_4$ « $x-2$ est strictement plus grand que x » : toujours faux puisque $x-2 \leqslant x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $\mathscr{P}_5$ « $2x$ est plus grand ou égal à x » : vrai pour $x \geqslant 0$, faux pour $x < 0$.
- $\mathscr{P}_6$ « le carré d'un nombre pair est pair » : toujours vrai car $(2n)^2 = 4n^2$ pair.

Exercice 5 La phrase « Il fait beau et chaud. » n'est pas une proposition mathématique car elle peut être à la fois vraie et fausse selon les préférences de chacun.
En revanche, c'est une contrepèterie amusante et facile.

Exercice 6

- $\neg\mathscr{P}_1$: « $x+2 \neq 2+x$ » : toujours faux puisque $\mathscr{P}_1$ est toujours vrai.
- $\neg\mathscr{P}_2$: « $2 \times 3 \neq 7$ » : toujours vraie puisque $\mathscr{P}_2$ est toujours fausse.
- $\neg\mathscr{P}_3$: « $x^2 \neq 9$ » : vraie pour $x \neq \pm 3$, fausse si $x = \pm 3$.
- $\neg\mathscr{P}_4$ « $x-2 < x$ » : toujours vraie car $\mathscr{P}_4$ toujours fausse.
- $\neg\mathscr{P}_5$ « $2x$ est strictement plus petit que x » : vrai pour $x < 0$, faux pour $x \geqslant 0$.
- $\neg\mathscr{P}_6$ « le carré d'un pair n'est pas pair » : toujours faux car $\mathscr{P}_6$ toujours vraie.

Exercice 7

- $\neg\mathscr{P}_7 : \exists a \in \mathbb{R},\ a^2 \leqslant 0$ est vraie : $a = 0$ et $a^2 = 0 \leqslant 0$ donc $\mathscr{P}_7$ est fausse.
- $\mathscr{P}_8 : \exists b \in \mathbb{R}^+$ tq. $b - 3 < 0$ est vraie : $b = 1 \in \mathbb{R}^+$ et $b - 3 = -2 < 0$
  donc $\neg\mathscr{P}_8 : \forall b \in \mathbb{R}^+,\ b - 3 \geqslant 0$ est fausse.
- $\mathscr{P}_9 : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}$ tq. $x < y$ est vraie : $y = x + 1 > x$
  donc $\neg\mathscr{P}_9 : \exists x \in \mathbb{R}$ tq. $\forall y \in \mathbb{R},\ x \geqslant y$ est fausse.
- $\neg\mathscr{P}_{10} : \forall \alpha \in \mathbb{R}^+,\ \exists \beta \in \mathbb{R}$ tq. $\beta^2 - \alpha \geqslant 0$ est vraie : $\beta = \sqrt{\alpha}$ et $\beta^2 - \alpha = 0 \geqslant 0$
  donc $\mathscr{P}_{10}$ est fausse.

Exercice 8

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{P}$	$\neg\mathscr{Q} \Rightarrow \neg\mathscr{P}$	$\neg\mathscr{P} \Rightarrow \neg\mathscr{Q}$
n est premier	$n = 3$	F	V	F	V
$x \in \mathbb{D}$	$x \in \mathbb{Q}$	V	F	V	F
$ab = 9$	$a = 3$ et $b = 3$	F	V	F	V
$x \geqslant 2$	$x \geqslant 3$	F	V	F	V
$x > 0$	$x \geqslant 0$	V	F	V	F
$x < 0$	$x^3 < 0$	V	V	V	V

Exercice 9 La contraposée de $\neg\mathscr{Q} \Rightarrow \neg\mathscr{P}$ est $\neg\neg\mathscr{P} \Rightarrow \neg\neg\mathscr{Q}$ *i.e.* $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$.

CORRIGÉS

Exercice 10 Dans l'exercice 8, seul le dernier item concerne une implication qui est aussi une équivalence.

Exercice 11 Très facile

A. 1 - Oui. 2 - Non. 3 - On ne peut savoir. 4 - On ne peut savoir.

B. 1 - Non. 2 - Non. 3 - On ne peut savoir. 4 - On ne peut savoir.

Exercice 12 Facile

1. car	3. car	5. car	7. car	9. donc	11. donc	13. donc
2. donc	4. donc	6. donc	8. car	10. car	12. car	

Exercice 13 Pas si facile

A	B	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$	$A \Longleftrightarrow B$
Je vis en France	Je vis en Europe	Vrai	Faux	Faux
Je suis un adolescent	J'ai 16 ans	Faux	Vrai	Faux
$CDEF$ parallélogramme	$CDEF$ carré	Faux	Vrai	Faux
MNP rectangle en M	$MP^2 + MN^2 = NP^2$	Vrai	Vrai	Vrai
$x \in \mathbb{N}$	$x \in \mathbb{Z}$	Vrai	Faux	Faux
$a + b = 5$	$a = 2$ et $b = 3$	Faux	Vrai	Faux
$4x - (x - 5) = 11$	$x = 2$	Vrai	Vrai	Vrai
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ et $cx + d = 0$	Faux	Vrai	Faux
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$	Vrai	Vrai	Vrai

Exercice 14 Peu difficile

1. Si $x^2 \geqslant 4$ alors $x \geqslant 2$ Faux. $x = -3$ par exemple.
2. Pour tous réels x et y, $(x + y)^3 = x^3 + y^3$: Faux. $x = y = 1$ par exemple.
3. Pour tout réel x, le réel $-10x$ est négatif : Faux. $x = -1$ par exemple.
4. Il existe une équation n'ayant aucune solution réelle : Vrai, $x^2 + 1 = 0$ par exemple.
5. Il existe une équation ayant cinq solutions réelles distinctes : Vrai.
   $x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$ par exemple.
6. Si a et b sont deux entiers naturels, alors $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$ est un entier naturel : Vrai car $\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} = \frac{[(a+b)+(a-b)][(a+b)-(a-b)]}{4} = \frac{(2a)(2b)}{4} = ab \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 Assez difficile

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$.

Si $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$ est premier alors il a exactement deux diviseurs et donc l'un des deux termes est égal à 1, le plus petit des deux nécessairement. Ainsi, $a - b = 1$: a et b sont consécutifs.

Réciproquement, si a et b sont consécutifs, $a^2 - b^2$ n'est pas toujours premier. Par exemple, $5^2 - 4^2 = 9$ est dans la table de 3.

Cahier γ

FAUTE DE PREUVES

Sommaire

Exercices 325
Solutions 331

Cet extra est capital pour l'argumentation.

Associer chacun des types de « preuve » suivants avec son explication en pages suivantes puis préciser leur validité.

Types de preuve

- ❒ Preuve visuelle
- ❒ Preuve par identité multiplicative
- ❒ Preuve par restriction
- ❒ Preuve par présupposition
- ❒ Preuve par croyance
- ❒ Preuve par construction
- ❒ Preuve capitale
- ❒ Preuve complexe
- ❒ Preuve faible
- ❒ Preuve par large consensus
- ❒ Preuve d'août
- ❒ Preuve par défaut
- ❒ Preuve forte
- ❒ Preuve par transposition
- ❒ Preuve enfantine
- ❒ Preuve par délégation
- ❒ Preuve directe
- ❒ Preuve par Darth Vader
- ❒ Preuve par le chocolat
- ❒ Preuve par désaccord
- ❒ Preuve par distraction
- ❒ Preuve par disjonction des cas
- ❒ Preuve de l'ingénieur
- ❒ Preuve par analyse-synthèse
- ❒ Preuve par diagramme
- ❒ Preuve par récurrence
- ❒ Preuve par six fois sept
- ❒ Preuve par la peur
- ❒ Preuve par répétition
- ❒ Preuve par l'absurde
- ❒ Preuve stupide

1	Type de preuve		Valide	Non valide

Il suffit de multiplier chaque expression par zéro afin d'obtenir l'égalité voulue. Par exemple, prouvons que $1 = 2$:

$$1 = 2 \iff 1 \times 0 = 2 \times 0 \iff 0 = 0.$$

Puisque la dernière égalité est vraie, la première l'est aussi.

2	Type de preuve		Valide	Non valide

Puisqu'août est une période si agréable, personne ne sera en désaccord avec ce qui est publié à ce moment-là, ce qui en atteste la véracité. Bien sûr, l'inverse est vraie : janvier est triste et aucune logique ne prouvera vos affirmations.

3	Type de preuve		Valide	Non valide

UN ARGUMENTAIRE ÉCRIT EN LETTRES CAPITALES EST CORRECT. AINSI, ÉCRIVEZ LA PROPOSITION QUE VOUS ESSAYEZ DE PROUVER EN LETTRES MAJUSCULES : ELLE SERA ALORS JUSTE!!! VOUS POUVEZ AUSSI ABUSER DES POINTS D'EXCLAMATION, EN PARTICULIER POUR LES PREUVES DIFFICILES.

4	Type de preuve		Valide	Non valide

En écrivant ce qui semble être une démonstration complète puis en étalant du chocolat fondu sur les parties les plus délicates, le lecteur supposera avec délectation que la preuve est correcte afin de ne pas paraître idiot.

5	Type de preuve		Valide	Non valide

Dans ce type de démonstration, on arrive à la conclusion en divisant le problème en un nombre fini de cas et en les démontrant chacun séparément. Le nombre de cas peut parfois être démesuré. Par exemple, la première démonstration du théorème des quatre couleurs comportait 1 936 cas. Cette démonstration est controversée car la majorité d'entre eux furent vérifiés par ordinateur, pas à la main. Aujourd'hui, la démonstration comporte encore plus de 600 cas.

6	Type de preuve		Valide	Non valide

Souvenez-vous, une affirmation est fausse si sa preuve a été vérifiée et elle est vraie si elle n'a pas été contredite. Ainsi, la meilleure stratégie est de réduire le plus possible le nombre de personnes capables de comprendre votre démonstration.
N'hésitez pas à y mettre des éléments très compliqués comme des dimensions multiples ou même infinies, des nombres hypercomplexes, des formes indéterminées, des graphes, des références à des livres épuisés, des films disparus, des chants inconnus, de la physique quantique, de la musique modale,... Faites des citations en latin, grec, sanskrit et inventez des langues.
Encore une fois, le but est que personne n'y comprenne rien et ne puisse donc vous contredire.

7	Type de preuve		Valide	Non valide

S'il y a un nombre conséquent de personnes qui pensent qu'un résultat est juste, alors il l'est certainement. Pour une preuve plus emphatique, on peut user de phrases comme “De nombreux scientifiques s'accordent sur...” aux moments opportuns.

8	Type de preuve		Valide	Non valide

Commencez par démontrer un premier cas, l'initialisation, puis montrez l'hérédité de votre propriété : si un cas quelconque est vrai, alors le suivant l'est aussi. Alors, tous sont vrais à partir du cas initial, même si, séparément, chacun n'a pas été démontré. Soit $P(n)$ une proposition mathématique impliquant l'entier naturel n telle que :

(i) $P(0)$ est vraie, i.e. $P(n)$ est vraie pour $n = 0$;

(ii) $P(n+1)$ est vraie si $P(n)$ est vraie, i.e. $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

9	Type de preuve		Valide	Non valide

J'ai raison, na !

10	Type de preuve		Valide	Non valide

La proposition est vraie par manque de contre-exemple. De toutes façons, vous savez que vous avez raison et peu vous importe ce que peuvent penser les autres.

11	Type de preuve		Valide	Non valide

Bien que non formelle, une démonstration visuelle d'un théorème. Ce type de preuve est souvent utilisé pour démontrer le théorème de Pythagore.

12	Type de preuve		Valide	Non valide

J'ai raison parce que je suis ton père.

13	Type de preuve		Valide	Non valide

Facilitez-vous la vie en laissant la démonstration au lecteur. Après tout, si vous savez la faire, il le peut certainement lui aussi. Encouragez-le :

- "Le lecteur pourra facilement effectuer ces menus calculs."
- "Les 253 autres cas sont similaires."
- "La preuve est laissée en exercice pour le lecteur".
- "La preuve est laissée en exercice pour le correcteur" (succès garanti en examen).

14	Type de preuve		Valide	Non valide

Aussi appelée preuve par l'exemple, il suffit d'exhiber un exemple concret ayant toutes les propriétés voulues pour démontrer l'existence de tels objets. Par exemple, Joseph Liouville a prouvé l'existence des nombres transcendants en en construisant un explicitement.

15	Type de preuve		Valide	Non valide

S'il y a consensus sur un sujet que vous n'acceptez pas, alors vous avez certainement raison puisque les autres sont stupides.
Pensez aux climato-sceptiques, aux créationnistes, à Donald,... pour une application de ce type de preuve.

16	Type de preuve		Valide	Non valide

« Je crois en cette affirmation donc elle est vraie, cqfd. »

17	Type de preuve		Valide	Non valide

Réduire le problème à des diagrammes contenant de nombreuses flèches, simples et doubles. Ceci est lié à la preuve par complexité.

18	Type de preuve		Valide	Non valide

Dans ce type de preuve, aussi appelé par *contradiction*, on montre que si une certaine proposition est vraie, alors une contradiction (flagrante) apparaît, donc cette proposition est fausse. On louvoie donc dans le *faux*, en toute connaissance de cause, afin de prouver le *vrai*. C'est un type de preuve absolument sublime.
Voici un exemple montrant l'irrationalité de $\sqrt{2}$:

> Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel *i.e.* $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers non nuls premiers entre eux (la fraction est réduite). Ainsi, $b\sqrt{2} = a$. Élevant au carré, $2b^2 = a^2$. Puisque 2 divise le membre de gauche, il divise celui de droite et a^2 est pair, ce qui implique que a doit aussi être pair. On a alors $a = 2c$, où c est un entier. La première équation s'écrit alors $2b^2 = (2c)^2 = 4c^2$. Divisant par 2, $b^2 = 2c^2$. Ainsi, par le même argument que précédemment, 2 doit diviser b^2, et b doit être pair. Mais, si a et b sont tous deux pairs, ils ne peuvent être premiers entre eux ce qui contredit l'hypothèse de départ. Force est donc d'affirmer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

19	Type de preuve		Valide	Non valide

Soit $P(n)$ une proposition.

1° Prouvez que $P(0)$ est vraie.

2° Prouvez que $P(1)$ est vraie.

3° Prouvez que $P(2)$ est vraie.

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout n.

20	Type de preuve		Valide	Non valide

On prouve la proposition “si p alors q” en démontrant sa contraposée “si *non* q alors *non* p”.

21	Type de preuve		Valide	Non valide

Si Khaleesi affirme quelque chose, alors c'est vrai. Pas de *si*, *mais* ni *or*. Fin de la discussion. Cela peut aussi marcher avec Voldemort, Kim Jong-un ou votre professeur de mathématiques bien-aimé.

22	Type de preuve		Valide	Non valide

Vous êtes fatigués, c'est l'heure de la sieste, vous vous sentez las, las, las. Tout affaibli, vous ne pouvez qu'accepter la preuve que l'on vous apporte.

23	Type de preuve		Valide	Non valide

Dans ce type de preuve, on arrive à la conclusion en combinant de façon logique les axiomes, définitions et les résultats précédents. Par exemple, on peut ainsi établir que la somme de deux entiers pairs est toujours paire :

> Soient x et y deux entiers pairs. il peuvent donc s'écrire $x = 2a$ et $y = 2b$ où a et b sont entiers. Alors, leur somme vaut $x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$. Il est alors clair que $x + y$ est divisible par 2 et il est donc pair.

Cette preuve n'utilise que la définition des nombres pairs ainsi que la distributivité.

24	Type de preuve		Valide	Non valide

Puisque quarante-deux est bien la réponse universelle, tout argument impliquant le produit de six par sept est véridique.

25	Type de preuve		Valide	Non valide

N'hésitez pas à distraire l'attention des auditeurs lors de votre exposé. Un complice peut tirer la sonnette d'alarme, annoncer la fin du monde, attirer l'attention sur le mur du fond,... pendant que vous effacez le tableau et déclarez la démonstration finie.

Vous pouvez aussi tirer avantage d'une distraction plus longue que prévue en démontrant par là-même le résultat suivant. Par exemple :

1. "Regardez derrière vous !"
2. ... ce qui prouve l'existence d'une réponse à $2 + 2$.
3. "Là, un singe à trois têtes !"
4. ... ce qui donne 5 comme seul résultat possible à $2 + 2$.
5. Ainsi, $2 + 2 = 5$, cqfd.

26	Type de preuve		Valide	Non valide

Si l'on dit qu'une affirmation est vraie un grand nombre de fois, alors elle est vraie. Si l'on dit qu'une affirmation est vraie un grand nombre de fois, alors elle est vraie. Si l'on dit qu'une affirmation est vraie un grand nombre de fois, alors...

Le nombre de fois qu'il faut le dire exactement pour que cela soit vérifié fait l'objet d'intenses débats académiques. Généralement, on s'arrête lorsque l'audience est littéralement morte d'ennui.

Par exemple : Soient A et B. On a $A = B \iff B = A \iff A = B$
$\iff B = A \iff A = B \iff B = A \iff A = B \iff B = A$
$\iff A = B \iff B = A \iff A = B \iff B = A$ donc $A = B$.

27	Type de preuve		Valide	Non valide

Dans un raccourci de la preuve par récurrence, on fait l'hypothèse que le résultat est vrai. Ainsi, le résultat est vrai.

28	Type de preuve		Valide	Non valide

Si vous prouvez votre affirmation pour un cas et vous restreignez à celui-ci seulement, vous évitez alors tous les autres. Vous pouvez alors espérer que personne ne remarquera votre omission.

Par exemple, montrez le théorème des quatre couleurs en se contentant des cartes à une seule région. Une seule couleur est alors nécessaire et $1 \leqslant 4$.

Si jamais on vous parle d'une certaine incomplétude de votre preuve, rabattez-vous sur une méthode précédente.

29	Type de preuve		Valide	Non valide

Ce que je dis est vrai car je suis plus fort que toi.

30	Type de preuve		Valide	Non valide

Un tel raisonnement se déroule en deux étapes :

- on raisonne sur une hypothétique solution au problème et l'on accumule des déductions de propriétés qu'elle doit vérifier, du seul fait qu'elle est solution ;
- on examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats pouvant être des solutions) et l'on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions.

Il arrive souvent que la première phase, l'analyse, produise des conditions nécessaires si restrictives qu'il ne reste plus qu'un "candidat" qui les vérifie. Dans ce cas, cette première phase prouve l'unicité de la solution, et la seconde phase, la synthèse, permet de montrer soit l'existence d'une solution (si ce candidat répond au problème), soit qu'il n'y a aucune solution (sinon).

La recherche des minima et maxima d'une fonction se fait souvent ainsi : on détermine d'abord la liste des points qui auraient le droit d'être des extrema en utilisant des conditions nécessaires d'optimalité (dérivée, extrema liés,...). Ensuite, on regarde lesquels parmi eux le sont vraiment en comparant leurs valeurs.

La limite d'une suite récurrente se détermine parfois par analyse synthèse : on montre qu'elle converge, car croissante et majorée par exemple, on cherche ensuite les points fixes de la fonction de récurrence qui est continue puis on détermine ceux qui peuvent être la limite de la suite : il n'y en a souvent plus qu'un possible et c'est donc lui.

31	Type de preuve		Valide	Non valide

Je n'y comprends rien, c'est donc vrai.

Solutions

Preuve visuelle : 11 **Valide**
Preuve par identité multiplicative : 1
Preuve par restriction : 28
Preuve par présupposition : 27
Preuve par croyance : 16
Preuve par construction : 14 **Valide**
Preuve capitale : 3
Preuve complexe : 6
Preuve faible : 22
Preuve par large consensus : 7
Preuve d'août : 2
Preuve par défaut : 10
Preuve forte : 29
Preuve par transposition : 20 **Valide**
Preuve enfantine : 9
Preuve par délégation : 13
Preuve directe : 23 **Valide**
Preuve par Darth Vader : 12
Preuve par le chocolat : 4
Preuve par désaccord : 15
Preuve par distraction : 25
Preuve par disjonction des cas : 5 **Valide**
Preuve de l'ingénieur : 19
Preuve par analyse-synthèse : 30 **Valide**
Preuve par diagramme : 17
Preuve par récurrence : 8 **Valide**
Preuve par six fois sept : 24
Preuve par la peur : 21
Preuve par répétition : 26
Preuve par l'absurde : 18 **Valide**
Preuve stupide : 31

Si vous avez validé à tort plus de deux « preuves », vous commencez malheureusement à maîtriser *l'art d'avoir toujours raison*.

EXTRAS

Extra A

La racine, c'est carré

Cet extra est idéal pour réviser les propriétés algébriques de la racine carrée.

En préambule, rappelons la définition suivante :

Définition *Soit a un* .....
La racine carrée de a est ..... *de* ..... *valant* ....
Pour $a \in \ldots$, ... $= a$ *et* $\sqrt{a}$ *est* .....

Calculer, simplifier, résoudre et/ou écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les écritures suivantes. N'utiliser la calculatrice qu'en tout dernier ressort.

(a) $\sqrt{49} =$
(b) $-\sqrt{64} =$
(c) $(-\sqrt{79})^2 =$
(d) $-\sqrt{127}^2 =$
(e) $\sqrt{-25}^2 =$
(f) $\sqrt{36} + \sqrt{64} =$
(g) $\sqrt{36 + 64} =$
(h) $\sqrt{9 \times 4} =$
(i) $\sqrt{9} \times \sqrt{4} =$
(j) $\sqrt{(-9) \times (-4)} =$
(k) $\sqrt{-9} \times \sqrt{-4} =$
(l) $\sqrt{32} =$
(m) $\sqrt{72} =$
(n) $\sqrt{300} =$
(o) $\sqrt{12}.\sqrt{27} =$
(p) $\sqrt{75}.\sqrt{6} =$
(q) $\sqrt{6}.\sqrt{15}.\sqrt{10} =$
(r) $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{28} =$
(s) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} =$
(t) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} =$
(u) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{32}} =$
(v) $\dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{175}} =$
(w) $x^2 - 9 = 0$
(x) $y^2 - 18 = 0$
(y) $-3z^2 - 5 = 0$
(z) $3 - 5t^2 = 0$

VouF ?

(α) Si $u^2 = 25$ alors $u = 5$.

(β) La racine carrée du produit de deux réels égale le produit de leur racine carrée.

(γ) La racine carrée d'un réel positif est inférieure ou égale à celui-ci.

Solutions :

Soit a un réel positif ou nul. La racine carrée de a est l'unique réel positif de carré valant a. Pour $a \in \mathbb{R}^+$, $\quad \sqrt{a}^2 = a \quad$ et $\quad \sqrt{a}$ est positif.

(a) $\sqrt{49} = 7$

(b) $-\sqrt{64} = -8$

(c) $(-\sqrt{79})^2 = 79$

(d) $-\sqrt{127}^2 = -127$

(e) $\sqrt{-25}^2$ n'a aucun sens.

(f) $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$

(g) $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

(h) $\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$

(i) $\sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$

(j) $\sqrt{(-9) \times (-4)} = \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$

(k) $\sqrt{-9} \times \sqrt{-4}$ n'a aucun sens.

(l) $\sqrt{32} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(m) $\sqrt{72} = \sqrt{9}\sqrt{4}\sqrt{2} = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

(n) $\sqrt{300} = \sqrt{100}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

(o) $\sqrt{12}.\sqrt{27} = \sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{9} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

(p) $\sqrt{75}.\sqrt{6} = \sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{2} = 5 \times 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

(q) $\sqrt{6}.\sqrt{15}.\sqrt{10} = \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{5} = 2 \times 3 \times 5 = 30$

(r) $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{28} = \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt{4}\sqrt{7} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7})$

(s) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(t) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} + \dfrac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}}{15}$

(u) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{32}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{16}\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{8}\sqrt{10}$

(v) $\dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{175}} = \dfrac{\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{25}\sqrt{7}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{3}$

(w) $x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3$ ou $x = 3$

(x) $y^2 - 18 = 0 \iff y^2 = 18 \iff y = -\sqrt{18} = -\sqrt{9}\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$ ou $y = 3\sqrt{2}$

(y) $-3z^2 - 5 = 0 \iff z^2 = -\frac{5}{3}$ qui n'admet aucune solution réelle.

(z) $3 - 5t^2 = 0 \iff t^2 = \frac{3}{5} \iff t = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$ ou $t = \frac{\sqrt{15}}{5}$

(α) Si $u^2 = 25$ alors $u = 5$: Faux (et -5 !)

(β) La racine carrée du produit de deux réels égale le produit de leur racine carrée : Faux (et s'ils sont tous deux strictement négatifs ?).

(γ) La racine carrée un réel positif est inférieure ou égale à celui-ci : Faux (et s'il est entre 0 et 1 ?)

Extra B

SINE QUA TION

Sommaire

1 Exercices 337
2 Solutions 338

Cet extra est très utile pour perfectionner sa maîtrise des résolutions d'équations et inéquations.

1 Exercices

1. Pour chacune des équations suivantes, exprimer formellement chacune des variables en fonction des autres.

(a)	$x+y-5=0$	(f)	$4fg-3f+2g=0$	(i)	$3xy-2yz = 5-7xyz$
(b)	$u-v+2=0$	(g)	$u+1=\dfrac{d}{t}$	(j)	$k^2=j+2$
(c)	$3a-2b=7$	(h)	$\frac{3}{4}at-7\dfrac{t}{x}+2=0$	(k)	$r^2-2r+1=7s+3$
(d)	$\alpha-3\beta+5\gamma+6=0$			(l)	$m^2-4m=n^2-4$
(e)	$\frac{1}{2}AB-\frac{1}{3}A-5=0$				

2. Même type d'exercice pour les inéquations suivantes.

(m)	$x+y>3$	(p)	$3-2f+4g\leqslant 1$
(n)	$a-b+4<0$	(q)	$\frac{u}{v}\leqslant -2$
(o)	$5p-3q-2\geqslant 4$	(r)	$ab-a>1$

3. Résoudre les équations ou systèmes d'équations suivants, en utilisant différentes méthodes : substitution, combinaison linéaire, un peu des deux.

(s)	$\begin{cases} \alpha-2=4 \\ 2\beta+3\alpha=0 \end{cases}$	(x)	$\begin{cases} m-2n+3=0 \\ 4n=2m+6 \end{cases}$
(t)	$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$	(y)	$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x+2z=1 \end{cases}$
(u)	$\begin{cases} 3a+2b-4=0 \\ 2a-3b=1 \end{cases}$	(z)	$\begin{cases} a+2b+c=4 \\ 2a-3b+5c=0 \\ 3a-b+2c=1 \end{cases}$
(v)	$\begin{cases} 2u-4v=3u-7v+1 \\ 5u+2v-4=1 \end{cases}$		
(w)	$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 6y=7+4x \end{cases}$		

2 Solutions

1. (a) $x = 5 - y \quad$ et $\quad y = 5 - x$

   (b) $u = v - 2 \quad$ et $\quad v = u + 2$

   (c) $a = \frac{2b+7}{3} \quad$ et $\quad b = \frac{3a-7}{2}$

   (d) $\alpha = 3\beta - 5\gamma - 6, \quad \beta = \frac{1}{3}(\alpha + 5\gamma + 6) \;$ et $\quad \gamma = \frac{1}{5}(3\beta - \alpha - 6)$

   (e) $A = \dfrac{5}{\frac{1}{2}B - \frac{1}{3}} \quad$ et $\quad B = \dfrac{\frac{1}{3}A + 5}{\frac{1}{2}A}$

   (f) $f = \frac{2g}{3-4g} \quad$ et $\quad g = \frac{3f}{4f+2}$

   (g) $u = \frac{d}{t} - 1, \quad d = t(u + 1) \quad$ et $\quad t = \frac{d}{u+1}$

   (h) $a = \dfrac{7\frac{t}{x} - 2}{\frac{3}{4}t}, \quad t = \dfrac{2}{\frac{7}{x} - \frac{3}{4}a}$ et $\quad x = \dfrac{7t}{\frac{3}{4}at + 2}$

   (i) $x = \dfrac{2yz + 5}{3y + 7yz}, \quad y = \dfrac{5}{3x - 2z + 7xz}$ et $\quad z = \dfrac{5 - 3xy}{7xy - 2y}$

   (j) $j = k^2 - 2 \quad$ et $\quad k = \pm\sqrt{j + 2}$

   (k) $s = \frac{1}{7}((r - 1)^2 - 3) \quad$ et $\quad r = 1 \pm \sqrt{7s + 3}$

   (l) $m = 2 \pm n \quad$ et $\quad n = \pm(m - 2)$

2. (m) $x > 3 - y \quad$ et $\quad y > 3 - x$

   (n) $a < b - 4 \quad$ et $\quad b > a + 4$

   (o) $p \geqslant \frac{1}{5}(3q + 6) \quad$ et $\quad q \leqslant \frac{1}{3}(5p - 6)$

   (p) $f \geqslant 2g + 1 \quad$ et $\quad g \leqslant \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}$

   (q) $\left\{ \begin{array}{l} u \leqslant -2v \text{ et } v > 0 \\ u \geqslant -2v \text{ et } v < 0 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} v \leqslant -\frac{u}{2} \text{ et } v > 0 \\ v \geqslant -\frac{u}{2} \text{ et } v < 0 \end{array} \right.$

   (r) $\left\{ \begin{array}{l} a > \frac{1}{b-1} \text{ et } b > 1 \\ a < \frac{1}{b-1} \text{ et } b < 1 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} b > \frac{1}{a} + 1 \text{ et } a > 0 \\ b < \frac{1}{a} + 1 \text{ et } a < 0 \end{array} \right.$

3. Résolution des équations ou systèmes d'équations par substitution, combinaison linéaire ou autre.

   (s) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2 = 4 \\ 2\beta + 3\alpha = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 4 + 2 = 6 \\ 2\beta = -3\alpha \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 6 \\ \beta = -\frac{3}{2} \times 6 = -9 \end{array} \right.$

   (t) $\left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + y \\ (1 + y) + y = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2y = 3 - 1 \\ x = 1 + y \end{array} \right.$
   $\iff \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{2}{2} = 1 \\ x = 1 + 1 = 2 \end{array} \right.$

   (u) $\left\{ \begin{array}{l} 3a + 2b - 4 = 0 \\ 2a - 3b = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2(3a + 2b - 4) - 3(2a - 3b) = 2 \times 0 - 3 \times 1 \\ 2a - 3b = 1 \end{array} \right.$
   $\iff \left\{ \begin{array}{l} 6a + 4b - 8 - 6a + 9b = -3 \\ 2a = 1 + 3b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 13b = -3 + 8 \\ a = \frac{1}{2}(1 + 3b) \end{array} \right.$
   $\iff \left\{ \begin{array}{l} b = \frac{5}{13} \\ a = \frac{1}{2}(1 + 3\frac{5}{13}) = \frac{14}{13} \end{array} \right.$

(v) $\left\{\begin{array}{l} 2u-4v=3u-7v+1 \\ 5u+2v-4=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 3u-2u=7v-4v-1 \\ 5(3v-1)+2v-4=1 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} u=3v-1 \\ 17v=1+4+5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} v=\frac{10}{17} \\ u=3\frac{10}{17}-1=\frac{13}{17} \end{array}\right.$

(w) $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y=5 \\ 6y=7+4x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=7 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} 2(2x-3y)+(-4x+6y)=5+7 \\ -4x+6y=7 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} 4x-6y-4x+6y=12 \\ -4x+6y=7 \end{array}\right. \iff x,\ y \in \varnothing$

(x) $\left\{\begin{array}{l} m-2n+3=0 \\ 4n=2m+6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} m-2n+3=0 \\ 2m-4n+6=0 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} 2(m-2n+3)-(2m-4n+6)=2\times 0-0 \\ m=2n-3 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} 2m-4n+6-2m+4n-6=0 \\ m=2n-3 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} 0m+0n=0 \\ m=2n-3 \end{array}\right. \iff n\in\mathbb{R} \text{ et } m=2n-3$

(y) $\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x+2z=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=x+y-2 \\ 2x-y+(x+y-2)=4 \\ 3x+2(x+y-2)=1 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} z=x+y-2 \\ 3x=4+2 \\ 2y=1-5x+4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\frac{6}{3}=2 \\ y=\frac{1}{2}(5-5\times 2)=-\frac{5}{2} \\ z=2-\frac{5}{2}-2=-\frac{5}{2} \end{array}\right.$

(z) $\left\{\begin{array}{l} a+2b+c=4 \\ 2a-3b+5c=0 \\ 3a-b+2c=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} c=4-a-2b \\ 2a-3b+5(4-a-2b)=0 \\ 3a-b+2(4-a-2b)=1 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} c=4-a-2b \\ -3a-13b=-20 \\ a-5b=1-8 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=5b-7 \\ c=4-(5b-7)-2b \\ 3(5b-7)+13b=20 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} 28b=20+21 \\ a=5b-7 \\ c=4+7-7b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b=\frac{41}{28} \\ a=5\times\frac{41}{28}-7=\frac{9}{28} \\ c=11-7\times\frac{41}{28}=\frac{3}{4} \end{array}\right.$

CORRIGÉS

Extra C

DROITES ET FINES

Sommaire

1 Exercices 341
2 Solutions 343

Cet extra est parfait pour se remémorer les équations de droites.

1 Exercices

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.
Commencez par compléter le plus possible les définitions et résultats suivants puis revenez-y après avoir traité quelques-uns des exemples qui suivent.

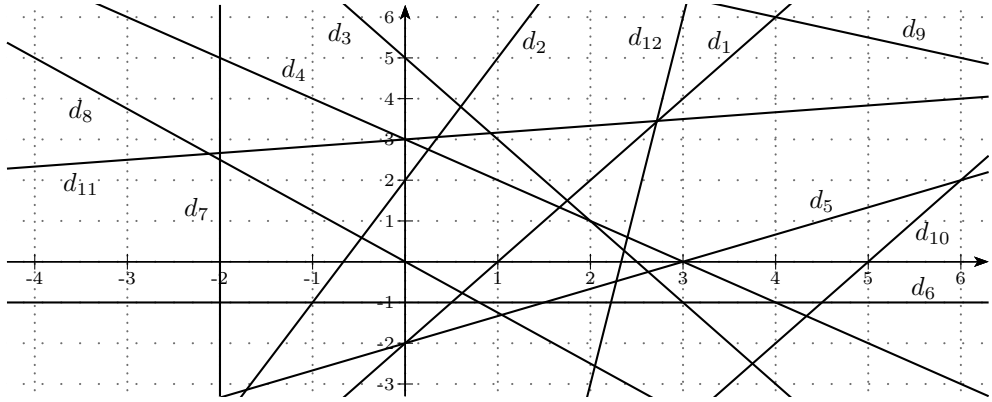
- Toute droite du plan peut être caractérisée par un point et un ..... Si elle admet $ax+by+c=0$ comme équation ....., alors $\vec{u}\begin{pmatrix}\cdot\cdot\\ \cdot\cdot\end{pmatrix}$ est directeur de cette droite.
- Toute droite du plan non parallèle à ..... admet une équation réduite de la forme .....
  - Une telle droite est la représentation graphique d'une .....
  - m est appelé le ..... et p l'..... de cette droite et de cette fonction affine.
  - Si $m>0$, la fonction affine $f(x)=$ ..... est ....., si $m<0$, elle est ..... et si ....., elle est ..... sur $\mathbb{R}$.
  - Deux telles droites sont parallèles *ssi* elles ont .....
  - Si $A\,(\,x_A\,;\,y_A\,)$ et $B\,(\,x_B\,;\,y_B\,)$ sont deux points distincts d'une telle droite, on a $m=$ .....
  - Sur une telle droite, lorsque les abscisses « avancent » de 1, les ordonnées « avancent » de ....., lorsque les abscisses « avancent » de 3, les ordonnées « avancent » de .....,...
  - Les points de coordonnées $(\,0\,;\,..\,)$ et $(\,\ldots\,;\,0\,)$, si $m\ldots$, appartiennent tous deux à une telle droite. Ils sont confondus lorsque ..... et la fonction f est alors dite ..... Ce n'est pas la représentation graphique d'une .....
- Toute droite du plan parallèle à ..... admet une équation réduite de la forme .....

Par lecture graphique et en usant de différentes méthodes, déterminer l'équation réduite des droites de la page suivante.

d_1 :
d_2 :
d_3 :
d_4 :

d_5 :
d_6 :
d_7 :
d_8 :

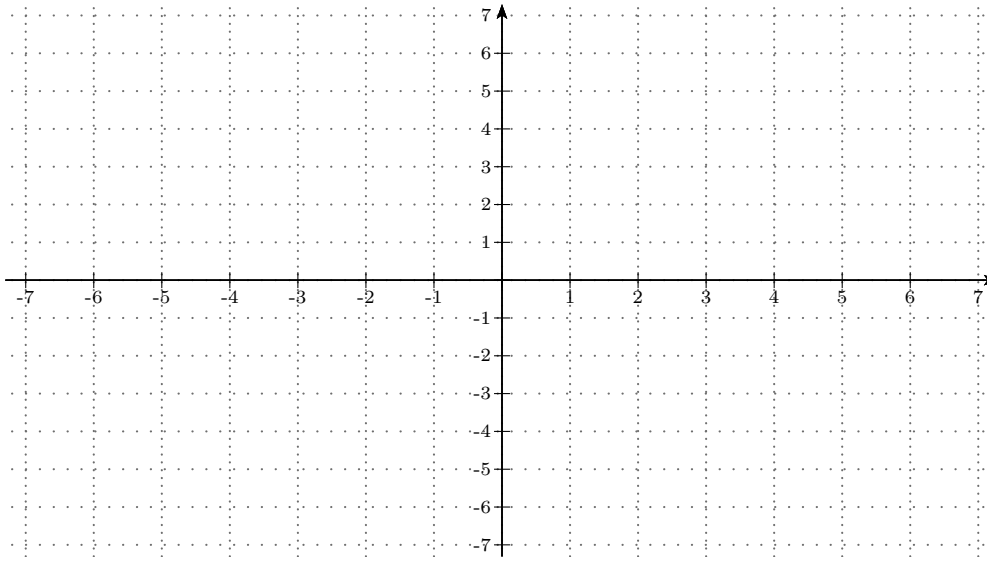
d_9 :
d_{10} :
d_{11} :
d_{12} :



En usant de différentes méthodes, tracer les droites suivantes.

$d_{13} : y = 3x + 2$
$d_{14} : y = 5 - 4x$
$d_{15} : y = 2x - 4$
$d_{16} : x = -4$
$d_{17} : y = \frac{3}{5}x$
$d_{18} : y = \frac{4}{3}x - 2$
$d_{19} : y = 0$

$d_{20} : x = 0$
$d_{21} : y = 35 - 7x$
d_{22} passe par $P(-12\,;\,-2)$ et $Q(2\,;\,5)$
d_{23} passe par $L(-8\,;\,17)$ et $M(10\,;\,-19)$
d_{24} passe par $T(-3\,;\,3)$ et son coeff. dir. est $-\frac{1}{3}$
d_{25} est parallèle à d_{13} et passe par $N(-4\,;\,-2)$
d_{26} passe par $S(3\,;\,4)$ et est dirigée par $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$
$d_{27} : x + 2y + 4 = 0$
$d_{28} : 2x - 3y - 12 = 0$



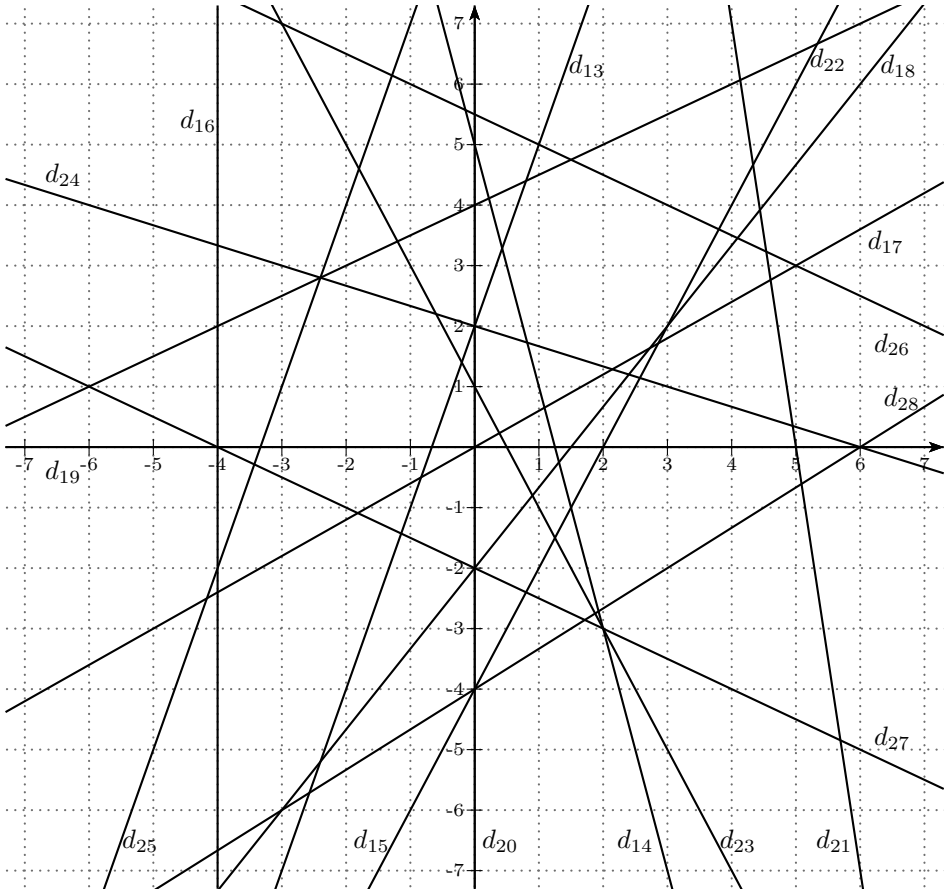
Déterminer l'équation réduite de la droite d_{29} passant par le point $A\,(\,a\,;\,b\,)$ et de coefficient directeur λ puis une équation cartésienne de la droite d_{30} dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ et passant par $B\,(\,s\,;\,t\,)$.

2 Solutions

- Toute droite du plan peut être caractérisée par un point et un vecteur directeur. Si elle admet $ax + by + c = 0$ comme équation cartésienne, alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est directeur de cette droite.
- Toute droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$.
  - Une telle droite est la représentation graphique d'une fonction affine.
  - m est appelé le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine de cette droite et de cette fonction affine.
  - Si $m > 0$, la fonction affine $f(x) = mx + p$ est strictement croissante, si $m > 0$, elle est strictement décroissante et si $m = 0$, elle est constante.
  - Deux telles droites sont parallèles *ssi* elles ont même coefficient directeur.
  - Si $A\,(\,x_A\,;\,y_A\,)$ et $B\,(\,x_B\,;\,y_B\,)$ sont deux points distincts d'une telle droite, on a $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
  - Sur une telle droite, lorsque les abscisses « avancent » de 1, les ordonnées « avancent » de m, lorsque les abscisses « avancent » de 3, les ordonnées « avancent » de $3m$,...
  - Les points de coordonnées $(\,0\,;\,p\,)$ et $\left(-\frac{p}{m}\,;\,0\right)$, si $m \neq 0$, appartiennent tous deux à une telle droite. Ils sont confondus lorsque $p = 0$.
- Toute droite du plan parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme $x = \lambda$.
  Ce n'est pas la représentation graphique d'une fonction.

Par lecture graphique, on obtient les équations réduites suivantes :

$d_1 : y = 2x - 2$
$d_2 : y = 3x + 2$
$d_3 : y = 5 - 2x$
$d_4 : y = -x + 3$
$d_5 : y = \frac{2}{3}x - 2$
$d_6 : y = -1$
$d_7 : x = -2$
$d_8 : y = -\frac{5}{4}x$
$d_9 : y = 8 - \frac{1}{2}x$
$d_{10} : y = 2x - 10$
$d_{11} : y = \frac{1}{6}x + 3$
$d_{12} : y = 9x - 21$



Admettant λ pour coefficient directeur, d_{29} a une équation réduite de la forme $y = \lambda x + p$.
Puisque $A\,(\,a\,;\,b\,) \in d_{29}$, on a $\quad b = \lambda a + p \quad$ d'où $\quad p = b - \lambda a$
et $\quad d_{29} : y = \lambda x + b - \lambda a = \lambda(x - a) + b$.

Admettant $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, d_{30} admet une équation cartésienne de la forme $\quad -\beta x + \alpha y + c = 0$. $\quad$ Puisque $B\,(\,s\,;\,t\,) \in d_{30}$, on a $\quad -\beta s + \alpha t + c = 0$ d'où $\quad c = \beta s - \alpha t \quad$ et l'équation cartésienne $\quad d_{30} : -\beta x + \alpha y + \beta s - \alpha t = 0$.

Extra D

TROP GRAND ÉCART

Sommaire

1 Exercices 345
2 Solutions 346

Cet extra est sensationnel pour redécouvrir la valeur absolue.

1 Exercices

Exercice 1 On cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions f vérifiant les propriétés suivantes :

- f est définie sur $[\,0\,;1\,]$,
- f est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$: $\quad \forall x \in [\,0\,;1\,],\ f(x) \in [\,0\,;1\,]$,
- Pour tout $a, b \in [\,0\,;1\,]$, on a l'inégalité $\quad (I) : \quad |f(a) - f(b)| \geqslant |a - b|$.

1. (a) Justifier que, pour tout μ et $\nu \in [\,0\,;1\,], \quad |\mu - \nu| \leqslant 1$.
   (b) En déduire que, pour $f \in \mathcal{I}$, on a
   soit $\quad (i) : f(0) = 0$ et $f(1) = 1, \quad$ soit $\quad (ii) : f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.
2. (a) Déterminer les deux fonctions affines u et v vérifiant l'une (i), l'autre (ii).
   (b) Vérifier que u et v appartiennent à $\mathcal{I}$.
3. Soit $f \in \mathcal{I}$ vérifiant (i).
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [\,0\,;1\,], \quad f(x) \geqslant u(x)$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in [\,0\,;1\,], \quad f(x) \leqslant u(x)$.
   (c) Qu'en déduire pour f ?
4. Soit $f \in \mathcal{I}$ vérifiant (ii).
   De façon analogue, montrer que pour tout $x \in [\,0\,;1\,], \quad f(x) = v(x)$.
5. Conclure sur $\mathcal{I}$ puis tenter d'expliquer le titre de ce devoir.

Exercice 2 Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad$ et $\quad g(x) = |x|$.

1. Tracer leur représentation graphique $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère adapté sur GeoGebra.
   À première vue, $\mathscr{C}_f$ va-t-elle passer au-dessous de $\mathscr{C}_g$?

2. Démontrer que pour réel x non nul, on a $f(x) = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.
3. Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) - g(x) > 0$.
4. En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2 Solutions

Exercice 1

1. (a) Puisque $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ et $-1 \leqslant -\nu \leqslant -0$, on a $0-1 \leqslant \mu-\nu \leqslant 1-0$ *i.e.* $|\mu-\nu| \leqslant 1$.

   (b) Ainsi, comme $f(0)$ et $f(1) \in [\,0\,;1\,]$, $|f(1)-f(0)| \leqslant 1$.
   Par ailleurs, $f \in \mathcal{I}$ donc $|f(1)-f(0)| \geqslant |1-0| = 1$.
   On a donc $|f(1)-f(0)| = 1$ qui ne peuvent alors être que les valeurs « extrêmes » 0 et 1.
   En effet, on a soit $f(1)-f(0)=1$ et $1+0 \leqslant 1+f(0) = f(1) \leqslant 1$,
   soit $f(0)-f(1)=1$ et $1+0 \leqslant 1+f(1) = f(0) \leqslant 1$.

2. (a) On cherche des fonctions sous la forme "$mx+p$".

   (i) Puisque l'on doit avoir $m+p=1$ et $p=0$, la seule fonction affine vérifiant (i) est $u(x)=x$.

   (ii) Et puisque l'on doit avoir $m+p=0$ et $p=1$, la seule fonction affine vérifiant (ii) est $v(x)=1-x$.

   (b) Soient a, $b \in [\,0\,;1\,]$.
   On a $0 \leqslant u(a) = a \leqslant 1$ et $|u(a)-u(b)| = |a-b| \geqslant |a-b|$.
   De même, $1-0 \geqslant v(a) = 1-a \geqslant 1-1$
   et $|v(a)-v(b)| = |1-a-1+b| = |b-a| \geqslant |a-b|$.

3. Soit $f \in \mathcal{I}$ vérifiant (i) et soit $x \in [\,0\,;1\,]$.

   (a) On a $u(x) = x = |x| = |x-0| \leqslant |f(x)-f(0)| = |f(x)-0| = |f(x)| = f(x)$.

   (b) On a $1-u(x) = 1-x = |1-x| \leqslant |f(1)-f(x)| = |1-f(x)| = 1-f(x)$
   d'où $f(x) \leqslant u(x)$.

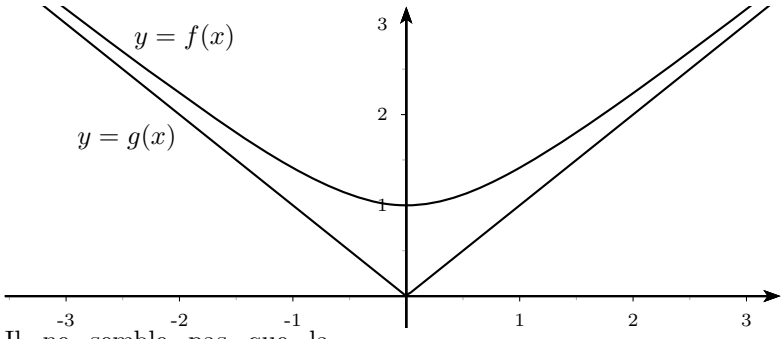
   (c) Ainsi, $f(x) = u(x)$ sur $[\,0\,;1\,]$.

4. Soit $f \in \mathcal{I}$ vérifiant (ii) et soit $x \in [\,0\,;1\,]$.
   On a $v(x) = 1-x = |x-1| \leqslant |f(x)-f(1)| = |f(x)-0| = |f(x)| = f(x)$
   et $1-v(x) = x = |0-x| \leqslant |f(0)-f(x)| = |1-f(x)| = 1-f(x)$
   d'où $f(x) \leqslant v(x)$.
   Ainsi, $f(x) = v(x)$ sur $[\,0\,;1\,]$.

5. L'ensemble $\mathcal{I}$ est donc uniquement constitué des deux fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 1-x$ qui vérifient en fait une relation plus précise sur $[\,0\,;1\,]$:
   $|f(a)-f(b)| = |a-b|$.
   Ainsi, une fonction de $[\,0\,;1\,]$ sur $[\,0\,;1\,]$ ne peut pas « toujours » dépasser la pente 1 en valeur absolue. En effet, (I) peut s'écrire, pour $a \neq b$, $\left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| \geqslant 1$ qui correspond à la « pente » de f entre a et b.

Exercice 2

f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ et $g(x) = |x|$.

1. 

Il ne semble pas que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$.

2. On a, $\forall x \neq 0$, $f(x) = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.
3. Ainsi, $\forall x \neq 0$, on a $f(x) - g(x) = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - |x| = |x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right)$ du signe de $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1}$. Or, $1 + \frac{1}{x^2} > 1$ donc, la fonction racine étant croissante, $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} > \sqrt{1}$ et $f(x) - g(x) > 0$. Si $x = 0$, $f(0) = \sqrt{1} > 0 = g(0)$.
4. La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

Extra E

Conic Strip

Sommaire

1 **Coniques** 349
2 **Ellipses** 350
3 **Paraboles** 351
4 **Hyperboles** 354
5 **Solutions** 356

Introduction

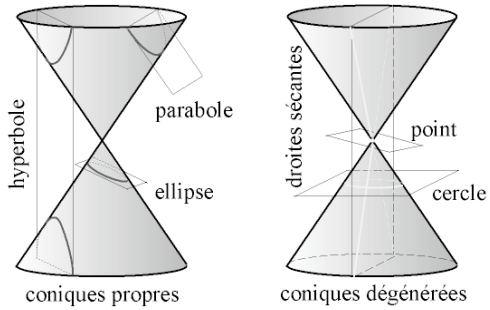
Procurez-vous un sorbet, à la rhubarbe ou à la pêche de vigne de préférence, impérativement en cornet. Mordez à pleines dents puis observez le pourtour obtenu. Répétez l'expérience à l'envie.

Vous avez donc observé, selon l'inclinaison du coup de dents, des courbes fermées (cercles et ellipses), des courbes ouvertes (plus ou moins d'ailleurs) et même de simples droites lorsque vous avez fait en sorte de ne pas mordre de sorbet pour cause d'hyperglycémie ou en ayant tranché en plein dedans, verticalement et au milieu. Et pour finir, vous n'avez eu plus qu'un seul point.

Apprenons-en donc un peu plus.

1 Coniques

Un cône de révolution peut être construit par la rotation le long d'un cercle d'une droite, une *génératrice*, autour d'une autre, *l'axe*, s'intersectant en un point, le *sommet*, et formant un angle de mesure $\alpha \in]\,0\,;90\,[$. On sectionne alors un tel cône par un plan afin d'obtenir une famille de courbes passionnantes : les *coniques*.
Une figure illustre souvent bien mieux qu'un long discours :



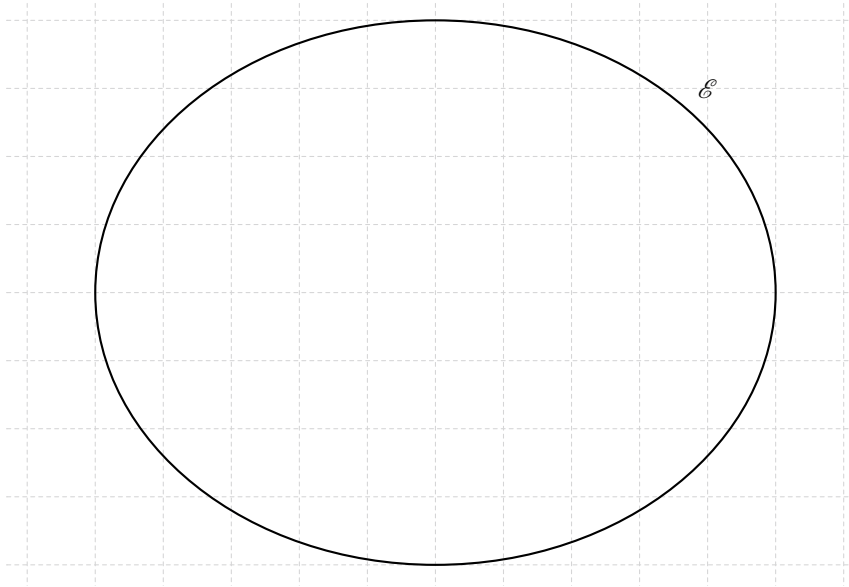
À quelles conditions sur le plan sécant obtient-on chacune des coniques ci-contre ?

Cette famille de courbes a été étudiée depuis l'Antiquité grecque et a de très nombreuses applications. Nous allons étudier quelques-unes de leurs propriétés.
Il est fortement conseillé d'utiliser GeoGebra afin de visualiser ces objets dans de multiples configurations.

2 Ellipses

Prenez deux doigts, les deux index de votre voisin par exemple, avec lesquels vous coincez sur une feuille de papier les extrémités d'une ficelle, sans la tendre. Avec un crayon gris à pointe fine, tendez la ficelle, disons vers le haut de la feuille. Faites ensuite glisser le crayon tout en laissant la ficelle tendue. Tendez-la vers le bas de la feuille à présent et faites glisser le crayon de la même manière. Retirez le crayon, les doigts et la ficelle. Admirez sans retenue.

1. En réalisant un tel tracé, quel cas particulier peut-on retrouver et comment ?
2. Les index de votre voisins étaient posés sur les *foyers* de votre ellipse.
   Retrouver empiriquement les foyers F et F' de l'ellipse $\mathscr{E}$ ci-dessous.



3. Quelles propriétés de symétrie possède une ellipse ?
4. De quelle fonction une ellipse est-elle le graphe ?
5. Pour différents points M_i de $\mathscr{E}$, tracer les bissectrices des angles $F\widehat{M_i}F'$ puis leur perpendiculaire en M_i. Que remarquez-vous ?
   Cette propriété surprend toujours les passants du *Whispering Wall* de Grand Central Station, à New York. En effet, ils peuvent murmurer en un coin et être entendu au coin opposé, et seulement là. Son plafond étant ellipsoïdal et les foyers très proches des coins, le son émit suit alors exactement les mêmes tracés que ceux que vous avez construit : $F \leftrightarrow M_i \leftrightarrow F'$.

Les ellipses sont les courbes obtenues en sectionnant un cône de révolution par un plan formant un angle de plus grande mesure avec l'axe que les génératrices. Une ellipse est aussi la projection d'un cercle sur un plan incliné, tel l'ombre d'un ballon sur le sol au soleil couchant. Depuis Johannes Keppler (1571-1630), nous savons que les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers. Par ailleurs, c'est le nom d'une maison d'édition réputée.

3 Paraboles

Les paraboles sont des courbes obtenues en sectionnant un cône de révolution par un plan parallèle à une génératrice du cône.

Comme chacun sait, une parabole est fortement associée à la fonction carré.

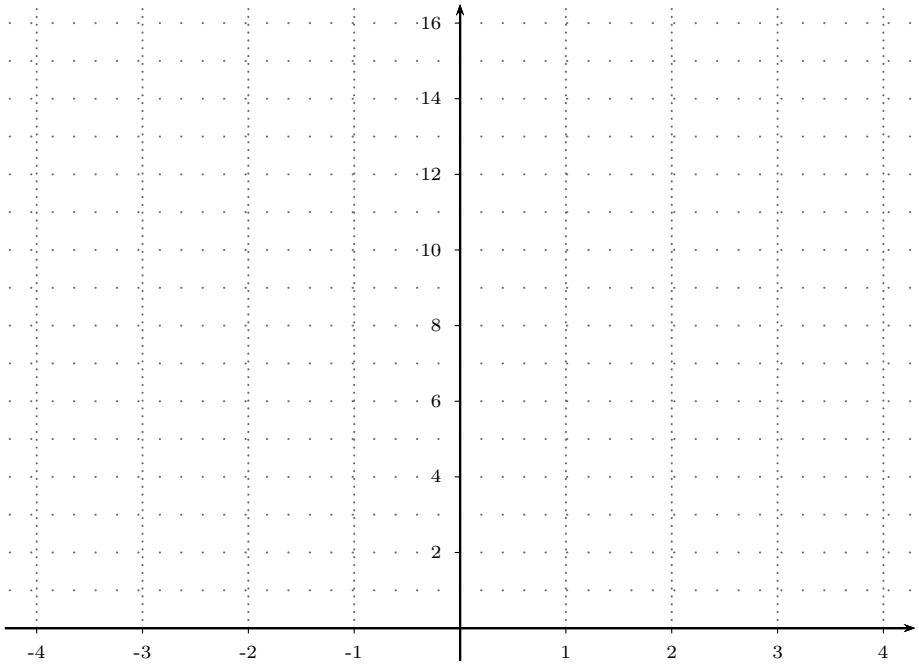
Partie A : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$.

1. Quel est son ensemble de définition ?
2. (a) Complétez les tableaux de valeurs suivant.

x	0	1	2	5	7	10	20	100	-1	-2
x^2										

x	-5	-10	$\sqrt{2}$	$\sqrt{13}$	$-\sqrt{71}$					
x^2						9	64	3	-4	-25

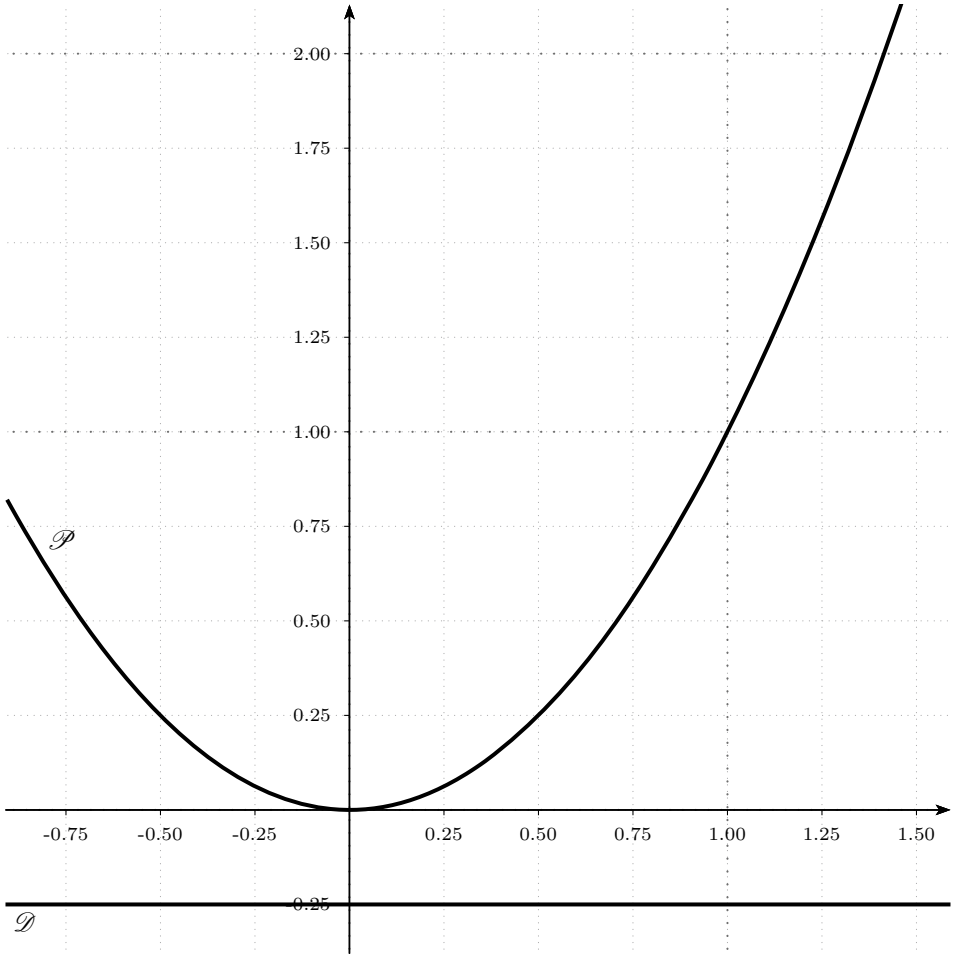
   (b) Que remarquez-vous ?
3. Tracez la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ dans le repère suivant.
   $\mathscr{P}$ est appelée *parabole*.



EXERCICES

4. Que pensez-vous des variations de f ?
5. La parabole $\mathscr{P}$ est-elle symétrique ?

Partie B : On a réalisé ci-dessous un agrandissement de $\mathscr{P}$ et l'on a tracé la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -\frac{1}{4}$.



1. (a) Après avoir placé le point $F\left(0\,;\frac{1}{4}\right)$, mesurez les distances FM_i et $dist(M_i;\mathscr{D})$ en différents points M_i de la parabole $\mathscr{P}$:

FM_i					
$dist(M_i;\mathscr{D})$					

   (b) Que remarquez-vous ?

   (c) Si l'abscisse du point M de la parabole $\mathscr{P}$ vaut x, que vaut son ordonnée ?

   (d) Exprimez les distances FM et $dist\,(M\,;\mathscr{D})$ dans un repère orthonormé en fonction de x.

(e) Démontrez la conjecture émise à la question 1.b.

Le point F est appelé le *foyer* et la droite $\mathscr{D}$, la *directrice* de la parabole $\mathscr{P}$.

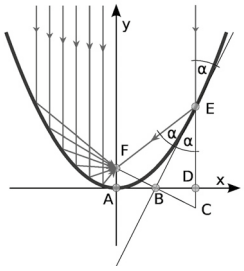
2. (a) Tracez les bissectrices des différents angles $\alpha_i = F\widehat{M_i}H_i$ où H_i est le projeté orthogonal de M_i sur $\mathscr{D}$. Que remarquez-vous ?

   (b) Matérialisez les angles α_i opposés. Que remarquez-vous ?

3. Tracez trois cordes parallèles et placez leur milieu. Que remarquez-vous ? Répétez l'expérience.

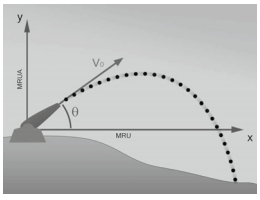
Partie C : Applications

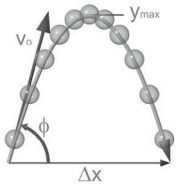
1. En optique, les phares de voiture, les miroirs paraboliques des téléscopes ou les antennes paraboliques sont en fait des paraboloïdes de révolution. En effet, la propriété observée précédemment est très utile, pour peu que l'on place les émetteurs/récepteurs au lieu adéquat : les rayons parallèles à l'axe sont réfléchis sur le paraboloïde vers son foyer. Réciproquement, des rayons émis du foyer se réfléchissent sur le paraboloïde en des rayons parallèles à son axe.



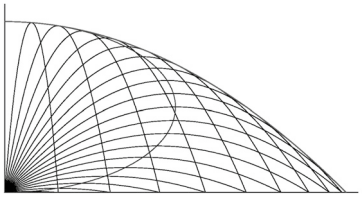
2. Nous n'avons pas observé les propriétés suivantes, pour des raisons de sécurité essentiellement. Elles sont néanmoins vraies.

   (a) Lorsqu'on lance un objet, sa trajectoire est une *parabole*, pour peu que l'on fasse abstraction de la rotondité de la terre et que l'on néglige les effets annexes comme la résistance à l'air.





   (b) Pour une vitesse initiale V_0 donnée, l'ensemble des points que l'on peut atteindre est l'espace situé sous la courbe suivante et il est appelé l'*enveloppe de toutes les trajectoires* paraboliques possibles. On peut montrer que cette courbe est aussi une parabole. On l'appelle la *parabole de sécurité*.



EXERCICES

4 Hyperboles

Les hyperboles sont les courbes obtenues en sectionnant un cône de révolution par un plan formant un angle de plus petite mesure avec l'axe que les génératrices.

Comme chacun sait, une hyperbole est fortement associée à la fonction inverse.

1. Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Quel est son ensemble de définition ?
2. (a) Complétez les tableaux de valeurs suivants.

x	100	20	10	5	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
$\frac{1}{x}$												

x	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	-1	-2	-5				
$\frac{1}{x}$									6	$-\frac{1}{25}$	$\frac{7}{6}$	0

   (b) Que remarquez-vous ?
3. Tracez la courbe $\mathscr{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ dans le repère de la page suivante. $\mathscr{H}$ est appelée *hyperbole*.
4. Conjecturer les différentes symétries de la courbe tracée.
5. Que pensez-vous des variations de la fonction f ?
6. (a) Après avoir placé les points $F\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right)$ et $F'\left(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\right)$, mesurez les distances FM_i et $F'M_i$ en différents points M_i de $\mathscr{H}$ et complétez le tableau suivant.

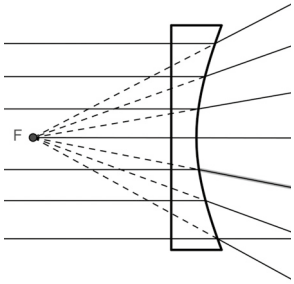
FM_i						
$F'M_i$						

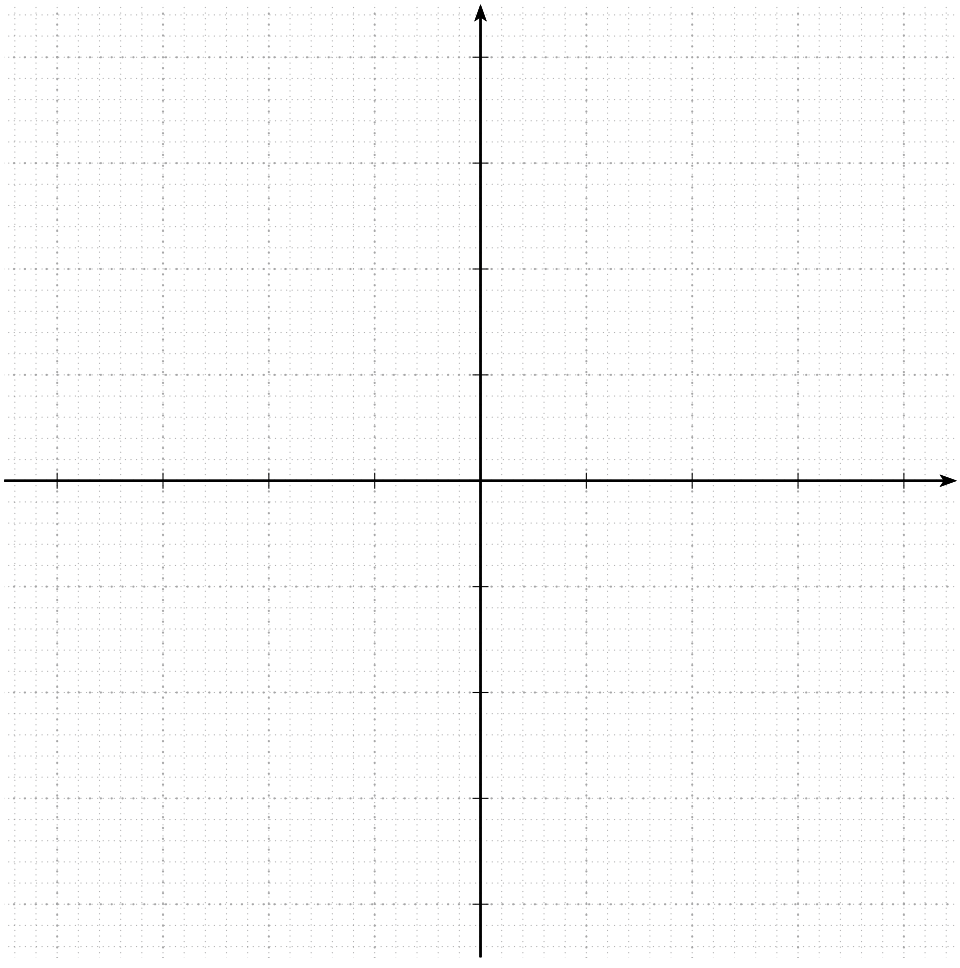
   (b) Que remarquez-vous ?
   (c) Démontrez que $FM^2 = (x + \frac{1}{x} - \sqrt{2})^2$.
   (d) Montrez la conjecture émise en 6.b.

   Les points F et F' sont appelés les *foyers* de l'hyperbole $\mathscr{H}$.
7. Tracez les bissectrices des différents angles $\alpha_i = \widehat{FM_iF'}$. Que remarquez-vous ?
8. (a) Tracez les droites d'équation $\mathscr{D}_1 : y = -x + \sqrt{2}$ et $\mathscr{D}_2 : y = -x - \sqrt{2}$.
   (b) Mesurez puis comparez les distances FM_i et $dist\,(M\,;\mathscr{D}_1)$ pour les points M_i d'abscisses positives (vous pourrez utiliser le tableau précédent). Que remarquez-vous ?
   (c) Faire de même pour les points M_i d'abscisse négative.

Les points F et F' sont appelés les *foyers* de l'hyperbole $\mathscr{H}$, les droites d"équations $y = -x + \sqrt{2}$ et $y = -x - \sqrt{2}$ en sont les *directrices* et le nombre $e = \sqrt{2}$ est l'*excentricité* de l'hyperbole.

Les hyperboles apparaissent dès que des quantités sont inversement proportionnelles.
On peut matérialiser une hyperbole en projetant un faisceau lumineux contre un mur.
Elles possèdent des propriétés optiques fondamentales : ce sont les profils des lentilles divergentes par exemple.





5 Solutions

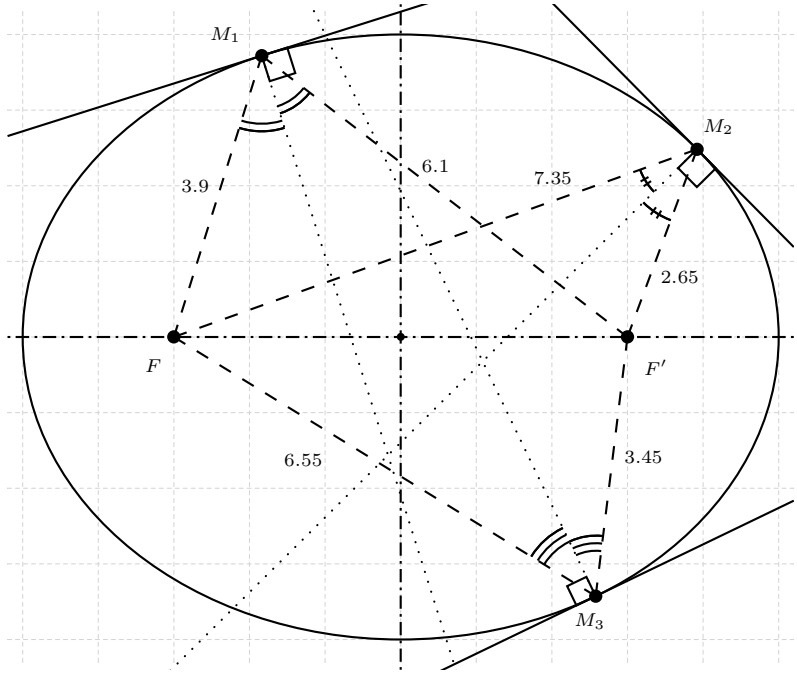
Coniques

On désigne par S le sommet du cône, par $\alpha \in]\,0\,;90\,[$ une mesure de l'angle formé par l'axe Δ et une génératrice du cône et par β une mesure de l'angle entre le plan de section $\mathscr{P}$ et l'axe du cône. On obtient alors :

- une hyperbole lorsque $\beta \in [\,0\,;\alpha\,[$ et $S \notin \mathscr{P}$,
- une parabole lorsque $\beta = \alpha$ et $S \notin \mathscr{P}$,
- une ellipse lorsque $\beta \in]\,\alpha\,;90\,[$ et $S \notin \mathscr{P}$,
- un cercle lorsque $\beta = 90°$ et $S \notin \mathscr{P}$,
- deux droites génératrices lorsque $\beta \in [\,0\,;\alpha\,[$ et $S \in \mathscr{P}$,
- une droite génératrice lorsque $\beta = \alpha$ et $S \in \mathscr{P}$,
- un point, le sommet, lorsque $\beta \in]\,\alpha\,;90\,]$ et $S \in \mathscr{P}$.

Ellipses

1. Si votre voisin place ses index en un même point, vous tracez un cercle de longueur moitié de celle de la ficelle.
2. Voici la figure complète à une échelle un peu plus grande (ficelle de 10 carreaux) :



3. Une ellipse est symétrique par rapport à la droite passant par ses deux foyers, par rapport à la droite bissectrice du segment ayant pour extrémités ses deux foyers et donc par rapport au point d'intersection de ces deux droites.

4. Étant une courbe fermée, une ellipse ne peut pas être la représentation d'une fonction d'une seule variable réelle.
5. On remarque que les perpendiculaires en M_i aux bissectrices des angles $F\widehat{M_i}F'$ semblent tangentes à l'ellipse. Des rayons issus d'un foyer se réfléchiraient donc vers l'autre.

Paraboles

Partie A : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$.

1. La fonction carré est définie sur $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$.
2. En complétant les tableaux, on remarque que toutes les images sont positives ou nulles, que les nombres strictement négatifs n'ont ainsi pas d'antécédent et que les nombres opposés ont même image.
3. Cela devrait ressembler au graphe tracé en page 352, non ?
4. Après avoir tracé la parabole d'équation $y = x^2$ grâce au tableau de valeur et la calculatrice, on conjecture que la fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
5. Puisque deux nombres opposés ont même image ($f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$), les points $\left(-x\,;x^2\right)$ et $\left(x\,;x^2\right)$ sont sur $\mathscr{P}$ et la parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 0$. On dit que la fonction carré est *paire*.

Partie B :
La figure complète est en page suivante.

1. (a) et (b) On remarque que les distances FM_i et $dist(M_i;\mathscr{D}) = M_iH_i$ semblent égales.

   (c) Si $M\,(x\,;y) \in \mathscr{P}$, alors son ordonnée y vaut $f(x) = x^2$ d'où $M\left(x\,;x^2\right)$.

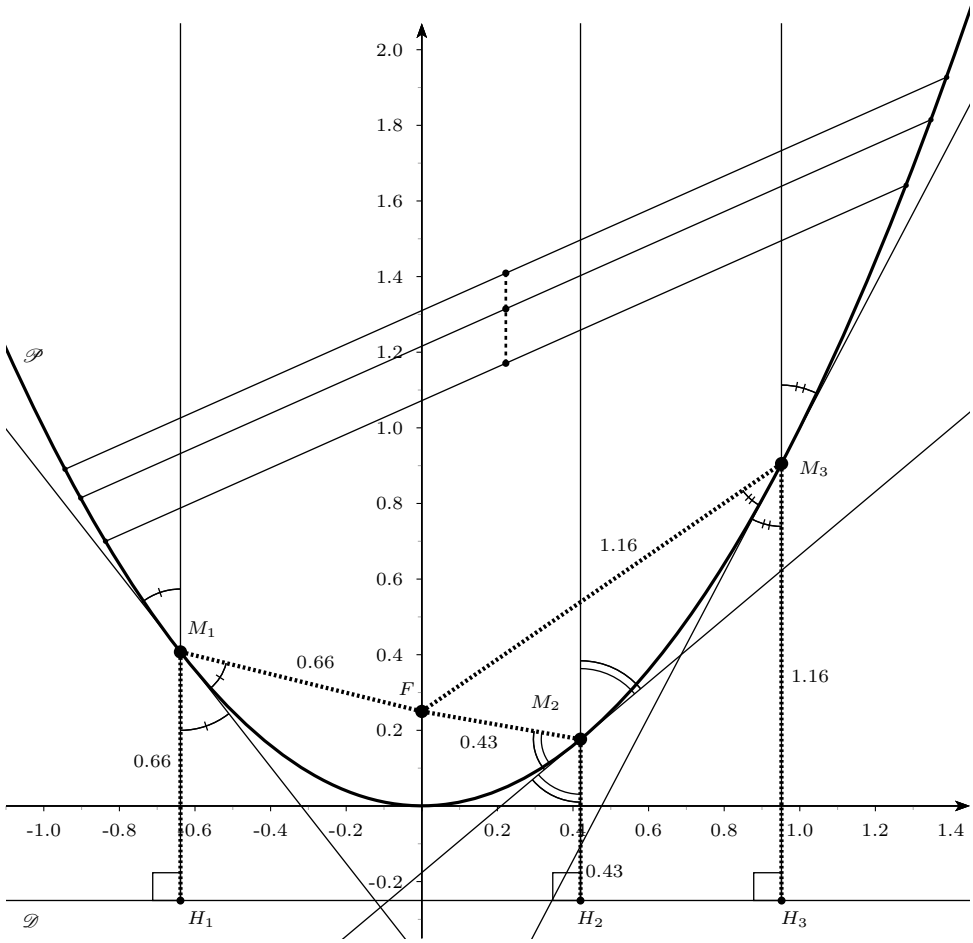
   (d) On a $FM^2 = (x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2 = (x-0)^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2$
   $FM^2 = x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16} = (x^2)^2 + 2x^2\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} = (x^2 + \frac{1}{4})^2$
   donc $FM = x^2 + \frac{1}{4}$.
   Par ailleurs, on a trivialement $dist\,(M\,;\mathscr{D}) = y_M + \frac{1}{4} = x^2 + \frac{1}{4}$.

   (e) Ainsi, $FM = dist\,(M\,;\mathscr{D}) \quad \forall M \in \mathscr{P}$.

2. (a) On remarque que les bissectrices des angles $\alpha_i = F\widehat{M_i}H_i$ semblent tangentes à la parabole $\mathscr{P}$.

   (b) Il semble donc que l'on a les mêmes angles α_i entre les tangentes et les demi-droites parallèles à l'axe de $\mathscr{P}$. Les rayons parallèles à cet axe se réfléchiraient donc vers le foyer, et réciproquement.

3. Il semble que les cordes parallèles aient des milieux alignés selon une droite parallèle à l'axe de $\mathscr{P}$.



Hyperboles

1. La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]\,0\,;+\infty[$.
2. On remarque que 0 n'a pas d'antécédent, que les nombres et leur image sont de même signe, que les nombres opposés ont des images opposées et que les « grands » nombres ont des « petites » images et inversement.
3. La figure complète est en page suivante.
4. L'hyperbole $\mathscr{H}$ semble symétrique par rapport à chacune des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ et donc par rapport à leur intersection, l'origine du repère orthonormé. En effet, les points symétriques par rapport à O $\left(x\,;\,\frac{1}{x}\right)$ et $\left(-x\,;\,-\frac{1}{x}\right)$ appartiennent tous deux à $\mathscr{H}$. On dit que la fonction inverse est *impaire*.
5. La fonction inverse semble strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement décroissante sur $]\,0\,;+\infty[$.

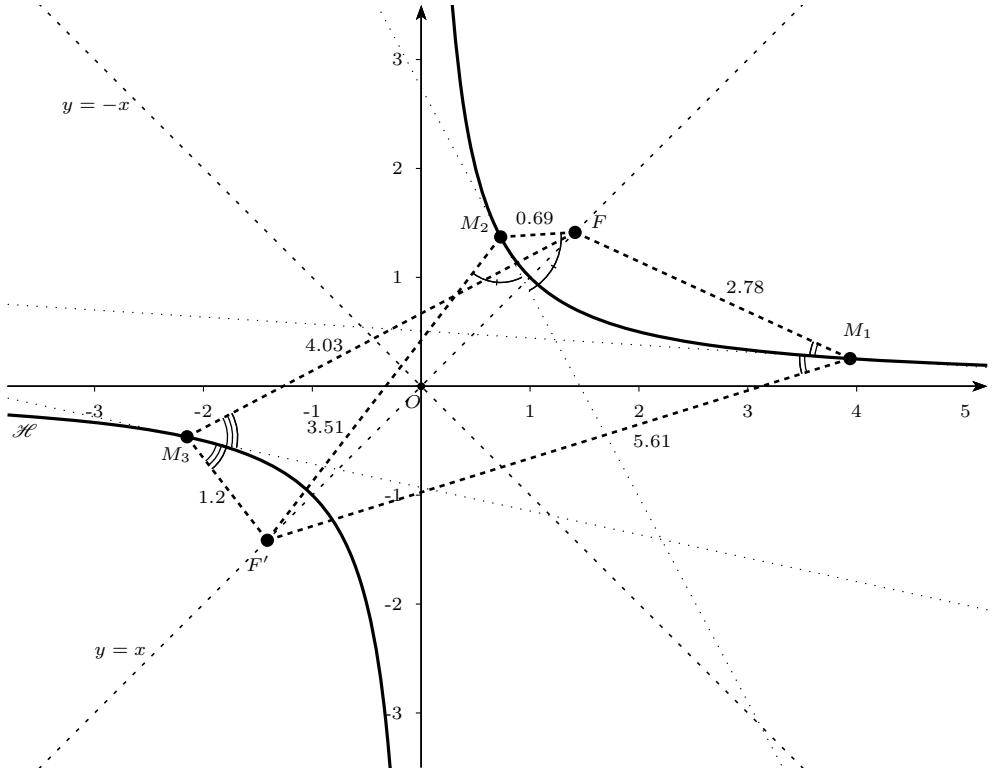
6. (a) et (b) Il semble que la différence entre les distances FM_i et $F'M_i$ soit constante, égale à environ $2,83$ (certainement $2\sqrt{2}$).

   (c) On a $FM^2 = (x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2 = (x - \sqrt{2})^2 + (\frac{1}{x} - \sqrt{2})^2$
   $FM^2 = x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 + \frac{1}{x^2} - 2\frac{\sqrt{2}}{x} + 2 = (x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) - 2\sqrt{2}(x + \frac{1}{x}) + 2$
   $FM^2 = (x + \frac{1}{x})^2 - 2\sqrt{2}(x + \frac{1}{x}) + \sqrt{2}^2 = (x + \frac{1}{x} - \sqrt{2})^2$.

   (d) De même, $F'M^2 = (x + \frac{1}{x} + \sqrt{2})^2$
   d'où $|F'M - FM| = \big|\big|x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\big| - \big|x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\big|\big| = 2\sqrt{2}$ en faisant attention aux signes.

7. Il semble que les bissectrices des différents angles $\widehat{FM_iF'}$ soient les tangentes à l'hyperbole $\mathscr{H}$.

8. Il semble que les rapports $\frac{FM}{dist(M\,;\mathscr{D}_1)}$ à gauche et $\frac{F'M}{dist(M\,;\mathscr{D}_2)}$ à droite soient constants, égaux à $\sqrt{2}$.



CORRIGÉS

Extra F

AUTO-EXOS

Sommaire

1 R.T.T. 361
2 Last Fraction Hero 362
3 Le Factorisathon 362
4 VouF ? 362
5 R.T.T. : le retour 363
6 Solutions 364

Cet extra est incomparable pour réviser en autonomie les notions de cette année et des précédentes.

1 R.T.T.

Pour passer du bon temps, rien de tel que les R.T.T.

Résoudre de **T**ê**T**e les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

« Micro-brouillon » autorisé pour les plus difficiles. Ne pas oublier de tester les réponses.

(a) $x+4=6$

(b) $5t+7=1$

(c) $2-3q \geqslant 4$

(d) $y-5 \geqslant 2y-3$

(e) $z-1<z+1$

(f) $u+v+3>5u+v-1$

(g) $u^2+v^2-2uv \geqslant 0$

(h) $3-2x \leqslant -2x-5$

(i) $6-3x \leqslant 0$

(j) $x^2-1=0$

(k) $x^2=16$

(l) $z^2+3=0$

(m) $w^2+9 \leqslant 0$

(n) $x^2 \geqslant 25$

(o) $3u^2+4=1$

(p) $x^2-9<0$

(q) $z^2-4z+4=0$

(r) $3y^2-2y-1=0$

(s) $u^2-6u+9>0$

(t) $x^2-2x+1 \leqslant 0$

(u) $\sqrt{3-x} \geqslant 5$

(v) $\dfrac{1}{z} \geqslant \dfrac{1}{2}$

(w) $\dfrac{1}{x}<3$

(x) $\dfrac{1}{t^2+3}=\dfrac{1}{5}$

(y) $(x-1)(x+4)(x-3)>0$

(z) $3-\dfrac{2}{p} \leqslant 1$

2 Last Fraction Hero

Calculer, simplifier, réduire,... le plus rapidement possible, le plus souvent possible « de tête » et de toutes façons, sans calculatrice et sans se préoccuper des éventuels problèmes de définition des quotients.

(a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{4}$

(b) $\dfrac{5}{7}-\dfrac{3}{2}$

(c) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{5}{2}$

(d) $\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{7}{4}-3}$

(e) $\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{4}{7}}{1+2}$

(f) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}$

(g) $\dfrac{3x}{x-2}+\dfrac{1-4x}{3x}$

(h) $\dfrac{7a}{7a+1}+\dfrac{3a}{2-3a}$

(i) $\dfrac{\frac{3}{x}-\frac{5}{1-2x}}{x-\frac{2x}{x+1}}$

(j) $\dfrac{\frac{2}{y+4}-\frac{3}{3-2y}}{-\frac{y}{y+4}+\frac{1}{y}}$

(k) $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$

(l) $2+\dfrac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{2}}}}$

(m) $x+\dfrac{1}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}$

(n) $\dfrac{\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-1}}{\frac{x-2}{x+1}-\frac{x+1}{x-2}}$

(o) $\dfrac{\frac{5x^2-10x-15}{2x-1}}{\frac{3+2x-x^2}{4-8x}}$

3 Le Factorisathon

Rappeler les trois identités remarquables ainsi que les identités « $ka \pm \ldots$ ».
Factoriser ensuite le plus possible les expressions suivantes.

(a) $(1+x)(x+4)+6(x+4)$

(b) x^2-9

(c) $4t^2-\frac{16}{9}$

(d) $2(q+1)^2+(1-q)(1+q)$

(e) $(2t+3)^2-(1+t)(2t+3)$

(f) $(2A+3)^2-25$

(g) $\varphi^3-4\varphi+3\varphi^2$

(h) $1-4x^2$

(i) $4(5+t)(1-6t)+7(t+5)+3(t+5)^2$

(j) $3(2z-3)^2-3(5-z)^2$

(k) $3(2x-1)^2+6(-1+2x)(7-4x)$

(l) $(5+u)(3u-1)+6(3u-1)(5-2u)$

(m) $3x^2-10$

(n) $-\frac{1}{4}(n-2)3n+(2-n)^2(1+4n)$

(o) $25y^2-9+(-2y+5)(5y-2)-5+2y$

4 VouF ?

Sauf précision contraire, les fonctions sont définies et dérivables sur les ensembles $\mathscr{D}$, les équations et inéquations doivent être vérifiées sur tout leur ensemble de définition.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

(a) x^2-2x+5 n'admet pas de racines réelles.

(b) $3x^2+x-4$ admet 1 et -4 pour racines.

(c) $\sqrt{2}\,x^2-4x+\sqrt{3}$ n'admet pas de forme factorisée.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x.$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-3| - 2 \geqslant 0.$

(f) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant x^2.$

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty.$

(h) $\lim\limits_{x \to 3^+} 2x + 5 = 11.$

(i) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2} = 0.$

(j) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = -1.$

(k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{5-x} = 0^-.$

(l) La droite d'équation cartésienne $2x + 6y - 5 = 0$ admet $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

(m) Si f est dérivable en 4
alors f est croissante en 4.

(n) Si f' est négative sur le domaine $\mathscr{D}$ alors f est décroissante sur $\mathscr{D}$.

(o) Si f' est positive sur l'intervalle $\mathscr{D}$ alors f est croissante sur $\mathscr{D}$.

(p) Si f admet un extremum local en $a \in \mathscr{D}$, alors $f'(a) = 0$.

(q) Si $a \in \mathscr{D}$ est tel que $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum local en a.

(r) Si f est croissante alors f est positive.

(s) Si $f(x) = 2(x-2)(3x^2+5)$
alors $f'(x) = 12x^2 - 12x + 10$.

(t) Si $f(x) = \frac{2x-3}{5x-1}$
alors $f'(x) = \frac{13}{5x-1}$.

(u) $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(\pi - t) = \sin(-\frac{\pi}{2} + t).$

(v) $\cos t > \frac{1}{2}$ pour $t < \frac{\pi}{3}$.

(w) $\sin t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ si $t \in \left[-\frac{2\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{3}\right[$.

(x) Si $u_0 = 3$, $u_1 = -6$, $u_2 = 12$ alors $u_3 = -24$.

(y) Si (u_n) est géométrique et $u_1 = 3$ alors $u_2 = 9$.

(z) Si (u_n) est arithmétique, $u_3 = 5$ et $u_6 = 20$ alors $u_1 = -5$.

5 R.T.T. : le retour

Résoudre de **T**ê**T**e les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

(α) $3x + 5 = -1$

(β) $7 - 2c = 4$

(γ) $4 + 2y \geqslant -5$

(δ) $5 - 6z \leqslant 4$

(ε) $2t + 1 > 5t - 2$

(ζ) $-7u - 4 < -9 - 2u$

(η) $\dfrac{3}{x} \geqslant \dfrac{2}{5}$

EXERCICES

(θ) $-\dfrac{2}{y} < \dfrac{3}{7}$
(ι) $v^2 = 7$
(κ) $5y^2 - 1 = 0$
(λ) $3 - 4z^2 = 1$
(μ) $t^2 + 4 = 0$
(ν) $x^2 - 3x + 2 = 0$
(ξ) $5 - 2p^2 + 3p = 0$
(o) $r^2 > 1$
(π) $x^2 - 6 \leqslant 0$
(ρ) $5(a-3)(a+2) < 0$
(σ) $(11 - 2x)(4 + 3x) \leqslant 0$
(τ) $\sqrt{b+5} \leqslant 3$
(υ) $\sqrt{3-q} < 5$
(φ) $\sqrt{7-2p} > 2$
(χ) $|5 - w| < 2$
(ψ) $\left|\ell^7\right| > -4$
(ω) $|x + 4| > 3$

6 Solutions

R.T.T.

(a) $x = 2$
(b) $t = -\frac{6}{5}$
(c) $q \leqslant -\frac{2}{3}$
(d) $y \leqslant -2$
(e) $z \in \mathbb{R}$
(f) $u < 1$ et $v \in \mathbb{R}$
(g) u et $v \in \mathbb{R}$
(h) $\varnothing$
(i) $x \geqslant 2$
(j) $x = \pm 1$
(k) $x = \pm 4$
(l) $\varnothing$
(m) $\varnothing$
(n) $x \in]-\infty\,;-5\,] \cup [\,5\,;+\infty\,[$
(o) $\varnothing$
(p) $x \in]-3\,;3\,[$
(q) $z = 2$
(r) $y = 1$ ou $y = -\frac{1}{3}$
(s) $u \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
(t) $x = 1$
(u) $x \leqslant -22$
(v) $z \in]\,0\,;2\,]$
(w) $x \in]-\infty\,;0\,[\cup \left]\,\frac{1}{3}\,;+\infty\,\right[$
(x) $t = \pm\sqrt{2}$
(y) $x \in]-4\,;1\,[\cup]\,3\,;+\infty\,[$
(z) $p \in]\,0\,;1\,]$

Last Fraction Hero

(a) $\frac{19}{12}$
(b) $-\frac{11}{14}$
(c) $-\frac{17}{60}$
(d) $\frac{14}{15}$
(e) $\frac{13}{42}$
(f) $\frac{-1}{x(x-1)}$
(g) $\frac{5x^2+9x-2}{3x(x-2)}$
(h) $\frac{17a}{(2-3a)(7a+1)}$
(i) $\frac{(3-11x)(x+1)}{x^2(x-1)(1-2x)}$
(j) $\frac{y(7y+6)}{(3-2y)(y^2-y-4)}$
(k) $\frac{13}{8}$
(l) $\frac{41}{15}$
(m) $\frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+2)}$
(n) $\frac{(x-2)(x+1)(6x+3)}{(x+2)(x-1)(6x-3)}$
(o) 20

Le Factorisathon

(a) $(x+4)(x+7)$
(b) $(x-3)(x+3)$
(c) $(2t-\frac{4}{3})(2t+\frac{4}{3})$
(d) $(q+1)(q+3)$
(e) $(2t+3)(t+2)$
(f) $(2A-2)(2A+8)$
(g) $\varphi(\varphi-1)(\varphi+4)$
(h) $(1-2x)(1+2x)$
(i) $(t+5)(26-21t)$
(j) $3(3z-8)(z+2)$
(k) $3(2x-1)(13-6x)$
(l) $(3u-1)(35-11u)$
(m) $(x\sqrt{3}-\sqrt{10})(x\sqrt{3}+\sqrt{10})$
(n) $(2-n)(2+\frac{31}{4}n-4n^2)$
(o) $(5y-3)(3y+8)$

VouF ?

(a)	V	(g)	V	(m)	F	(s)	F	(y)	F
(b)	F	(h)	V	(n)	F	(t)	F	(z)	V
(c)	F	(i)	V	(o)	V	(u)	F		
(d)	F	(j)	V	(p)	F	(v)	F		
(e)	F	(k)	V	(q)	F	(w)	V		
(f)	F	(l)	F	(r)	F	(x)	F		

R.T.T. : le retour

(α) $x=-2$
(β) $c=\frac{3}{2}$
(γ) $y\geqslant -\frac{9}{2}$
(δ) $z\geqslant \frac{1}{6}$
(ε) $t<1$
(ζ) $u>1$
(η) $0<x\leqslant \frac{15}{2}$
(θ) $y<-\frac{14}{3}$ ou $y>0$
(ι) $v=\pm\sqrt{7}$
(κ) $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$
(λ) $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
(μ) $\varnothing$
(ν) $x=1$ ou $x=2$
(ξ) $p=-1$ ou $p=-\frac{5}{2}$
(ο) $r<-1$ ou $r>1$
(π) $x\in\left[-\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\right]$
(ρ) $a\in\left]-2\,;3\right[$
(σ) $x\leqslant -\frac{4}{3}$ ou $x\geqslant \frac{11}{2}$
(τ) $b\in[-5\,;4]$
(υ) $q\in\left]-22\,;3\right]$
(φ) $p<\frac{3}{2}$
(χ) $w\in\left]3\,;7\right[$
(ψ) $\ell\in\mathbb{R}$
(ω) $x<-7$ ou $x>-1$

Extra G

SELF-WORKING

Sommaire

1 Exercises 367
2 Solutions 369

This extra is perfect to practice yours skills all by yourself.

1 Exercises

Exercise 1

1. Write each quadratic expression in completed square form.
   (a) $2x^2 + 4x - 2$, (b) $-x^2 + 5x + 1$, (c) $6 - 2x + x^2$.
2. For each quadratic function above, write down the coordinates of the maximum/minimum point of its graph and find its roots.

Exercise 2 Let f be the function $-x^3 + 7x^2 - 10x$. Factorize $f(x)$ completely then sketch the graph of f.

Exercise 3 Here is a fraction : $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$.
How can we move the square root of 2 to the top ?

Exercise 4 Find the equation of the tangents to $y = x^2 + x$ that pass through $(1\,;1)$.

Exercise 5 A sheet of metal of 12 inches by 10 inches is to be used to make an open box. Squares of equal sides x are cut of each corner then the sides are folded to make the box. Find the value of x that makes the volume maximum.

Exercise 6 In an electronic circuit with constant voltage E (in Volts), a resistance (of constant impedance r in Ohms) and a load (of impedance R in Ohms) are connected in series. The electric current i is then given by the formula $i = \dfrac{E}{r+R}$ and the power P delivered to the load R is given by $P = Ri^2$. R and r being positive, determine the value of R such that the power P delivered to R is maximum.

Exercise 7 Your parents have decided to help you save money by directly investing in your future for 6 months. Your job is to convince them of the option that will be best for you. Using arithmetic/geometric sequences, determine how much money you will have at the end of the 6 months (Jan 1 - Jun 30) for each of the following scenarios.

(a) You are given a savings passbook. Each week, you are to deposit \$10.

(b) You decide to deposit \$0.01 on Jan 1 and each day thereafter, deposit an amount that is double the previous day's amount.

(c) You are given a savings passbook. Each day you are to deposit \$1.

Exercise 8 In a square $ABCD$ with sides of length 1, we consider the paths from A to the opposite corner C made of line segments, called steps, so that the steps of the path are all parallel either to (AB) or (AD), not necessarily of equal lengths. We must specify that no "way back" is allowed.

1. Draw such a path. What is its length ?
2. Draw such paths with 5 steps, 10 steps, 20 steps... and find the total length of the path in each case.
3. What would be the length of such a path if it had 1 000 steps ? And if it had 1 million steps ? Is there anything surprising about this result ?

Exercise 9 This is a frequency table of the durations, to the nearest minute, of phone calls made from an office one day.

Duration (min)	2	3	4	5	8	9	10	15	20
Frequency	1	5	4	10	6	3	4	1	1

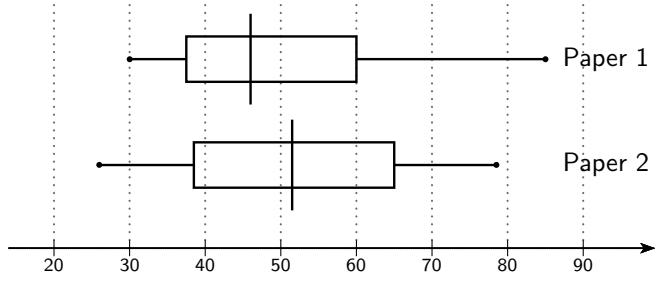
Find the mean, median, lower quartile and upper quartile, interquartile range for this data set.

Exercise 10 The prices of flats in a district range from a minimum of £48K to a maximum of £152K.
The values of Q_1, Me and Q_3 are respectively £82K, £92K and £106K.
An outlier is defined as any value below $Q_1 - 1.59(Q_3 - Q_1)$ or any value above $Q_3 + 1.59(Q_3 - Q_1)$.

Determine wether the minimum and maximum prices are outliers.

Then, draw a box plot for the data.

Exercise 11 The two box plots below show the distributions of marks in two exams. Write a couple of sentences comparing the two sets of marks.



Exercise 12 A game is played with a single ordinary dice. The scoring system is as follows.

- Roll a six the first time : score 3 ; otherwise, roll again.
- Roll a six the second time : score 2 ; otherwise, roll again.

◦ Roll a six the third time : score 1 ; otherwise, score 0.

Make a table showing the probability distribution of the score S.

Exercise 13 A company that makes games has the idea of using a dice in the shape of a cuboctahedron. This has two kinds of face : squares and triangles. The company made a prototype dice and rolled it 500 times. It lands with square uppermost 300 times and triangle uppermost 200 times.

1. Write down the estimates of the probabilities of "square" and "triangle".

In the planed game, two of the dice are rolled.
If both land triangle uppermost, the player scores 3.
If both land square uppermost, the player scores 2.
Otherwise, the player scores 1.

2. Let S be the score. Using a tree diagram or a table, determine the probability distribution of the score S.

Exercise 14 $*\ *\ *$

Start with two numbers, say 7 and 4. This is the beginning of a sequence of numbers. The rule is that the next number in the sequence is the mean value of the last two numbers. So, the next number is half of the sum of 7 and 4, that is $\frac{11}{2}$. Then, we have... Continue the sequence until you know what will happen if you proceed indefinitely.
Now, choose two different starting numbers and repeat the process, say 4 and 1, then 8 and 2, then 10 and 3. And if you exchange the order of the starting numbers ? And if you choose the same numbers ?
Can you find a relationship between the two starting numbers and the limiting value ?

CORRIGÉS

2 Solutions

Solution 1

(a) $2x^2+4x-2 = 2(x+1)^2-4 = 2\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)$, Min : $S\,(-1\,;-4\,)$.

(b) $-x^2+5x+1 = -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{29}{4} = -\left(x-\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)$,
Max : $S\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{29}{4}\right)$.

(c) $6-2x+x^2 = (x-1)^2+5$, Min : $S\,(1\,;5\,)$.

Solution 2 $-x^3+7x^2-10x = -x(x-2)(x-5)$: three roots 0, 2 and 5.

Solution 3 $\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$.

Solution 4 The equations of the tangents to $y = x^2+x$ are of the form $y = (2a+1)x-a^2$. It passes through $(\,1\,;\,1\,)$ for $a=0$ and $a=2$.

Solution 5 $V = 4(x^3-11x^2+30x)$ is maximum for the value $\frac{11-\sqrt{31}}{3} \in\,]\,0\,;5\,[$.

Solution 6 $P' = \frac{E^2(r-R)}{(r+R)^3}$ and P is maximum for $R=r$.

Solution 7

(a) $u_{26} = 26 \times 10 = \$\,260$. arithmetic progression of common difference \$10.

(b) $v_1 + v_2 + ... + v_{181} = 0.01 \times \frac{2^{181}-1}{2-1} \simeq \$\,3.10^{52}$ (!) geometric progression of common ratio 2.

(c) $w_{181} = 181 \times 1 = \$\,181$. arithmetic progression of common difference \$1.

Solution 8 Any such path will have length 2 ! It is surprising because it can be as close as we wish to a "curve" of smaller length such as the diagonal $[AC]$ (of length $\sqrt{2}$). Actually, the length of a curve is linked to the derivative of the function defining the curve and the "derivative" for our paths is null, constant or does not even exist...

Solution 9 We have $\overline{x} \simeq 6.66' \simeq 6'40''$, $Q_1 = 4'$ (9th), $Me = 5'$ (18th), $Q_3 = 9'$ (27th) and $IQ = 5'$.

Solution 10 $Q_1 - 1.59(Q_3 - Q_1) = 82 - 1.59(106 - 82) \simeq$ £44K and $Q_3 + 1.59(Q_3 - Q_1) \simeq$ £144K so the maximum and minimum values are not outliers.

Solution 11 More than half of the class passed the paper 2 whereas less than half passed paper 1. Furthermore, even if the marks of the paper 1 are much more scattered than in paper 2, the "center half", *i.e.* the interval $[\,Q_1\,;Q_3\,]$, of the marks of paper 1 is more packed than in paper 2.

Solution 12

S	0	1	2	3
Probability	$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Solution 13

1. $P(\text{"}square\text{"}) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$ and $P(\text{"}triangle\text{"}) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$

2.

S	1	2	3
Probability	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{4}{25}$

Solution 14

◦ $7,\ 4,\ \frac{11}{2},\ \frac{19}{4},\ \frac{41}{8},\ \frac{79}{16},\ \frac{161}{32},\ \frac{319}{64}, \ldots,\ \frac{5\times 2^k+1}{2^k},\ \frac{5\times 2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, \ldots$ seems to tend to 5.

◦ $4,\ 1,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{17}{8},\ \frac{31}{16},\ \frac{65}{32},\ \frac{127}{64}, \ldots,\ \frac{2\times 2^k+1}{2^k},\ \frac{2\times 2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, \ldots$ seems to tend to 2.

◦ $8,\ 2,\ \frac{10}{2},\ \frac{14}{4},\ \frac{34}{8},\ \frac{62}{16},\ \frac{130}{32},\ \frac{254}{64},\ \frac{514}{128}, \ldots,\ \frac{4\times 2^k+2}{2^k},\ \frac{4\times 2^{k+1}-2}{2^{k+1}}, \ldots$ seems to have 4 as limiting value.

◦ $10,\ 3,\ \frac{13}{2},\ \frac{19}{4},\ \frac{45}{8},\ \frac{83}{16},\ \frac{173}{32},\ \frac{339}{64}, \ldots,\ \frac{\frac{16}{3}\times 2^k+\frac{7}{3}}{2^k},\ \frac{\frac{16}{3}\times 2^{k+1}-\frac{7}{3}}{2^{k+1}}, \ldots$ seems to have $\frac{16}{3}$ as limiting value.

◦ $1,\ 4,\ \frac{5}{2},\ \frac{13}{4},\ \frac{23}{8},\ \frac{49}{16},\ \frac{95}{32},\ \frac{193}{64}, \ldots,\ \frac{3\times 2^k+1}{2^k},\ \frac{3\times 2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, \ldots$ seems to have limiting value 3.

◦ $6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6 \ldots$ seems to tend to 6.

A sequence starting with a, b seems to have $b + \frac{a-b}{3} = \frac{a+2b}{3}$ as limiting value.

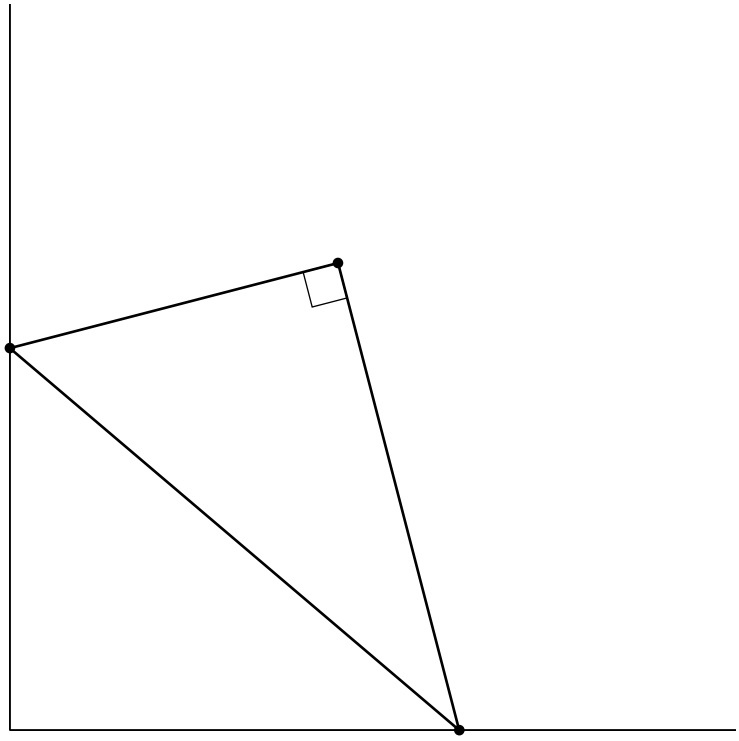
Extra H

Équerre et math

Cet extra est impeccable pour pratiquer GeoGebra et revoir la géométrie classique.

Problème

C'est la rentrée. Pour fêter cela, vous avez reçu une superbe équerre mate. Vous vous précipitez dans votre chambre afin de jouer avec et très rapidement un problème vous tarabuste. En effet, vous avez posé un des sommets saillants au sol et l'autre contre le mur, l'équerre leur étant perpendiculaire. Vous avez ensuite fait glisser l'équerre de haut en bas tout en conservant cette configuration et tout en souplesse afin de ne pas en émousser les angles. Vous vous êtes alors demandé quelle pouvait bien être la trajectoire du troisième sommet, celui de l'angle droit.
Tentez donc d'y répondre.



Aides

Répondez aux questions dans l'ordre et sans lire les suivantes, sinon c'est de la triche.

1. Tracez plusieurs équerres de mêmes dimensions et dans la même configuration sur la figure de la page précédente afin de conjecturer la trajectoire de l'angle droit.
2. Réalisez une figure GeoGebra. Attention, ce n'est pas aisé et une méthode générale est donnée en question suivante, à ne lire qu'après s'y être essayé sur des dimensions particulières.
3. Construisez la figure GeoGebra suivante :
   (a) Créer trois curseurs $a \in [-10\,;10]$, $h \in [0\,;15]$ et $\alpha \in [0\,;90]$.
   (b) Créer le point $A(0\,;a)$ dans le repère orthonormé de centre O.
   (c) Tracer le cercle Γ de centre A et de rayon h.
   (d) Appeler B une des intersections de Γ et de l'axe des abscisses.
   (e) Après avoir créé le milieu de $[AB]$, tracer le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
   (f) Créer la demi-droite $[AM)$ telle que $\widehat{BAM} = \alpha$, appeler C son intersection avec le cercle $\mathscr{C}$ puis tracer le triangle BAC.
   (g) Activer la *trace* du point C puis faire varier le curseur a.
   (h) Après avoir modifié les curseurs h et α, faire varier le curseur a.
4. Justifiez la construction précédente.
5. (a) Vous avez donc conjecturé que la trajectoire du point C est...
   (b) Conjecturez donc son coefficient directeur en traçant quelques graphes de fonctions affines.
   (c) Vous ne l'avez pas trouvé ? Affichez donc la *valeur* (c.-à-d. la longueur) des segments adjacents à l'angle droit.
   (d) Tracez alors la droite conjecturée et vérifiez que ce ne peut être que celle-ci en faisant varier les différents paramètres.
6. (a) Démontrez votre conjecture.
   (b) C'est difficile ? Tracez l'angle $\widehat{BOC}$, cela ira mieux.
   (c) Toujours pas ? Souvenez-vous du théorème de l'angle inscrit.
   (d) Maintenant que les angles sont superposables, vous pouvez calculer le rapport $\dfrac{y_C}{x_C}$.
   Vous voyez bien que l'on y arrive finalement.

Solution

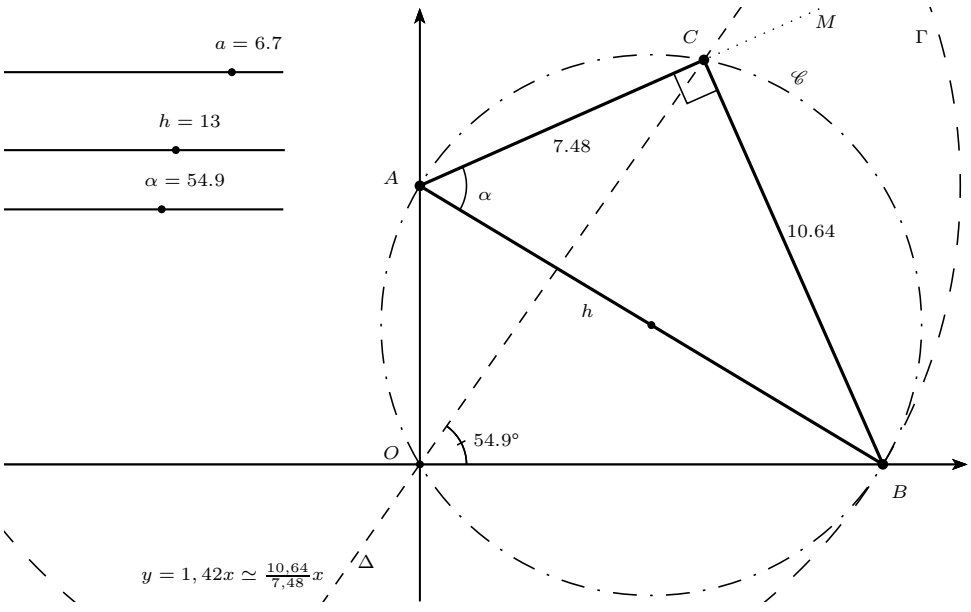
Après de multiples tentatives, on conjecture que le point C est sur une droite passant par l'origine O dont le coefficient directeur dépend uniquement de l'angle α en A (ou de l'autre angle saillant en B) et non de la longueur h de l'hypoténuse ni de la position a du point A (ni de B).

Justifons la construction : A est sur l'axe des ordonnées, B sur l'axe des abscisses à une distance h de A donc sur le cercle Γ. Le point C est tel que $\widehat{BAC} = \alpha$ donc $C \in [AM)$ et tel que $\widehat{BCA} = 90°$ donc C appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

En activant la *trace* de C et en faisant varier les paramètres, on observe que C appartient à une droite passant par l'origine. En testant différentes droites, surtout après avoir afficher les *valeurs* indiquées, on conjecture que C est sur la droite d'équation $y = \frac{BC}{AC}$. Empressons nous de la tracer.

Comment le démontrer ? Affichons donc l'angle $\widehat{BOC}$. Tiens, tiens, il a la même valeur que α. En effet, O est bien sur le même cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ puique le triangle BOA est aussi rectangle en O. Le théorème de l'angle inscrit nous affirme alors que A et O « regardent » la corde $[BC]$ selon le même angle, le fameux α. L'angle $\widehat{BOC}$ est donc bien constant.

Le coefficient directeur de la droite (OC) est donc le rapport $\frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = \frac{y_C}{x_C}$ et dans le repère orthormé donné, ce rapport est aussi la tangente de l'angle $\widehat{BOC}$ (*opposé/hypoténuse*). Dans l'équerre BAC, la tangente de ce même angle s'exprime par $\tan(\alpha) = \frac{BC}{AC}$ qui est donc bien le coefficient directeur de la droite sur laquelle le point C se promène.



Extra I

Einstein vaut mieux que deux tu l'auras

Cet extra est récréatif.

Énigme

Il y a cinq maisons de cinq couleurs différentes, alignées le long d'une route. Dans chacune de ces maisons vit une personne de nationalité différente. Chacune de ces personnes boit une boisson différente, pratique un sport différent et possède un animal domestique différent.

1. Le Qatari séjourne dans la maison grenat.
2. L'Uruguayen dresse des manchots.
3. Le Wallon s'abreuve de thé.
4. La maison violette est directement à gauche de la maison beige.
5. Le kayakiste élève des rhinocéros.
6. On apprécie le café dans la maison violette.
7. Le propriétaire de la maison indigo joue au jokari.
8. La personne qui occupe la maison du centre sirote du lait.
9. Le Fidjien habite dans la première maison.
10. Le nageur loge à côté de celui qui possède des yacks.
11. Le hockeyeur ingurgite du soda.
12. Celui qui prend soin de ses zèbres est voisin de celui qui pratique le jokari.
13. L'Ouzbek vole en deltaplane.
14. Le Fidjien réside juste à côté de la maison azur.
15. Celui qui pratique la natation a un voisin qui ne boit que de l'eau.

Question : Qui a un poisson ?

Cette énigme est attribuée à Albert Einstein selon qui, seulement 2 % des individus seraient capable de résoudre cette énigme sans papier ni crayon, de tête. Et vous ?

Aide

Moi, j'ai listé les initiales, dressé un tableau et mis les maisons sur la première ligne, de gauche à droite. J'ai rempli plutôt facilement quelques cases puis j'ai fait les associations imposées et les ai testées dans mon tableau. Ainsi, j'ai trouvé... avec un papier et un stylo.

Solution

La première maison est indigo. Son propriétaire est le Fidjien, qui boit de l'eau, joue au jokari et a des yacks.

La seconde maison est azur. Son propriétaire est le Wallon, qui boit du thé, pratique la natation et a des zèbres.

La troisième maison est grenat. Son propriétaire est le Qatari, qui boit du lait, fait du kayak et a des rhinocéros.

La quatrième maison est violette. Son propriétaire est l'Ouzbek, qui boit du café, vole en deltaplane et a un poisson.

La dernière maison est beige. Son propriétaire est l'Uruguayen, qui boit du soda, pratique le hockey et a des manchots.

C'est donc l'Ouzbek qui possède un poisson.

ANNEXES

If

Si tu lis une première fois l'énoncé afin de comprendre la structure du problème,

Si tu rédiges correctement et montres comment les résultats sont obtenus et ne te contentes pas de la réponse ; sache que le correcteur la connaît déjà et qu'il juge seulement ton travail,

Si tu prends le temps de te relire avant de sortir comme si ce n'était pas ta copie et corriges ainsi maintes fautes de français et de mathématiques,

Si tu fais des phrases de conclusions, sans faute d'orthographe, un tableau ne concluant rien tout seul par exemple,

Si tu évites les tirets, qui sont des signes $-$ et préfères les étoiles, d'autant que c'est plus joli,

Si tu n'abrèges pas les barres de fractions car le signe $-$ s'applique alors sur tout le numérateur le cas échéant,

Si tu prends soin de ta calligraphie : p, P, $\mathscr{P}$, $\mathcal{P}$, ρ,... désignant des objets différents,

Si tu réponds à toutes les questions, dans l'ordre, surtout si tu sais y répondre,

Si tu utilises des résultats précédents mais ne te sers point d'une question suivante,

Si tu remarques qu'il n'est pas anodin qu'une consigne commençe par « en déduire » et qu'il ne faut alors pas faire autrement,

Si tu vérifies et contre-vérifies tes résultats avec l'énoncé, les résultats obtenus précédemment, les résultats attendus, les résultats théoriques,... tout ce que tu peux excepté la copie d'un tiers,

Si tu ne confonds pas $=$ et $\iff$: deux nombres, vecteurs, expressions algébriques, fonctions,... peuvent être égaux mais des équations, des propositions,... sont équivalentes,

Si tu n'effectues pas trois calculs en un passage de ligne car tu fais souvent faux comme, par exemple, la factorisation par a et l'identité remarquable en même temps pour la forme canonique,

Si tu sais calculer avec les fractions de manière infaillible,

Si tu simplifies systématiquement les fractions et, en particulier, ne laisses pas un dénominateur négatif : cela t'évite le ridicule et les erreurs,

Si tu ne confonds pas « racines d'un polynôme » et « solutions d'une équation algébrique »,

Si tu ne t'encombres pas l'esprit et utilises des formules le moins possible : celle de la forme canonique est souvent mal appliquée, celles de Δ et $x_{1,2}$ en première sont bien suffisantes et tu auras bientôt de nombreuses formules de dérivation autrement plus importantes et plus difficiles à retrouver,

Si tu résous une équation en trouvant la valeur de l'inconnue, généralement x, et non une valeur d'un X, d'un t ou de $\frac{2}{x+3}$; lors d'un changement de variable, change d'abord x en X puis trouve des solutions X_1 et X_2 et repasse ensuite vers x_1 et x_2 par exemple,

Si tu n'oublies pas de tester tes solutions,

Si tu es méticuleux et ne confonds pas $1-x$ et $x-1$ par exemple au lieu de passer en force ; de même, $b \neq -b$ donc si $b = -56$, $-b = 56$; $c = -3$ et $c^2 = 9$ mais $a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$,

Si tu fais attention aux couples : le sommet d'une parabole est un point du plan et possède ainsi deux coordonnées : $\frac{-b}{2a}$ et son image, l'extremum,

Si tu sais dresser un tableau de signes et ne remplis pas des cases sous les nombres mais bien entre les nombres ; la première ligne correspond aux « x » et les suivantes aux « y », alors ne mélange pas tout ; les doubles barres sont réservées aux valeurs interdites et surtout pas aux racines,

Si tu n'hésites pas, dans un tableau de variations, à faire une haute ligne de variations pour pouvoir distinguer le sens des flèches,

Si tu regardes au final à quoi ressemble ton ouvrage et que tu n'y comprends pas grand-chose, pense que cela sera pire pour le correcteur,

Si tu écris des choses vraies car il est infiniment mieux d'écrire peu et juste que des pages entières mais fausses,

Si surtout, les mathématiques te passionnent,

Tu seras bon, mon élève.

Notations & Abréviations

Cette partie n'a pas un but exhaustif mais simplement indicatif pour ceux qui aurait un doute, d'autant que l'on use dans cet ouvrage de certaines abréviations non conventionnelles, par commodité généralement. Après leur description, il y aura souvent la référence de la page de leur première utilisation.

Commençons par lister quelques notations et abréviations classiques et usuelles dans le petit monde des mathématiques.

- $\forall$: « pour tout », le quantificateur universel (cf. page 317).
- $\exists$: « il existe (au moins un) », le quantificateur existentiel (cf. page 317).
- ! : « un unique » lorsque précédé de $\exists$. Exemple : $\exists! x \in \mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+$ (cf. p. 317).
- ! : « factorielle » lorsque suivi d'un nombre entier.
  Par exemple, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ (cf. page 89).
- $\setminus$: « privé de ». Exemple, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (cf. page 316).
- $\pm$ et $\mp$: « plus ou moins » et « moins ou plus ». Signifie "soit $+$, soit $-$" (et surtout pas "environ", attention).
- $\subset$: « inclus dans ». Se dit d'un sous-ensemble (cf. page 317).
- c.q.f.d. et $\square$: « ce qu'il fallait démontrer ».
- *Ent* : « partie entière ». Est parfois notée $[x]$ (cf. page 119).
- *i.e.* : « id est », c'est-à-dire mais en latin.
- $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$: $]-\infty\,;0\,]$ et $[\,0\,;+\infty\,[$, les réels positifs / négatifs ou nuls.
- $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0\,[\cup]\,0\,;+\infty\,[$: les réels non nuls.
- *ssi* et $\iff$: « si, et seulement si » et « équivaut ». À la fois $\Longleftarrow$ et $\Longrightarrow$ (cf. page 320).

Voici ensuite des notations et abréviations moins classiques mais bien pratiques.

- $\nearrow$, $\searrow$: croissante, décroissante, à propos d'une fonction.
- $\nearrow\!\!\nearrow$ ou $\nearrow^{\text{nt}}$, $\searrow\!\!\searrow$ ou $\searrow^{\text{nt}}$: strictement (dé)croissante, pour une fonction.
- $\lightning$: « contradiction ». Étape finale d'une démonstration par l'absurde (cf. page 325).
- à.p.c.r. : « à partir d'un certain rang ». Se dit d'une suite dont les tous termes vérifient une certaine propriété, sauf les "premiers" (cf. page 86).
- coeff. dir. : « coefficient directeur » d'une droite ou d'une fonction affine.
- colin. : « colinéaires ». Se dit de deux vecteurs.
- CV et DV : « converge(nte) » et « diverge(nte) ».
  Se dit d'une suite ayant / n'ayant pas une limite finie (cf. page 118).
- $\mathbb{E}$: « espérance » d'une variable aléatoire (cf. page 182).
- F.I. : « forme indéterminée ». Se dit d'une limite dont on ne peut déterminer directement la valeur éventuelle (cf. page 30).
- r.o.n. : « repère orthonormé » (cf. page 50).
- R.T.T. : « Résoudre de TêTe ». Type d'exercice peu prisé des élèves.
- th. : « théorème ».
- tq. : « tel que ».
- VouF : « Vrai ou faux ». Type d'exercice très prisé des élèves.

Bibliographie & Références

Commençons par des manuels de première. Les suivants sont ceux que je parcours régulièrement :

[DE] *Déclic 1re Spé*, J.-P. Beltramone (dir.), éd. Hachette, 2019.

[HB] *Hyperbole 1re Spé*, J. Malaval (dir.), éd. Nathan, 2019.

[LS1] *Le Livre scolaire 1re Spé*, manuel collaboratif, éd. Livre scolaire, 2019.

[M1] *Maths 1re Spé*, H. Gringoz et F. Weyermann, éd. Magnard, 2019.

Puis, quelques ouvrages pour réviser ou aller un peu plus loin :

[CR] M. Colonval et A. Roumadni, *Les mathématiques au quotidien*, éd. Ellipses, 2010.

[Th] François Thirioux, *Mathématiques TleS pour réussir en prépa*, éd. Ellipses, 2015.

[LS2] *Le Livre scolaire 2de*, manuel collaboratif, éd. Livre scolaire, 2019.

[LST] *Le Livre scolaire Tle Spé*, manuel collaboratif, éd. Livre scolaire, 2020.

Poursuivons par des références sur la toile, très utiles lorsqu'utilisées à bon escient :

[MP] *Math en poche* : http ://mathenpoche.sesamath.net. Pour réviser en ligne (plutôt les "petites" classes toutefois).

[WK] *Wikipedia* : toujours utile, même si très vite technique.

[KA] *Khan Academy* : https ://fr.khanacademy.org. Tous les cours, en vidéo.

[MN] *Les Mathématiques.net* : http ://www.les-mathematiques.net. Pour le supérieur plutôt mais cela permet déjà de voir plus loin. Le forum est réactif.

[IM] *Images des mathématiques* : http ://images.math.cnrs.fr. Des actualités, des articles, des énigmes, des images,... de mathématiques.

[AP] *APMEP : Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* : http ://www.apmep.fr. Vous pouvez y trouver toutes les annales corrigées du baccalauréat depuis le siècle dernier mais aussi des jeux mathématiques.

Ensuite, des ouvrages et références autour des mathématiques et des sciences dont je conseille fortement la lecture. Ils sont cités dans cet ouvrage, à vous de retrouver en quel endroit (les solutions suivent).

[AH] Alain Badiou avec Gilles Haéri, *Éloge des mathématiques*, éd. Flammarion, 2015.

[CV] Cédric Villani, *Théorème vivant*, éd. Grasset, 2012.

[Dé] François-Henri Désérable, *Évariste*, éd. Gallimard, 2015.

[DG] Denis Guedj, *Le Théorème du perroquet*, éd. su Seuil, 1998.

[EA] Edwin Abbot Abbot, *Flatland*, 1884.

[EK] Étienne Klein, *La conversation scientifique*, émission radiodiffusée sur France Culture.

[GM] *Le Goût des Mathématiques*, ouvrage collectif, éd. Mercure de France, 2013.

[RH] Ron Howard, *Un Homme d'exception*, prod. Universal, 2001. Film retraçant la vie de John Forbes Nash (1928-2015), remarquable mathématicien (prix Abel 2015, prix Nobel d'économie 1994).

[YG] Yannick Grannec, *La Déesse des petites victoires*, éd. Anne Carrière, 2012.

Enfin, voilà les références des allusions qui ont guidées, inspirées ou simplement connotées certains énoncés que l'on pourrait parfois qualifier de décalés. À vous de les retrouver dans le corps du texte (les solutions suivent).

[AG] Alexandre Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, lipn.univ-paris13.fr/ duchamp/Books&more/Grothendieck/RS/pdf/RetS.pdf

[AS] Arthur Schopenhauer, *L'Art d'avoir toujours raison*, écrit vers 1830.

[Be] The Beatles, *Discographie complète*, label Parlophone, 1962-1970.

[Cé] Louis-Ferdinand Céline, *Voyage au bout de la nuit*, éd. Denoël et Steele, 1932.

[Ci] A. Charle, *2CV : rallye-raid et autres aventures*, éd. ETAI, 2012, par exemple.

[Co] Corneille, *Le Cid*, 1637.

[E2] *La famille royale d'Angleterre*, dans n'importe quel magazine people et inutile.

[Fr] Franquin, *Gaston Lagaffe*, tous les albums, éd. Dupuis, 1963-1996.

[FT] François Truffaut, *Jules et Jim*, prod. M.Berbert, 1962.

[GE] Gustave Eiffel, *La Tour*, Paris, 1889.

[GL] George Lucas, *Star Wars*, prod. Lucasfilm, 1977-2019.

[GR] Gioachino Rossini, *Le Barbier de Séville*, 1816.

[GS] R. Goscinny et J.-J. Sempé, *Le Petit Nicolas*, journal Pilote, 1956-1965.

[GT] *Game of Thrones*, série nord-américaine (HBO) inspirée de l'œuvre de George R. R. Martin, 2011-2018.

[GU] R. Goscinny et A. Uderzo, *Astérix : La Serpe d'or* et tous les autres albums, éd. Dargaud, 1959-1977.

[Ho] Homère, *Odyssée*, fin du VIIIe s. av. J.-C.

[HM] Henri Matisse, Rideau pour l'*Étrange farandole*, 1938.

[HS] Henri Salvador, *Syracuse*, label Phillips, 1963.

[JB] Justin Bieber, artiste musical qu'il n'est pas indispensable d'écouter.

[JH] *Jack et le Haricot magique*, conte populaire anglais.

[JR] Jacques Roubaud, *La Trilogie d'Hortense*, éd. Ramsay, 1985-1990.

[LC] Lewis Carroll, *Les Aventures d'Alice au pays des merveilles*, 1865.

[MA] *Mars Attacks !*, réal. Tim Burton, prod. T. Burton, 1996.

[Mb] M. Berk et D. Schwartz et G. Bonann, *Alerte à Malibu*, série nord-américaine (NBC), 1989-2001. Ne se regarde toujours pas plus qu'à l'époque.

[MG] Morris et R. Goscinny, *Lucky Luke*, éd. Dupuis - Dargaud, 1957-1983.

[MM] *Mad Max*, réal. George Miller, prod. Kennedy Miller, 1979-2015.

[MT] Michel Tournier, *Gaspard, Melchior et Balthazar*, éd. Gallimard, 1980.

[PE] Paul Éluard, *La Terre est bleue comme une orange*, 1929.

[PT] *Des Papous dans la tête*, émission autrefois radiodiffusée sur France Culture.

[Ra] RATM, *Rage against the machine*, label EPIC, 1992.

[RD] Robert Desnos, *La fourmi*, éd. Gründ, 1944.

[RG] Hergé, *Tintin*, tous les albums, éd. Casterman, 1929-1986.

[RK] Rudyard Kipling, *Tu seras un homme, mon fils*, 1910.

[RS] Ridley Scott, *Thelma et Louise*, prod. M.P. Gitlin, 1991.

[SG] Serge Gainsbourg, *Comic Strip*, label Bagatelle, 1967. Écouter toute l'œuvre.

[TF] Georges Lautner, *Les Tontons flingueurs*, prod. Gaumont, 1963.

[VH] Victor Hugo, *Notre-Dame de Paris*, éd. C. Gosselin, 1831.

[Vo] Voltaire, *Candide ou l'Optimisme*, 1759.

[YM] Yves Montand interprète *La bicyclette* de F. Lai et P. Barouh, label Philips, 1968.

Crédits images :

Christophe Dang Ngoc Chan (page 349), Djhé (page 353), HB (page 355), McSush (page 353), Arturo Reina Sánchez (page 353), Bev Sykes (page 274), Theon (page 353).

Solutions

[AG] page 281
[AH] page 321
[AS] page 331
[Be] page 245
[Cé] page 247
[Ci] page 277
[Co] page 188
[CV] page 259
[Dé] page 300
[DG] page 236
[E2] page 144
[EA] page 270
[EK] page 256
[Fr] page 265
[FT] page 233
[GE] pp. 28 et 101
[GL] pp. 283 et 327
[GM] page 277
[GR] page 189
[GS] pp. 148 et 261
[GT] page 328
[GU] page 329
[Ho] page 74
[HM] p. 142 par ex.
[HS] page 93
[JB] page 147
[JH] page 17
[JR] page 262
[LC] page 244
[MA] page 142
[Mb] page 19
[MG] page 269
[MM] couverture
[MT] page 147
[PE] page 188
[PT] page 265
[Ra] page 291
[RD] page 262
[RG] page 148
[RH] page 233
[RK] page 379
[RS] page 233
[SG] page 349
[TF] page 138
[VH] page 251
[Vo] page 148
[YG] page 319
[YM] page 233

Remerciements

Contrairement à ce que l'on pourrait parfois penser à la lecture de cet ouvrage, je suis bien un professeur de mathématiques. Je n'ai donc aucun scrupule à effectuer des remerciements sous forme de liste et dans un ordre quasi-aléatoire. L'important est qu'ils soient sincères, non ?

Ainsi,

- à mes élèves, pour leurs questions, pertinentes ou non, leur insistance pour avoir des devoirs ou non, leur souhait d'avoir des corrections d'exercices tapées (comme si leur professeur avait une écriture illisible), leur curiosité et leur soif d'apprendre et de découvrir et pour le sourire dans leurs yeux lorsqu'ils ont compris ce que l'on étudie,
- à ma compagne qui m'a encouragé, m'a supporté et a prodigué de précieux conseils,
- à mes filles, qui ne me voient généralement que derrière un écran et qui, dès le plus jeune âge, ont appris à envoyer un courriel afin de communiquer avec moi,
- à ma mère, ma première lectrice, au sens mathématique littéral,
- à mes collègues, de mathématiques ou d'autres disciplines, qui m'ont donné de nombreuses idées, à leur insu parfois,
- au corps d'inspection pour les remarques judicieuses,
- à mes stagiaires qui me poussent à une réflexion approfondie sur mes pratiques,
- aux nombreux auteurs d'ouvrages et contributeurs de sites personnels ou académiques comme les IREM, qui m'ont inspiré et dont je n'ai plus la référence, qu'ils veuillent bien me pardonner,
- à Donald Knuth (1938-), à l'origine du LaTeX, sans qui rien de ceci n'aurait pu être écrit (sous TeXShop),
- aux éditions Ellipses, et en particulier Corinne Baud qui a immédiatement accepté et soutenu ce projet,
- et finalement, à mes lecteurs, qui voudront bien excuser les coquilles et erreurs subsistantes et qui pourront envoyer leurs remarques aux éditions Ellipses ou même m'écrire : mathmax@yahoo.com,

je dis merci !

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 1
Sommaire 3

Cours & Exercices corrigés **5**

I Polynômes du second degré **7**
Introduction 7
1 Variations et extremum d'une fonction : rappels 8
2 Définitions et premières propriétés 9
2.1 Définition, forme canonique 9
2.2 Variations d'un trinôme 10
2.3 Représentation graphique d'un trinôme 11
3 Discriminant, factorisation et signe d'un trinôme 12
3.1 Discriminant d'un trinôme 12
3.2 Factorisation d'un trinôme 13
3.3 Signe d'un trinôme 13
4 Polynômes de degré supérieur 14
4.1 Définitions 14
4.2 Théorème de factorisation des polynômes 15
5 Synthèse 15
Exercices 17
Corrigé des exercices 20

II Limites & Nombres dérivés **27**
Introduction 27
1 Limite d'une fonction en un nombre réel 28
2 Nombres dérivés : introduction 30
2.1 Vitesse instantanée 30
2.2 Tangente à une courbe 31
3 Nombre dérivé de f en a 31
3.1 Définitions 31
3.2 Interprétation graphique 32
3.3 Approximation affine locale 33
3.4 Exercice 33

4 La fonction valeur absolue . . . 34
4.1 Définition . . . 34
4.2 Étude de la fonction valeur absolue . . . 35
Exercices . . . 36
Corrigé des exercices . . . 40

III Trigonométrie 49
Introduction . . . 49
1 Enroulement de la droite réelle . . . 50
1.1 Cercle trigonométrique . . . 50
1.2 Principe de l'enroulement . . . 51
1.3 Propriétés . . . 51
1.4 Lien avec les angles géométriques . . . 52
2 Cosinus et sinus d'un nombre réel . . . 52
2.1 Trigonométrie dans un triangle rectangle . . . 52
2.2 Définition et premières propriétés . . . 53
2.3 Valeurs remarquables . . . 54
2.4 Problèmes inverses . . . 56
3 Fonctions trigonométriques . . . 57
Corrigé des exercices . . . 58

IV Fonctions dérivées 63
1 Fonctions dérivées . . . 63
1.1 Définition . . . 63
1.2 Quelques fonctions dérivées usuelles . . . 64
2 Fonctions dérivées et opérations . . . 64
2.1 Somme et produit . . . 65
2.2 Quotient . . . 66
2.3 Composition . . . 66
3 Fonctions dérivées et variations . . . 67
4 Extremum d'une fonction . . . 68
4.1 Extremum local, extremum global . . . 68
4.2 Optimisation . . . 69
5 L'essentiel . . . 70
Exercices . . . 71
Corrigé des exercices . . . 76

V Généralités sur les suites numériques 85
Introduction . . . 85
1 Définitions . . . 86
2 Suites définies par une fonction de n : $u_n = f(n)$ . . . 88
3 Suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 88
Suites, calculatrice & algorithmes . . . 90
Exercices . . . 91
Corrigé des exercices . . . 94

VI Produit scalaire 99
Introduction . . . 99
1 Définitions et premières propriétés . . . 100
2 Propriétés algébriques . . . 101
3 Projections orthogonales . . . 102
4 Orthogonalité . . . 103
5 Applications dans un triangle . . . 104
Exercices . . . 105
Corrigé des exercices . . . 108

VII Compléments sur les suites numériques 113
1 Suites arithmétiques . . . 113
2 Suites géométriques . . . 116
3 Notion de limite d'une suite . . . 118
3.1 Définitions et premières propriétés . . . 118
3.2 Quelques limites de référence . . . 119
3.3 Cas des suites géométriques . . . 120
3.4 Cas des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 120
Exercices . . . 122
Corrigé des exercices . . . 127

VIII Probabilités conditionnelles 135
Introduction . . . 135
1 Probabilité conditionnelle . . . 137
1.1 Définition . . . 137
1.2 Formule des probabilités totales . . . 138
1.3 Arbre de probabilité . . . 138
2 Indépendance . . . 139
2.1 Définition . . . 139
2.2 Indépendance des événements contraires . . . 140
Exercices . . . 141
Corrigé des exercices . . . 149

IX Fonction exponentielle 159
Introduction . . . 159
1 La fonction exponentielle . . . 160
1.1 Théorème fondamental . . . 160
1.2 Définition et premières propriétés . . . 161
2 Propriétés algébriques de l'exponentielle . . . 161
3 Étude de la fonction exponentielle . . . 162
3.1 Signe et variations de la fonction exponentielle . . . 162
3.2 Graphe de la fonction exponentielle . . . 163
3.3 Fonction exponentielle et composition . . . 164
3.4 Lien avec les suites géométriques . . . 165
Exercices . . . 167
Corrigé des exercices . . . 172

X Variables aléatoires réelles 179
1 Introduction . . . 180
2 Variables aléatoires réelles . . . 181
3 Espérance, variance et écart-type . . . 182
4 Expérimentation . . . 184
Exercices . . . 185
Corrigé des exercices . . . 191

XI Applications du produit scalaire 201
1 Rappels . . . 201
2 Vecteurs normaux et équations cartésiennes . . . 202
3 Cercles . . . 204
4 Dans un triangle . . . 205
4.1 Centre de gravité . . . 205
4.2 Théorème de la médiane . . . 205
Exercices . . . 207
Corrigé des exercices . . . 210

XII Fonctions trigonométriques 217
1 Rappels . . . 217
2 Fonctions trigonométriques . . . 219
Exercices . . . 222
Corrigé des exercices . . . 226

Devoirs corrigés 231

1 Cinémaths 233
Corrigé . . . 234

2 La fonction dérive du nombre 235
Corrigé . . . 237

3 Trigonométrie de l'espace 241
Corrigé . . . 243

4 La dérive du sous-marin 245
Corrigé . . . 246

5 Voyage au bout du lieu-dit 247
Corrigé . . . 248

6 Les courbes d'Esmeralda 251
Corrigé . . . 253

7 À la suite 255
Corrigé . . . 257

8 Lieux produits 259
Corrigé . . . 260

9 Belles suites **261**
Corrigé . . . 263

10 Apapou ? **265**
Corrigé . . . 266

11 Improbables petits pois **269**
Corrigé . . . 271

12 La chaînette **273**
Corrigé . . . 275

13 Passe-temps variés **277**
Corrigé . . . 278

14 Lieux étranges **281**
Corrigé . . . 282

15 Math Wars **283**
Corrigé . . . 285

16 Devoir parental **287**

Cahiers transversaux 289

α **Algo à gogo** **291**
1 Installer Python . . . 292
2 Les variables . . . 292
3 Instructions conditionnelles . . . 293
4 Boucle bornée . . . 294
5 Boucle non bornée . . . 295
6 Fonction . . . 296
7 Liste . . . 297
8 Foire de l'algo . . . 299
9 Solutions . . . 302

β **En toute logique** **313**
1 Diagrammes de Venn . . . 313
2 Ensembles . . . 316
3 Logique . . . 318
3.1 Propositions . . . 318
3.2 Implication . . . 319
3.3 Équivalence . . . 320
3.4 Exercices . . . 320
4 Solutions . . . 322

γ **Faute de preuves** **325**
Exercices . . . 325
Solutions . . . 331

Extras **333**

A La racine, c'est carré **335**

B Sine qua tion **337**
1 Exercices . . . 337
2 Solutions . . . 338

C Droites et fines **341**
1 Exercices . . . 341
2 Solutions . . . 343

D Trop grand écart **345**
1 Exercices . . . 345
2 Solutions . . . 346

E Conic Strip **349**
1 Coniques . . . 349
2 Ellipses . . . 350
3 Paraboles . . . 351
4 Hyperboles . . . 354
5 Solutions . . . 356

F Auto-exos **361**
1 R.T.T. . . . 361
2 Last Fraction Hero . . . 362
3 Le Factorisathon . . . 362
4 VouF ? . . . 362
5 R.T.T. : le retour . . . 363
6 Solutions . . . 364

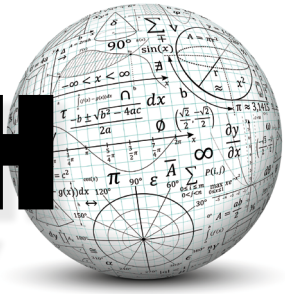
G Self-Working **367**
1 Exercises . . . 367
2 Solutions . . . 369

H Équerre et math **371**

I Einstein vaut mieux que deux tu l'auras **375**

Annexes **377**
If . . . 379
Notations & Abréviations . . . 381
Bibliographie & Références . . . 383
Remerciements . . . 387

MATH MAX



NOUVEAUX PROGRAMMES

MATH MAX, parce que les mathématiques sont très sérieuses… mais pas uniquement.

Cette seconde édition, conforme aux nouveaux programmes, contient :

- un cours complet avec des exemples, des remarques et des conseils,
- des centaines d'exercices et devoirs, tous corrigés en détail, de difficulté croissante, couvrant tout le programme et même plus,
- des cahiers transversaux de logique et d'algorithmique,
- des activités d'approche, de révision et de synthèse,
- des extras pour anticiper sur les années à venir,
- des exercices en anglais pour enrichir la langue,
- des corrections rédigées comme l'exigent les enseignants,
- une approche testée et validée auprès des élèves.

Tout ce qui est nécessaire pour asseoir ses bases, réussir son année et bien préparer la suivante.

Mais **MATH MAX**, c'est aussi des données historiques, des conseils de lectures, des touches culturelles, des exercices décalés, des énoncés fantasques, des contextes farfelus, des jeux de mots (presque) amusants.

Voici bien de quoi égayer votre réflexion.

Et aussi dans la même série





www.editions-ellipses.fr

9 782340 043961