mathématiques

1ere C D E Tome 1

M. Monge, J.P. Pelle, C. Cassignol, F. Pécastaings

BELIN



M. MONGE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AGRÉGÉ, CONSEILLER PÉDAGOGIQUE.

C. CASSIGNOL, ANCIENNE ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PROFESSEUR AGRÉGÉ.

J.-P. PELLE, MAITRE-ASSISTANT, AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

F. PÉCASTAINGS, AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

3/6 ∧ 6/12 => 3/12



029:KLOSE

Mathématiques

Kom Tsemo Patrick Noël
PLEG - Mathématiques
CN 1ere Dan JUDO

CLASSE DE PREMIÈRE C, D, E, TOME 1 : NOTIONS GÉNÉRALES, FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE, ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS; GÉOMÉTRIE VECTORIELLE, STATISTIQUES ET PROBABILITÉS.

ARRÊTÉ DU 19 MARS 1970. BULLETIN OFFICIEL DU 23 AVRIL 1970

KOM DJOKO
PRPS(IE

BOURSE NATIONALE D'ÉTUDES
LOCALITÉ
B.P. 5636 YDE

LIBRAIRIE BELIN
8, RUE FÉROU, PARIS-VI[e]

Table des matières

Avertissement 4

PREMIÈRE PARTIE. Notions générales

Rappel de notions et de notations 6
1. Relations. Applications 10
2. Relations dans un ensemble 21
3. Lois de composition. Groupes 32
4. Propriétés des applications 51
5. Ensemble des parties d'un ensemble 63
6. Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini 75

DEUXIÈME PARTIE. Fonctions numériques d'une variable réelle

7. Fonctions numériques 88
8. Continuité. Limites 101
9. Fonction dérivable en un point. Fonction dérivée 117
10. Etude de certaines fonctions 137
11. Equations et inéquations à une inconnue 168
12. Equations et inéquations à plusieurs inconnues 185

TROISIÈME PARTIE. Espaces vectoriels et matrices

13. Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ 202
14. Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (suite) 219
15. Espaces vectoriels de dimension 1, 2, 3 228
16. Applications linéaires 239
17. Applications linéaires (suite) 247

QUATRIÈME PARTIE. Statistiques et probabilités

18. Statistique descriptive 268
19. Espaces probabilisés finis 291
20. Variables aléatoires numériques 311
21. Indépendance en probabilité. Distribution binomiale 323

Problèmes 341
Index 350

Programme (B.O. du 23.4.1970).

Nous reproduisons ci-dessous la partie du programme officiel traitée dans ce volume. Elle est commune aux trois sections C, D, E excepté : 1° La démonstration du théorème (III, 3°) : "Si un espace vectoriel admet une base de n éléments, toute autre base possède n éléments", qui ne figure pas au programme des sections D et E; 2° Les quatre dernières lignes du paragraphe VII qui ne figurent pas au programme de la section D.

© Librairie Classique Eugène Belin, 1970
ISBN 2-7011-0138-7

I. Notions générales.

1° Applications injectives, surjectives, bijectives ; composition des applications.
2° En vue de la statistique et du calcul des probabilités : ensemble des parties d'un ensemble (cf. chapitre VII).
3° Application d'un ensemble fini vers un ensemble fini ; cas des applications injectives et bijectives, leur dénombrement ; parties à p éléments d'un ensemble fini, leur dénombrement.

II. Fonctions numériques d'une variable réelle.

1° Continuité « en un point » d'une fonction. Limite d'une fonction. (On se bornera aux définitions indispensables, illustrées d'exemples et de contre-exemples ; à l'énoncé, sans démonstration, des théorèmes relatifs aux limites de somme, produit, quotient de fonctions.)
2° Fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée ; dérivée en ce point.
Fonction dérivée ; calcul de la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables.
Interprétation géométrique de la dérivée (repère cartésien) ; équation de la tangente.

. . . . . .

3° Applications.
En s'appuyant sur le théorème énoncé sans démonstration, permettant de déduire, du signe de la dérivée d'une fonction dans un intervalle, le sens de variation de cette fonction sur cet intervalle :
a) étude, uniquement sur des exemples, de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles. Représentation graphique. On pourra faire constater aux élèves, à propos d'exemples numériques, l'existence d'asymptotes obliques ; aucune méthode de recherche n'est au programme.

. . . . . .

III. Équations et inéquations.

1° Sur des exemples : étude d'équations et d'inéquations du premier et du second degré ; étude de systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Étude de problèmes dont la résolution conduit à des équations ou des inéquations du premier et du second degré.

. . . . . .

IV. Géométrie vectorielle.

1° Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$; définition et exemples (révision).
Sous-espace vectoriel. Vecteurs linéairement dépendants, indépendants. Base.
2° Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée ; coordonnées d'une somme de vecteurs, du produit d'un vecteur par un nombre réel.
Condition de dépendance de deux vecteurs.
3° Si un espace vectoriel admet une base de n éléments, toute autre base possède n éléments ; dimension d'un espace vectoriel, plan vectoriel. Dimension d'un sous-espace vectoriel ; intersection de deux sous-espaces vectoriels. (On se bornera à $n = 1, 2$ ou 3.)
4° Matrice, dans une base donnée, d'une application linéaire d'un plan vectoriel dans lui-même. Composition de ces applications linéaires et multiplication des matrices 2×2 ; déterminant d'une matrice 2×2.

. . . . . .

VII. Statistique et probabilités.

1° Description statistique d'une population ou d'un échantillon.
Documents statistiques ; représentations graphiques.
Effectifs, fréquences.
2° Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Exemples (dés, pipés ou non, cartes, urnes).
Variable aléatoire numérique ; événements liés à une variable aléatoire X (par exemple : $X = a$ donné ; $X < a$ donné).
Fonction de répartition, croissance.
Distributions dans $\mathbb{R}$. Distribution binomiale.

Avertissement

Nous traitons dans cet ouvrage la première partie du programme des sections C, D et E de la classe de Première paru au B. O. du 23 avril 1970 et applicable à partir de l'année scolaire 1970-1971 : notions générales, fonctions numériques d'une variable réelle, géométrie vectorielle (espaces vectoriels et matrices), statistiques et probabilités.

Les programmes de ces trois sections sont suffisamment unifiés pour qu'il soit possible de publier un livre unique pour les sections scientifiques.

Les seules différences qui subsistent, pour cette première partie, entre les programmes des sections C, D et E sont :

1° La démonstration du théorème : « si un espace vectoriel admet une base de n éléments, toute autre base possède n éléments », ne figure pas au programme des sections D et E ;

2° Les notions : « variable aléatoire numérique, événements liés à une variable aléatoire, fonction de répartition, distribution binomiale », ne figurent pas au programme de la section D (chap. 20 et 21).

Un second volume contiendra la seconde partie du programme : géométrie affine, produit scalaire et fonctions circulaires, géométrie métrique dans le plan et dans l'espace, étude de mouvements rectilignes, calcul numérique.

A la fin de chaque chapitre, de nombreux exercices, classés par centre d'intérêt, sont proposés aux élèves ; leur nombre a permis d'en graduer la difficulté.

Enfin, nous avons placé à la fin de ce volume, un choix de problèmes qui recouvrent les différentes notions abordées dans ce livre.

Nous avons voulu que ce livre soit pour nos collègues et pour leurs élèves un instrument de travail sympathique et efficace ; c'est avec reconnaissance que nous recevrons les observations et les suggestions qui nous permettront de l'améliorer.

LES AUTEURS.

PREMIÈRE PARTIE

notions générales

Kam Tsemo Patrick Noël
PLEG - Mathématiques
CN 1ere Dan JUDO

Rappel de notions et de notations

Vocabulaire de la logique.

1 Il existe des assertions vraies et des assertions fausses.
Toute assertion est soit vraie, soit fausse ; mais il existe des assertions dont personne, jusqu'à présent, n'a réussi à démontrer ni qu'elles sont vraies, ni qu'elles sont fausses.
Les **axiomes** sont les assertions dont nous admettons qu'elles sont vraies ; les **théorèmes** sont les assertions dont nous démontrons qu'elles sont vraies à partir des axiomes.

2 Si l'assertion $\mathcal{A}$ est vraie, l'assertion (non $\mathcal{A}$) est fausse.
Si l'assertion $\mathcal{A}$ est fausse, l'assertion (non $\mathcal{A}$) est vraie.
Pour toute assertion $\mathcal{A}$, l'assertion [$\mathcal{A}$ et (non $\mathcal{A}$)] est fausse.
Pour toute assertion $\mathcal{A}$, l'assertion [$\mathcal{A}$ ou (non $\mathcal{A}$)] est vraie.

Si l'assertion $\mathcal{A}$ est et si l'assertion $\mathcal{B}$ est	vraie vraie	vraie fausse	fausse vraie	fausse fausse
l'assertion : $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est	vraie	fausse	fausse	fausse
l'assertion : $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est	vraie	vraie	vraie	fausse
l'assertion : $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ est	vraie	fausse	vraie	vraie
l'assertion : $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$ est	vraie	fausse	fausse	vraie

3 Si l'assertion $\mathcal{A}$ est vraie, et si l'implication : $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, l'assertion $\mathcal{B}$ est vraie.
Si les implications : $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ et : $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{C}$ sont vraies, l'implication : $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{C}$ est vraie.
Si les équivalences logiques : $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$ et : $\mathcal{B} \Longleftrightarrow \mathcal{C}$ sont vraies, l'équivalence : $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{C}$ est vraie.
Quelles que soient les assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on a les équivalences logiques :
$(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) \Longleftrightarrow ((\text{non } \mathcal{B}) \Longrightarrow (\text{non } \mathcal{A}))$;
$(\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}) \Longleftrightarrow ((\text{non } \mathcal{A}) \Longleftrightarrow (\text{non } \mathcal{B}))$.

Vocabulaire des ensembles.

Ensemble; élément.

4 Si a est un **élément** de **l'ensemble** A, on dit que a appartient à A, et l'on note : $a \in A$.
Si b n'est pas un élément de l'ensemble A, on dit que b n'appartient pas à A, et l'on note : $b \notin A$.

Détermination d'un ensemble.

5 1. Pour déterminer un ensemble, on peut, dans certains cas, donner la liste de ses éléments, c'est-à-dire **énumérer** les éléments de cet ensemble; par exemple : $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
2. On peut aussi indiquer une **propriété caractéristique** des éléments de cet ensemble, c'est-à-dire une propriété que possèdent tous les éléments de cet ensemble et qu'ils sont les seuls à posséder; par exemple, l'ensemble précédent, A, est l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 4.
Lorsqu'on détermine un ensemble E par une propriété P qui caractérise ses éléments, on note, en désignant par x un élément quelconque * de l'ensemble E : $E = \{x \mid P(x)\}$.
Par exemple, pour : $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on note : $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leqslant 4\}$.

Ensembles égaux.

6 On dit que deux ensembles A et B sont **égaux** si tout élément de A appartient à B et si tout élément de B appartient à A; on note : $A = B$.

Ensemble vide.

7 On appelle **ensemble vide**, noté $\varnothing$, l'ensemble qui n'a aucun élément.

Singleton; paire.

8 On appelle **singleton** $\{a\}$ l'ensemble dont le seul élément est a.
On appelle **paire** $\{a, b\}$ l'ensemble dont les éléments sont a et b.

Sous-ensemble, ou partie, d'un ensemble E.

9 On appelle **sous-ensemble**, ou **partie**, d'un ensemble E tout ensemble A dont les éléments appartiennent tous à l'ensemble E.
On dit alors que A est inclus dans E et l'on note : $A \subset E$.
$(A \subset E) \iff (\forall a \in A,\ a \in E)$.

---

* On dit aussi que x est l'élément générique de l'ensemble E, ou encore que x décrit E.

Un ensemble B n'est pas un sous-ensemble de E s'il existe au moins un élément de B qui n'appartient pas à E.
On dit alors que B n'est pas inclus dans E et l'on note : $B \not\subset E$.
$(B \not\subset E) \iff (\exists b \in B, \quad b \notin E)$.

10 **Remarques** : 1. Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement s'ils vérifient les inclusions : $A \subset B$ et $B \subset A$.
On note : $(A = B) \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$.
2. Pour tout ensemble A, on a les inclusions : $A \subset A$ et $\varnothing \subset A$.
A est la **partie pleine** de A ; $\varnothing$ est la **partie vide** de A.
Toute partie de A qui n'est ni la partie pleine ni la partie vide est une **partie propre**.

Ensemble des parties de E.

11 Soit un ensemble E ; les parties de l'ensemble E constituent un ensemble appelé ensemble des parties de E. On note cet ensemble $\mathfrak{T}_E$ ou $\mathfrak{T}(E)$.

On a l'équivalence logique : $(A \in \mathfrak{T}_E) \iff (A \subset E)$.

Pour tout ensemble E, on a : $E \in \mathfrak{T}_E$ et $\varnothing \in \mathfrak{T}_E$.

Sous-ensembles complémentaires.

12 Soit une partie A d'un ensemble E. On appelle **complémentaire de** A **dans** E l'ensemble, noté $\complement_E A$, des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Intersection de deux ensembles.

13 On appelle **intersection** de deux ensembles A et B l'ensemble, noté $A \cap B$, des éléments qui appartiennent à l'ensemble A et à l'ensemble B.

14 Quels que soient les ensembles A, B, C, on a les égalités :
$A \cap B = B \cap A$; $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

Réunion de deux ensembles.

15 On appelle **réunion** de deux ensembles A et B l'ensemble, noté $A \cup B$, des éléments qui appartiennent à l'ensemble A ou à l'ensemble B.

16 Quels que soient les ensembles A, B, C, on a les égalités :
$A \cup B = B \cup A$; $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.

Couple; produit cartésien de deux ensembles.

17 Les **couples** (a, b) et (a', b') sont égaux si et seulement si a est égal à a' et b est égal à b' : $((a, b) = (a', b')) \iff (a = a' \text{ et } b = b')$.

18 On appelle **produit cartésien** d'un ensemble A par un ensemble B l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a, b) dont la première coordonnée a appartient à A, et dont la deuxième coordonnée b appartient à B :
$((a, b) \in A \times B) \iff (a \in A \quad \text{et} \quad b \in B)$:

p-uplet ; produit cartésien de p ensembles.

19 On dit qu'une suite rangée de p objets $a_1, a_2, \ldots, a_p$ est un p-uplet ; on le note $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$.
On dit que le p-uplet $(a_1, a_2, \ldots a_p)$ est égal au p-uplet $(a'_1, a'_2, \ldots a'_p)$ si et seulement si, pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à p, on a l'égalité : $a_i = a'_i$.

20 Soient p ensembles $A_1, A_2, \ldots A_p$ donnés dans cet ordre.
On appelle produit cartésien de ces ensembles l'ensemble, noté $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$, des p-uplets dont la première coordonnée appartient à A_1, dont la deuxième coordonnée appartient à A_2, ..., dont la $p^{\text{ième}}$ coordonnée appartient à A_p.
Le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$ est donc l'ensemble dont les éléments sont les p-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ qui vérifient la condition :
$\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}, \quad a_i \in A_i$.

21 Si les ensembles $A_1, A_2, \ldots A_p$ sont tous égaux à un ensemble E, le produit cartésien $E \times E \times \ldots \times E$ est noté E^p.
En particulier, le produit cartésien $E \times E$ est noté E^2 et le produit cartésien $E \times E \times E$ est noté E^3.

22 Considérons le produit cartésien $E \times E$ d'un ensemble E par lui-même.
On appelle **diagonale** de $E \times E$ le sous-ensemble Δ de $E \times E$ constitué par les couples dont les deux coordonnées sont égales.
Nous avons : $\Delta = \{(x, y) \mid x \in E, \quad y \in E, \quad x = y\}$.

Quantificateurs.

23 Le **quantificateur universel** $\forall$ signifie : "Quel que soit..." ou encore : "Pour tout..."

24 Le **quantificateur existentiel** $\exists$ signifie : "Il existe au moins un... tel que..."

25 Le **quantificateur existentiel d'unicité** $\exists!$ signifie : "Il existe un et un seul... tel que..."

26 La négation de l'assertion : $\forall x \in A, \quad \mathcal{A}(x)$ est logiquement équivalente à l'assertion :
$\exists x \in A, \quad$ non $\mathcal{A}(x)$.

27 La négation de l'assertion : $\exists x \in A, \quad \mathcal{A}(x)$ est logiquement équivalente à l'assertion :
$\forall x \in A, \quad$ non $\mathcal{A}(x)$.

1.
Relations. Applications

Relations d'un ensemble vers un ensemble.

Notion de relation d'un ensemble vers un ensemble.

1 Soient deux ensembles A et B. Nous avons acquis, dans les classes précédentes, la notion de relation binaire de A vers B. En particulier, nous avons montré que l'on peut définir une relation $\mathcal{R}$ de A vers B en indiquant un procédé, ou un mécanisme, qui associe certains éléments de A à un ou plusieurs éléments de B.
Si un élément a de A est en relation avec un élément b de B, nous notons : $a \mathcal{R} b$.
Si un élément a' de A n'est pas en relation avec un élément b' de B, nous notons : $a' \not\mathcal{R} b'$.
Considérons alors le produit cartésien $A \times B$ et cherchons tous les couples (x, y) éléments de ce produit cartésien qui vérifient la relation $\mathcal{R}$, c'est-à-dire tous les couples (x, y) qui vérifient les trois conditions : $x \in A$, $y \in B$, $x \mathcal{R} y$.
Désignons par G l'ensemble des couples (x, y) ainsi formés ; G est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$; nous appelons cet ensemble G le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
La façon dont nous avons construit le graphe G permet d'écrire les équivalences logiques :

$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad (x \mathcal{R} y) \iff ((x, y) \in G)$;

$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad (x \not\mathcal{R} y) \iff ((x, y) \notin G)$.

Une relation $\mathcal{R}$ est donc déterminée sans ambiguïté par la donnée de l'ensemble A, de l'ensemble B et du graphe G, sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$.

2 Nous adoptons la définition suivante :

DÉFINITION : Soient deux ensembles A et B. On appelle relation $\mathcal{R}$ de A vers B tout triplet (A, B, G) où G est une partie du produit cartésien $A \times B$.

L'ensemble A est appelé ensemble de départ de la relation $\mathcal{R}$; l'ensemble B est appelé ensemble d'arrivée de la relation $\mathcal{R}$.

Exemple : Considérons les deux ensembles : $A = \{0, 1, 2, 4\}$ et $B = \{1, 3, 4, 5\}$. Décidons qu'un élément a de A est en relation avec un élément b de B si et seulement si la somme $a + b$ est inférieure ou égale à 4 : $(a \mathcal{R} b) \iff (a + b \leqslant 4)$.

Le graphe de la relation $\mathcal{R}$ est l'ensemble : $\{(0, 1), (0, 3), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (2, 1)\}$.

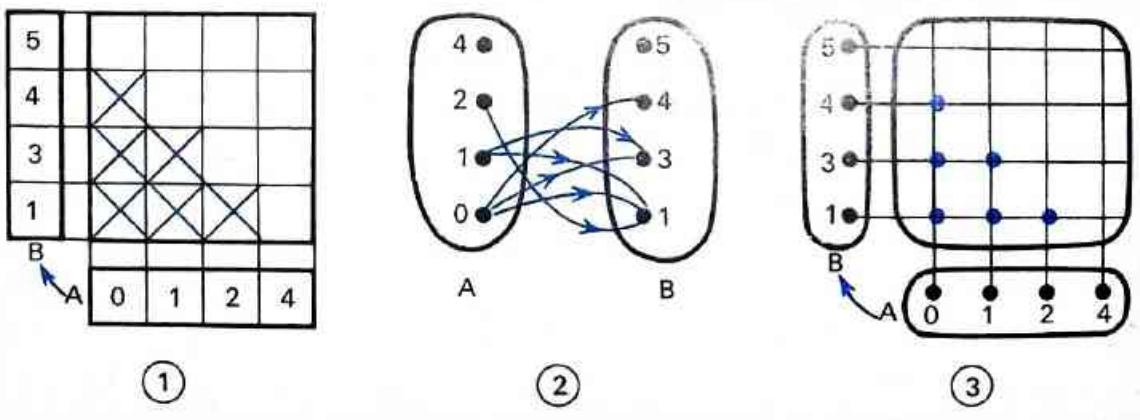
Représentation d'une relation.

3 Pour représenter une relation $\mathcal{R}$ d'un ensemble A vers un ensemble B, il est commode d'utiliser, lorsque le nombre des éléments n'est pas trop grand, l'un des procédés suivants :

4 **Représentation par un tableau de correspondance :** Nous représentons les éléments des ensembles A et B comme l'indique la figure 1 et nous mettons des croix dans les cases qui correspondent à un élément a de A et à un élément b de B tels que $a \mathcal{R} b$.

5 **Représentation par flèches, ou représentation sagittale :** Nous représentons les ensembles A et B comme l'indique la figure 2 et, chaque fois qu'un élément a de A est en relation avec un élément b de B, nous traçons une flèche qui part de a et qui aboutit à b.

6 **Représentation cartésienne :** Nous représentons les ensembles A et B comme l'indique la figure 3 ; chaque couple élément du produit cartésien $A \times B$ est représenté par un point situé à l'intersection de la ligne verticale qui passe par la première coordonnée du couple et de la ligne horizontale qui passe par la deuxième coordonnée du couple. Marquons en bleu les points qui représentent les couples éléments du graphe G ; nous obtenons ainsi la représentation cartésienne de la relation $\mathcal{R}$.

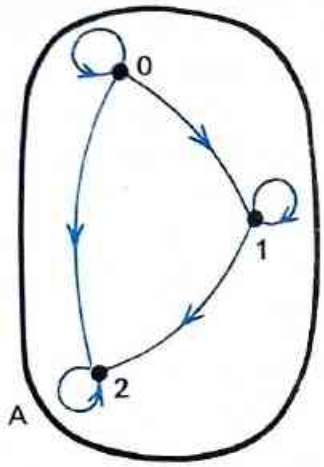


① ② ③

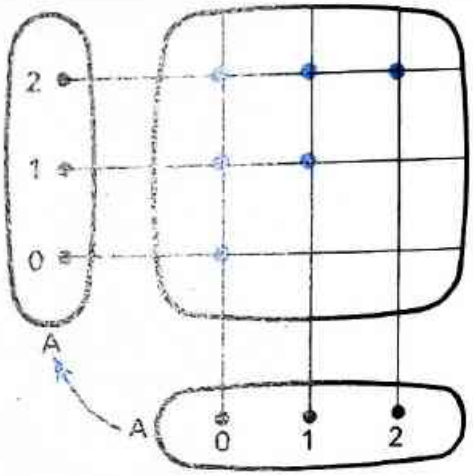
Relation dans un ensemble.

7 Si l'ensemble d'arrivée B est égal à l'ensemble de départ A, on dit que la relation $\mathcal{R}$ de A vers B est une relation dans A. Le graphe G d'une relation dans A est donc un sous-ensemble du produit cartésien A^2.
Pour la représentation par flèches d'une relation dans un ensemble A, on trace les flèches à l'intérieur de la "patate" qui représente l'ensemble A ; en particulier si un élément *a* de A est en relation avec lui-même, on trace une flèche qui part de *a* et aboutit à *a* ; une telle flèche est appelée une **boucle** autour de *a*.

Exemple : Considérons l'ensemble : $A = \{0, 1, 2\}$; décidons qu'un élément *a* de A est en relation avec un élément *b* de A si et seulement si *a* est inférieur ou égal à *b* ; nous déterminons ainsi une relation $\mathcal{S}$ dans A : $(a\,\mathcal{S}\,b) \iff (a \leqslant b)$.
Le graphe de la relation $\mathcal{S}$ est : $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$.
La figure 4 est une représentation par flèches de la relation $\mathcal{S}$ dans A ; la figure 5 est une représentation cartésienne pour cette relation.



④



⑤

Égalité de deux relations.

8 Considérons deux ensembles A_1 et B_1, et une partie G_1 du produit cartésien $A_1 \times B_1$; soit $\mathcal{R}_1$ la relation définie par le triplet (A_1, B_1, G_1). D'une façon analogue, définissons une relation $\mathcal{R}_2$ par le triplet (A_2, B_2, G_2).

DÉFINITION : Deux relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et le même graphe.

Les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont donc égales si et seulement si les trois égalités d'ensembles sont vérifiées : $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $G_1 = G_2$, c'est-à-dire si et seulement si le triplet (A_1, B_1, G_1) est égal au triplet (A_2, B_2, G_2).
Nous écrivons alors : $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

Applications d'un ensemble dans un ensemble.

Notion d'application d'un ensemble dans un ensemble.

9 **DÉFINITION : On dit qu'une relation f d'un ensemble A vers un ensemble B est une application de A dans B si et seulement si chaque élément de A est en relation avec un élément unique de B.**

Les applications de A dans B constituent un ensemble, noté $\mathcal{F}(A, B)$, appelé ensemble des applications de A dans B.
Pour exprimer que f est une application de A dans B, nous disons aussi que f applique A dans B ; nous écrivons : $f : A \longrightarrow B$.

Exemple : Considérons les ensembles : $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
Soit la relation φ de E vers F définie par : $(x \varphi y) \Longleftrightarrow (y - x = 1)$.
Chaque élément de l'ensemble E est en relation avec un élément unique de l'ensemble F : $1 \varphi 2$; $2 \varphi 3$; $3 \varphi 4$; $4 \varphi 5$.
La relation φ de E vers F est donc une application de E dans F.

Image d'un élément par une application.

10 Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B.
Pour tout élément a de l'ensemble A, il existe un élément b et un seul de l'ensemble B qui satisfait à la condition : $a \, f \, b$.
Cet élément b est appelé **image** de a par l'application f ; nous notons : $f(a) = b$.
Pour exprimer que l'élément b de B est l'image de l'élément a de A par l'application f, nous disons aussi que a donne b par l'application f.

Nous écrivons : $a \overset{f}{\rightsquigarrow} b$.
Reprenons l'exemple de l'application φ de E dans F définie par : $y - x = 1$.
Nous notons : $\varphi(1) = 2$; $\varphi(2) = 3$; $\varphi(3) = 4$; $\varphi(4) = 5$;
ou encore : $1 \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} 2$; $2 \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} 3$; $3 \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} 4$; $4 \overset{\varphi}{\rightsquigarrow} 5$.

11 D'une manière générale, l'application f de A dans B qui transforme a, élément de A, en $f(a)$, élément de B, est notée : $f : A \longrightarrow B$, $a \rightsquigarrow f(a)$.

Graphe d'une application.

12 Il résulte de l'étude précédente que le graphe G d'une application f de A dans B est l'ensemble des couples $(a, f(a))$ dont la première coordonnée est un élément a de A et dont la deuxième coordonnée est l'image $f(a)$ de cet élément par f.
Pour tout élément a de A, il existe un couple et un seul de G dont la première coordonnée est a.

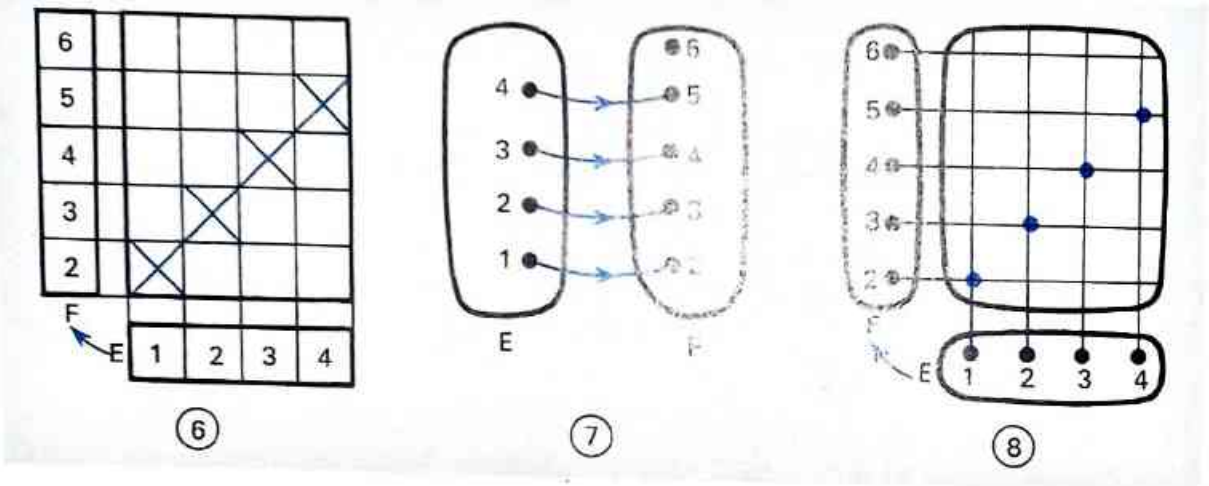
Représentation d'une application.

13 Une application d'un ensemble A dans un ensemble B est une relation de A vers B ; nous pouvons donc représenter cette application en utilisant l'une des trois représentations indiquées pour les relations. Toutefois, l'existence d'une image unique b pour tout élément a de A permet de donner les précisions suivantes :

14 **Représentation par un tableau de correspondance :** Dans chaque colonne du tableau de correspondance d'une application f de A dans B, il y a une croix et une seule. C'est ce que nous constatons sur la figure 6, tableau de correspondance de l'application φ de E dans F.

15 **Représentation par flèches :** Sur la représentation par flèches d'une application f de A dans B, il part une flèche et une seule de chaque élément de A.
C'est ce que nous constatons sur la figure 7, représentation par flèches de l'application φ de E dans F.

16 **Représentation cartésienne :** Sur la représentation cartésienne d'une application f de A dans B, sur chaque verticale issue d'un élément de A, il y a un point représentatif unique. C'est ce que nous constatons sur la figure 8, représentation cartésienne de l'application φ de E dans F.



(6) (7) (8)

Image d'une partie de l'ensemble de départ.

17 Considérons une application f de A dans B, et un ensemble A_1 inclus dans l'ensemble de départ A. Tout élément a de A_1 a une image b par f qui appartient à l'ensemble B. L'ensemble E_1 des images b de tous les éléments a de A_1 est donc inclus dans l'ensemble B.
On dit que **cet ensemble E_1 est l'image par f de l'ensemble A_1** et l'on convient de noter * : $E_1 = f(A_1)$.

---

* Lorsqu'on associe à chaque partie A_1 de A son image dans B, on définit une application F de $\mathfrak{P}_A$ dans $\mathfrak{P}_B$. La notation correcte pour l'image de A_1 est donc $F(A_1)$. Il est d'usage de la noter $f(A_1)$ comme nous l'avons fait ; cet abus de notation n'entraîne aucune difficulté pratique.

Si l'ensemble A_1 est la partie pleine de A, c'est-à-dire si A_1 est égal à A, l'ensemble E des images de tous les éléments a de A est inclus dans B, et est l'image par f de l'ensemble de départ A : $E = f(A)$.
Pour toute application f de A dans B, nous avons l'inclusion : $f(A) \subset B$.

Application dans un ensemble.

18 Si l'ensemble d'arrivée B est égal à l'ensemble de départ A, nous disons que l'application f de A dans B est une application dans A. Le graphe G d'une application dans A est donc un sous-ensemble du produit cartésien A^2 tel que, pour tout élément a de A, il existe un couple et un seul de G dont la première coordonnée est a ; la deuxième coordonnée de ce couple est $f(a)$.

Application identique dans un ensemble.

19 **DÉFINITION : On appelle application identique dans un ensemble** A **l'application dans** A **qui, à tout élément** a **de** A**, associe cet élément** a**.**

Cette application est notée : id_A.
Pour tout élément a de A, l'image $id_A(a)$ est égale à a.
Nous notons : $id_A : A \longrightarrow A, \quad a \rightsquigarrow a$.

Égalité de deux applications.

20 Nous avons défini l'égalité de deux relations ; cette définition s'applique à l'égalité de deux applications :

Deux applications f_1 et f_2 sont égales si et seulement si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et le même graphe.

Soient deux applications f_1 et f_2 de A dans B. Ces deux applications sont égales si et seulement si le graphe G_1 de l'application f_1 est égale au graphe G_2 de l'application f_2.
Désignons par a un élément quelconque de A, par b_1 l'image de a par f_1 et par b_2 l'image de a par f_2 :

$$a \overset{f_1}{\rightsquigarrow} b_1 ; \qquad a \overset{f_2}{\rightsquigarrow} b_2.$$

Dans chacun des graphes G_1 et G_2, il existe un couple unique dont la première coordonnée est a ; dans G_1, la deuxième coordonnée de ce couple unique est b_1, dans G_2, la deuxième coordonnée de ce couple unique est b_2.
Les graphes G_1 et G_2 sont donc égaux si et seulement si, pour tout élément a de A, les images respectives b_1 et b_2 de a par f_1 et par f_2 sont égales.
Nous avons les égalités : $b_1 = f_1(a)$, et $b_2 = f_2(a)$.
Pour deux applications f_1 et f_2 de A dans B, nous en déduisons l'équivalence logique :
$(f_1 = f_2) \Longleftrightarrow (\forall a \in A, \quad f_1(a) = f_2(a))$.

21 **Exemple :** Considérons les ensembles : $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, et l'application φ de E dans F, étudiée ci-dessus, et définie par :
$(x \varphi y) \iff (y - x = 1)$.
Considérons la relation φ_1 de E vers F définie par :
$(x \varphi_1 y) \iff (x < y < x + 2)$.
Cette relation φ_1 est aussi une application de E dans F et, pour tout élément x de E, nous avons les égalités :
$\varphi(x) = x + 1$ et $\varphi_1(x) = x + 1$.
Les applications φ et φ_1 sont donc égales.

Restriction d'une application.

22 **DÉFINITION : Soient f une application d'un ensemble A dans un ensemble B et A_1 une partie de A. On appelle restriction à l'ensemble A_1 de l'application f, l'application f_1 définie par :**
$A_1 \subset A$; $\forall a_1 \in A_1$, $f_1(a_1) = f(a_1)$.

Exemple : Considérons dans un plan P, une direction de droites δ, une droite D qui n'appartient pas à cette direction, et une droite L.
La projection p' de L dans D suivant la direction δ est la restriction à L de la projection p du plan P dans D suivant la direction δ.

Prolongement d'une application.

23 **DÉFINITION : Soient f une application de A dans B et A_2 un ensemble qui contient A. On dit qu'une application f_2 de A_2 dans B est un prolongement de f à A_2 si et seulement si la restriction de f_2 à A est l'application f.**

Il résulte de la définition précédente que, si f_2 est un prolongement de f à A_2, on a :
$A \subset A_2$; $\forall a \in A$, $f_2(a) = f(a)$.

24 **Remarques :** 1. Si f est une application de A dans B et A_2 un ensemble qui contient A, pour construire un prolongement de f à A_2, on définit l'image de chaque élément a de A par l'égalité : $f_2(a) = f(a)$; puis l'on choisit arbitrairement dans B l'image de chaque élément de A_2 qui n'appartient pas à A.

2. Il peut exister plusieurs prolongements à A_2 d'une application f de A dans B. Par exemple, soit l'application $f : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow 2$.
Les applications g et h de $\{0, 1, 2, 3\}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 2$, et par :
$h(0) = h(1) = 2$, $h(2) = h(3) = 0$,
sont des prolongements distincts de f à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$.

Notion d'équation.

25 Soient deux ensembles A et B, f une application de A dans B et b un élément de B.

DÉFINITION : Résoudre, dans l'ensemble A, l'équation : $f(x) = b$, c'est rechercher s'il existe des éléments de A dont l'image par f est b, et déterminer ces éléments lorsqu'ils existent.

Tout élément a de A tel que : $f(a) = b$ est appelé solution de l'équation.
L'ensemble E des solutions de l'équation : $f(x) = b$ est donc le sous-ensemble de A constitué par les éléments dont l'image par f est b.
Lorsqu'il n'existe pas d'élément de A dont l'image par f soit égale à b, l'équation : $f(x) = b$ n'a pas de solution ; l'ensemble E est vide.
L'ensemble E des solutions de l'équation : $f(x) = b$ est non vide si et seulement si on a : $b \in f(A)$.

Composition de deux applications.

Application composée de deux applications.

26 Soient A, B, C trois ensembles, f une application de A dans B et g une application de B dans C :

$f : A \longrightarrow B, \quad x \rightsquigarrow f(x); \qquad g : B \longrightarrow C, \quad y \rightsquigarrow g(y).$

A tout élément x de A, l'application f associe un élément unique de B : $f(x)$.
A cet élément $f(x)$ de B, l'application g associe un élément unique de C : $g[f(x)]$.

Nous pouvons donc définir une application h de A dans C par :

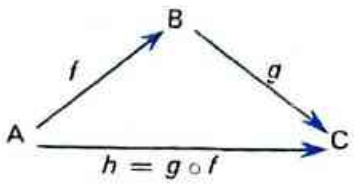
$\forall x \in A, \quad x \rightsquigarrow h(x) = g[f(x)]$.

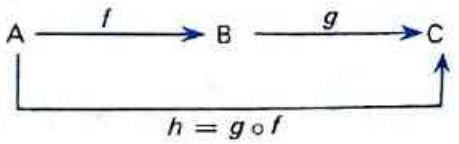
DÉFINITION : On appelle application composée d'une application f de A dans B par une application g de B dans C, l'application h de A dans C définie par : $\forall x \in A, \quad x \rightsquigarrow h(x) = g[f(x)]$.

Cette application h est notée : $h = g \circ f$
On lit : h égale g rond f.

Nous avons alors : $\forall x \in A, \quad (g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Pour indiquer que h est la composée de f par g, il est commode d'utiliser les diagrammes suivants :





27 **Exemples :** 1. Considérons les applications f et g définies par :

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad x \rightsquigarrow x - 4;$

$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad y \rightsquigarrow \frac{1}{3}y - 2.$

Pour tout élément x de $\mathbb{N}$, nous avons :

$$g[f(x)] = g[x - 4] = \frac{1}{3}(x - 4) - 2 = \frac{1}{3}(x - 10).$$

L'application h composée de f par g est donc définie par :

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad x \rightsquigarrow \frac{1}{3}(x - 10).$$

2. Soit f une application de A dans B. Nous avons : $f \circ id_A = f$ et $id_B \circ f = f$.
En effet, nous avons les égalités :

$\forall a \in A, \quad (f \circ id_A)(a) = f[id_A(a)] = f(a);$

$\forall b \in A, \quad (id_B \circ f)(b) = id_B[f(b)] = f(b).$

28 **Remarque :** Si f appartient à $\mathcal{F}(A, B)$ et si g appartient à $\mathcal{F}(B, C)$, alors $g \circ f$ appartient à $\mathcal{F}(A, C)$.

Application composée de trois applications.

29 Soient A, B, C, D quatre ensembles, f une application de A dans B, g une application de B dans C et h une application de C dans D :

$f : A \longrightarrow B, \quad x \rightsquigarrow f(x);$

$g : B \longrightarrow C, \quad y \rightsquigarrow g(y);$

$h : C \longrightarrow D, \quad z \rightsquigarrow h(z).$

Nous nous proposons de comparer l'application $h \circ (g \circ f)$, composée de $g \circ f$ par h, et l'application $(h \circ g) \circ f$ composée de f par $h \circ g$.

Nous avons : $g \circ f \in \mathcal{F}(A, C)$ et $h \in \mathcal{F}(C, D)$; l'application $h \circ (g \circ f)$ est donc un élément de $\mathcal{F}(A, D)$.

Nous avons de même : $f \in \mathcal{F}(A, B)$ et $h \circ g \in \mathcal{F}(B, D)$; l'application $(h \circ g) \circ f$ est donc un élément de $\mathcal{F}(A, D)$.

D'autre part, pour tout élément x de A, nous avons les égalités :

$[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g(f(x))];$

$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)[f(x)] = h[g(f(x))].$

Nous en déduisons : $\forall x \in A, \quad [h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x).$

Les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ ont le même ensemble de départ A, le même ensemble d'arrivée D, et les images de tout élément x de A par ces deux applications sont égales.

Ces applications sont donc égales : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

THÉORÈME : Soient f une application de A dans B, g une application de B dans C et h une application de C dans D. Les deux applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont égales.

Nous notons : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$.

EXERCICES

Relations.

1 Soit l'ensemble : $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

1° On définit une relation $\mathcal{A}$ dans A en décidant qu'un élément a de A est en relation avec un élément b de A si et seulement si l'on a : $a + b \leqslant 5$. Déterminer le graphe G de la relation $\mathcal{A}$.

2° On définit une autre relation $\mathcal{B}$ dans A en décidant qu'un élément a de A est en relation avec un élément b de A si et seulement si l'on a : $a - b \leqslant 2$. Déterminer le graphe H de la relation $\mathcal{B}$.

3° Dessiner, pour chacune des relations $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, une représentation par flèches et une représentation cartésienne.

2 Même exercice que le n° 1, pour l'ensemble :
$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et pour les relations $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ suivantes :
$(a \mathcal{A} b) \iff (a = 3b)$;
$(a \mathcal{B} b) \iff (ab \in A)$.

3 On considère l'ensemble : $A = \{0, 1, 2\}$.

1° Déterminer toutes les parties propres de A. On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces parties propres.

2° On définit une relation $\mathcal{R}$ de A vers $\mathcal{B}$ en décidant qu'un élément a de A est en relation avec un élément B de $\mathcal{B}$ si et seulement si a appartient à B. Déterminer le graphe de la relation $\mathcal{R}$.

3° Dessiner une représentation cartésienne pour la relation $\mathcal{R}$.

4° Indiquer les éléments de $\mathcal{B}$ avec lesquels l'élément 0 de A est en relation.

4 On considère l'ensemble : $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

1° On définit une relation $\mathcal{R}$ dans E en décidant qu'un élément a de E est en relation avec un élément b de E si et seulement si la somme $a + b$ est divisible par 2. Déterminer le graphe de la relation $\mathcal{R}$ et donner une représentation cartésienne de cette relation.

2° On désigne par H le sous-ensemble suivant du produit cartésien $E \times E$:
$H = \{(1, 0), (3, 0), (4, 1), (3, 4), (0, 3), (0, 1), (2, 4), (1, 4), (1, 2), (3, 2), (4, 3), (2, 3)\}$.
Soit $\mathcal{U}$ la relation dans E dont le graphe est le complémentaire de H dans $E \times E$. Les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{U}$ sont-elles égales ?

5 On considère les deux ensembles : $A = \{a, b, c\}$; $B = \{1, 2\}$.
Parmi les ensembles suivants, indiquer ceux qui sont le graphe d'une application de A dans B :
$G = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$; $H = \{(a, 1), (b, 2), (a, 2)\}$;
$K = \{(c, 1), (c, 2), (b, 1)\}$; $L = \{(a, 1), (c, 1), (b, 1)\}$.

6 On considère les ensembles : $A = \{a, b\}$; $B = \{0, 1\}$.
Trouver toutes les applications de A dans B. On définira chacune d'elles en indiquant son graphe et on en donnera une représentation cartésienne.

7 Même exercice que le n° 6 pour les ensembles A et B suivants :
$A = \{a, b, c\}$; $B = \{0, 1\}$.

8 Même exercice que le n° 6 pour les ensembles A et B suivants :
$A = \{a, b\}$; $B = \{0, 1, 2\}$.

EXERCICES

Composition des applications.

◆ Dans chacun des exercices suivants (nos 9 à 15), on considère deux applications f et g. Déterminer les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$:

9 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x + 2;$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x - 3.$

10 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x - 2;$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow 3x - 1.$

11 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow -\frac{x}{2} + 1;$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow -\frac{x}{2} - 1.$

12 $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \rightsquigarrow \frac{1}{x};$
$g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \rightsquigarrow 2x + 1.$

13 $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \rightsquigarrow \frac{3}{x};$
$g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \rightsquigarrow \frac{x}{3} + 1.$

14 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \rightsquigarrow x^2 + 1;$
$g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \rightsquigarrow x + 2.$

15 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x^2 - 2;$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow 2x - 1.$

16 Soient E un ensemble et A une partie propre de E. On définit deux applications φ et ψ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ par : $\varphi(X) = A \cap X$ et $\psi(X) = A \cup X$.

1° Déterminer les images de $\mathcal{P}(E)$ par les applications φ et ψ.

2° Déterminer les applications $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.

$\varphi \circ \psi = \varphi[\psi]$
$= A \cap (A \cup X)$
$= A \cap A \cup A \cap X$
$= A \cup A \cap X$
$= A \cup \varphi(X)$

$= A \cup (A \cap X)$
$= A \cup X \cap A \cup X$
$= A \cap A \cup X$
$= A \cap \psi(X)$

2.
Relations dans un ensemble

Propriétés des relations dans un ensemble.

1 Considérons un ensemble E et une relation $\mathcal{R}$ dans cet ensemble. Cette relation $\mathcal{R}$ peut, éventuellement, présenter certains caractères que nous allons étudier.

Réflexivité.

2 **DÉFINITION : On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est réflexive si et seulement si, pour tout élément x de E, on a : $x \mathcal{R} x$.**

Une relation $\mathcal{R}$ dans E est donc réflexive si et seulement si son graphe G vérifie la propriété : $\forall x \in E, \quad (x, x) \in G$.
Une relation $\mathcal{R}$ dans E est donc réflexive si et seulement si la diagonale Δ de $E \times E$ est une partie du graphe G de $\mathcal{R}$.

Symétrie.

3 **DÉFINITION : On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est symétrique si et seulement si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on a l'implication : $(x \mathcal{R} y) \Longrightarrow (y \mathcal{R} x)$.**

Une relation $\mathcal{R}$ dans E est donc symétrique si et seulement si son graphe G vérifie la propriété :
$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad ((x, y) \in G) \Longrightarrow ((y, x) \in G)$.

Transitivité.

4 **DÉFINITION : On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est transitive si et seulement si, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E, on a l'implication : $(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Longrightarrow (x \mathcal{R} z)$.**

Une relation $\mathcal{R}$ dans E est donc transitive si et seulement si son graphe G vérifie la propriété :
$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad \forall z \in E, \quad ((x, y) \in G \text{ et } (y, z) \in G) \Longrightarrow ((x, z) \in G)$.

Antisymétrie.

5 **DÉFINITION : On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est antisymétrique si et seulement si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, on a l'implication : $(x \mathcal{R} y \text{ et } x \neq y) \Longrightarrow (y \mathcal{R} x)$.**

Une relation $\mathcal{R}$ dans E est donc antisymétrique si et seulement si son graphe G vérifie la propriété :

$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad ((x, y) \in G \text{ et } x \neq y) \Longrightarrow ((y, x) \notin G)$.

L'implication qui définit une relation antisymétrique dans un ensemble E est logiquement équivalente à l'implication :

$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Longrightarrow (x = y)$.

6 **Remarque :** Les quatre caractères des relations dans un ensemble que nous venons d'étudier sont indépendants les uns des autres. Une relation dans un ensemble peut présenter certains d'entre eux sans présenter les autres. Par exemple, une relation dans un ensemble peut être antisymétrique et transitive sans être ni symétrique ni réflexive. Une relation dans un ensemble peut aussi n'être ni symétrique ni antisymétrique.

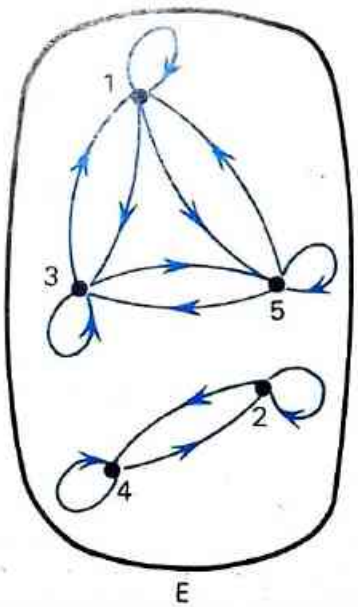
Exemples.

7 Considérons, par exemple, l'ensemble : $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et la relation $\mathcal{R}$ dans E définie par : $(x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow (x + y \text{ est pair})$.

Pour tout élément x de E, nous avons l'égalité : $x + x = 2x$; nous en déduisons que, pour tout élément x de E, on a : $x \mathcal{R} x$. La relation $\mathcal{R}$ dans E est réflexive. Sur la représentation par flèches de cette relation, il y a une boucle autour de chaque élément (fig. 1).

Pour tout couple (x, y) d'éléments de E, nous avons l'égalité : $x + y = y + x$; nous en déduisons que, si on a : si $x \mathcal{R} y$, alors on a : $y \mathcal{R} x$. La relation $\mathcal{R}$ dans E est symétrique. Sur la représentation par flèches de la relation symétrique $\mathcal{R}$, chaque fois qu'il y a une flèche qui part de x et aboutit à y, il y a une flèche qui part de y et aboutit à x.

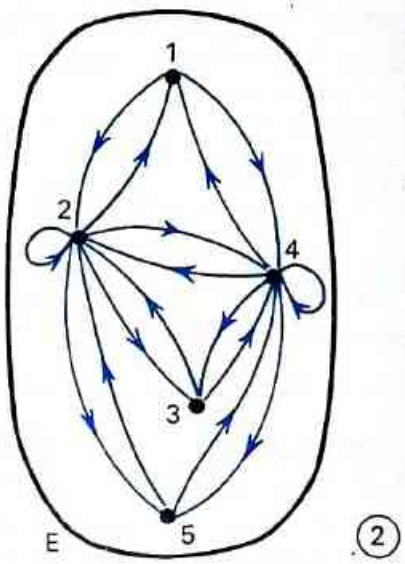
Pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E, nous avons :
$(x + y) + (y + z) = (x + z) + 2y$.
Si $x + y$ est pair et si $y + z$ est pair, $(x + z) + 2y$ est pair; nous en déduisons que $x + z$ est pair. La relation $\mathcal{R}$ dans E est donc transitive.



(1)

Sur la représentation par flèches de cette relation, chaque fois qu'il y a une flèche qui part de x et aboutit à y, et une flèche qui part de y et aboutit à z, il y a une flèche qui part de x et aboutit à z.
Remarquons que, pour les éléments 1 et 3 nous avons : $1 \mathcal{R} 3$ et $1 \neq 3$ et $3 \mathcal{R} 1$.
La relation $\mathcal{R}$ dans E n'est pas antisymétrique.

8 Considérons le même ensemble :
$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et la relation $\mathcal{S}$ dans E définie par : $(x \mathcal{S} y) \iff (xy \text{ est pair})$.
Pour l'élément 3 par exemple, nous avons $3 \not\mathcal{S} 3$; il existe donc au moins un élément x de E pour lequel $x \not\mathcal{S} x$. La relation $\mathcal{S}$ dans E n'est pas réflexive (fig. 2).
Pour tout couple (x, y) d'éléments de E, nous avons l'égalité : $xy = yx$; nous en déduisons l'implication : $(x \mathcal{S} y) \Longrightarrow (y \mathcal{S} x)$.
La relation $\mathcal{S}$ dans E est symétrique. Nous avons d'autre part $1 \mathcal{S} 2$ et $2 \mathcal{S} 3$ et $1 \not\mathcal{S} 3$. La relation $\mathcal{S}$ dans E n'est pas transitive.
Enfin, pour les éléments 2 et 3 de E, nous avons : $2 \mathcal{S} 3$ et $3 \neq 2$ et $3 \mathcal{S} 2$.
La relation $\mathcal{S}$ dans E n'est pas antisymétrique.



(2)

9 Considérons la relation $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par : $(x \mathcal{C} y) \iff (x \text{ divise } y)$.
Pour tout entier naturel non nul, nous avons : $x \mathcal{C} x$; la relation $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{N}^*$ est réflexive.
Pour le couple (2, 4) par exemple, nous avons : $2 \mathcal{C} 4$ et $4 \not\mathcal{C} 2$; la relation $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{N}^*$ n'est pas symétrique.
Pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de $\mathbb{N}^*$, nous avons l'implication :
(x divise y et y divise z) $\Longrightarrow$ (x divise z) ; la relation $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{N}^*$ est transitive.
Pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{N}^*$, si x divise y et si x est différent de y, alors y ne divise pas x.
La relation $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{N}^*$ est antisymétrique.

10 Considérons la relation $\mathcal{U}$ dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites d'un plan P définie par : $(x \mathcal{U} y) \iff (x /\!\!/ y)$.
L'étude faite dans les classes précédentes montre que la relation $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{D}$ est réflexive, symétrique, transitive ; elle n'est pas antisymétrique.

11 Considérons la relation $\mathcal{V}$ dans le même ensemble $\mathcal{D}$ définie par :
$(x \mathcal{V} y) \iff (x \perp y)$.
La relation $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{D}$ est symétrique ; elle n'est ni réflexive, ni transitive, ni antisymétrique.

Relations d'équivalence.

Relation d'équivalence dans un ensemble.

12 DÉFINITION : Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans un ensemble E, la notation $x \mathcal{R} y$ est souvent remplacée par la notation : $x \equiv y$ [mod $\mathcal{R}$].
On lit : x est congru à y modulo $\mathcal{R}$.

Exemple : Considérons la relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs définie par : $(x \mathcal{R} y) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x - y = 3k)$.

Montrons que cette relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.

1. Tout élément x de $\mathbb{Z}$ vérifie l'égalité : $x - x = 3 \times 0$; la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est donc réflexive.

2. Si (x, y) est un couple d'éléments de $\mathbb{Z}$ pour lesquels il existe un entier relatif k qui vérifie l'égalité : $x - y = 3k$; nous avons alors : $y - x = 3(-k)$; la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est donc symétrique.

3. Si (x, y, z) est un triplet d'éléments de $\mathbb{Z}$ pour lesquels il existe deux entiers relatifs m et n qui vérifient les égalités : $x - y = 3m$ et $y - z = 3n$; nous avons alors : $x - z = 3(m + n)$; la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est donc transitive.

Classes d'équivalence.

13 DÉFINITION : Soient une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans un ensemble E non vide et un élément x de E. On appelle classe d'équivalence de x, et l'on note $\overline{x}$, l'ensemble des éléments de E équivalents à x, modulo $\mathcal{R}$.

Nous notons :
$\overline{x} = \{y \mid y \in E \text{ et } y \mathcal{R} x\}$, ou encore : $\overline{x} = \{y \mid y \in E \text{ et } y \equiv x \text{ [mod } \mathcal{R}]\}$.

14 Remarque : Pour tout élément x de E, nous avons : $x \equiv x$ [mod $\mathcal{R}$] ; la classe d'équivalence de x n'est pas vide ; elle contient au moins l'élément x.
L'élément x est un représentant de la classe $\overline{x}$; si cette classe $\overline{x}$ n'est pas un singleton, tout autre élément de $\overline{x}$ est aussi un représentant de la classe $\overline{x}$.

15 THÉORÈME : Si deux classes d'équivalence ont un élément commun, elles sont égales.

Soient une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans un ensemble E non vide, et deux classes d'équivalence $\bar{x}$ et $\bar{y}$.
Supposons que ces deux classes d'équivalence aient un élément commun a; nous avons donc : $a \in \bar{x}$ et $a \in \bar{y}$, c'est-à-dire : $a \mathcal{R} x$ et $a \mathcal{R} y$.
La relation $\mathcal{R}$ dans E est symétrique : $(a \mathcal{R} x) \Longrightarrow (x \mathcal{R} a)$.
Soit x' un élément de $\bar{x}$; nous avons : $x' \mathcal{R} x$.
La relation $\mathcal{R}$ dans E est transitive :
$(x' \mathcal{R} x \text{ et } x \mathcal{R} a) \Longrightarrow (x' \mathcal{R} a)$; $(x' \mathcal{R} a \text{ et } a \mathcal{R} y) \Longrightarrow (x' \mathcal{R} y)$.
Tout élément x' de la classe $\bar{x}$ appartient donc à la classe $\bar{y}$; nous avons donc l'inclusion : $\bar{x} \subset \bar{y}$.
En prenant un élément y' de $\bar{y}$ nous démontrerions, d'une façon analogue, l'inclusion : $\bar{y} \subset \bar{x}$. double inclusion $(A=B) \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
Des inclusions : $\bar{x} \subset \bar{y}$ et $\bar{y} \subset \bar{x}$, nous déduisons l'égalité : $\bar{x} = \bar{y}$.

16 Nous venons d'établir, pour deux classes d'équivalence $\bar{x}$ et $\bar{y}$ quelconques, l'implication : $(\bar{x} \cap \bar{y} \neq \varnothing) \Longrightarrow (\bar{x} = \bar{y})$. (1)
Cette implication est logiquement équivalente à l'implication :
$(\bar{x} \neq \bar{y}) \Longrightarrow (\bar{x} \cap \bar{y} = \varnothing)$. contraposé de (1)
Pour traduire cette implication, nous énonçons :

THÉORÈME : Si deux classes d'équivalence sont distinctes, elles sont disjointes.

Partition d'un ensemble.

17 **DÉFINITION : On dit qu'un ensemble $\mathcal{T}$ de parties d'un ensemble E est une partition de E si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :**

1. **Chacune de ces parties est non vide :** $\forall A \in \mathcal{T}, \quad A \neq \varnothing$.
2. **La réunion de ces parties est l'ensemble E :** $\forall x \in E, \ \exists A \in \mathcal{T}, \quad x \in A$.
3. **Deux parties distinctes quelconques sont disjointes :**

$\forall A \in \mathcal{T}, \ \forall B \in \mathcal{T}, \quad (A \neq B) \Longrightarrow (A \cap B = \varnothing)$.

Remarquons qu'une partition $\mathcal{T}$ de E est un sous-ensemble de $\mathcal{T}_E$ et qu'un élément A de $\mathcal{T}$ est une partie de E.

Relation d'équivalence et partition.

18 Il résulte des résultats précédents et de la définition du n° 17 le théorème :

THÉORÈME : Les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence dans un ensemble E non vide constituent une partition de E.

Exemple : Nous avons démontré que la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par : $(x \mathcal{R} y) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x - y = 3k)$, est une relation d'équivalence.
Les trois classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ sont :
$\bar{0} = \{\ldots, -6, -3, \quad 0, +3, +6, \ldots\}$;
$\bar{1} = \{\ldots, -5, -2, +1, +4, +7, \ldots\}$;
$\bar{2} = \{\ldots, -4, -1, +2, +5, +8, \ldots\}$.
Ces trois classes constituent une partition de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

19 Réciproquement, nous allons montrer que la donnée d'une partition d'un ensemble E, non vide, permet de définir une relation d'équivalence dans E.
Considérons une partition $\mathcal{T}$ de l'ensemble E, c'est-à-dire un ensemble de parties de E telles que :
1. $\forall A \in \mathcal{T}, \quad A \neq \varnothing$.
2. $\forall x \in E, \quad \exists A \in \mathcal{T}, \quad x \in A$.
3. $\forall A \in \mathcal{T}, \quad \forall B \in \mathcal{T}, \quad (A \neq B) \Longrightarrow (A \cap B = \varnothing)$.

Soit $\mathcal{R}$ la relation dans E définie par : $(x \mathcal{R} y) \iff (\exists A \in \mathcal{T}, \quad x \in A \text{ et } y \in A)$.

La relation $\mathcal{R}$ est **réflexive;** en effet, pour tout élément x de E, il existe, d'après la condition 2, un élément A de $\mathcal{T}$ tel que : $x \in A$.
Nous avons alors : $x \in A$ et $x \in A$, c'est-à-dire : $x \mathcal{R} x$.

La relation $\mathcal{R}$ est **symétrique** ; en effet si x et y sont deux éléments de E pour lesquels nous avons $x \mathcal{R} y$, il existe un élément A de $\mathcal{T}$ tel que : $x \in A$ et $y \in A$.
Nous avons alors : $y \in A$ et $x \in A$, c'est-à-dire : $y \mathcal{R} x$.

La relation $\mathcal{R}$ est **transitive** ; en effet, si x, y, z sont trois éléments de E pour lesquels nous avons : $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, il existe un élément A de $\mathcal{T}$ et un élément B de $\mathcal{T}$ tels que : $(x \in A \text{ et } y \in A)$ et $(y \in B \text{ et } z \in B)$.
L'ensemble $A \cap B$ est donc non vide ; il résulte de la condition 3 l'égalité : $A = B$.
Nous avons alors : $x \in A$ et $z \in A$, c'est-à-dire $x \mathcal{R} z$.

La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence dans l'ensemble E, et il résulte de la définition de $\mathcal{R}$ que les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont les éléments de la partition $\mathcal{T}$.

20 THÉORÈME : Soit $\mathcal{T}$ une partition d'un ensemble E, non vide. La relation $\mathcal{R}$ dans E définie par : $(x \mathcal{R} y) \iff (\exists A \in \mathcal{T}, \quad x \in A \text{ et } y \in A)$, est une relation d'équivalence dans E dont les classes sont les éléments de $\mathcal{T}$.

Ensemble quotient.

21 DÉFINITION : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E non vide. L'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ est appelé ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$.

Cet ensemble quotient est noté : $E/\mathcal{R}$.
L'ensemble $E/\mathcal{R}$ est donc la partition de E associée à la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Exemples : 1. Considérons la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :
$(x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x - y = 3k)$; c'est une relation d'équivalence.
L'ensemble quotient a trois éléments : $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$.
Il est d'usage de noter cet ensemble quotient : $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Nous avons alors : $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

2. Soit l'ensemble $\mathfrak{D}$ des droites d'un plan P ; la relation $\mathcal{U}$ dans $\mathfrak{D}$ définie par :
$(x \mathcal{U} y) \Longleftrightarrow (x /\!/ y)$ est une relation d'équivalence.
La classe d'équivalence modulo $\mathcal{U}$ d'une droite Δ de $\mathfrak{D}$ est l'ensemble des droites parallèles à Δ ; ces droites définissent une direction de droites δ.
L'ensemble quotient $\mathfrak{D}/\mathcal{U}$ est l'ensemble des directions de droites du plan P.

Relations d'ordre.

Relation d'ordre dans un ensemble.

22 DÉFINITION : Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est une relation d'ordre si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemples : 1. Considérons la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :
$(x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow (x$ est un multiple de $y)$.
Montrons que cette relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre.
Tout élément x de $\mathbb{N}$ vérifie l'égalité : $x = x \times 1$; la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$ est donc réflexive.
Tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{N}$ tels que x soit un multiple de y et que y soit un multiple de x vérifie nécessairement l'égalité : $x = y$; la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$ est donc antisymétrique.
Soit un triplet (x, y, z) d'éléments de $\mathbb{N}$ pour lesquels il existe deux entiers naturels m et n qui vérifient les égalités : $x = my$ et $y = nz$.
Nous avons alors : $x = (mn)z$; la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$ est donc transitive.

2. Considérons la relation $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $(x \mathcal{S} y) \Longleftrightarrow (x \leqslant y)$.
Montrons que cette relation $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre.
Tout élément x de $\mathbb{R}$ vérifie la relation : $x \leqslant x$; la relation $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ est réflexive.
Tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}$ pour lesquels on a : $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ vérifie l'égalité : $x = y$; la relation $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ est antisymétrique.
Soit un triplet (x, y, z) d'éléments de $\mathbb{R}$ pour lesquels on a : $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$; nous avons alors : $x \leqslant z$; la relation $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ est transitive.

Éléments comparables dans un ensemble ordonné.

23 Si une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est une relation d'ordre, on dit que l'ensemble E est ordonné par la relation $\mathcal{R}$.

DÉFINITION : On dit que deux éléments x et y d'un ensemble E ordonné par une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sont comparables pour cette relation si et seulement s'ils vérifient : $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$.

Exemple : Considérons l'ensemble $\mathbb{N}$ ordonné par la relation $\mathcal{R}$:
$(x \mathcal{R} y) \iff (x$ est multiple de $y)$.
Les entiers 4 et 12 sont comparables pour cette relation : $12 \mathcal{R} 4$.
Les entiers 2 et 3 ne sont pas comparables pour cette relation : $2 \not\mathcal{R} 3$ et $3 \not\mathcal{R} 2$.

Relation d'ordre total.

24 DÉFINITION : On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est une relation d'ordre total si et seulement si deux éléments quelconques de E sont comparables pour $\mathcal{R}$.

On dit alors que l'ensemble E est totalement ordonné par $\mathcal{R}$.

Exemple : Soit la relation $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $(x \mathcal{S} y) \iff (x \leqslant y)$.
Deux réels sont toujours comparables pour cette relation. La relation $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.

Relation d'ordre partiel.

25 DÉFINITION : On dit qu'une relation d'ordre dans un ensemble E est une relation d'ordre partiel si et seulement si elle n'est pas d'ordre total.

Pour qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ dans un ensemble E soit une relation d'ordre partiel, il suffit qu'il existe un couple d'éléments de E non comparables pour la relation $\mathcal{R}$.

Exemple : La relation d'ordre $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :
$(x \mathcal{R} y) \iff (x$ est multiple de $y)$,
est une relation d'ordre partiel ; nous avons vu, en effet, que les éléments 2 et 3 de $\mathbb{N}$ ne sont pas comparables pour $\mathcal{R}$.

EXERCICES

Relations d'équivalence.

1 Soient l'ensemble : $E = \{a, b, c, d\}$ et la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}_E$ définie par :

$(A \mathcal{R} B) \iff$ (le nombre d'éléments de A a même parité que le nombre d'éléments de B)

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2° Écrire les éléments de la classe d'équivalence de la partie vide, et les éléments de la classe d'équivalence du singleton $\{a\}$.

3° Quel est le nombre des classes d'équivalence ?

2 Soit E un ensemble muni d'une relation $\mathcal{R}$ réflexive et transitive. On définit dans E une relation $\mathcal{S}$ par : $(x \mathcal{S} y) \iff (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x)$.
Démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

3 On considère l'ensemble E des points d'un plan P ; on désigne par A et par B deux points distincts de ce plan, et par E' l'ensemble : $E - \{A, B\}$.
Soit $\mathcal{R}$ la relation dans E' définie par :

$(M \mathcal{R} M') \iff (\widehat{AMB} = \widehat{AM'B})$.

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2° Quelle est la classe d'équivalence d'un point C de l'ensemble E' ?

◆ Dans chacun des exercices suivants (n°s 4 à 8), on définit une relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}^*$ des réels non nuls.

1° Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ est une relation d'équivalence.

2° Déterminer la classe d'équivalence $\bar{a}$ d'un élément a de $\mathbb{R}^*$.

4 $(a \mathcal{R} b) \iff (a^2 - b^2 = a - b)$.

5 $(a \mathcal{R} b) \iff \left(a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}\right)$.

6 $(a \mathcal{R} b) \iff \left(a - \frac{1}{a} = b - \frac{1}{b}\right)$.

7 $(a \mathcal{R} b) \iff \left(a^2 + \frac{1}{a^2} = b^2 + \frac{1}{b^2}\right)$.

8 $(a \mathcal{R} b) \iff \left(a^2 - \frac{1}{a^2} = b^2 - \frac{1}{b^2}\right)$.

9 On considère la relation $\mathcal{S}$ dans l'ensemble $\mathbb{N}^2$ définie par :

$\big((a, b) \mathcal{S} (a', b')\big) \iff (a + b' = a' + b)$.

1° Démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

2° Quelles sont les classes d'équivalence ?

10 On considère la relation $\mathcal{C}$ dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ définie par :

$\big((a, b) \mathcal{C} (a', b')\big) \iff (ab' = ba')$.

1° Démontrer que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence.

2° Quelles sont les classes d'équivalence ?

11 On considère la relation $\mathcal{U}$ dans un plan vectoriel $\vec{P}$ définie par :

$(\vec{V} \mathcal{U} \vec{V}') \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \vec{V}' = \lambda \vec{V})$.

1° Démontrer que $\mathcal{U}$ est une relation d'équivalence.

2° Quelles sont les classes d'équivalence ?

EXERCICES

12 On considère un ensemble E et une partie E_1 de cet ensemble.
Soit $\mathcal{R}$ la relation dans $\mathcal{P}_E$ définie par : $(A \mathcal{R} B) \iff (A \cup E_1 = B \cup E_1)$.
1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{P}_E$.
2° On suppose : $E_1 = E$. Quelle est alors la relation $\mathcal{R}$? Quelle est la classe d'équivalence d'une partie A de E ?
3° On suppose : $E_1 = \varnothing$. Quelle est alors la relation $\mathcal{R}$? Quelle est la classe d'équivalence d'une partie A de E ?

13 Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B.
On considère la relation $\mathcal{C}$ dans A définie par :
$(a \mathcal{C} b) \iff \big(f(a) = f(b)\big)$.
1° Démontrer que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence dans A.
2° On donne : $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}$, et f est l'application de A dans B définie par : $f(x) = x^2$. Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathcal{C}$?

14 Soient A et B deux ensembles non vides et f une application de A dans B. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans l'ensemble B.
On considère la relation $\mathcal{S}$ dans A définie par :
$(a \mathcal{S} b) \iff \big(f(a) \mathcal{R} f(b)\big)$.
1° Démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
2° Quelles sont les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{S}$?

15 1° On considère la relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}^*$ définie par :
$(x \mathcal{R} y) \iff (xy > 0)$.
Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?
2° On considère la relation $\mathcal{S}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ définie par :
$(x \mathcal{S} y) \iff (xy \geqslant 0)$.
La relation $\mathcal{S}$ est-elle une relation d'équivalence ?

16 On considère l'ensemble des points d'un plan P rapporté à un repère cartésien $x'\overrightarrow{Ox}, y'\overrightarrow{Oy}$. On désigne par (x, y) et par (x', y') les coordonnées respectives des points M et M'.
On considère la relation $\mathcal{R}$ dans P définie par :
$(M \mathcal{R} M') \iff (x + y = x' + y')$.
1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2° Quelles sont les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$?

17 Même exercice que le n° 16 pour la relation $\mathcal{R}$ dans P définie par :
$(M \mathcal{R} M') \iff \left(x = x' = 0 \quad \text{ou} \quad \left(xx' \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}\right)\right)$.

18 On considère un ensemble E_1 muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}_1$ et un ensemble E_2 muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}_2$.
On définit une relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble : $E = E_1 \times E_2$, par :
$\big((x_1, x_2) \mathcal{R} (y_1, y_2)\big) \iff (x_1 \mathcal{R}_1 y_1 \quad \text{et} \quad x_2 \mathcal{R}_2 y_2)$.
1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans E.
2° L'égalité : $E/\mathcal{R} = (E_1/\mathcal{R}_1) \times (E_2/\mathcal{R}_2)$ est-elle vérifiée ?

Relations d'ordre.

19 Soit l'ensemble : $E = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 1\}$; on considère l'ensemble A des applications de E dans $\mathbb{R}$, et la relation $\mathcal{R}$ dans A définie par : $(f \mathcal{R} g) \Longleftrightarrow (\forall x \in E,\ f(x) \leqslant g(x))$.

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2° L'ensemble A est-il totalement ordonné par la relation $\mathcal{R}$?

20 On définit la relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ par :
$(x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow (y^3 - x^3 \geqslant 0)$.

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2° L'ensemble $\mathbb{R}$ est-il totalement ordonné par la relation $\mathcal{R}$?

21 On définit la relation $\mathcal{S}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$ par :
$((x, y)\ \mathcal{S}\ (x', y')) \Longleftrightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y')$.

1° Démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

2° L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est-il totalement ordonné par la relation $\mathcal{S}$?

22 On définit la relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$ par :
$((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2)) \Longleftrightarrow (x_1 \leqslant y_1)$.

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive et démontrer qu'elle n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

2° On définit la relation $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^2$ par :
$((x_1, x_2)\ \mathcal{S}\ (y_1, y_2)) \Longleftrightarrow ((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \text{ et } (y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (x_1, x_2))$.
Démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

3° Démontrer que l'on peut munir l'ensemble quotient $\mathbb{R}^2/\mathcal{S}$ d'une relation d'ordre $\mathcal{T}$ définie par : $(\overline{(x_1, x_2)}\ \mathcal{T}\ \overline{(y_1, y_2)}) \Longleftrightarrow ((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2))$.

23 On considère un ensemble A muni d'une relation $\mathcal{R}$ réflexive et transitive et la relation $\mathcal{S}$ dans A définie par :
$(a\ \mathcal{S}\ b) \Longleftrightarrow (a\ \mathcal{R}\ b \text{ et } b\ \mathcal{R}\ a)$.

1° Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

2° Dans l'ensemble quotient $A/\mathcal{S}$ on définit la relation $\mathcal{T}$ par :
$(M\ \mathcal{T}\ N) \Longleftrightarrow (\exists a \in M \text{ et } \exists b \in N,\ a\ \mathcal{R}\ b)$.
Démontrer que la définition de $\mathcal{T}$ est indépendante des éléments a et b choisis respectivement dans M et dans N.

3° Démontrer que $\mathcal{T}$ est une relation d'ordre sur $A/\mathcal{S}$.

24 On définit une relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par :
$((x_1, y_1)\ \mathcal{R}\ (x_2, y_2)) \Longleftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 \leqslant y_2))$.

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}^2$. Est-ce une relation d'ordre total?

2° On considère l'ensemble des points d'un plan P rapporté à un repère cartésien $\overrightarrow{x'Ox}, \overrightarrow{y'Oy}$. Si M_1 et M_2 sont deux points de P on désigne par (x_1, y_1) les coordonnées de M_1 et par (x_2, y_2) les coordonnées de M_2.
On définit dans P une relation $\mathcal{S}$ par :
$(M_1\ \mathcal{S}\ M_2) \Longleftrightarrow ((x_1, y_1)\ \mathcal{R}\ (x_2, y_2))$.

a) Démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre dans P.

b) Soit M_0 le point de coordonnées (x_0, y_0). Caractériser les points du plan pour lesquels on a : $M_0\ \mathcal{S}\ M$.

3.
Lois de composition. Groupes

Lois de composition interne.

Loi de composition interne dans un ensemble.

1 **DÉFINITION : On appelle loi de composition interne dans l'ensemble** A, **toute application d'une partie** E **de** $A \times A$ **dans** A.

Au lieu de dire loi de composition interne dans A, on dit aussi opération dans A.

Exemple : Si A est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'addition dans $\mathbb{N}$ est la loi de composition interne qui, à tout élément (a, b) de $\mathbb{N}^2$, associe la somme $a + b$, élément de $\mathbb{N}$.

Opération partout définie. Opération non partout définie.

2 Si l'ensemble E est la partie pleine de $A \times A$, on dit que **l'opération est partout définie** dans l'ensemble A.
Si l'ensemble E est une partie propre de $A \times A$, on dit que **l'opération n'est pas partout définie** dans l'ensemble A.

Exemple : La soustraction dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est une opération partout définie qui à tout élément (a, b) de l'ensemble $\mathbb{Z}^2$, associe la différence $a - b$, qui est un élément de $\mathbb{Z}$.
La soustraction dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est une opération non partout définie ; elle applique l'ensemble E des éléments (a, b) de $\mathbb{N}^2$ pour lesquels la première coordonnée a est supérieure ou égale à la deuxième coordonnée b, dans l'ensemble $\mathbb{N}$.

Notation d'une loi de composition interne.

3 Pour désigner une loi de composition interne, on emploie un signe typographique arbitraire : $\star$, $\perp$, $\top$, Δ, $+$, $-$, $\times$, ...

Si nous désignons la loi par $\star$, et si c est l'image du couple (a, b) de E par cette loi $\star$, nous disons que c est le **composé** de a par b, ou le résultat de l'opération ; nous écrivons : $c = a \star b$.

Par exemple, dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, la multiplication est une loi de composition interne partout définie ; au couple (3, 5) elle associe le nombre 15 ; nous écrivons : $15 = 3 \times 5$.

Table d'une loi de composition interne.

4 Lorsque le nombre des éléments de l'ensemble E n'est pas trop grand, il est commode, pour déterminer une loi de composition interne, de rassembler les résultats sous forme de tableau, appelé **table de la loi**.

Soit, par exemple, l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et une loi notée $\star$ dans cet ensemble, pour laquelle on a les égalités :

$a \star a = b$; $b \star a = b$; $c \star a = c$.
$a \star b = a$; $b \star b = c$; $c \star b = a$.
$a \star c = c$; $b \star c = a$; $c \star c = a$.

Nous donnons ci-contre la table de la loi $\star$ dans l'ensemble E :

Dans les autres cas, en particulier pour les lois de composition interne partout définies dans $\mathbb{N}$, on donne des tables partielles de la loi (table d'addition, table de multiplication dans $\mathbb{N}$).

$\star$	a	b	c
a	b	b	c
b	a	c	a
c	c	a	a

Propriétés d'une loi de composition interne.

5 Considérons un ensemble A et, dans cet ensemble, une loi de composition interne notée $\star$ que, sauf mention contraire, nous supposons partout définie. Cette loi présente, éventuellement, certains caractères que nous allons étudier.

Commutativité.

6 **DÉFINITION : On dit qu'une loi de composition interne dans un ensemble** A, **notée $\star$, est commutative si et seulement si, pour tout élément** (a, b) **du produit cartésien** A^2, **on a l'égalité :** $a \star b = b \star a$.

Exemples : 1. L'addition dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est une loi commutative ; nous avons en effet : $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad a + b = b + a$.

2. Considérons un plan vectoriel $\vec{P}$. L'addition des vecteurs dans $\vec{P}$ est commutative ; nous avons en effet : $\forall (\vec{V}, \vec{W}) \in \vec{P} \times \vec{P}, \quad \vec{V} + \vec{W} = \vec{W} + \vec{V}$.

7 **Remarques:** 1. Pour établir qu'une loi de composition interne dans A, notée $\perp$, n'est pas commutative, il suffit d'établir l'existence d'au moins un couple (a, b) pour lequel $a \perp b$ n'est pas égal à $b \perp a$:

(La loi $\perp$ dans A n'est pas commutative) $\Longleftrightarrow$ $(\exists (a, b) \in A^2, \quad a \perp b \neq b \perp a)$.

Par exemple, la soustraction dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs n'est pas une opération commutative parce que les couples $(+1, +3)$ et $(+3, +1)$ n'ont pas la même image dans $\mathbb{Z}$.

2. Lorsqu'une loi $\star$ dans un ensemble A n'est pas commutative, il peut cependant exister des couples (a, b) pour lesquels on a : $a \star b = b \star a$.

On dit alors que a **et** b **sont des éléments commutables pour la loi** $\star$.

Par exemple, la soustraction dans $\mathbb{Z}$ n'est pas une opération commutative, mais deux éléments égaux de $\mathbb{Z}$ sont commutables pour cette loi.

Associativité.

8 **DÉFINITION : On dit qu'une loi de composition interne dans un ensemble** A, **notée** $\star$, **est associative si et seulement si, pour tout triplet** (a, b, c) **d'éléments de l'ensemble** A, **on a l'égalité :** $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

Si la loi $\star$ est associative, nous notons : $(a \star b) \star c = a \star (b \star c) = a \star b \star c$.

Exemples : 1. L'addition dans l'ensemble $\mathbb{R}$ est une loi associative ; nous avons en effet : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad (a + b) + c = a + (b + c)$.

2. L'addition des vecteurs dans un plan vectoriel $\vec{P}$ est une loi associative ; nous avons en effet : $\forall (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) \in \vec{P} \times \vec{P} \times \vec{P}, \quad (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$.

9 **Remarques :** 1. Pour établir qu'une loi de composition interne n'est pas associative, il suffit de montrer l'existence d'au moins un triplet (a, b, c) pour lequel $(a \star b) \star c$ n'est pas égal à $a \star (b \star c)$:

$$\left(\begin{array}{l}\text{La loi } \star \text{ dans A n'est} \\ \text{pas associative}\end{array}\right) \Longleftrightarrow (\exists (a, b, c) \in A^3, \quad (a \star b) \star c \neq a \star (b \star c)).$$

Par exemple, la soustraction dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas une opération associative ; en effet, si c est différent de zéro, les entiers relatifs : $(a - b) - c$ et $a - (b - c)$ ne sont pas égaux.

2. Si la loi $\star$ est associative, le composé de plusieurs éléments peut être obtenu en composant entre eux deux ou plusieurs éléments à condition de respecter l'ordre dans lequel ils se présentent. Par exemple, nous avons les égalités :

$([(a \star b) \star c] \star d) \star e = (a \star b) \star (c \star d) \star e = (a \star b \star c) \star (d \star e) = a \star b \star c \star d \star e$.

Distributivité d'une loi sur une autre loi.

10 **DÉFINITION : Soient un ensemble** A **et deux lois de composition interne** $\star$ **et** $\perp$ **partout définies sur** A. **On dit que la loi** $\perp$ **est distributive sur la loi** $\star$ **si et seulement si, pour tout triplet** $(a, b, c,)$ **de l'ensemble** A^3, **on a les égalités :**

$a \perp (b \star c) = (a \perp b) \star (a \perp c)$ et $(b \star c) \perp a = (b \perp a) \star (c \perp a)$.

Exemple : Dans l'ensemble $\mathbb{N}$, la multiplication est distributive sur l'addition; pour tout triplet (a, b, c) d'entiers naturels, nous avons les égalités :

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ et :
$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$.

11 Remarque : Si la loi $\perp$ est commutative, pour établir qu'elle est distributive sur la loi $\star$, il suffit de montrer que l'une ou l'autre des égalités suivantes est vérifiée :
$a \perp (b \star c) = (a \perp b) \star (a \perp c)$ ou $(b \star c) \perp a = (b \perp a) \star (c \perp a)$.

Élément neutre.

12 **DÉFINITION : On dit qu'un élément** e **de l'ensemble** A **est un élément neutre pour la loi de composition** $\star$ **dans** A **si et seulement si, pour tout élément** a **de** A, **on a les égalités :** $a \star e = a$ et $e \star a = a$.

Exemple : Pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$, tout entier relatif a vérifie les égalités : $a \times (+1) = a$ et $(+1) \times a = a$. L'entier relatif $+1$ est un élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

13 **THÉORÈME : Si une loi** $\star$ **dans un ensemble** A **admet un élément neutre** e, **cet élément est unique.**

Soit, en effet, e un élément neutre pour la loi $\star$ dans A; pour tout élément a de A, nous avons les égalités : $a \star e = a$ et $e \star a = a$. (1)

Si e' désigne aussi un élément neutre pour la loi $\star$ dans A, nous avons les égalités : $a \star e' = a$ et $e' \star a = a$. (2)

Écrivons les égalités (1) pour : $a = e'$; nous avons alors : (3)
$e' \star e = e'$ et $e \star e' = e'$.

Écrivons les égalités (2) pour : $a = e$; nous avons alors : (4)
$e \star e' = e$ et $e' \star e = e$.

Des égalités (3) et (4) nous déduisons l'égalité : $e = e'$.

14 **Remarque** : Si la loi $\star$ dans A est commutative, pour établir qu'un élément e de A est élément neutre, il suffit de montrer que, pour tout élément a de A, on a l'une ou l'autre des égalités : $a \star e = a$ ou $e \star a = a$.

Si la loi $\star$ n'est pas commutative, pour établir qu'un élément e de A est élément neutre, il faut montrer que, pour tout élément a de A, on a les deux égalités : $a \star e = a$ et $e \star a = a$.

Par exemple, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, pour tout entier relatif a, on a l'égalité : $a - 0 = a$; mais la soustraction dans $\mathbb{Z}$ n'est pas une loi commutative ; si a n'est pas nul, on a : $0 - a \neq a$.
0 n'est pas un élément neutre pour la soustraction dans $\mathbb{Z}$.

Symétrique d'un élément.

15 **DÉFINITION : Si une loi $\star$ dans un ensemble A admet un élément neutre e, on dit qu'un élément a de A admet un symétrique pour la loi $\star$ si et seulement s'il existe un élément a_1 de A qui vérifie les égalités : $a \star a_1 = e$ et $a_1 \star a = e$.**

Exemples : 1. L'entier relatif $+ 1$ est un élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$. Nous avons : $(+ 1) \times (+ 1) = + 1$; l'entier relatif $+ 1$ est un symétrique de $+ 1$ pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$. Nous avons aussi : $(- 1) \times (- 1) = + 1$; l'entier relatif $- 1$ est un symétrique de $- 1$ pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

2. Il n'existe pas d'entier relatif qui vérifie les égalités $(+ 2)\, a_1 = 1$ et $a_1 (+ 2) = + 1$; l'entier relatif $+ 2$ n'a pas de symétrique pour la multiplication dans $\mathbb{Z}$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

16 **THÉORÈME : Si une loi $\star$ dans un ensemble A est associative, et si un élément a de A admet pour cette loi un symétrique a_1, ce symétrique est unique.**

Soit, en effet, a_1 un symétrique de a pour la loi $\star$ dans A ; nous avons les égalités : $a \star a_1 = e$ et $a_1 \star a = e$.
Si a_2 désigne aussi un symétrique de a pour la loi $\star$ dans A, nous avons : $a \star a_2 = e$ et $a_2 \star a = e$.

Nous avons alors les égalités : $a_2 = e \star a_2 = (a_1 \star a) \star a_2$. (1)
La loi $\star$ est associative ; nous avons donc : $(a_1 \star a) \star a_2 = a_1 \star (a \star a_2)$. (2)
Nous avons alors : $a_1 \star (a \star a_2) = a_1 \star e = a_1$. (3)
Des égalités (1), (2), (3) nous déduisons : $a_2 = a_1$.

17 Remarques : 1. L'élément neutre e de A est un symétrique de e pour la loi $\star$.

2. Si la loi $\star$ dans A est commutative, pour montrer qu'un élément a de A admet pour symétrique l'élément a_1 de A, il suffit de montrer que l'une ou l'autre des égalités suivantes est vérifiée : $a_1 \star a = e$ ou $a \star a_1 = e$.

3. Les égalités : $a \star a_1 = e$ et $a_1 \star a = e$ expriment que, si a admet a_1 pour symétrique, l'élément a_1 admet a pour symétrique.
Nous disons que a_1 et a sont symétriques pour la loi $\star$ dans A.

4. Deux éléments symétriques pour la loi $\star$ dans A sont toujours commutables pour cette loi.

Élément régulier.

18 DÉFINITION : On dit qu'un élément a de A est régulier pour la loi $\star$ dans A si et seulement si, pour tout couple (b, c) de l'ensemble A^2, les égalités : $a \star b = a \star c$ et $b \star a = c \star a$ impliquent l'égalité : $b = c$.

Exemples: 1. Quels que soient les entiers naturels a, b, c, les égalités : $a + b = a + c$ et $b + a = c + a$ impliquent l'égalité : $b = c$.
Tout élément a de $\mathbb{N}$ est donc régulier pour l'addition dans $\mathbb{N}$.

2. Pour la multiplication dans $\mathbb{N}$, l'égalité : $0 \times b = 0 \times c$ n'implique pas l'égalité : $b = c$.
L'élément 0 n'est pas régulier pour la multiplication dans $\mathbb{N}$.

3. Quels que soient les entiers naturels b et c et l'entier non nul a, les égalités : $a \times b = a \times c$ et $b \times a = c \times a$ impliquent l'égalité : $b = c$.
Tout élément non nul de $\mathbb{N}$ est donc régulier pour la multiplication dans $\mathbb{N}$.

Partie stable.

19 DÉFINITION : On dit qu'une partie B d'un ensemble A est stable pour une loi de composition interne $\star$ partout définie dans A si et seulement si, pour tout couple d'éléments de A, on a l'implication :
$(x \in B \text{ et } y \in B) \Longrightarrow (x \star y \in B)$.

Exemples : 1. Considérons l'addition dans l'ensemble $\mathbb{R}$ et le sous-ensemble $\mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}$. Pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls nous avons :
$(x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } y \in \mathbb{R}_+) \Longrightarrow (x + y \in \mathbb{R}_+)$.
$\mathbb{R}_+$ est donc une partie stable pour l'addition dans $\mathbb{R}$.
Par contre, $\mathbb{R}_+$ n'est pas une partie stable pour la soustraction dans $\mathbb{R}$. En effet, 3 et 5 sont des éléments de $\mathbb{R}_+$, mais la différence : $(3) - (5) = -2$, n'est pas un élément de $\mathbb{R}_+$.

2. L'ensemble $\mathbb{R}_+$ est une partie stable pour la multiplication dans $\mathbb{R}$; l'ensemble $\mathbb{R}_-$ n'est pas une partie stable pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.
3. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ sont des parties stables de $\mathbb{R}$ pour l'addition et pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Loi induite.

20 Si B est une partie stable pour une loi de composition interne $\star$ partout définie dans A, la restriction à $B \times B$ de la loi $\star$ est appelée **loi induite sur B** par la loi $\star$.
La loi induite sur B est donc définie par : $\forall x \in B, \quad \forall y \in B, \quad (x, y) \rightsquigarrow x \star y$.
En général, nous utiliserons la même notation pour désigner la loi définie sur A et la loi induite sur B.

Exemples : 1. La loi induite sur $\mathbb{Z}$ par l'addition dans $\mathbb{R}$ est l'addition dans $\mathbb{Z}$. Ces deux lois sont notées $+$.
2. La loi induite sur $\mathbb{Q}$ par la soustraction dans $\mathbb{R}$ est la soustraction dans $\mathbb{Q}$. Ces deux lois sont notées $-$.

21 **Remarques :** 1. La loi induite sur une partie stable B par une loi $\star$ partout définie dans A est partout définie dans B.
2. Si la loi $\star$ dans A est associative, la loi induite est associative.
3. Si la loi $\star$ dans A est commutative, la loi induite est commutative.

Compatibilité d'une loi interne avec une relation d'équivalence.

22 Soient A un ensemble, $\star$ une loi de composition interne partout définie sur A et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans A.
Si nous avons $x \mathcal{R} y$, nous notons : $x \equiv y$; et nous désignons par $\bar{a}$ la classe d'équivalence d'un élément a de A.

DÉFINITION : On dit que la loi $\star$ dans A est compatible avec la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans A si et seulement si :

$\forall x \in A, \quad \forall x' \in A, \quad \forall y \in A, \quad \forall y' \in A, \quad (x' \equiv x \text{ et } y' \equiv y) \Longrightarrow (x' \star y' \equiv x \star y)$.

La loi $\star$ est donc compatible avec la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ si et seulement si la classe $\overline{x \star y}$ du composé $x \star y$ est indépendante des représentants x et y choisis respectivement dans les classes $\bar{x}$ et $\bar{y}$.
Lorsqu'une loi $\star$ est compatible avec une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, on peut définir une loi interne dans l'ensemble quotient $A/\mathcal{R}$ par :
$\forall \bar{x} \in A/\mathcal{R}, \quad \forall \bar{y} \in A/\mathcal{R}, \quad (\bar{x}, \bar{y}) \rightsquigarrow \overline{x \star y}$.

La loi interne ainsi définie est appelée **loi quotient** de la loi $\star$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.
En général, nous utiliserons la même notation pour désigner la loi définie sur A et la loi quotient définie sur $A/\mathcal{R}$.

Exemple : Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}$ et la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par : $(x \mathcal{R} y) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x - y = 3k)$.
Nous avons vu que l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$, noté $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, est l'ensemble $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.
Montrons que l'addition dans $\mathbb{Z}$ est compatible avec la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.
Soient x, x', y, y' quatre éléments de $\mathbb{Z}$,
pour lesquels on a : $x \equiv x'$ et $y \equiv y'$.
Il existe donc deux entiers relatifs k et h
tels que : $x - x' = 3k$ et $y - y' = 3h$.
Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}(x + y) - (x' + y') &= (x - x') + (y - y') \\ &= 3k + 3h \\ &= 3(k + h).\end{aligned}$$

Nous avons donc : $x + y \equiv x' + y'$.
L'addition dans $\mathbb{Z}$ est donc compatible avec $\mathcal{R}$. Nous pouvons alors définir sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ la loi quotient de l'addition dans $\mathbb{Z}$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.
Cette loi quotient est appelée addition dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et elle est notée $+$.
La table d'addition dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est donnée ci-contre.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Propriétés d'une loi quotient

23 Si la loi $\star$ dans A est commutative, la loi quotient dans $A/\mathcal{R}$ est commutative. En effet, nous avons :
$\bar{x} \star \bar{y} = \overline{x \star y} = \overline{y \star x} = \bar{y} \star \bar{x}$.
Si la loi $\star$ dans A est associative, la loi quotient dans $A/\mathcal{R}$ est associative. En effet, nous avons :
$(\bar{x} \star \bar{y}) \star \bar{z} = (\overline{x \star y}) \star \bar{z} = \overline{(x \star y) \star z} = \overline{x \star (y \star z)} = \bar{x} \star (\overline{y \star z}) = \bar{x} \star (\bar{y} \star \bar{z})$.
Si la loi $\star$ dans A admet un élément neutre e, la loi quotient dans $A/\mathcal{R}$ admet $\bar{e}$ pour élément neutre.
En effet, nous avons : $\bar{x} \star \bar{e} = \overline{x \star e} = \bar{x}$ et $\bar{e} \star \bar{x} = \overline{e \star x} = \bar{x}$.
Si un élément a de A admet un symétrique a' pour la loi $\star$ dans A, $\bar{a}$ admet $\bar{a'}$ pour symétrique pour la loi quotient dans $A/\mathcal{R}$. En effet, nous avons :
$\bar{a} \star \bar{a'} = \overline{a \star a'} = \bar{e}$ et $\bar{a'} \star \bar{a} = \overline{a' \star a} = \bar{e}$.

24 **Remarque :** En général, la loi quotient dans $A/\mathcal{R}$ possède aussi des propriétés que ne possède pas la loi $\star$ dans A.

Groupes.

Notion de groupe.

25 DÉFINITION : Soient A un ensemble et $\star$ une loi interne partout définie dans A. On dit que A est un groupe pour la loi $\star$, ou encore que $(A, \star)$ est un groupe, si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. La loi $\star$ est associative ;

2. Il existe un élément neutre e pour la loi $\star$;

3. Tout élément a de A admet un symétrique a' pour la loi $\star$.

Un ensemble A est donc un groupe pour une loi interne $\star$ partout définie dans A si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\forall (a, b, c) \in A^3, \quad (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$;
2. $\exists e \in A, \quad \forall a \in A, \quad a \star e = e \star a = a$;
3. $\forall a \in A, \quad \exists a' \in A, \quad a \star a' = a' \star a = e$.

Si, de plus, la loi $\star$ est **commutative**, le groupe $(A, \star)$ est dit **commutatif** ou **abélien**.

Exemples : 1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif pour l'addition dans $\mathbb{Z}$.
2. Un plan vectoriel $\vec{P}$ est un groupe pour l'addition des vecteurs. Il est commutatif.
3. L'ensemble $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ est un groupe pour la multiplication des nombres rationnels. Il est commutatif.
4. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de l'addition dans $\mathbb{R}$ est un groupe ; il est commutatif. $(\mathbb{R}, +)$ est appelé **groupe additif des réels**.
5. L'ensemble $\mathbb{R}^*$ muni de la multiplication dans $\mathbb{R}$ est un groupe ; il est commutatif. $(\mathbb{R}^*, .)$ est appelé **groupe multiplicatif des réels non nuls**.
6. L'ensemble $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ muni de la loi quotient définie au n° 22, p. 39 est un groupe ; il est commutatif.
7. Nous étudierons au n° 24, p. 57, un exemple de groupe non commutatif.

Propriétés d'un groupe.

26 Il résulte des théorèmes n° 13, p. 35 et n° 16, p. 36 que dans un groupe $(A, \star)$ il existe un élément neutre unique et que chaque élément a de A admet un symétrique a' unique pour la loi $\star$.

27 THÉORÈME : Dans un groupe, tout élément est régulier.

Considérons un groupe $(A, \star)$. Soient a, b, c trois éléments de A, e l'élément neutre et a' le symétrique de a.

Nous avons l'implication : $(a \star b = a \star c) \Longrightarrow (a' \star (a \star b) = a' \star (a \star c))$.
La loi $\star$ dans A est associative ; nous avons donc :
$a' \star (a \star b) = (a' \star a) \star b$ et $a' \star (a \star c) = (a' \star a) \star c$.
Le composé $a' \star a$ est l'élément neutre e ; nous avons donc les égalités :
$(a' \star a) \star b = e \star b = b$ et $(a' \star a) \star c = e \star c = c$.
L'égalité : $a \star b = a \star c$ implique donc l'égalité : $b = c$.
On démontre, d'une manière analogue, l'implication : $(b \star a = c \star a) \Longrightarrow (b = c)$.

Résolution dans un groupe des équations : $a \star x = b$ et $x \star a = b$.

28 Soient a et b deux éléments d'un groupe $(A, \star)$. Nous nous proposons de résoudre dans A l'équation : $a \star x = b$.
Supposons que cette équation admette une solution x_0 dans A. Désignons par e l'élément neutre et par a' le symétrique de a.
Nous avons successivement :
$$a' \star (a \star x_0) = a' \star b;$$
$$(a' \star a) \star x_0 = a' \star b;$$
$$e \star x_0 = a' \star b;$$
$$x_0 = a' \star b.$$
Si l'équation : $a \star x = b$ admet une solution, nécessairement cette solution est : $a' \star b$.
Réciproquement, nous avons : $a \star (a' \star b) = (a \star a') \star b = e \star b = b$.
L'élément $a' \star b$ est donc l'**unique solution** de l'équation : $a \star x = b$.

29 On démontre, d'une manière analogue, que l'élément $b \star a'$ est l'**unique solution** de l'équation : $x \star a = b$.

30 Remarque : Si le groupe $(A, \star)$ est commutatif, la solution de l'équation : $a \star x = b$ est aussi la solution de l'équation : $x \star a = b$.
Nous avons en effet l'égalité : $a' \star b = b \star a'$.

31 Utilisons le résultat précédent pour déterminer le symétrique du composé $a \star b$ de deux éléments a et b d'un groupe $(A, \star)$.
Désignons par e l'élément neutre, par a' le symétrique de a et par b' le symétrique de b.
Le symétrique de $a \star b$ existe et est unique ; notons-le x.
Nous avons : $x \star (a \star b) = e$, c'est-à-dire : $(x \star a) \star b = e$.
Nous en déduisons successivement :
$$x \star a = e \star b';$$
$$x \star a = b';$$
$$x = b' \star a'.$$

THÉORÈME : Dans un groupe $(A, \star)$, le symétrique du composé $a \star b$ de deux éléments de A est le composé $b' \star a'$ du symétrique b' de b par le symétrique a' de a.

Notation additive pour les groupes commutatifs.

32 Lorsqu'un ensemble A muni d'une loi interne partout définie est un groupe commutatif, cette loi interne est généralement notée $+$. Cette loi interne est alors appelée **addition dans** A.
Le composé de deux éléments x et y de E, noté $x + y$, est appelé **somme** de x et de y.
L'élément neutre du groupe est noté : 0_A.
Le symétrique d'un élément x de E est noté $-x$ et est appelé **opposé de** x.
Avec ces notations, les propriétés de définition d'un groupe commutatif $(A, +)$ s'écrivent :
1. $\forall x \in A, \quad \forall y \in A, \quad \forall z \in A, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$.
2. Il existe un élément neutre 0_A : $\forall x \in A, \quad x + 0_A = 0_A + x = x$.
3. $\forall x \in A, \quad \exists (-x) \in A, \quad x + (-x) = (-x) + x = 0_A$.
4. $\forall x \in A, \quad \forall y \in A, \quad x + y = y + x$.

33 Dans le groupe commutatif $(A, +)$, nous savons que l'équation : $a + x = b$ a une solution unique dans A : $(-a) + b$, et que l'équation : $x + a = b$ a une solution unique dans A : $b + (-a)$.
De plus, ces deux solutions sont égales : $(-a) + b = b + (-a)$.
Cette solution unique, commune aux deux équations : $a + x = b$ et $x + a = b$, est appelée **différence** de b et de a ; elle est notée : $b - a$.
Nous avons : $b - a = (-a) + b = b + (-a)$.
La loi interne dans A qui, à tout couple (b, a) de $A \times A$, associe l'élément $b - a$ de A est appelée **soustraction dans le groupe commutatif** $(A, +)$.

Sous-groupe.

34 **DÉFINITION : Soit** $(A, \star)$ **un groupe. On appelle sous-groupe de** $(A, \star)$ **toute partie** B **de** A **qui est stable pour la loi** $\star$ **et qui est elle-même un groupe pour la loi induite sur** B **par la loi** $\star$.

Il résulte de la définition que, si B est un sous-groupe de $(A, \star)$, les trois conditions suivantes sont nécessairement vérifiées :

1. **B est stable pour la loi** $\star$:
$\forall x \in A, \quad \forall y \in A, \quad (x \in B \text{ et } y \in B) \Longrightarrow (x \star y \in B)$.

2. **L'élément neutre** e **de** $(A, \star)$ **appartient à B :**
Par définition, $(B, \star)$ est un groupe ; il possède donc un élément neutre e'.
Nous avons, en particulier : $e' \star e' = e'$.
D'autre part, si e est l'élément neutre de $(A, \star)$, nous avons : $e \star e' = e' \star e = e'$.
Nous en déduisons l'égalité : $e' \star e' = e \star e'$.
Dans le groupe $(A, \star)$, tout élément est régulier ; il en résulte l'égalité : $e' = e$.
Nous avons : $e \in B$; un sous-groupe est donc une partie non vide de A.

3. **Le symétrique a' dans A d'un élément a de B appartient à B.**
Par définition, $(B, \star)$ est un groupe ; tout élément a de B possède donc un symétrique a'' dans B.
Nous avons les égalités : $a \star a'' = a'' \star a = e' = e$.
L'élément a'' de B est donc égal au symétrique a' de a dans A : $a'' = a'$.
Il en résulte que a' appartient à B.

35 Réciproquement, nous allons montrer que toute partie B d'un groupe $(A, \star)$ qui vérifie les trois conditions :
1. $\forall x \in A, \quad \forall y \in A, \quad (x \in B \text{ et } y \in B) \Longrightarrow (x \star y \in B)$,
2. $e \in B$,
3. si x' désigne le symétrique d'un élément x de A :
$\forall x \in A, \quad (x \in B) \Longrightarrow (x' \in B)$,
est un sous-groupe de $(A, \star)$.

La première condition exprime que B est stable pour la loi $\star$.
Vérifions alors que B est un groupe pour la loi induite.
La loi $\star$ est associative, la loi induite est donc associative.
L'élément neutre e de A appartient à B ; pour tout élément a de B, nous avons donc : $a \star e = e \star a = a$, l'élément neutre de la loi induite est donc e.
Le symétrique x' de tout élément x de B appartient à B ; nous avons donc :
$\forall x \in B, \quad \exists x' \in B, \quad x \star x' = x' \star x = e$.
Il en résulte que B est un groupe pour la loi induite.

36 En résumé, nous avons démontré le théorème :

THÉORÈME : Soient $(A, \star)$ un groupe, e l'élément neutre de $(A, \star)$ et x' le symétrique d'un élément quelconque x de A. Une partie B de A est un sous-groupe de $(A, \star)$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\forall x \in A, \quad \forall y \in A, \quad (x \in B \text{ et } y \in B) \Longrightarrow (x \star y \in B)$;

2. $e \in B$;

3. $\forall x \in A, \quad (x \in B) \Longrightarrow (x' \in B)$.

Exemples de sous-groupes.

37 Dans tout groupe $(A, \star)$, $\{e\}$ et A sont des sous-groupes de $(A, \star)$.

38 Considérons le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ constitué par les entiers relatifs pairs est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$; on le note : $2\mathbb{Z}$.
En effet, nous avons :
1. $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \forall y \in \mathbb{Z}, \quad (x \in 2\mathbb{Z} \text{ et } y \in 2\mathbb{Z}) \Longrightarrow (x + y \in 2\mathbb{Z})$;
2. $0 \in 2\mathbb{Z}$;
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, \quad (x \in 2\mathbb{Z}) \Longrightarrow ((-x) \in 2\mathbb{Z})$.

39 Un plan vectoriel $\vec{P}$ est un groupe commutatif pour l'addition des vecteurs. Toute droite vectorielle $\vec{D}$ du plan $\vec{P}$ est un sous-groupe de $\vec{P}$.

40 Soit a un réel non nul. Désignons par P l'ensemble des puissances entières de a :
$P = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{Z}, \quad a^n = x\}$.
Montrons que P est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, .)$ des réels non nuls.
Si : $x = a^n$ et $y = a^m$ sont deux éléments quelconques de P, nous avons : $xy = a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
n et m sont des entiers relatifs ; $n + m$ est donc un entier relatif ; il en résulte l'implication : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall y \in \mathbb{R}^*, \quad (x \in P \text{ et } y \in P) \Longrightarrow (xy \in P)$.

P est donc une partie stable de $(\mathbb{R}^*, .)$.
L'élément neutre de $(\mathbb{R}^*, .)$ est le réel 1. Nous avons l'égalité : $a^0 = 1$; il en résulte que 1 appartient à P.
Enfin, si : $x = a^n$ est un élément de P, son symétrique dans le groupe $(\mathbb{R}^*, .)$ est le réel $\frac{1}{x}$, inverse de x.

Nous avons : $\frac{1}{x} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$. Il en résulte que $\frac{1}{x}$ appartient à P.
L'ensemble P des puissances entières d'un réel a non nul est donc un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, .)$.

41 **Remarques :** 1. Si le groupe $(A, \star)$ est commutatif, tout sous-groupe de $(A, \star)$ est un groupe commutatif.
2. Si le groupe $(A, \star)$ n'est pas commutatif, il existe des sous-groupes de A qui sont commutatifs et des sous-groupes de A qui ne sont pas commutatifs. Par exemple : $\{e\}$ est un sous-groupe commutatif et A est un sous-groupe non commutatif.

Lois de composition externe.

Loi de composition externe dans un ensemble.

42 **DÉFINITION : Soient Ω et A deux ensembles. On appelle loi de composition externe dans A, à opérateurs dans Ω, toute application f du produit cartésien $\Omega \times A$ dans A.**

Si f est une loi de composition externe dans A dont l'ensemble des opérateurs est Ω, nous avons : $f : \Omega \times A \longrightarrow A, \quad \forall \alpha \in \Omega, \quad \forall a \in A, \quad (\alpha, a) \rightsquigarrow f(\alpha, a)$.
L'élément $f(\alpha, a)$ de A est appelé le **composé** de α et de a par f.
En général, ce composé est noté $\alpha . a$, ou même αa.

Exemples : 1. Soient $\Omega = \mathbb{R}$ et $A = \vec{P}$. La multiplication des vecteurs du plan vectoriel $\vec{P}$ par les réels est une loi de composition externe dans $\vec{P}$ à opérateurs dans $\mathbb{R}$; nous avons : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{V} \in \vec{P}, \quad (\alpha, \vec{V}) \rightsquigarrow \alpha \vec{V}$.

2. Considérons un ensemble A muni d'une loi interne partout définie, notée $\star$. Les deux applications de $A \times A$ dans A :

$\forall \alpha \in A, \quad \forall a \in A, \quad (\alpha, a) \rightsquigarrow \alpha \star a$;

$\forall \alpha \in A, \quad \forall a \in A, \quad (\alpha, a) \rightsquigarrow a \star \alpha$.

sont deux lois de composition externe dans A à opérateurs dans A.

Une loi de composition interne dans A est donc un cas particulier de loi de composition externe dans A.

Propriétés des lois de composition externe.

43 Soit f une loi externe dans A, c'est-à-dire une application de $\Omega \times A$ dans A. Lorsque chacun des ensembles Ω et A est muni d'une loi interne, la loi externe f peut présenter, vis-à-vis de ces lois internes, certaines propriétés. Nous introduirons au chapitre 13 les propriétés les plus importantes lors de l'étude des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Partie stable.

44 DÉFINITION : Une partie B d'un ensemble A est stable pour une loi externe dans A, notée ., à opérateurs dans Ω, si et seulement si on a l'implication : $\forall \alpha \in \Omega, \quad \forall x \in A, \quad (x \in B) \Longrightarrow (\alpha . x \in B)$.

Exemple : Considérons la loi externe dans $\mathbb{R}^*$, à opérateurs dans $\mathbb{Z}$, définie par : $\forall \alpha \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad (\alpha, x) \rightsquigarrow x^\alpha$.

Le sous-ensemble $\mathbb{Q}^*$ de $\mathbb{R}^*$ est une partie stable pour cette loi externe ; en effet nous avons : $\forall \alpha \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad (x \in \mathbb{Q}^*) \Longrightarrow (x^\alpha \in \mathbb{Q}^*)$.

EXERCICES

◆ Dans chacun des exercices suivants (n°s 1 à 7), on détermine une loi de composition interne dans un ensemble A, notée $\star$, en définissant le composé $a \star b$ de deux éléments quelconques a et b de A. (On vérifiera que $\star$ est une loi de composition interne).

1° La loi $\star$ est-elle partout définie ?

2° La loi $\star$ est-elle commutative ? Si elle ne l'est pas, existe-t-il des éléments commutables ?

3° La loi $\star$ est-elle associative ?

4° La loi $\star$ admet-elle un élément neutre ?

5° Tout élément admet-il un symétrique pour la loi $\star$? Dans le cas où la réponse est négative, existe-t-il des éléments qui admettent un symétrique ?

6° Existe-t-il des éléments réguliers pour la loi $\star$?

1 $A = \mathbb{Z}$; $a \star b = (a - b)^2$.

2 $A = \mathbb{N}$; $\begin{cases} \text{si } a \leqslant b, & a \star b = a ; \\ \text{si } a \geqslant b, & a \star b = b. \end{cases}$

3 $A = \mathbb{N}$; $\begin{cases} \text{si } a \leqslant b, & a \star b = b ; \\ \text{si } a \geqslant b, & a \star b = a. \end{cases}$

4 $A = \mathbb{Z}$; $a \star b = a + b + ab$.

5 $A = \mathbb{Z}$; $a \star b = a + b - ab$.

6 $A = \mathbb{Q}^*$; $a \star b = \dfrac{a}{b}$.

7 $A = \mathbb{N}^*$; $a \star b = a^b$.

8 On considère l'ensemble : $E = \{0, 1, 2, 3\}$ muni de la loi de composition interne, notée $\star$, définie par :

$\begin{cases} \text{si } a + b \leqslant 3, & a \star b = a + b ; \\ \text{si } a + b > 3, & a \star b = b - (a + b). \end{cases}$

1° La loi $\star$ est-elle partout définie ?

2° La loi $\star$ est-elle commutative ?

3° La loi $\star$ est-elle associative ?

4° La loi $\star$ admet-elle un élément neutre ?

5° Trouver tous les éléments de E qui admettent un symétrique pour la loi $\star$.

6° Existe-t-il des éléments réguliers pour la loi $\star$?

9 On considère un ensemble E muni d'une loi $\perp$ associative et qui possède un élément neutre. Démontrer que tout élément de E qui possède un symétrique pour la loi $\perp$ est régulier pour cette loi.

10 On considère l'ensemble : $A = \{a, b\}$.

1° Donner la table de toutes les lois de composition interne partout définies que l'on peut construire dans l'ensemble A.

2° Parmi les lois précédentes, indiquer celles qui sont commutatives, celles qui sont associatives, celles qui admettent un élément neutre, celles qui confèrent à l'ensemble A une structure de groupe.

11 Soient $(A, \star)$ un groupe, et e l'élément neutre de ce groupe.

1° Démontrer que, pour tout élément a du groupe, les égalités : $a \star x = a$ et $x \star a = a$ sont vérifiées si et seulement si x est égal à e.

2° Résoudre dans A l'équation : $x \star x = x$.

12 On considère un groupe commutatif (A, $\star$) ; soient e l'élément neutre de ce groupe et α un élément de A. On définit dans A la loi de composition interne $\perp$ par : $a \perp b = a \star b \star \alpha$.
Démontrer que la loi $\perp$ confère à l'ensemble A une structure de groupe.

13 On considère un ensemble A à deux éléments a et b. Déterminer une loi interne $\star$ dans A pour laquelle (A, $\star$) est un groupe. Construire la table de cette loi.

14 Même exercice que le n° 13 pour un ensemble A à trois éléments a, b, c.

15 On considère l'ensemble : $E = \mathbb{Q} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ muni de la loi $\star$ définie par : $a \star b = a + b + 2ab$.
Démontrer que (E, $\star$) est un groupe commutatif.

16 On considère l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de la loi $\star$ définie par :
$a \star b = a + b + ab$.
Démontrer que ($\mathbb{Q} - \{-1\}$, $\star$) est un groupe commutatif.

17 On considère un groupe (A, $\star$). On désigne par x_1 le symétrique, dans A, d'un élément x quelconque de A.
Démontrer qu'une partie B non vide de A est un sous-groupe de (A, $\star$) si et seulement si on a :
$\forall a \in A, \quad \forall b \in A, \quad (a \in B \text{ et } b \in B) \Longrightarrow (a \star b_1 \in B)$.

18 On considère un groupe (A, $\star$) et un élément a de ce groupe. On désigne par B l'ensemble des éléments de A qui commutent avec a.
1° Dépontrer que, si le groupe (A, $\star$) n'est pas commutatif, l'ensemble B est une partie non vide de A.
2° Démontrer que B est un sous-groupe de (A, $\star$).

19 On considère un groupe (A, $\star$). On désigne par C l'ensemble des éléments de A qui commutent avec tout élément de A.
1° Démontrer que, si le groupe (A, $\star$) n'est pas commutatif, l'ensemble C est une partie propre de A qui est stable pour la loi $\star$.
2° Démontrer que l'ensemble C est un sous-groupe commutatif de (A, $\star$).

20 On considère l'ensemble A des fonctions affines sur $\mathbb{R}$:
$(f \in A) \Longleftrightarrow (\exists a \in \mathbb{R}, \ \exists b \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = ax + b)$.
On désigne par $\star$ la restriction à l'ensemble A $\times$ A de la loi de composition $\circ$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $f \star g = g \circ f$.
1° Démontrer que la loi $\star$ est une loi de composition interne partout définie.
2° La loi $\star$ est-elle commutative ?
3° Déterminer tous les éléments commutables de l'ensemble A.
4° La loi $\star$ admet-elle un élément neutre ?
5° Tout élément de A admet-il un symétrique pour la loi $\star$?
6° L'ensemble A muni de la loi $\star$ est-il un groupe ?

EXERCICES

21 Même exercice que le n° 20 pour l'ensemble A et la loi ⋆ suivants : $(f \in A) \iff \left(\exists\, a \in \mathbb{R}^*,\ \exists\, b \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax\right)$; $f \star g = g \circ f$.

22 Même exercice que le n° 20 pour l'ensemble A et la loi ⋆ suivants : $(f \in A) \iff \left(\exists\, a \in \mathbb{R}^*,\ \exists\, b \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b\right)$; $f \star g = g \circ f$.

23 Même exercice que le n° 20 pour l'ensemble A et la loi ⋆ suivants : $(f \in A) \iff \left(\exists\, a \in \mathbb{R},\ \exists\, b \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax\right)$; $f \star g = f + g$.

24 Démontrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, l'ensemble $n\mathbb{Z}$ défini par : $(x \in n\mathbb{Z}) \iff \left(\exists\, y \in \mathbb{Z},\ x = ny\right)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

25 Soit E un ensemble de quatre éléments a, b, c, d.
On considère l'ensemble A des applications P_1, P_2, P_3, P_4 de E dans E dont les graphes respectifs sont :
graphe de P_1 : $\big((a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\big)$;
graphe de P_2 : $\big((a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\big)$;
graphe de P_3 : $\big((a, c), (b, d), (c, a), (d, b)\big)$;
graphe de P_4 : $\big((a, d), (b, a), (c, b), (d, c)\big)$.
On désigne par ⋆ la restriction à l'ensemble $A \times A$ de la loi de composition ∘ des applications de E dans E. On a par exemple : $P_2 \star P_4 = P_2 \circ P_4$.
Démontrer que (A, ⋆) est un groupe.

26 On détermine une loi de composition interne dans $\mathbb{R}^2$, notée ⋆, en définissant ainsi le composé de deux éléments de $\mathbb{R}^2$:
$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$.
On considère l'ensemble des points d'un plan P rapporté à un repère dont les axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$ ont pour vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Soient M, M', N des points de P dont les coordonnées sont respectivement (x, y), (x', y'), (X, Y). On définit dans P une loi de composition interne notée ⊥ par : $(M \perp M' = N) \iff (X = xx' \text{ et } Y = xy' + y)$.
1° Démontrer que les lois ⋆ et ⊥ ne sont pas commutatives.
Démontrer qu'elles admettent respectivement pour élément neutre le couple (1, 0) et le point A de coordonnées (1, 0).
Déterminer l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble des points de P qui admettent un symétrique.
2° Démontrer que l'ensemble E des points d'abscisse différente de zéro forment un groupe pour la loi ⊥.
3° Soit M_0 un point de coordonnées (x_0, y_0). Déterminer l'ensemble E_0 des points M pour lesquels on a : $M_0 \perp M = M \perp M_0$.
Montrer que si M_0 est distinct de A, E_0 est la droite déterminée par les points A et M_0. Que peut-on dire si M_0 est confondu avec A ?
4° Préciser l'ensemble des points M qui sont leur propre symétrique.

27 Soient $(A, \star)$ un groupe commutatif et B un sous-groupe de A. Si x est un élément de A, on désigne par x_1 son symétrique dans A. On définit dans A une relation $\mathcal{R}$ par : $(a \mathcal{R} b) \iff (a \star b_1 \in B)$.

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2° Caractériser les éléments de la classe d'équivalence d'un élément a.

3° Montrer que $\mathcal{R}$ est compatible avec la loi $\star$.

4° Démontrer que la loi quotient munit $A/\mathcal{R}$ d'une structure de groupe commutatif.

28 Soient $(A, \star)$ un groupe et B un sous-groupe de A.
Si x est un élément de A, on désigne par x_1 son symétrique dans A.
On définit dans A, deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ par :
$(a \mathcal{R} b) \iff (a \star b_1 \in B)$;
$(a \mathcal{R}' b) \iff (b_1 \star a \in B)$.

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont des relations d'équivalence.

2° Caractériser les éléments des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ et modulo $\mathcal{R}'$ d'un élément a.

3° Démontrer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont compatibles avec la loi $\star$ si et seulement si B est un sous-groupe tel que :
$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a \star b \star a_1 \in B$.

4° Montrer alors que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont égales et que l'ensemble quotient $A/\mathcal{R}$ muni de la loi induite est un groupe.

29 Soit $(A, +)$ un groupe commutatif. Considérons la loi de composition externe, notée . , à opérateurs dans $\mathbb{Z}$, définie par les égalités suivantes :
$0 . a = 0_A$;
$1 . a = a$;
$(-1) . a = -a$;
si : $n \geqslant 2$, $n . a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ termes}}$;
si : $n \leqslant -2$, $n . a = -[(-n) . a]$.
Démontrer les propriétés suivantes :

1° $\forall a \in A, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad (n\,p) . a = n . (p . a)$

2° $\forall a \in A, \quad \forall b \in A, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad n . (a + b) = n . a + n . b$

3° $\forall a \in A, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad (n + p) . a = n . a + p . a$.

30 Soit $(\Omega, \star)$ un groupe et A un ensemble. Soit e l'élément neutre de Ω. On définit dans A une loi de composition externe, notée . , à opérateurs dans Ω. On suppose que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
$\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_2, \quad \forall a \in A, \quad (\omega_1 \star \omega_2) . a = \omega_1 . (\omega_2 . a)$
$\forall a \in A, \quad e . a = a$.

On définit une relation $\mathcal{R}$ dans A par :
$(a \mathcal{R} b) \iff (\exists \omega \in \Omega, \quad b = \omega . a)$.

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

EXERCICES

31 On considère l'ensemble A des nombres réels de la forme $m + n\sqrt{3}$ où m et n sont des entiers relatifs quelconques.

1° Démontrer que A est une partie stable de $\mathbb{R}$ pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

2° Démontrer que $(A, +)$ est un groupe commutatif.

3° Démontrer que la multiplication dans A est associative.

4° Démontrer que la multiplication dans A est distributive sur l'addition dans A.

On dit alors que A muni des lois $+$ et $\times$ est un anneau.

32 On considère l'ensemble $\mathbb{Z}$ et la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par : $(x \mathcal{R} y) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x - y = 4k)$.

1° Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2° Définir l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ par $\mathcal{R}$.

3° Démontrer que l'addition dans $\mathbb{Z}$ est compatible avec $\mathcal{R}$.

4° Démontrer que $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif.

5° Démontrer que la multiplication dans $\mathbb{Z}$ est compatible avec $\mathcal{R}$.

6° Démontrer que la loi quotient $\times$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est associative et distributive par rapport à la loi quotient $+$. On dit alors que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est un anneau.

7° Déterminer les éléments $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tels que : $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

33 On considère l'ensemble $\mathbb{Z}$ et la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par : $(x \mathcal{R} y) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x - y = 5k)$.

1° Traiter les six premières questions de l'exercice précédent.

2° Démontrer que l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ différent de l'élément neutre $\bar{0}$ de l'addition, muni de l'opération $\times$ est un groupe.

On dit alors que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un corps.

3° Démontrer l'équivalence logique :

$\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \ \forall \bar{b} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \ (\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}) \iff (\bar{a} = \bar{0} \text{ ou } \bar{b} = \bar{0})$.

4.
Propriétés des applications

Applications injectives.

Injection d'un ensemble dans un ensemble.

1 **DÉFINITION : On dit qu'une application f d'un ensemble** A **dans un ensemble** B **est injective si et seulement si :**

$\forall a_1 \in A, \quad \forall a_2 \in A, \quad (f(a_1) = f(a_2)) \Longrightarrow (a_1 = a_2).$

On dit aussi que f est une injection de A dans B.
L'implication qui définit une injection est logiquement équivalente à l'implication :
$\forall a_1 \in A, \quad \forall a_2 \in A, \quad (a_1 \neq a_2) \Longrightarrow (f(a_1) \neq f(a_2))$.
Une application f de A dans B est donc une injection si et seulement si, pour tout couple d'éléments distincts de A, les images dans B de ces éléments sont distinctes.

2 Il résulte de la définition qu'une application f de A dans B est une injection si et seulement si, pour tout élément b de B, l'équation : $f(x) = b$, a au plus une solution dans A.

3 Exemples : 1. Considérons l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad x \rightsquigarrow x^2$.
Nous savons que deux entiers naturels dont les carrés sont égaux sont nécessairement égaux ; l'application f est donc une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
L'application g : $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad x \rightsquigarrow x^2$ n'est pas une injection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$.
En effet pour tout élément x de $\mathbb{Z}$, nous avons : $g(x) = x^2$ et $g(-x) = x^2$.
2. L'application identique dans un ensemble A est une injection dans A ; en effet nous avons : $\forall a_1 \in A, \quad \forall a_2 \in A \quad (id_A(a_1) = id_A(a_2)) \Longrightarrow (a_1 = a_2)$.

Composition de deux injections.

4 **THÉORÈME : Soient A, B, C trois ensembles. Si f est une injection de A dans B et si g est une injection de B dans C, alors l'application composée $g \circ f$ est une injection de A dans C.**

Si x_1 et x_2 sont deux éléments de A, désignons par y_1 et y_2 leurs images respectives par f. Nous avons : $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Les images respectives de x_1 et x_2 par $g \circ f$ sont alors :
$(g \circ f)(x_1) = g[f(x_1)] = g(y_1)$, et : $(g \circ f)(x_2) = g[f(x_2)] = g(y_2)$.

L'application g est injective, nous avons donc l'implication :
$(g(y_1) = g(y_2)) \Longrightarrow (y_1 = y_2)$, c'est-à-dire :
$((g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)) \Longrightarrow (f(x_1) = f(x_2))$.

L'application f est injective, nous avons donc l'implication :
$(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)$.
Des deux dernières implications, nous déduisons :
$((g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)$.

L'application $g \circ f$ composée de l'injection f par l'injection g est donc une injection.

Applications surjectives.

Surjection d'un ensemble sur un ensemble.

5 **DÉFINITION : On dit qu'une application f d'un ensemble A dans un ensemble B est surjective si et seulement si tout élément b de B est l'image d'au moins un élément a de A.**

On dit aussi que f est une surjection de A sur B.

Une application f de A dans B est donc une surjection de A sur B si et seulement si elle vérifie la propriété : $\forall b \in B, \quad \exists a \in A, \quad f(a) = b$.

Il en résulte qu'une application f de A dans B est une surjection de A sur B si et seulement si, pour tout élément b de B, l'équation : $f(x) = b$, a au moins une solution dans A.

6 Exemples : 1. Considérons, dans un plan P, une direction de droites δ et une droite D qui n'appartient pas à cette direction. La projection p du plan P dans D suivant la direction δ est une surjection. En effet, pour tout point M de D nous avons : $p(M) = M$. Pour tout point M de D, l'équation $p(x) = M$ a donc au moins une solution dans P, la solution : $x = M$.

2. L'application identique dans un ensemble A est une surjection. En effet, pour tout élément x de A, nous avons : $id_A(x) = x$.

3. Considérons un ensemble A non vide et une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans A. L'application φ de A dans l'ensemble quotient $A/\mathcal{R}$ qui, à tout élément x de A, associe sa classe $\bar{x}$ est une surjection de A sur $A/\mathcal{R}$.

En effet, soit C une classe d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$. Nous savons que C est non vide. Il existe donc au moins un élément x de A tel que : $x \in C$.

De plus, nous savons que l'image $\varphi(x)$ de x par φ, c'est-à-dire la classe d'équivalence de l'élément x est C : $\varphi(x) = C$.

Cette surjection φ est appelée **surjection canonique** de A sur $A/\mathcal{R}$.

Image de l'ensemble de départ par une surjection.

7 **THÉORÈME : Une application f de A dans B est une surjection si et seulement si l'image de A par f est égale à B.**

Nous notons : (f de A dans B est surjective) $\Longleftrightarrow$ ($f(A) = B$).

Démontrons d'abord que, si f est une surjection de A sur B, l'image $f(A)$ est égale à B. Si b est un élément de B, il existe au moins un élément a de A tel que b soit égal à $f(a)$. Tout élément de B appartient donc à $f(A)$; nous avons donc l'inclusion : $B \subset f(A)$.

D'autre part, pour toute application f, nous avons : $f(A) \subset B$.

Il en résulte l'égalité : $f(A) = B$.

Démontrons alors que, si l'image $f(A)$ est égale à B, l'application f de A dans B est surjective.

Si B est égale à $f(A)$, pour tout élément b de B il existe au moins un élément a de A dont l'image par f est b. L'application f est donc surjective.

Composition de deux surjections.

8 **THÉORÈME : Soient A, B, C trois ensembles. Si f est une surjection de A sur B et si g est une surjection de B sur C, alors l'application composée $g \circ f$ est une surjection de A sur C.**

Pour montrer que $g \circ f$ est une surjection, nous allons montrer que, pour tout élément c de C, l'équation : $(g \circ f)(x) = c$, c'est-à-dire : $g[f(x)] = c$, a au moins une solution dans A.

L'application g est surjective ; pour tout élément c de C, l'équation : $g(y) = c$ a au moins une solution b dans B : $g(b) = c$.

L'application f est surjective ; l'équation : $f(x) = b$ a au moins une solution a dans A : $f(a) = b$.

Nous avons alors : $g[f(a)] = g(b) = c$, c'est-à-dire : $(g \circ f)(a) = c$.

Applications bijectives.

Bijection d'un ensemble sur un ensemble.

9 **DÉFINITION : On dit qu'une application f d'un ensemble A dans un ensemble B est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.**

On dit aussi que f est une bijection de A sur B.

Il résulte des propriétés des injections et des surjections, qu'une application f de A dans B est une bijection si et seulement si, pour tout élément b de B, il existe un élément a de A unique dont l'image par f est b : $f(a) = b$.
Une application f de A dans B est donc une bijection si et seulement si, pour tout élément b de B, l'équation : $f(x) = b$ a une solution et une seule dans A.

10 Exemples : 1. L'application $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto x - 1$ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}$. En effet, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, l'équation $x - 1 = n$ a une solution et une seule dans $\mathbb{N}^*$: $x = n + 1$.
2. L'application identique dans un ensemble A, id_A, est injective et surjective. C'est donc une bijection de A sur A.

Composition de deux bijections.

11 **THÉORÈME : Soient A, B, C trois ensembles. Si f est une bijection de A sur B et si g est une bijection de B sur C, alors l'application composée $g \circ f$ est une bijection de A sur C.**

Si f et g sont bijectives, f et g sont injectives et surjectives. Il en résulte que l'application composée $g \circ f$ est injective et surjective (n° 4, p. 52 et n° 8, p. 53) ; c'est donc une bijection de A sur C.

Bijection réciproque d'une bijection.

12 Soit f une bijection de A sur B. Considérons la relation $\mathcal{R}$ de B vers A définie par : $\forall b \in B, \quad \forall a \in A, \quad (b \mathcal{R} a) \Longleftrightarrow (b = f(a))$.
Le graphe G de cette relation $\mathcal{R}$ est le sous-ensemble de $B \times A$ constitué par les couples (b, a) pour lesquels on a : $b \in B, \quad a \in A, \quad b = f(a)$.
Pour tout élément b de B, l'équation : $f(x) = b$ a une solution unique dans A. Il en résulte que, pour tout élément b de B, il existe un couple et un seul de G dont la première coordonnée est b.
G est donc le graphe d'une application g de B dans A. L'image $g(b)$ d'un élément b de B par g est l'unique élément a de A tel que : $f(a) = b$.

Nous avons donc l'équivalence logique :
$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad (a = g(b)) \Longleftrightarrow (b = f(a))$.
Il résulte de cette équivalence logique que, pour tout élément a de A, l'équation : $g(y) = a$ a pour solution unique dans B l'élément $y = f(a)$. L'application g est donc une bijection de B sur A.

13 THÉORÈME ET DÉFINITION : Si f est une bijection de A sur B, la relation $\mathcal{R}$ de B vers A définie par :
$\forall b \in B, \quad \forall a \in A, \quad (b \mathcal{R} a) \Longleftrightarrow (b = f(a))$, **est une bijection de B sur A.**
Cette bijection est appelée bijection réciproque de la bijection f.

La bijection réciproque de f est notée : f^{-1}.
Si f est une bijection de A sur B, nous avons l'équivalence logique :
$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad (f(a) = b) \Longleftrightarrow (a = f^{-1}(b))$.

Exemples : 1. Soient un réel α, et l'application f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ a \rightsquigarrow a + \alpha$.
L'application f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque f^{-1} est définie par : f^{-1} : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ b \rightsquigarrow b - \alpha$.

2. Considérons un réel β non nul et l'application g : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ a \rightsquigarrow \beta a$.
L'application g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque g^{-1} est définie par : g^{-1} : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ b \rightsquigarrow \frac{b}{\beta}$.

Propriété caractéristique d'une bijection.

14 THÉORÈME : Une application f de A dans B est bijective si et seulement s'il existe une application g de B dans A telle que :
$g \circ f = id_A$ **et** $f \circ g = id_B$.

1. Supposons que f est une bijection de A sur B. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f. Nous avons : $\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad (a = f^{-1}(b)) \Longleftrightarrow (b = f(a))$.
Nous en déduisons :
$\forall a \in A, \quad (f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}[f(a)] = f^{-1}(b) = a = id_A(a)$;
$\forall b \in B, \quad (f \circ f^{-1})(b) = f[f^{-1}(b)] = f(a) = b = id_B(b)$.
Nous avons donc les égalités : $f^{-1} \circ f = id_A$ et $f \circ f^{-1} = id_B$.
L'application : $g = f^{-1}$, satisfait donc aux conditions de l'énoncé.

2. Démontrons que, s'il existe une application g de B dans A telle que : $g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$, alors f est une bijection de A sur B.
Pour tout couple (a_1, a_2) d'éléments de A, nous avons l'implication :
$(f(a_1) = f(a_2)) \Longrightarrow (g[f(a_1)] = g[f(a_2)])$.

D'autre part, nous avons :
$g[f(a_1)] = (g \circ f)(a_1) = id_A(a_1) = a_1$;
$g[f(a_2)] = (g \circ f)(a_2) = id_A(a_2) = a_2$.
Nous en déduisons l'implication :
$\forall a_1 \in A, \quad \forall a_2 \in A, \quad (f(a_1) = f(a_2)) \Longrightarrow (a_1 = a_2)$.
L'application f est donc injective.
Pour tout élément b de B, nous avons : $b = id_B(b) = (f \circ g)(b) = f[g(b)]$.
L'image $g(b)$ est un élément de A ; posons : $a = g(b)$; nous avons : $b = f(a)$.
L'application f est donc surjective.
Nous savons déjà qu'elle est injective ; elle est donc bijective.

15 Remarque : Appliquons le théorème précédent à l'application g ; nous avons : $f \circ g = id_B$ et $g \circ f = id_A$. L'application g est donc bijective.

16 THÉORÈME : Si f est une bijection de A sur B, la bijection réciproque f^{-1} de f est l'unique application g pour laquelle on a les égalités : $g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$.

En effet, de l'égalité : $g \circ f = id_A$, par exemple, nous déduisons successivement :
$(g \circ f) \circ f^{-1} = id_A \circ f^{-1}$;
$g \circ (f \circ f^{-1}) = f^{-1}$;
$g \circ id_B = f^{-1}$;
$g = f^{-1}$.
Appliquons le théorème précédent à la bijection f^{-1}. Nous avons les égalités :
$f \circ f^{-1} = id_B$ et $f^{-1} \circ f = id_A$.
La bijection réciproque de f^{-1} est donc la bijection f : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Groupe des permutations d'un ensemble.

Permutation d'un ensemble.

17 DÉFINITION : On appelle permutation d'un ensemble A toute bijection de A sur A.

L'ensemble des permutations d'un ensemble A est noté $\mathfrak{B}(A, A)$. C'est un sous-ensemble de $\mathfrak{F}(A, A)$.

Exemples : 1. La bijection $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x + 1$ est une permutation de $\mathbb{R}$.
2. Pour tout ensemble A, la bijection id_A est une permutation de A.

Groupe des permutations d'un ensemble.

Loi de composition interne dans $\mathcal{B}(A, A)$.

18 Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{B}(A, A)$, l'application composée $g \circ f$ est une bijection de A sur A : $g \circ f \in \mathcal{B}(A, A)$.
L'ensemble $\mathcal{B}(A, A)$ est donc une partie stable de l'ensemble $\mathcal{F}(A, A)$ muni de la loi $\circ$.
La loi induite sur $\mathcal{B}(A, A)$ est définie par :
$\forall f \in \mathcal{B}(A, A), \quad \forall g \in \mathcal{B}(A, A), \quad (f, g) \rightsquigarrow g \circ f$.
Cette loi de composition interne dans $\mathcal{B}(A, A)$ est partout définie.

Propriétés de la loi $\circ$ dans $\mathcal{B}(A, A)$.

19 Quelles que soient les permutations f, g, h de A, nous avons (n° 29, p. 19) : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
La loi $\circ$ dans $\mathcal{B}(A, A)$ est donc **associative.**

20 Pour toute permutation f de A, nous avons : $f \circ id_A = id_A \circ f = f$.
En effet, pour tout élément a de A, nous avons les égalités :
$(f \circ id_A)(a) = f[id_A(a)] = f(a)$;
$(id_A \circ f)(a) = id_A[f(a)] = f(a)$.
L'application id_A est donc l'**élément neutre** de la loi $\circ$ dans $\mathcal{B}(A, A)$.

21 Pour toute permutation f de A, nous savons (n° 13, p. 55) qu'il existe une bijection f^{-1} de A sur A pour laquelle on a : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_A$.
Chaque élément f de $\mathcal{B}(A, A)$ admet donc **un symétrique** pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{B}(A, A)$; ce symétrique est la bijection f^{-1} réciproque de f.

22 Il résulte des trois propriétés précédentes que l'ensemble $\mathcal{B}(A, A)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Remarque importante.

23 En général, le groupe des permutations d'un ensemble n'est pas commutatif.
Par exemple le groupe $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas commutatif. Considérons les deux bijections f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow 2x$;
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x - 1$.
L'application $g \circ f$ est définie par : $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow 2x - 1$.
L'application $f \circ g$ est définie par : $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow 2(x - 1)$.
Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales.

Homomorphismes. Isomorphismes.

Étude d'un exemple.

24 Considérons le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ et le groupe (P, .) des puissances entières d'un réel non nul a (n° 40, p. 44). Soit φ l'application de $\mathbb{Z}$ dans P définie par :

$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow P, \quad n \rightsquigarrow \varphi(n) = a^n.$

Soient n et m deux éléments de $\mathbb{Z}$; leur composé, dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$, est : $n + m$.

Nous avons les égalités : $\varphi(n) = a^n, \quad \varphi(m) = a^m, \quad \varphi(n + m) = a^{n+m}$.

Nous en déduisons l'égalité : $\varphi(n + m) = \varphi(n) \,.\, \varphi(m)$.

L'image par φ du composé $n + m$ de n et m dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ est le composé $\varphi(n) \,.\, \varphi(m)$, de l'image de n par φ et de l'image de m par φ, dans le groupe (P, .).

Pour traduire cette propriété, nous disons que φ est un **homomorphisme** du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ dans le groupe (P, .).

Homomorphisme.

25 D'une manière générale, nous donnons la définition :

DÉFINITION : Soient A un ensemble muni d'une loi interne, notée $\star$, et B un ensemble muni d'une loi interne, notée $\perp$. On dit qu'une application φ de A dans B est un homomorphisme si et seulement si :

$\forall x \in A, \quad \forall y \in A, \quad \varphi(x \star y) = \varphi(x) \perp \varphi(y).$

On dit aussi que φ est un homomorphisme de $(A, \star)$ dans $(B, \perp)$.

Exemple : Soit A un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $\star$, compatible avec une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans A (n° 22, p. 38).

La surjection canonique φ de A dans $A/\mathcal{R}$ définie par :

$\varphi : A \longrightarrow A/\mathcal{R}, \quad x \rightsquigarrow \varphi(x) = \bar{x},$

est un homomorphisme de A muni de la loi $\star$ dans $A/\mathcal{R}$ muni de la loi quotient.

En effet, nous avons, par définition de la loi quotient :

$\bar{x} \star \bar{y} = \overline{x \star y}$, c'est-à-dire : $\varphi(x) \star \varphi(y) = \varphi(x \star y)$.

Isomorphisme.

26 **DÉFINITION : Soient A un ensemble muni d'une loi interne, notée $\star$, et B un ensemble muni d'une loi interne, notée $\perp$. On dit qu'une application φ de A dans B est un isomorphisme si et seulement si φ est un homomorphisme bijectif de $(A, \star)$ sur $(B, \perp)$.**

Exemple : Soit a un réel différent de 0, de 1 et de -1. Nous allons montrer que l'homomorphisme φ de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(P, .)$ construit au n° 24, p. 58, est un isomorphisme. Nous devons, pour cela, démontrer que φ est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur P.
Par définition de l'ensemble P, nous savons que φ est surjective.
Considérons deux entiers relatifs m et n pour lesquels on a : $\varphi(n) = \varphi(m)$, c'est-à-dire : $a^n = a^m$; nous en déduisons l'égalité : $a^{n-m} = 1$.
Le réel a est différent de 0, de 1 et de -1 ; il en résulte l'égalité : $n - m = 0$, c'est-à-dire : $n = m$.
L'application φ est donc injective.
L'homomorphisme φ de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(P, .)$ est injectif et surjectif ; il est donc bijectif.
C'est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(P, .)$. Pour traduire l'existence de l'isomorphisme φ de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(P, .)$, on dit que le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe au groupe $(P, .)$.

EXERCICES

Injections. Surjections. Bijections.

1 On considère un ensemble E et l'application f de $\mathfrak{S}_E$ dans $\mathfrak{S}_E$ définie par :
$f : \mathfrak{S}_E \longrightarrow \mathfrak{S}_E, \quad A \longmapsto \complement_E A.$
1° Démontrer que f est une bijection sur $\mathfrak{S}_E$.
2° Déterminer la bijection réciproque f^{-1}.

2 On considère l'ensemble : $E = \{a, b, c\}$ et l'application f de $\mathfrak{S}_E$ dans $\mathfrak{S}_E$ définie par : $f : \mathfrak{S}_E \longrightarrow \mathfrak{S}_E, \quad A \longmapsto A \cup \{c\}$.
1° Déterminer le graphe de cette application.
2° L'application f est-elle injective ?
3° L'application f est-elle surjective ?

3 On considère l'ensemble : $E = \{a, b\}$ et l'ensemble : $F = \{a, b, c\}$. Soit l'application f de $\mathfrak{S}_E$ dans $\mathfrak{S}_F$ définie par :
$f : \mathfrak{S}_E \longrightarrow \mathfrak{S}_F, \quad A \longmapsto A \cup \{c\}$.
1° Déterminer le graphe de cette application.
2° L'application f est-elle injective ?
3° L'application f est-elle surjective ?
4° Quelle est la partie de l'ensemble $\mathfrak{S}_F$ dont les éléments ne sont pas les images par f d'éléments de $\mathfrak{S}_E$?

4 On considère une surjection f d'un ensemble A sur un ensemble B à n éléments, et la relation $\mathcal{R}$ dans A définie par :
$(a \mathcal{R} b) \Longleftrightarrow \big(f(a) = f(b)\big)$.
Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer le nombre de classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$.

EXERCICES

5 On considère l'application f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ déterminée par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

1° Démontrer que cette application est bijective.
2° Quelle est la bijection réciproque f^{-1} ?

6 On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par : $f(a) = 2a + 3$.

1° Démontrer que cette application est bijective.
2° Quelle est la bijection réciproque f^{-1} ?

7 On considère un groupe $(A, \star)$ et on désigne par a^{-1} le symétrique de l'élément a pour la loi $\star$:
Soit f l'application de A dans A : $a \mapsto a^{-1}$.

1° Démontrer que f est une bijection sur A.
2° Quelle est la bijection réciproque f^{-1} ?

8 On considère un groupe $(A, \star)$ non commutatif.

1° Démontrer que, pour tout couple (a, b) d'éléments de A, les applications dans A définies par $f_a : x \mapsto a \star x$ et $g_b : x \mapsto x \star b$ sont des bijections.
2° Déterminer les bijections réciproques : f_a^{-1} et g_b^{-1}.
3° Déterminer les bijections composées $g_b \circ f_a$, $f_a \circ g_b$, $f_a^{-1} \circ g_b^{-1}$, $g_b^{-1} \circ f_a^{-1}$, $f_a^{-1} \circ g_b$, $g_b \circ f_a^{-1}$, $g_a^{-1} \circ f_b$, $f_a \circ g_b^{-1}$.
4° Déterminer les bijections f_a et g_b qui sont commutables.

9 Soient trois ensembles A, B, C, une bijection f de A sur B et une bijection g de B sur C.
On désigne par h la bijection de A sur C définie par : $h = g \circ f$.
Démontrer que la bijection réciproque de h est $f^{-1} \circ g^{-1}$.
Application : Soient α et β deux réels non nuls et les bijections f et g sur $\mathbb{R}$ définies par : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \mapsto \alpha a$;
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \mapsto \beta a$.

1° Déterminer les bijections $h = g \circ f$ et $k = f \circ g$.
2° Déterminer les bijections réciproques h^{-1} et k^{-1}.

10 On considère trois applications f, g, h d'un ensemble E dans E.
Démontrer que l'égalité : $f \circ g = f \circ h$ implique l'égalité : $g = h$ si et seulement si f est une application injective.

11 On considère trois applications f, g, h d'un ensemble E dans E.
Démontrer que l'égalité : $g \circ f = h \circ f$ implique l'égalité : $g = h$ si et seulement si f est une application surjective.

12 Soient A, B, C trois ensembles, f une application de A dans B, g une application de B dans C. On pose : $h = g \circ f$.

1° Démontrer que si h est injective, alors f est injective.
2° Démontrer que si h est surjective, alors g est surjective.
3° Démontrer que si h est injective et f surjective, alors g est injective.
4° Démontrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.

13 Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B.
1° Démontrer que f est une injection si et seulement s'il existe une application g de B dans A telle que : $g \circ f = id_A$.
2° Démontrer que f est une surjection si et seulement s'il existe une application g de B dans A telle que : $f \circ g = id_B$.

14 On considère quatre ensembles A, B, C, D. Soient f une application de A dans B, g une application de B dans C, h une application de C dans D. Démontrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des bijections, f, g et h sont des bijections.

15 On considère trois ensembles A, B, C. Soient f une application de A dans B, g une application de B dans C, h une application de C dans A.
1° Démontrer que si $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont des injections et si $f \circ h \circ g$ est une surjection, alors f, g et h sont des bijections.
2° Démontrer que si $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont des surjections et si $f \circ h \circ g$ est une injection, alors f, g et h sont des bijections.

16 On considère une surjection d'un ensemble A sur un ensemble B et la relation $\mathcal{R}$ dans A définie par : $(a \mathcal{R} b) \Longleftrightarrow \big(f(a) = f(b)\big)$.
1° Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2° On désigne par E l'ensemble quotient $A/\mathcal{R}$ et par φ la surjection canonique de A sur E. Montrer qu'il existe une bijection ψ de E sur B telle que : $f = \psi \circ \varphi$.

Homomorphismes. Isomorphismes

17 Soient A un ensemble muni d'une loi notée $\star$, B un ensemble muni d'une loi notée $\perp$, et φ un homomorphisme de $(A, \star)$ dans $(B, \perp)$. Démontrer que $\varphi(A)$ est une partie stable de B.

18 Soient A un ensemble muni d'une loi notée $\star$, B un ensemble muni d'une loi notée $\perp$ et φ un homomorphisme de $(A, \star)$ dans $(B, \perp)$.
On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur A par :
$(a_1 \mathcal{R} a_2) \Longleftrightarrow \big(\varphi(a_1) = \varphi(a_2)\big)$.
Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec la loi $\star$.

19 Soit un groupe $(A, \star)$. Soit a un élément de A ; on désigne par a_1 le symétrique de a. On considère l'application φ de A dans A définie par :
$x \rightsquigarrow a \star x \star a_1$.
Démontrer que φ est un isomorphisme de $(A, \star)$ sur $(A, \star)$.

20 Soient A un ensemble muni d'une loi notée $\star$, B un ensemble muni d'une loi notée $\perp$, C un ensemble muni d'une loi notée T.
On considère un homomorphisme φ de $(A, \star)$ dans $(B, \perp)$ et un homomorphisme ψ de $(B, \perp)$ dans (C, T). Démontrer que $\psi \circ \varphi$ est un homomorphisme de $(A, \star)$ dans (C, T).

21 Soit A, un ensemble muni d'une loi $\star$. On considère l'ensemble E des isomorphismes de $(A, \star)$ sur $(A, \star)$.
Démontrer que E est un sous-groupe du groupe $\mathfrak{B}(A, A)$ des permutations de A.

EXERCICES

22 Soient un groupe $(A, \star)$ et un ensemble B muni d'une loi $\perp$.
Soit φ un homomorphisme de $(A, \star)$ dans $(B, \perp)$.
1° Démontrer que $\varphi(A)$ est une partie stable de B.
2° Démontrer que $\varphi(A)$, muni de la loi induite par $\perp$, est un groupe. En déduire que, si φ est un isomorphisme, l'ensemble $(B, \perp)$ est nécessairement un groupe.
3° Soit C un sous-groupe du groupe $(\varphi(A), \perp)$. On désigne par A_1 la partie de A : $A_1 = \{a \mid \varphi(a) \in C\}$. Démontrer que A_1 est un sous-groupe de A.
4° On suppose que $(B, \perp)$ est un groupe. On désigne par e l'élément neutre de A et par e' l'élément neutre de B.
Montrer que la partie N de A : $N = \{a \mid \varphi(a) = e'\}$ est un sous-groupe de A.
5° Soit b un élément de $\varphi(A)$, résoudre l'équation : $\varphi(x) = b$.
6° Montrer que φ est injective si et seulement si : $N = \{e\}$.

23 On considère un groupe $(A, \star)$ et une bijection de A sur un ensemble B.
Si b et b' sont deux éléments quelconques de B, on désigne par a et a' les éléments de A pour lesquels on a : $f(a) = b$ et $f(a') = b'$.
Soit $\perp$ la loi dans B définie par : $b \perp b' = f(a \star a')$.
1° Démontrer que $(B, \perp)$ est un groupe.
2° Démontrer que f est un isomorphisme de $(A, \star)$ sur $(B, \perp)$.

5.
Ensemble des parties d'un ensemble

Définition de l'ensemble des parties d'un ensemble.

1 **DÉFINITION : On appelle ensemble des parties d'un ensemble E l'ensemble $\mathfrak{T}_E$ dont les éléments sont les parties de l'ensemble E.**

Nous avons donc l'égalité : $\mathfrak{T}_E = \{X \mid X \subset E\}$.
Si A est une partie de E, nous avons l'équivalence logique :
$(A \subset E) \iff (A \in \mathfrak{T}_E)$.
En particulier, si a désigne un élément de E, nous avons les équivalences logiques :
$(a \in E) \iff (\{a\} \subset E) \iff (\{a\} \in \mathfrak{T}_E)$.

2 **Remarques** : 1. Pour tout ensemble E, nous avons : $\varnothing \subset E$ et $E \subset E$.
Nous en déduisons, pour tout ensemble E : $\varnothing \in \mathfrak{T}_E$ et $E \in \mathfrak{T}_E$.
2. Si E est l'ensemble vide, $\mathfrak{T}_E$ est le singleton $\{\varnothing\}$.
$(E = \varnothing) \Longrightarrow (\mathfrak{T}_E = \{\varnothing\})$.
3. Si E est le singleton $\{a\}$, $\mathfrak{T}_E$ est la partie : $\{\varnothing, E\}$.
$(E = \{a\}) \Longrightarrow (\mathfrak{T}_E = \{\varnothing, E\})$.

Opération intersection dans $\mathfrak{T}_E$.

3 Nous avons rappelé au début de ce livre, la définition de l'intersection de deux ensembles A et B : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
Si les ensembles A et B sont des parties d'un ensemble E, tout élément x de l'ensemble $A \cap B$ appartient à l'ensemble E ; l'ensemble $A \cap B$ est donc inclus dans E.
Nous notons : $(A \subset E \text{ et } B \subset E) \Longrightarrow (A \cap B \subset E)$.
Nous en déduisons l'implication : $(A \in \mathfrak{T}_E \text{ et } B \in \mathfrak{T}_E) \Longrightarrow (A \cap B \in \mathfrak{T}_E)$.
Le couple (A, B) appartient au produit cartésien $\mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_E$; si, à chaque couple (A, B), nous associons l'ensemble $A \cap B$ qui appartient à l'ensemble $\mathfrak{T}_E$, nous définissons une application de $\mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_E$ dans $\mathfrak{T}_E$, c'est-à-dire une loi de composition interne dans $\mathfrak{T}_E$. Cette loi de composition interne est appelée opération intersection dans $\mathfrak{T}_E$; elle est partout définie.

Propriétés de l'opération intersection.

4 Pour deux ensembles quelconques A et B, nous avons établi l'égalité : $A \cap B = B \cap A$.
Si les ensembles A et B sont deux éléments quelconques de l'ensemble $\mathfrak{T}_E$, nous avons donc : $\forall (A, B) \in \mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_E : A \cap B = B \cap A$.

THÉORÈME : L'opération intersection dans $\mathfrak{T}_E$ est une loi commutative.

5 Pour trois ensembles quelconques A, B, C, nous avons établi l'égalité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
Si les ensembles A, B, C sont trois éléments quelconques de l'ensemble $\mathfrak{T}_E$, nous avons donc : $\forall (A, B, C) \in \mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_E$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

THÉORÈME : L'opération intersection dans $\mathfrak{T}_E$ est une loi associative.

6 Pour toute partie A de l'ensemble E, nous avons les égalités : $A \cap E = E \cap A = A$.

THÉORÈME : L'ensemble E est l'élément neutre pour l'opération intersection dans $\mathfrak{T}_E$.

7 Nous avons l'égalité : $E \cap E = E$.

THÉORÈME : L'ensemble E est son propre symétrique pour l'opération intersection dans $\mathfrak{T}_E$.

8 Soit une partie A de l'ensemble E distincte de E ; cet ensemble A est la partie vide ou une partie propre de E.
Il existe au moins un élément x de E qui n'appartient pas à A.
Pour toute partie A' de E, nous avons l'implication : $(x \notin A) \Longrightarrow (x \notin A \cap A')$.
L'ensemble $A \cap A'$ est distinct de E ; aucun élément A' de $\mathfrak{T}_E$ n'est le symétrique de A pour l'opération intersection dans $\mathfrak{T}_E$.

THÉORÈME : Aucun élément de $\mathfrak{T}_E$ distinct de E n'admet de symétrique pour l'opération intersection dans $\mathfrak{T}_E$.

Opération réunion dans $\mathfrak{T}_E$.

9 Nous avons rappelé au début de ce livre la définition de la réunion de deux ensembles A et B : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Si les ensembles A et B sont des parties d'un ensemble E, tout élément x de l'ensemble $A \cup B$ appartient à l'ensemble E ; l'ensemble $A \cup B$ est donc inclus dans E.
Nous notons : $(A \subset E \text{ et } B \subset E) \Longrightarrow (A \cup B \subset E)$.
Nous en déduisons l'implication : $(A \in \mathfrak{T}_E \text{ et } B \in \mathfrak{T}_E) \Longrightarrow (A \cup B \in \mathfrak{T}_E)$.
Le couple (A, B) appartient au produit cartésien $\mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_E$; si, à chaque couple (A, B), nous associons l'ensemble $A \cup B$ qui appartient à l'ensemble $\mathfrak{T}_E$, nous définissons une application de $\mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_E$ dans $\mathfrak{T}_E$, c'est-à-dire une loi de composition interne dans $\mathfrak{T}_E$. Cette loi de composition interne est appelée opération réunion dans $\mathfrak{T}_E$; elle est partout définie.

Propriétés de l'opération réunion.

10 Pour deux ensembles quelconques A et B, nous avons établi l'égalité :
$A \cup B = B \cup A$.
Si les ensembles A et B sont deux éléments quelconques de l'ensemble $\mathfrak{T}_E$, nous avons donc : $\forall (A, B) \in \mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_E, \quad A \cup B = B \cup A$.

THÉORÈME : L'opération réunion dans $\mathfrak{T}_E$ est une loi commutative.

11 Pour trois ensembles quelconques A, B, C, nous avons établi l'égalité :
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
Si les ensembles A, B, C sont trois parties quelconques de l'ensemble E, nous avons donc : $\forall (A, B, C) \in \mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_E, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

THÉORÈME : L'opération réunion dans $\mathfrak{T}_E$ est une loi associative.

12 Pour toute partie A de l'ensemble E, nous avons les égalités : $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$.

THÉORÈME : L'ensemble vide est l'élément neutre pour l'opération réunion dans $\mathfrak{T}_E$.

13 Nous avons l'égalité : $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

THÉORÈME : L'ensemble vide est son propre symétrique pour l'opération réunion dans $\mathfrak{T}_E$.

14 Soit une partie non vide A de l'ensemble E ; cet ensemble A a au moins un élément x.
Pour toute partie A' de E, la réunion $A \cup A'$ comprend au moins cet élément x.
L'ensemble $A \cup A'$ n'est pas l'ensemble vide ; aucun élément A' de $\mathfrak{T}_E$ n'est le symétrique de A pour l'opération réunion dans $\mathfrak{T}_E$.

THÉORÈME : Aucun élément de $\mathfrak{T}_E$ distinct de l'ensemble vide n'admet de symétrique pour l'opération réunion dans $\mathfrak{T}_E$.

Distributivité de l'opération intersection sur l'opération réunion.

15 THÉORÈME : L'opération intersection dans $\mathfrak{P}_E$ est distributive sur l'opération réunion dans $\mathfrak{P}_E$.

Si A, B, C sont trois parties de l'ensemble E, nous allons démontrer les égalités :
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$.
L'opération intersection dans $\mathfrak{P}_E$ est une loi commutative ; il suffit donc, pour démontrer le théorème, de démontrer la première égalité.
Désignons par F l'ensemble $A \cap (B \cup C)$ et par G l'ensemble $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

16 Démontrons d'abord que l'ensemble F est inclus dans l'ensemble G.
Si x appartient à l'ensemble F, alors x appartient à A et appartient à $B \cup C$:
$(x \in F) \Longrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B \cup C)$, ou encore :
$(x \in F) \Longrightarrow (x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C))$.

Deux cas seulement sont possibles :

1. Si x appartient à B, nous avons : $(x \in A \text{ et } x \in B) \Longrightarrow (x \in A \cap B)$.

2. Si x n'appartient pas à B, nous avons successivement les implications :
$((x \in B \text{ ou } x \in C) \text{ et } x \notin B) \Longrightarrow (x \in C)$;
$(x \in A \text{ et } x \in C) \Longrightarrow (x \in A \cap C)$.

Tout élément x de F appartient donc à $A \cap B$ ou à $A \cap C$, donc à G :
$(x \in F) \Longrightarrow (x \in G)$.
L'ensemble F est inclus dans l'ensemble G : $F \subset G$.

17 Démontrons, ensuite, que l'ensemble G est inclus dans l'ensemble F.
Si y appartient à G, alors y appartient à $A \cap B$ ou appartient à $A \cap C$:
$(y \in G) \Longrightarrow (y \in A \cap B \text{ ou } y \in A \cap C)$.

Deux cas seulement sont possibles :

1. Si y appartient à $A \cap B$, nous avons les implications successives :
$(y \in A \cap B) \Longrightarrow (y \in A \text{ et } y \in B)$;
$(y \in A \text{ et } y \in B) \Longrightarrow (y \in A \text{ et } y \in B \cup C)$;
$(y \in A \text{ et } y \in B \cup C) \Longrightarrow (y \in A \cap (B \cup C))$.

2. Si y n'appartient pas à $A \cap B$, nous avons l'implication :
$((y \in A \cap B \text{ ou } y \in A \cap C) \text{ et } y \notin A \cap B) \Longrightarrow (y \in A \cap C)$.
On en déduit successivement, comme précédement :
$(y \in A \text{ et } y \in C)$, puis : $(y \in A \text{ et } y \in B \cup C)$, puis : $(y \in A \cap (B \cup C))$.

Dans les deux cas, tout élément y de G appartient à $A \cap (B \cup C)$, c'est-à-dire à F.
L'ensemble G est inclus dans l'ensemble F : $G \subset F$.

Des deux inclusions : $F \subset G$ et $G \subset F$, nous déduisons l'égalité : $G = F$.

Distributivité de l'opération réunion sur l'opération intersection.

18 THÉORÈME : L'opération réunion dans $\mathfrak{P}_E$ est distributive sur l'opération intersection dans $\mathfrak{P}_E$.

Si A, B, C sont trois parties de l'ensemble E, nous allons démontrer les égalités :
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
$(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$.
L'opération réunion dans $\mathfrak{P}_E$ est une loi commutative ; il suffit donc, pour démontrer le théorème, de démontrer la première égalité.

19 Désignons par H l'ensemble $A \cup (B \cap C)$ et par K l'ensemble $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Démontrons d'abord que l'ensemble H est inclus dans K.
Si x appartient à l'ensemble H, alors x appartient à A ou appartient à $B \cap C$:
$(x \in H) \Longrightarrow (x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \cap C)$.

Deux cas seulement sont possibles :

1. Si x appartient à A, nous avons les implications successives :
$(x \in A) \Longrightarrow (x \in A \cup B \quad \text{et} \quad x \in A \cup C)$;
$(x \in A \cup B \quad \text{et} \quad x \in A \cup C) \Longrightarrow (x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$.

2. Si x n'appartient pas à A, nous avons les implications successives :
$(x \in H \quad \text{et} \quad x \notin A) \Longrightarrow (x \in B \cap C)$;
$(x \in B \cap C) \Longrightarrow (x \in B \quad \text{et} \quad x \in C)$;
$(x \in B \quad \text{et} \quad x \in C) \Longrightarrow (x \in A \cup B \quad \text{et} \quad x \in A \cup C)$.
$(x \in A \cup B \quad \text{et} \quad x \in A \cup C) \Longrightarrow (x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))$.

Dans les deux cas, tout élément x de H appartient à $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, c'est-à-dire à K.
L'ensemble H est inclus dans l'ensemble K : $H \subset K$.

20 Démontrons ensuite que l'ensemble K est inclus dans l'ensemble H.
Si y appartient à l'ensemble K, alors y appartient à $A \cup B$ et appartient à $A \cup C$:
$(y \in K) \Longrightarrow (y \in A \cup B \quad \text{et} \quad y \in A \cup C)$.

Deux cas seulement sont possibles :

1. Si y appartient à A, nous avons l'implication : $(y \in A) \Longrightarrow (y \in A \cup (B \cap C))$.

2. Si y n'appartient pas à A, nous avons les implications successives :
$(y \in A \cup B \quad \text{et} \quad y \in A \cup C \quad \text{et} \quad y \notin A) \Longrightarrow (y \in B \quad \text{et} \quad y \in C)$;
$(y \in B \quad \text{et} \quad y \in C) \Longrightarrow (y \in B \cap C)$;
$(y \in B \cap C) \Longrightarrow (y \in (B \cap C) \cup A)$.

Dans les deux, cas tout élément y de K appartient à $A \cup (B \cap C)$, c'est-à-dire à H.
L'ensemble K est inclus dans l'ensemble H : $K \subset H$.

Des inclusions : $H \subset K$ et $K \subset H$, nous déduisons l'égalité : $H = K$.

Parties complémentaires.

Complémentaire d'une partie d'un ensemble.

21 DÉFINITION : Soient un ensemble E appelé référentiel et une partie A de E. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble, noté $\complement_E A$, des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Nous notons : $\complement_E A = \{x \mid x \in E \text{ et } x \notin A\}$.
Si l'ensemble A est la partie pleine de E, le complémentaire de A dans E est l'ensemble vide : $\complement_E E = \varnothing$.
Si l'ensemble A est la partie vide de E, le complémentaire de A dans E est l'ensemble E : $\complement_E \varnothing = E$.

22 Remarque : Tout élément x de E appartient à A ou à $\complement_E A$; x ne peut appartenir à la fois à A et à $\complement_E A$.
Les ensembles A et $\complement_E A$ sont disjoints et leur réunion est l'ensemble E :
$A \cap \complement_E A = \varnothing$; $A \cup \complement_E A = E$.

Complémentaire d'un complémentaire.

23 Soit A' le complémentaire dans E d'une partie A de E : $A' = \complement_E A$.
Pour tout élément x de A, nous avons les équivalences logiques :
$(x \in A) \iff (x \in E \text{ et } x \notin A') \iff (x \in \complement_E A')$.
Nous en déduisons l'égalité : $\complement_E A' = A$, ou encore : $\complement_E(\complement_E A) = A$.

THÉORÈME : Le complémentaire dans E de $\complement_E A$ est l'ensemble A.

Nous disons alors que les ensembles A et $\complement_E A$ sont complémentaires dans E.

Il résulte de ce qui précède les deux propriétés suivantes :

1. Deux ensembles égaux ont le même complémentaire dans un référentiel donné.

2. Si deux ensembles ont le même complémentaire dans un référentiel donné, ces deux ensembles sont égaux.

24 Remarque : Considérons l'application f dans $F = \mathfrak{P}_E$ définie par :
$f : F \longrightarrow F, \quad A \mapsto \complement_E A$.
De l'égalité : $\complement_E(\complement_E A) = A$, nous déduisons l'égalité : $f \circ f = id_F$.
Dans l'ensemble $\mathcal{F}(F, F)$ des applications dans F, l'application f est son propre symétrique.

Complémentaire de l'intersection de deux parties.

25 THÉORÈME : Pour deux parties quelconques A et B d'un référentiel E, on a l'égalité : $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$.

Démontrons d'abord que l'ensemble $\complement_E(A \cap B)$ est inclus dans $(\complement_E A) \cup (\complement_E B)$.
Si x est un élément de $\complement_E(A \cap B)$, nous avons l'implication :
$(x \in \complement_E(A \cap B)) \Longrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A \cap B)$.

Deux cas seulement sont possibles :

1. Si x n'appartient pas à A, alors nous avons : $(x \in E \text{ et } x \notin A) \Longrightarrow (x \in \complement_E A)$.

2. Si x appartient à A, et si x appartenait à B, il appartiendrait à $A \cap B$; donc si x appartient à A, il n'appartient pas à B.
Nous avons : $(x \in E \text{ et } x \notin B) \Longrightarrow (x \in \complement_E B)$.
Dans les deux cas, tout élément x de $\complement_E(A \cap B)$ appartient à $(\complement_E A) \cup (\complement_E B)$.
Nous avons démontré l'inclusion : $\complement_E(A \cap B) \subset (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$. (1)

Démontrons ensuite que l'ensemble $(\complement_E A) \cup (\complement_E B)$ est inclus dans $\complement_E(A \cap B)$.
Si y est un élément de $(\complement_E A) \cup (\complement_E B)$, nous avons l'implication :
$(y \in (\complement_E A) \cup (\complement_E B)) \Longrightarrow (y \in \complement_E A \text{ ou } y \in \complement_E B)$.

Deux cas seulement sont possibles :

1. Si y appartient à $\complement_E A$, nous avons : $y \notin A$; nous en déduisons : $y \notin A \cap B$.

2. Si y n'appartient pas à $\complement_E A$, il appartient nécessairement à $\complement_E B$.
Nous avons alors : $y \notin B$; nous en déduisons : $y \notin A \cap B$.
Dans les deux cas, tout élément y de $(\complement_E A) \cup (\complement_E B)$ est un élément de E qui n'appartient pas à $A \cap B$; y est donc un élément de $\complement_E(A \cap B)$.
Nous avons démontré l'inclusion : $(\complement_E A) \cup (\complement_E B) \subset \complement_E(A \cap B)$. (2)

Des inclusions (1) et (2), nous déduisons l'égalité : $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$.

Complémentaire de la réunion de deux parties.

26 THÉORÈME : Pour deux parties quelconques A et B d'un référentiel E, on a l'égalité : $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.

Nous allons montrer que ce théorème résulte du théorème précédent.

Soient deux parties quelconques A et B de E ; posons : $\complement_E A = X$ et $\complement_E B = Y$.
Pour les parties X et Y de E, nous avons établi : $\complement_E(X \cap Y) = (\complement_E X) \cup (\complement_E Y)$. (1)

Les complémentaires dans E de deux ensembles égaux sont des ensembles égaux ; nous avons donc l'égalité : $\complement_E(\complement_E(X \cap Y)) = \complement_E((\complement_E X) \cup (\complement_E Y))$. (2)

Nous avons d'autre part : $\complement_E(\complement_E(X \cap Y)) = X \cap Y$; $\complement_E X = A$; $\complement_E Y = B$.
Nous écrivons l'égalité (2) sous la forme : $X \cap Y = \complement_E(A \cup B)$, (3)
ou encore : $(\complement_E A) \cap (\complement_E B) = \complement_E(A \cup B)$.

Différence de deux ensembles.

27 DÉFINITION : Soient A et B deux ensembles. On appelle différence des ensembles A et B l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à l'ensemble B.

La différence des ensembles A et B est notée : $A - B$.
Nous avons l'égalité : $A - B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

28 Si A et B sont des parties d'un ensemble E, tout élément x de l'ensemble $A - B$ appartient à E; l'ensemble $A - B$ est donc inclus dans E :
$(A \subset E \text{ et } B \subset E) \Longrightarrow (A - B \subset E)$.
Nous en déduisons l'implication : $(A \in \mathcal{T}_E \text{ et } B \in \mathcal{T}_E) \Longrightarrow (A - B \in \mathcal{T}_E)$.
Le couple (A, B) appartient au produit cartésien $\mathcal{T}_E \times \mathcal{T}_E$; si, à chaque couple (A, B), nous associons l'ensemble $A - B$ qui appartient à l'ensemble $\mathcal{T}_E$, nous définissons une application de $\mathcal{T}_E \times \mathcal{T}_E$ dans $\mathcal{T}_E$, c'est-à-dire une loi de composition interne dans $\mathcal{T}_E$. Cette loi de composition interne est appelée opération soustraction dans $\mathcal{T}_E$; elle est partout définie.

29 Si l'ensemble B est inclus dans l'ensemble A, l'ensemble $A - B$ est le complémentaire de B dans A.

Nous notons : $(B \subset A) \Longrightarrow (A - B = \complement_A B)$.
La notation $A - B$ ne représente l'ensemble $\complement_A B$ que si B est inclus dans A; dans ce cas, elle est plus facile à employer que la notation $\complement_A B$. Nous serons amenés à l'utiliser lors de l'étude des probabilités.

Relation d'ordre dans $\mathcal{T}_E$.

Relation d'inclusion dans $\mathcal{T}_E$.

30 Considérons un ensemble E et l'ensemble $\mathcal{T}_E$ des parties de E.
Soit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{T}_E$ définie par : $(X \mathcal{R} Y) \Longleftrightarrow (X \subset Y)$.
Montrons que cette relation dans $\mathcal{T}_E$ est une relation d'ordre.

1. Pour tout élément X de $\mathcal{T}_E$, on a l'inclusion : $X \subset X$; la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{T}_E$ est donc réflexive.

2. Pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathcal{T}_E$, les deux inclusions : $X \subset Y$ et $Y \subset X$ impliquent l'égalité : $X = Y$; la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{T}_E$ est donc antisymétrique.

3. Pour tout triplet (X, Y, Z) d'éléments de $\mathcal{T}_E$, nous avons l'implication :
$(X \subset Y \text{ et } Y \subset Z) \Longrightarrow (X \subset Z)$; la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{T}_E$ est donc transitive.

THÉORÈME : La relation d'inclusion dans $\mathfrak{T}_E$ est une relation d'ordre dans $\mathfrak{T}_E$.

31 Remarque : La propriété d'antisymétrie est souvent utilisée pour démontrer l'égalité de deux parties d'un ensemble E.

Propriétés de la relation d'ordre dans $\mathfrak{T}_E$.

32 Si E est l'ensemble vide, $\mathfrak{T}_E$ est le singleton $\{\varnothing\}$.
Si E est le singleton $\{a\}$, $\mathfrak{T}_E$ est la paire $\{\varnothing, E\}$.
Dans ces deux cas, la relation d'ordre dans $\mathfrak{T}_E$ est une **relation d'ordre total.**

33 Si E n'est ni l'ensemble vide, ni un singleton, nous allons démontrer le théorème :

THÉORÈME : Si l'ensemble E n'est ni l'ensemble vide, ni un singleton, la relation d'inclusion dans $\mathfrak{T}_E$ est une relation d'ordre partiel.

L'ensemble E a alors au moins deux éléments distincts x et y :
$x \in E$; $y \in E$; $x \neq y$.
Les singletons $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des éléments de l'ensemble $\mathfrak{T}_E$, et ils vérifient :
$\{x\} \not\subset \{y\}$ et $\{y\} \not\subset \{x\}$.
Ces deux singletons ne sont pas comparables pour la relation d'ordre dans $\mathfrak{T}_E$.

Comparaison des complémentaires de deux ensembles.

34 **THÉORÈME : Si deux parties A et B d'un ensemble E sont comparables pour la relation d'inclusion dans $\mathfrak{T}_E$: $A \subset B$, les ensembles $\complement_E A$ et $\complement_E B$ sont comparables pour la relation d'inclusion, et l'on a : $(\complement_E B) \subset (\complement_E A)$.**

Si x est un élément de $\complement_E B$, nous avons l'implication :
$(x \in \complement_E B) \Longrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin B)$.
Nous avons, d'autre part : $(A \subset B \text{ et } x \notin B) \Longrightarrow (x \notin A)$.
Nous en déduisons : $(x \in E \text{ et } x \notin A) \Longrightarrow (x \in \complement_E A)$.
Tout élément x de $\complement_E B$ appartient à $\complement_E A$; l'ensemble $\complement_E B$ est inclus dans $\complement_E A$.

EXERCICES

Opération intersection. Opération réunion.

1 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer les équivalences logiques : $(A \cup B = A) \iff (B \subset A)$; $(A \cap B = A) \iff (A \subset B)$.

2 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Déterminer les ensembles : $A \cup (A \cap B)$, $B \cup (A \cap B)$, $A \cap (A \cup B)$, $B \cap (A \cup B)$.

3 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer les inclusions : $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$; $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$.

4 Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Les inclusions $B \subset C$ et $A \times B \subset A \times C$ sont-elles logiquement équivalentes ?

5 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer l'équivalence logique : $(A \times B = \varnothing) \iff (A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing)$.

6 Soient A, A', B, B' quatre parties d'un ensemble E ; on suppose que A' et B' sont non vides. Démontrer l'équivalence logique :
$(A' \subset A \text{ et } B' \subset B) \iff (A' \times B' \subset A \times B)$.

7 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. A quelle condition existe-t-il au moins un ensemble X pour lequel on a : $A \cup X = B$?
Trouver alors tous les ensembles X pour lesquels on a cette égalité.

8 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. A quelle condition existe-t-il au moins un ensemble Y pour lequel on a : $A \cap Y = B$?
Trouver alors tous les ensembles Y pour lesquels on a cette égalité.

9 On considère deux parties A et B d'un ensemble E et une application f de E dans un ensemble F.
1° Démontrer l'implication : $(A \subset B) \Longrightarrow (f(A) \subset f(B))$.
2° Démontrer l'égalité : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3° Démontrer l'inclusion : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
4° Soit f l'application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par : $x \mapsto x^2$. Montrer qu'il existe au moins deux parties A et B de $\mathbb{Z}$ pour lesquelles l'inclusion : $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ n'est pas vérifiée.
5° Démontrer que si f est une application injective, on a l'égalité : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Complémentaire d'une partie

10 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer l'équivalence logique : $(A \subset B) \iff (\complement_E B) \subset (\complement_E A)$.

11 Si f est une surjection d'un ensemble E sur un ensemble F, démontrer que, pour toute partie A de E, on a l'égalité : $\complement_F f(A) \subset f(\complement_E A)$.

12 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer que : $A \cap B$, $\complement_A (A \cap B)$, $\complement_B (A \cap B)$, $\complement_E (A \cup B)$ forment une partition de E si et seulement si les parties A et B sont non vides, non disjointes, non complémentaires dans E et si aucune d'elles n'est incluse dans l'autre.

13 Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; on pose : $\complement_E A = \overline{A}$ et $\complement_E B = \overline{B}$ Déterminer les quatre ensembles :
$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$, $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$,
$(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$, $(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

14 Soient A et B deux parties d'un ensemble E ; on pose $\complement_E A = \overline{A}$ et $\complement_E B = \overline{B}$. Déterminer les quatre ensembles :
$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$,
$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$, $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

15 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer l'implication :
$(A \cap B = \varnothing \text{ et } x \in E) \Longrightarrow (x \in \complement_E A \text{ ou } x \in \complement_E B)$.

16 Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
Déterminer les ensembles : $B \cup (A - B)$, $A - (A - B$,
$A \cap (B - A)$, $(A \cap B) \cup (B - A)$, $(A \cap B) \cup (A - B)$.

Fonction caractéristique d'une partie.

17 Soit un ensemble E et une partie A de E.
On appelle fonction caractéristique de la partie A l'application φ_A de l'ensemble E dans l'ensemble $\{0, 1\}$ définie par :
$\forall x \in A, \quad \varphi_A(x) = 1 ; \quad \forall x \notin A, \quad \varphi_A(x) = 0$.
1° Démontrer, pour deux parties A et B de l'ensemble E, l'équivalence logique : $(A = B) \Longleftrightarrow (\varphi_A = \varphi_B)$.
2° Déterminer φ_E.
3° On pose : $\complement_E A = D$. Démontrer l'égalité : $\varphi_D = \varphi_E - \varphi_A$.
4° Démontrer les égalités : $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \cdot \varphi_B$; $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \cdot \varphi_B$.
5° Utiliser les résultats précédents pour démontrer les égalités suivantes :
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
$\complement_E (A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$;
$\complement_E (A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.

Différence symétrique.

18 Soit E un ensemble. On considère l'opération dans $\mathfrak{T}_E$ qui, à tout couple (A, B) de deux éléments de $\mathfrak{T}_E$, associe l'élément $(A \cup B) - (A \cap B)$ de $\mathfrak{T}_E$. Cette opération, notée Δ, est appelée : "opération différence symétrique" :
$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
1° La loi Δ est-elle partout définie dans $\mathfrak{T}_E$?
2° Démontrer que la loi Δ est commutative.
3° Démontrer que la loi Δ est associative.
4° Démontrer que la loi Δ admet l'ensemble vide pour élément neutre.
5° Démontrer que tout élément est son propre symétrique pour la loi Δ.
6° Quelle est la structure de l'ensemble $\mathfrak{T}_E$ muni de la loi Δ ?

19 On considère l'ensemble $\mathfrak{T}_E$ muni de la loi Δ (voir exercice 18).
1° Démontrer les égalités :
$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$; $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\complement_E A \cup \complement_E B)$.
2° En déduire l'égalité : $A \Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A)$.

EXERCICES

20 Soient A et B deux parties de l'ensemble E. Démontrer qu'il existe un ensemble X unique pour lequel on a : $A \Delta X = B$.

21 Soient A et B deux parties de l'ensemble E. On pose $A \Delta B = C$. Déterminer $A \Delta C$ et $B \Delta C$.

22 Soit l'ensemble : $E = \{a, b, c, d, e\}$, et la loi Δ dans $\mathfrak{T}_E$ (voir exercice 18). On considère la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathfrak{T}_E$ définie par :

$$(A \mathcal{R} B) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{le nombre d'éléments} \\ \text{de } A \Delta B \text{ est pair}\end{array}\right)$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

23 On considère un ensemble E et une partie E_1 de cet ensemble.
Soit la relation $\mathcal{S}$ dans $\mathfrak{T}_E$ définie par :
$(A \mathcal{S} B) \Longleftrightarrow (A \cap E_1 = B \cap E_1)$.
1° Démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence dans $\mathfrak{T}_E$.
2° Soit Δ l'opération différence symétrique dans $\mathfrak{T}_E$ (voir exercice 18). Démontrer que l'on a : $A \mathcal{S} B$ si et seulement si les ensembles $A \Delta B$ et E_1 sont disjoints.
3° On suppose : $E_1 = E$. Quelle est alors la relation $\mathcal{S}$? Quelle est la classe d'équivalence d'une partie A de E ?
4° On suppose : $E_1 = \varnothing$. Quelle est alors la relation $\mathcal{S}$? Quelle est la classe d'équivalence d'une partie A de E ?
5° On suppose que E_1 est une partie propre de E. Quelle est la classe d'équivalence d'une partie A de E ?

6.

Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Ensembles finis.

Ensembles équipotents.

1 **DÉFINITION : On dit qu'un ensemble** A **est équipotent à un ensemble** B **si et seulement s'il existe une bijection** f **de** A **sur** B.

Si A est équipotent à B, nous notons : A Eq B.

2 Exemples : 1. Considérons les ensembles : $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b, c\}$. L'application f de A dans B définie par : $f(1) = a$; $f(2) = b$; $f(c) = 3$ est une bijection. L'ensemble A est donc équipotent à l'ensemble B.
2. Considérons l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et le sous-ensemble $2\,\mathbb{Z}$ des éléments de $\mathbb{Z}$ qui sont divisibles par 2 ; $2\,\mathbb{Z}$ est une partie propre de $\mathbb{Z}$.
Soit l'application : $f : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\,\mathbb{Z}$, $a \rightsquigarrow f(a) = 2a$.
f est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $2\,\mathbb{Z}$.
L'ensemble $\mathbb{Z}$ est donc équipotent à la partie propre $2\,\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$.

3 Pour tout ensemble A, l'application id_A est une bijection sur A. Il en résulte que tout ensemble A est équipotent à lui-même.

THÉORÈME : Tout ensemble A **est équipotent à lui-même.**

Pour tout ensemble A, nous avons : A Eq A.

4 Considérons un ensemble A équipotent à un ensemble B. Par définition, il existe une bijection f de A sur B. La bijection réciproque f^{-1} de la bijection f, est une bijection de B sur A. Il en résulte que B est équipotent à A.

THÉORÈME : Si un ensemble A **est équipotent à un ensemble** B, **alors** B **est équipotent à** A.

Nous notons : (A Eq B) $\Longrightarrow$ (B Eq A).
La propriété précédente permet de dire que les ensembles A et B sont équipotents.

5 Soient A, B, C trois ensembles tels que A soit équipotent à B et que B soit équipotent à C. Par définition, il existe une bijection f de A sur B et une bijection g de B sur C.
La bijection composée $g \circ f$ est une bijection de A sur C. Il en résulte que A est équipotent à C.

THÉORÈME : Si un ensemble A est équipotent à un ensemble B et si B est équipotent à un ensemble C, alors A est équipotent à C.

Nous notons : (A Eq B et B Eq C) $\longrightarrow$ (A Eq C).

6 Remarque : Les résultats précédents montrent que l'équipotence entre ensembles possède des propriétés analogues aux propriétés d'une relation d'équivalence dans un référentiel.

Ensemble fini.

7 Pour tout entier naturel n non nul, désignons par I_n l'ensemble :
$I_n = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant x \leqslant n\}$.
Par exemple, nous avons : $I_3 = \{1, 2, 3\}$; $I_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

DÉFINITION : On dit qu'un ensemble A est fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul tel que A soit équipotent à I_n.

En particulier, chaque ensemble I_n est équipotent à lui-même ; il est donc fini.
Si un ensemble A est fini et si B est équipotent à A, l'ensemble B est fini.

Ensembles I_n et I_p équipotents.

8 Nous admettons le théorème suivant :

THÉORÈME : S'il existe une injection de I_n dans I_p, alors on a : $n \leqslant p$.

Ce théorème traduit la propriété intuitive suivante :
si une application f de I_n dans I_p est injective, les n éléments de I_n ont n images distinctes dans I_p ; donc I_p a au moins n éléments.

Il en résulte le théorème :

9 **THÉORÈME : S'il existe une bijection de I_n sur I_p, alors on a : $n = p$.**

En effet, l'application f est injective ; nous avons donc : $n \leqslant p$.
La bijection réciproque f^{-1} est une injection de I_p dans I_n ; nous avons : $p \leqslant n$.
Les deux inégalités précédentes impliquent l'égalité : $n = p$.

Cardinal d'un ensemble fini.

10 Soit A un ensemble non vide. Supposons qu'il existe deux entiers non nuls n et p tels que A soit équipotent à I_n et à I_p : A Eq I_n et A Eq I_p.
Nous avons les implications successives :
(A Eq I_n) $\Longrightarrow$ (I_n Eq A) ;
(A Eq I_n et A Eq I_p) $\Longrightarrow$ (I_n Eq A et A Eq I_p) ;
(I_n Eq A et A Eq I_p) $\Longrightarrow$ (I_n Eq I_p).
Nous en déduisons : $n = p$.

11 **DÉFINITION : On appelle cardinal d'un ensemble fini non vide l'unique entier n non nul tel que** A **soit équipotent à** I_n.

Nous notons alors : Card A $= n$.
Par définition, nous posons : Card $\varnothing = 0$.

12 De l'étude précédente, nous déduisons l'équivalence logique :
(A Eq B) $\Longleftrightarrow$ (Card A = Card B).

Nous admettons sans démonstration les théorèmes suivants :

13 **THÉORÈME : Soit** A **un ensemble fini et** B **une partie de** A.
On a l'inégalité : Card B $\leqslant$ Card A.
L'égalité : Card B = Card A **a lieu si et seulement si** B **est la partie pleine de** A.

Ce théorème traduit la propriété intuitive suivante :
le nombre p d'éléments d'une partie B d'un ensemble A à n éléments est inférieur ou égal à n. Le nombre p est égal à n si et seulement si B est la partie pleine de A.

14 **THÉORÈME : Soit f une application d'un ensemble fini** A **dans un ensemble** B. **L'ensemble f(A) est fini et l'on a :** Card f(A) $\leqslant$ Card A.
L'égalité : Card f(A) = Card A **a lieu si et seulement si f est injective.**

Ces théorèmes nous permettent alors de démontrer le théorème suivant :

15 **THÉORÈME : Soient** A **et** B **deux ensembles finis équipotents, et f une application de** A **dans** B. **Cette application f est surjective si et seulement si elle est injective.**

Nous avons l'équivalence logique :
(f est injective) $\Longleftrightarrow$ (Card f(A) = Card A).

Les ensembles A et B sont équipotents : Card A = Card B.
Nous avons donc l'équivalence logique :
(f est injective) $\Longleftrightarrow$ (Card f(A) = Card B).
L'ensemble f(A) est une partie de B ; ces deux ensembles ont le même cardinal si et seulement si f(A) est la partie pleine de B :
(f(A) $\subset$ B et Card f(A) = Card B) $\Longleftrightarrow$ (f(A) = B).
L'égalité : f(A) = B exprime que tout élément de B est l'image d'un élément de A, donc que l'application f est surjective.
Nous venons d'établir l'équivalence logique :
(f est injective) $\Longleftrightarrow$ (f est surjective).

16 Nous en déduisons que, pour démontrer qu'une application f d'un ensemble fini A dans un ensemble fini B équipotent à A, est bijective, il suffit de démontrer qu'elle est injective ou qu'elle est surjective.

THÉORÈME : Soient A et B deux ensembles finis équipotents, et f une application de A dans B. Si l'application f est injective, ou si elle est surjective, f est une bijection de A sur B.

17 Nous admettons, enfin, le théorème suivant :

THÉORÈME : Si A et B sont deux parties disjointes d'un ensemble fini E, on a l'égalité : Card(A $\cup$ B) = Card A + Card B.

Dénombrements.

Nombre des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.

18 Soient A et B deux ensembles finis non vides ; désignons respectivement par p et par n le nombre d'éléments de A et le nombre d'éléments de B ; nous avons donc :
Card A = p ; Card B = n.
Considérons l'ensemble $\mathcal{F}$(A, B) des applications de A dans B. Nous admettons que cet ensemble est fini et que son cardinal ne dépend que de p et de n.
Posons : Card $\mathcal{F}$(A, B) = F(p, n).

19 Nous nous proposons de calculer F(p, n) c'est-à-dire le nombre des applications de l'ensemble A dans l'ensemble B.
Si $p = 1$, l'ensemble A est un singleton : A = $\{a\}$.
Une application f de A dans B est déterminée par la donnée de l'image de a par f dans B.
Nous avons : Card B = n ; nous en déduisons : Card $\mathcal{F}$(A, B) = n, c'est-à-dire :
F(1, n) = n. (1)

Si $p = k$, l'ensemble A est un ensemble à k éléments.
Posons : $b \notin A$ et $A' = A \cup \{b\}$.
Nous avons :
Card A $= k + 1$; Card $\mathcal{F}(A, B) = F(k, n)$; Card $\mathcal{F}(A', B) = F(k + 1, n)$.

Soit f une application de A dans B. Pour construire un prolongement f' de f à A', nous devons définir l'image de b par f'. Nous avons : Card B $= n$.
A partir de chaque application f de A dans B, nous pouvons donc construire n applications distinctes de A' dans B.
Par cette méthode, à partir des $F(k, n)$ éléments de $\mathcal{F}(A, B)$, nous obtenons $n\,F(k, n)$ éléments de $\mathcal{F}(A', B)$.

D'autre part, toute application de A' dans B est un prolongement d'une application de A dans B.
Nous avons donc : $F(k + 1, n) = n\,F(k, n)$. (2)

Écrivons l'égalité (1), puis remplaçons dans l'égalité (2) l'entier k successivement par 1, par 2, ... par $(p - 2)$, par $(p - 1)$; nous obtenons la suite d'égalités :

$F(1, n) = n$;
$F(2, n) = n\,F(1, n)$;
$F(3, n) = n\,F(2, n)$;
.....
$F(k + 1, n) = n\,F(k, n)$;
.....
$F(p - 1, n) = n\,F((p - 2), n)$;
$F(p, n) = n\,F((p - 1), n)$.

De cette suite d'égalités, nous déduisons l'égalité suivante :
$F(1, n), F(2, n) \ldots F(p - 1, n) \cdot F(p, n) = n^p\,F(1, n) \cdot F(2, n) \ldots F(p - 1, n)$.
Tous les facteurs sont différents de zéro ; nous avons donc l'égalité : $F(p, n) = n^p$.
Nous écrivons aussi : Card $\mathcal{F}(A, B) = (\text{Card B})^{\text{Card A}}$.

---

20 THÉORÈME : Le nombre d'applications d'un ensemble A à p éléments dans un ensemble B à n éléments est n^p.

Nombre des injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini.

21 Soient A et B deux ensembles finis non vides ; désignons respectivement par p et par n le nombre d'éléments de A et le nombre d'éléments de B ; nous avons donc :
Card A $= p$; Card B $= n$.

Considérons l'ensemble $\Phi(A, B)$ des injections de A dans B ; cet ensemble est une partie de l'ensemble fini $\mathcal{F}(A, B)$ des applications de A dans B. L'ensemble $\Phi(A, B)$ est donc fini ; nous admettons que son cardinal ne dépend que de p et de n.
Posons : Card $\Phi(A, B) = A_n^p$.

22 Nous nous proposons de calculer A_n^p.

Si φ_0 est une injection dont l'ensemble de départ est A, l'image $\varphi_0(A)$ est un ensemble à p éléments (n° 14, p. 77) ; nous savons d'autre part que l'image de l'ensemble de départ est incluse dans l'ensemble d'arrivée : $\varphi_0(A) \subset B$.

Le nombre p d'éléments de $\varphi_0(A)$ est donc inférieur ou égal au nombre n d'éléments de B (n° 14, p. 77).

Nous en concluons que, pour $p > n$, aucune application de A dans B n'est injective ; le nombre A_n^p des injections de A dans B est nul :

$(p > n) \Longrightarrow (A_n^p = 0)$.

Nous supposons donc, dans la suite de cette étude : $p \leqslant n$.

Si $p = 1$, toute application de $\{a\}$ dans B est injective : $A_n^1 = F(1, n) = n$. (1)

Si $p = k$, l'ensemble A est un ensemble à k éléments.

Posons : $b \notin A$ et $A' = A \cup \{b\}$.

Nous avons : Card $A' = k + 1$; Card $\Phi(A,B) = A_n^p$; Card $\Phi(A', B) = A_n^{p+1}$.

Soit φ une injection de A dans B. Pour construire un prolongement φ' de φ à A' qui soit une injection, nous devons définir l'image de b par φ'.

Ce prolongement φ' est une injection si et seulement si $\varphi'(b)$ appartient à B et n'appartient pas à l'image $\varphi(A)$:

$(\varphi'(b) \in B \text{ et } \varphi'(b) \notin \varphi(A)) \Longrightarrow (\varphi'(b) \in \complement_B \varphi(A))$.

Les ensembles $\varphi(A)$ et $\complement_B \varphi(A)$ sont disjoints et leur réunion est l'ensemble B.

Nous avons : Card $\varphi(A)$ = Card A = k et Card B = n ; nous en déduisons :

Card $(\complement_B \varphi(A)) = n - k$.

A partir de chaque injection φ de A dans B, nous pouvons donc construire $(n - k)$ injections distinctes de A' dans B.

Par cette méthode, à partir de A_n^k éléments de $\Phi(A, B)$, nous obtenons $(n - k)\, A_n^k$ éléments de $\Phi(A', B)$.

D'autre part, toute injection de A' dans B est le prolongement d'une injection de A dans B; nous avons donc : $A_n^{k+1} = (n - k)\, A_n^k$. (2)

Écrivons l'égalité (1), puis remplaçons dans l'égalité (2) l'entier k successivement par 1, par 2, ..., par $(p - 1)$, par p; nous obtenons la suite d'égalités :

$A_n^1 = n$;
$A_n^2 = (n - 1)\, A_n^1$;
$A_n^3 = (n - 2)\, A_n^2$;
. . . . . .
$A_n^{k+1} = (n - k)\, A_n^k$;
. . . . . .
$A_n^{p-1} = (n - p + 2)\, A_n^{p-2}$;
$A_n^p = (n - p + 1)\, A_n^{p-1}$.

De cette suite d'égalités, nous déduisons l'égalité suivante :

$A_n^1 . A_n^2 \ldots A_n^{p-1} . A_n^p = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - p + 1)\, A_n^1 . A_n^2 \ldots A_n^{p-1}$.

En raison de l'hypothèse : $p \leqslant n$, aucun des facteurs n'est nul, nous avons donc l'égalité : $A_n^p = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - p + 1)$.

23 **THÉORÈME : Si p est inférieur ou égal à n, le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est le produit de p entiers consécutifs dont le plus grand est n.**

Arrangement p à p de n éléments.

24 **DÉFINITION : On appelle arrangement p à p des n éléments d'un ensemble** A **tout** p-uplet **constitué par des éléments de** A **deux à deux distincts.**

25 Pour former un p-uplet avec p éléments de A deux à deux distincts, nous devons associer à chacun de ces p éléments de A un numéro d'ordre, c'est-à-dire un élément de l'ensemble $I_p = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant x \leqslant p\}$.
Cela revient à construire une injection de I_p dans A.
Le nombre des arrangements p à p des n éléments de A est donc égal au nombre des injections de I_p dans A, c'est-à-dire à A_n^p.

THÉORÈME : Le nombre des arrangements p à p de n éléments d'un ensemble est : $A_n^p = n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)$.

Exemples : 1. Considérons par exemple une course de chevaux. "Jouer le tiercé dans l'ordre", c'est engager un pari pour indiquer le cheval qui arrivera le premier, celui qui arrivera le second, celui qui arrivera le troisième. C'est donc faire une injection de l'ensemble : $I_3 = \{1, 2, 3\}$, dans l'ensemble B des chevaux partants. S'il y a 20 chevaux partants, le nombre de "tiercés dans l'ordre" distincts que l'on peut jouer est : $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.
2. Considérons l'ensemble : $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Le nombre des arrangements 4 à 4 des sept éléments de B est :
$A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments.

26 Une permutation d'un ensemble fini B à n éléments est une bijection de cet ensemble B sur lui-même (n° 17, p. 56). Une permutation de B est donc une injection de B dans B. Il résulte du théorème (n° 16, p. 78) que toute injection de B dans B est une permutation de B.
L'ensemble des permutations d'un ensemble B est donc l'ensemble $\Phi(B, B)$.
Le nombre des permutations d'un ensemble B à n éléments est donc :
$A_n^n = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3.2.1$.
C'est le produit des n premiers entiers naturels non nuls ; il est d'usage de le noter $n!$ et de le lire : factorielle n.

THÉORÈME : Le nombre des permutations d'un ensemble à n éléments est : $n! = n(n-1)\ \ldots\ 3.2.1$.

Exemple : Le nombre des permutations de six éléments, c'est-à-dire le nombre de bijections d'un ensemble à six éléments sur lui-même, est : $6! = 720$.
De même, le nombre des permutations d'un ensemble à 7 éléments est :
$7! = 7 \times 6! = 5040$.

27 Remarque : Pour $p < n$, nous avons :

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$$
$$= \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)\ (n-p)\ (n-p-1) \dots 2.1}{(n-p)\ (n-p-1) \dots 2.1},$$

ou encore : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Pour : $n = p$, nous avons : $A_n^n = n!$. Nous sommes donc conduits à poser, par convention : $0! = 1$.

Nombre de parties d'un ensemble fini.

29 Soit B un ensemble fini à n éléments ; nous avons : Card B $= n$.
Considérons l'ensemble $\mathfrak{T}_B$ des parties de B. Nous admettons que cet ensemble est fini et que son cardinal ne dépend que de n.
Posons : Card $\mathfrak{T}_B = \lambda_n$.
Nous nous proposons de calculer λ_n.

Si $n = 1$, l'ensemble B est un singleton : $B = \{b\}$. Nous savons que l'ensemble des parties de ce singleton est la paire $\{\varnothing, \{b\}\}$.
Nous avons donc : $\lambda_1 = 2$. (1)

Si $n = k$, l'ensemble B est un ensemble à k éléments.
Posons : $b \notin B$ et $B' = B \cup \{b\}$.
Toute partie C de B est aussi une partie de B', et tout ensemble $C \cup \{b\}$ est une partie de B'. A partir de chaque partie de B, nous pouvons donc construire deux parties distinctes de B'.
Par cette méthode, à partir des λ_n éléments de $\mathfrak{T}_B$, nous obtenons $2\lambda_n$ éléments de $\mathfrak{T}_{B'}$.
D'autre part, toute partie de B' à laquelle n'appartient pas b est une partie de B et toute partie de B' à laquelle appartient b est la réunion de $\{b\}$ et d'une partie de B.
Nous avons donc : $\lambda_{k+1} = 2\lambda_k$. (2)

Écrivons l'égalité (1), puis remplaçons dans l'égalité (2) l'entier k successivement par 1, par 2, ..., par $n-2$, par $(n-1)$; nous obtenons la suite d'égalités :

$\lambda_1 = 2$;
$\lambda_2 = 2\lambda_1$;
$\lambda_3 = 2\lambda_2$;
. . . . . .
$\lambda_{k+1} = 2\lambda_k$;
. . . . . .
$\lambda_{n-1} = 2\lambda_{n-2}$;
$\lambda_n = 2\lambda_{n-1}$.

De cette suite d'égalités, nous déduisons l'égalité suivante :
$\lambda_1 . \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} . \lambda_n = 2^n \lambda_1 . \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$.
Tous les facteurs sont différents de zéro ; nous avons donc l'égalité : $\lambda_n = 2^n$.
Nous écrivons aussi : Card $\mathfrak{T}_B = 2^{\text{Card B}}$.

THÉORÈME : Le nombre de parties d'un ensemble fini à n éléments est égal à 2^n.

30 Remarque : L'ensemble des parties de l'ensemble vide est le singleton $\{\varnothing\}$; nous avons l'égalité : $2^0 = 1$.

Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

31 Soient B un ensemble fini non vide à n éléments, et l'ensemble $\mathfrak{T}_B$ des parties de l'ensemble B. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}_p$ des parties de B à p éléments. L'ensemble $\mathcal{E}_p$ est inclus dans $\mathfrak{T}_B$; c'est un ensemble fini. Nous admettons que son cardinal ne dépend que de n et de p. Posons : Card $\mathcal{E}_p = C_n^p$.
Nous nous proposons de calculer C_n^p.

Il n'existe aucune partie d'un ensemble à n éléments dont le cardinal soit supérieur à n. Si p est supérieur à n, l'ensemble $\mathcal{E}_p$ est vide : $(p > n) \Longrightarrow (C_n^p = 0)$.

Si p est égal à n, l'ensemble $\mathcal{E}_p$ est le singleton $\{B\}$; nous avons : Card $\mathcal{E}_n = 1$, c'est-à-dire : $C_n^n = 1$.

Si p est égal à 0, l'ensemble $\mathcal{E}_p$ est le singleton $\{\varnothing\}$; nous avons : Card $\mathcal{E}_0 = 1$, c'est-à-dire : $C_n^0 = 1$.

Supposons alors que p vérifie les inégalités : $1 \leqslant p < n$. Soit A un élément de $\mathcal{E}_p$. Pour former un p-uplet à éléments deux à deux distincts avec les éléments de A, nous devons associer à chaque élément de A un numéro d'ordre, c'est-à-dire un élément de l'ensemble :
$I_p = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant x \leqslant p\}$.
Cela revient à construire une bijection de I_p sur A ; il existe $p!$ bijections de I_p sur A ; il existe donc $p!$ p-uplets dont les éléments deux à deux distincts sont ceux de A.
Le nombre des p-uplets associés à toutes les parties A de $\mathcal{E}_p$ est le nombre des arrangements p à p de n éléments.
Nous avons donc l'égalité : $A_n^p = C_n^p \times p!$
D'autre part, nous avons : $A_n^p = n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)$.

Nous en déduisons : $C_n^p = \dfrac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)}{p!}$.

ou encore : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

THÉORÈME : Si p est inférieur ou égal à n, le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

32 Remarque : L'égalité précédente a été obtenue dans le cas où p vérifie les inégalités : $1 \leqslant p < n$.

Pour $p = 0$ et pour $p = n$, nous avons : $C_n^0 = C_n^n = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$.

Combinaisons p à p de n éléments.

33 DÉFINITION : On appelle combinaison p à p de n éléments d'un ensemble B toute partie E_p à p éléments de B.

C_n^p est donc le nombre des combinaisons p à p de n éléments.

Considérons une course de chevaux.
"Jouer le tiercé dans le désordre", c'est engager un pari pour indiquer l'ensemble des trois chevaux qui seront les trois premiers. C'est prendre une partie à trois éléments dans l'ensemble B des chevaux partants ; c'est-à-dire une combinaison * des n partants 3 à 3.
S'il y a 20 chevaux partants, le nombre de "tiercés dans le désordre" que l'on peut jouer est : $C_{20}^3 = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3!} = 1\,140$.

Propriétés des nombres C_n^p.

34 THÉORÈME : Pour tout entier p inférieur ou égal à n, on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Nous avons en effet les égalités :

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,[n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p.$$

Nous pouvons aussi remarquer qu'il existe une bijection de l'ensemble $\mathcal{E}_p$ des parties à p éléments sur l'ensemble $\mathcal{E}_{n-p}$ des parties à $n-p$ éléments ; nous en concluons : Card $\mathcal{E}_p$ = Card $\mathcal{E}_{n-p}$, c'est-à-dire : $C_n^p = C_n^{n-p}$.

35 THÉORÈME : Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a l'égalité : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

Considérons, en effet, les ensembles $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$. Ce sont des sous-ensembles dont aucun n'est vide, dont la réunion est l'ensemble $\mathcal{T}_B$ et qui sont deux à deux disjoints. Ils déterminent une partition de $\mathcal{T}_B$. La somme de leurs cardinaux est donc égal au cardinal de $\mathcal{T}_B$.

* Remarquons que, si un parieur gagne un tiercé dans le désordre, c'est que sa combinaison est gagnante, mais que, s'il gagne un tiercé dans l'ordre, c'est que son arrangement est gagnant. Cette terminologie n'est pas adoptée dans le langage courant.

EXERCICES

1 On considère un polygone plan convexe, qui a n sommets.
1° Quel est le nombre de diagonales de ce polygone.
2° On suppose qu'il n'existe pas deux diagonales dont les supports soient parallèles et qu'il n'existe pas trois diagonales dont les supports concourent en un point distinct d'un des sommets.
En combien de points, distincts des sommets, les supports des diagonales se coupent-ils ?

2 On considère dans le plan n droites telles que deux quelconques d'entre elles ne soient pas parallèles et telles que trois quelconques ne soient pas concourantes. Déterminer le nombre de régions du plan limitées par ces droites.

3 Dans un plan, on considère 7 points tels que 3 quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.
1° Combien existe-t-il de triangles qui admettent pour sommets trois quelconques de ces points ?
2° Combien existe-t-il de quadrilatères non croisés qui admettent pour sommets quatre quelconques de ces points ?

◆ Dans chacun des exercices suivants (n°s 4 à 9), on dispose de huit jetons qui portent chacun un chiffre. On dispose en ligne quatre de ces jetons de façon à former un nombre. Par exemple, 1301 est un nombre de quatre chiffres, 0130 est un nombre de trois chiffres, 0012 est un nombre de deux chiffres, 0001 est un nombre de un chiffre. Calculer le nombre de nombres distincts, de quatre chiffres, que l'on peut former.

4 Les jetons portent les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

5 Les jetons portent les numéros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

6 Les jetons portent les numéros 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

7 Les jetons portent les numéros 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5.

8 Les jetons portent les numéros 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5.

9 Les jetons portent les numéros 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2.

Jeux de cartes.

◆ Dans chacun des exercices suivants (n°s 10 à 13) on dispose d'un jeu de 32 cartes. On appelle "main" à la belote, tout ensemble de 8 cartes que l'on peut extraire du jeu.

10 Combien y a-t-il de mains distinctes dans un jeu de 32 cartes ?

11 Combien y a-t-il de mains distinctes dans lesquelles figure l'as de trèfle ?

12 Combien y a-t-il de mains distinctes dans lesquelles figurent l'as de trèfle et le roi de trèfle ?

13 Combien y a-t-il de mains distinctes dans lesquelles figurent les quatre valets ?

EXERCICES

◆ Dans chacun des exercices suivants (n°s 14 à 18) on dispose d'un jeu de 52 cartes. On appelle "main" au bridge, tout ensemble de 13 cartes que l'on peut extraire du jeu ; on appelle honneur l'une des cartes suivantes : As, Roi, Dame, Valet, Dix.

14 Combien y a-t-il de mains distinctes dans un jeu de 52 cartes ?

15 Combien y a-t-il de mains distinctes dans lesquelles figurent trois as ?

16 Combien y a-t-il de mains distinctes dans lesquelles figurent au moins trois as ?

17 Combien y a-t-il de mains distinctes dans lesquelles figurent les cinq honneurs à cœur ?

18 Combien y a-t-il de mains distinctes dans lesquelles ne figure aucun honneur ?

Combinaisons.

19 Démontrer l'égalité : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
1° en utilisant les propriétés des nombres C_n^p
2° en dénombrant directement certaines parties d'un ensemble à n éléments.

20 Même exercice que le n° 19 pour l'égalité :
$C_n^p = C_{n-2}^p + 2\,C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$.

21 Si p est inférieur à n, démontrer les égalités :
$C_n^{p+1} = C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{n-2}^p + C_{n-1}^p$, et :
$1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^p\, C_n^p = (-1)^p\, C_{n-1}^p$.

22 **Formule du binôme de Newton.** Soient a et b deux réels.
1° Vérifier l'égalité : $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$.
2° Déduire, du développement du produit $(a+b)(a+b)^3$, l'égalité :
$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4$.
3° On admet l'égalité :
$(a+b)^{n-1} = C_{n-1}^0 a^{n-1} + C_{n-1}^1 a^{n-2} b + \ldots + C_{n-1}^k a^{n-k-1} b^k + \ldots + C_{n-1}^{n-1} b^{n-1}$
Déduire du développement du produit $(a+b)(a+b)^{n-1}$ l'égalité :
$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$.

DEUXIÈME PARTIE

fonctions numériques d'une variable réelle

7.
Fonctions numériques

Fonction numérique d'une variable réelle.

1 **DÉFINITION : On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute application f dont l'ensemble de départ A est inclus dans $\mathbb{R}$ et dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.**

Nous notons alors : $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in A$, $x \rightsquigarrow f(x)$.
On dira parfois simplement fonction, pour fonction numérique d'une variable réelle.

Ensemble de définition.

2 **DÉFINITION : On appelle ensemble de définition, noté D_f, d'une fonction numérique d'une variable réelle f, l'ensemble de départ A de l'application.**

Nous noterons désormais une fonction numérique d'une variable réelle f dont l'ensemble de définition est la partie D_f de $\mathbb{R}$: $f : \forall x \in D_f$, $x \rightsquigarrow f(x)$.

3 Considérons, par exemple, la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x \rightsquigarrow \frac{1}{x}$
L'ensemble de définition D_f de la fonction f est l'ensemble $\mathbb{R}^*$.
Considérons, ensuite, la fonction g définie par : $\forall x \in [1, 2]$, $x \rightsquigarrow \frac{1}{x}$
L'ensemble de définition D_g de la fonction g est le segment $[1, 2]$.
D_g est inclus dans D_f.
Le réel $\frac{1}{x}$ est défini si et seulement si x est non nul. On peut donc déterminer une fonction h par : $\forall x \in D_h$, $x \rightsquigarrow \frac{1}{x}$, si et seulement si : $0 \notin D_h$.
L'ensemble : $D_f = \mathbb{R}^*$, contient tous les autres ensembles de définition des fonctions que l'on peut construire à partir du passage à l'inverse.
Dans la pratique, si l'ensemble de définition D_f d'une fonction f n'est pas précisé a priori, nous convenons que l'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des réels pour lesquels toutes les opérations qui permettent de calculer l'image $f(x)$ sont définies.

C'est le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des réels pour lesquels l'une au moins des opérations que l'on doit effectuer pour déterminer $f(x)$ n'est pas définie. Par exemple, lorsque nous considérons la fonction numérique f déterminée par : $\forall x \in D_f,\ x \longmapsto \dfrac{x+3}{x^2-1}$, sans autre précision, nous sous-entendons que l'on a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

4 **DÉFINITIONS : 1. Si x_0 est un point de l'ensemble de définition D_f d'une fonction f, on dit que f est définie au point x_0.**
2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$; si A est inclus dans D_f, on dit que f est définie sur A.

Notion de variable et de valeur numérique.

5 Soit f une fonction. Pour tout élément x de l'ensemble de définition D_f et pour son image y par f, nous écrivons : $y = f(x)$.
Soient a un point de D_f et b son image par f ; nous disons que, pour la valeur numérique : $x = a$ de la variable, la fonction f prend la valeur numérique b.
L'image par f de l'ensemble de définition D_f est appelée ensemble des valeurs de la fonction f. Un réel y appartient donc à l'ensemble des valeurs d'une fonction f si et seulement s'il existe un élément x de l'ensemble de définition D_f qui vérifie l'égalité : $y = f(x)$.

Notion d'intervalle.

6 La plupart des fonctions que nous étudierons cette année auront pour ensemble de définition un intervalle ou une réunion d'un nombre fini d'intervalles.
Nous rappelons la définition suivante :

DÉFINITION : On dit qu'un sous-ensemble A de l'ensemble $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tout couple (x, y) d'éléments de A, tout réel compris entre x et y appartient aussi à A.

Soient a et b deux réels tels que a soit inférieur à b. On appelle :
intervalle ouvert, noté $]a, b[$, l'ensemble des réels x qui vérifient les inégalités : $a < x < b$;
intervalle fermé, noté $[a, b]$, l'ensemble des réels x qui vérifient les inégalités : $a \leqslant x \leqslant b$;
intervalle fermé à gauche et ouvert à droite, noté $[a, b[$, l'ensemble des réels x qui vérifient les inégalités : $a \leqslant x < b$;
intervalle ouvert à gauche et fermé à droite, noté $]a, b]$, l'ensemble des réels x qui vérifient les inégalités : $a < x \leqslant b$.

L'ensemble des réels x qui vérifient l'inégalité : $x < a$ est un intervalle noté $]-\infty, a[$; on dit que cet intervalle est **ouvert à droite et non borné à gauche.**

L'ensemble des réels x qui vérifient l'inégalité : $x \leqslant a$ est un intervalle noté $]-\infty, a]$; on dit que cet intervalle est **fermé à droite et non borné à gauche.**

L'ensemble des réels x qui vérifient l'inégalité : $x > a$ est un intervalle noté $]a, +\infty[$; on dit que cet intervalle est **ouvert à gauche et non borné à droite.**

L'ensemble des réels x qui vérifient l'inégalité : $x \geqslant a$ est un intervalle noté $[a, +\infty[$; on dit que cet intervalle est **fermé à gauche et non borné à droite.**

Le singleton $\{a\}$ est un intervalle ; on dit que cet intervalle est **fermé.**

L'ensemble vide et l'ensemble $\mathbb{R}$ sont aussi des intervalles ; on dit que **ces intervalles sont ouverts et fermés.**

Pour désigner l'ensemble $\mathbb{R}$, on utilise souvent la notation : $]-\infty, +\infty[$.

Exemples de fonctions numériques d'une variable réelle.

Fonction linéaire sur un intervalle.

7 Soit a un réel. Considérons la fonction f définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in J,\ f(x) = ax$.

Cette fonction est appelée fonction linéaire sur l'intervalle J.

Si a est nul, la fonction linéaire est la fonction nulle sur J.

Fonction affine sur $\mathbb{R}$.

8 Soient a et b deux réels. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = ax + b$.

Cette fonction est appelée fonction affine sur $\mathbb{R}$.

Si a est nul, l'ensemble des valeurs est le singleton $\{b\}$; la fonction affine est alors une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Si a n'est pas nul, l'ensemble des valeurs est $\mathbb{R}$.

Si b est nul, la fonction affine est une fonction linéaire sur $\mathbb{R}$.

Fonction partie entière.

9 Soit x un réel. Parmi les entiers relatifs inférieurs ou égaux à x, choisissons celui qui est le plus grand ; nous le désignons par n. A tout réel x, nous associons ainsi un entier relatif n et un seul, appelé partie entière de x.

La fonction que nous venons de construire est appelée fonction partie entière. Elle est définie sur $\mathbb{R}$; on la note : E.

Pour tout réel x et pour tout entier relatif n, la fonction partie entière E est définie par l'équivalence logique : $(E(x) = n) \iff (n \leqslant x < n + 1)$.

Nous avons, par exemple : $E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; $E\left(-\frac{3}{2}\right) = -2$.

L'ensemble des valeurs de la fonction E est l'ensemble $\mathbb{Z}$.

Fonction en escalier sur $\mathbb{R}$.

10 **DÉFINITION : On appelle fonction en escalier sur $\mathbb{R}$ toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une suite finie de réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ qui satisfont aux conditions suivantes :**

1. $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$;

2. la restriction de l'application f à chacun des intervalles ouverts $]-\infty, a_0[,]a_0, a_1[, \ldots,]a_{n-1}, a_n[,]a_n + \infty[$ est une fonction constante.

La fonction partie entière E n'est pas une fonction en escalier sur $\mathbb{R}$ car il n'existe pas de suite finie de réels qui satisfasse aux conditions indiquées.

Fonction affine par intervalles sur $\mathbb{R}$.

11 **DÉFINITION : On appelle fonction affine par intervalles sur $\mathbb{R}$ toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe une suite finie de réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ qui satisfont aux conditions suivantes :**

1. $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$;

2. la restriction de l'application f à chacun des intervalles ouverts $]-\infty, a_0[,]a_0, a_1[, \ldots,]a_{n-1}, a_n[,]a_n, + \infty[$ est une fonction affine.

Représentation graphique d'une fonction.

12 Considérons une fonction numérique f d'une variable réelle, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$. Le graphe G de la fonction f est l'ensemble des couples $(a, f(a))$ formés d'un élément a de D_f et de son image $f(a)$.

Soit, dans un plan P, un repère cartésien formé de deux axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$ munis de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Nous convenons de noter ce repère cartésien : $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Associons à tout couple $(a, f(a))$ du graphe G le point M, de coordonnées $(a, f(a))$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'ensemble $\mathcal{C}$ des points M ainsi obtenus est appelé représentation graphique ou courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Un point M de coordonnées (x, y) appartient donc à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f si et seulement si on a : $x \in D_f$ et $y = f(x)$.

On dit que : $y = f(x)$ est une équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Par un point m d'abscisse x_0 de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$ traçons la droite Δ parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$; l'intersection de cette droite Δ et de la courbe représentative $\mathcal{C}$ a au plus un point. Ce point unique existe si et seulement si x_0 est un point de l'ensemble de définition D_f.

13 Nous rappelons les résultats suivants :

Pour la **fonction constante** sur un intervalle fermé $[a, b]$, $f : x \rightsquigarrow y_0$, la courbe représentative est le segment [A, B] défini par le point A de coordonnées (a, y_0) et par le point B de coordonnées (b, y_0).
Pour la fonction constante sur l'intervalle $]a, b]$, $f : x \rightsquigarrow y_0$, la courbe représentative est le segment [A, B], privé du point A.

Pour la **fonction linéaire** sur $\mathbb{R}$, $f : x \rightsquigarrow ax$, la courbe représentative est la droite Δ qui passe par le point O et par le point A de coordonnées $(1, a)$.

Pour la **fonction affine** sur $\mathbb{R}$, $f : x \rightsquigarrow ax + b$, la courbe représentative est la droite Δ_1 qui passe par le point B de coordonnées $(0, b)$ et qui est parallèle à la droite Δ représentative de la fonction linéaire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow ax$.

Sens de variations d'une fonction sur un intervalle.

14 Considérons une fonction numérique f d'une variable réelle, dont l'ensemble de définition contient un intervalle E.

1. On dit que la fonction f est **constante** sur l'intervalle E si et seulement si : $\forall x_1 \in E, \quad \forall x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2)$.

2. On dit que la fonction f est **croissante** sur l'intervalle E si et seulement si : $\forall x_1 \in E, \quad \forall x_2 \in E, \quad (x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) \leqslant f(x_2))$.

3. On dit que la fonction f est **strictement croissante** sur l'intervalle E si et seulement si : $\forall x_1 \in E, \quad \forall x_2 \in E, \quad (x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) < f(x_2))$.

4. On dit que la fonction f est **décroissante** sur l'intervalle E si et seulement si : $\forall x_1 \in E, \quad \forall x_2 \in E, \quad (x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

5. On dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur l'intervalle E si et seulement si : $\forall x_1 \in E, \quad \forall x_2 \in E, \quad (x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) > f(x_2))$.

6. On dit qu'une fonction f est **monotone** sur un intervalle E si elle est soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle.

7. On dit qu'une fonction f est **strictement monotone** sur un intervalle E si elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante sur cet intervalle.

Il résulte des définitions précédentes qu'une fonction constante sur un intervalle est à la fois croissante et décroissante sur cet intervalle ; elle n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante.

15 **Exemples :** 1. Pour tout entier relatif n, la fonction partie entière est constante sur l'intervalle $[n, n + 1[$.
2. Considérons une fonction linéaire f et une fonction affine g respectivement définies par : $f : x \rightsquigarrow ax$; $g : x \rightsquigarrow ax + b$.
Si a est nul, la fonction f et la fonction g sont constantes sur $\mathbb{R}$.
Si a est positif, les fonctions f et g sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
Si a est négatif, les fonctions f et g sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$.

Fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \rightsquigarrow x^2$.

16 **THÉORÈME : La fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ x \rightsquigarrow x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.**

Démontrons que, pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de $\mathbb{R}_+$, l'inégalité : $x_1 < x_2$ implique l'inégalité : $x_1^2 < x_2^2$.
Nous avons l'implication :
$(x_1 \in \mathbb{R}_+, \quad x_2 \in \mathbb{R}_+, \quad x_1 < x_2) \Longrightarrow (x_1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x_2 > 0)$.
Il en résulte les deux implications :
$(x_1 < x_2) \Longrightarrow (x_1^2 \leqslant x_1 x_2), \quad (x_1 < x_2) \Longrightarrow (x_1 x_2 < x_2^2)$.
Des deux égalités : $x_1^2 \leqslant x_1 x_2$ et $x_1 x_2 < x_2^2$, nous déduisons : $x_1^2 < x_2^2$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

17 **THÉORÈME : La fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ x \rightsquigarrow x^2$ est une injection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.**

Soient x_1 et x_2 deux réels positifs ou nuls pour lesquels on a l'égalité : $x_1^2 = x_2^2$.
Nous avons les équivalences logiques :
$(x_1^2 = x_2^2) \Longleftrightarrow ((x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0)$,
$((x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0) \Longleftrightarrow (x_1 + x_2 = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 - x_2 = 0)$.
x_1 et x_2 sont deux réels positifs ou nuls. Leur somme est nulle si et seulement s'ils sont tous les deux nuls.
Pour tout couple (x_1, x_2) de réels positifs ou nuls, nous déduisons l'implication :
$(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)$.
Il en résulte que la fonction f est injective.

18 Nous admettons que f est une surjection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est donc injective et surjective; c'est une bijection sur $\mathbb{R}_+$.

THÉORÈME : La fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \rightsquigarrow x^2$ est une bijection sur $\mathbb{R}_+$.

Racine carrée d'un réel positif ou nul.

19 Pour tout réel b positif ou nul, il existe donc un réel positif ou nul unique a qui vérifie l'égalité : $b = a^2$.

DÉFINITION : Soit un réel b positif ou nul. On appelle racine carrée du réel b, le réel unique a qui vérifie : $a^2 = b$ et $a \geqslant 0$.

On note ce réel : $\sqrt{b}$, ou encore : $b^{1/2}$.
Pour tout réel b positif ou nul, nous avons donc l'équivalence logique :
$\forall b \in \mathbb{R}_+, \quad (a = \sqrt{b}) \Longleftrightarrow (a^2 = b \quad \text{et} \quad a \geqslant 0)$.

Fonction racine carrée.

20 La fonction f est une bijection sur $\mathbb{R}_+$; elle admet donc une bijection réciproque f^{-1} qui est une bijection sur $\mathbb{R}_+$.
Cette bijection f^{-1} qui à tout réel positif ou nul associe sa racine carrée est appelée **fonction racine carrée.**
Nous notons : $f^{-1} : \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \sqrt{x}$,
ou encore : $f^{-1} : \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^{1/2}$.

21 **Remarque :** Nous insistons particulièrement sur les deux points suivants :
1. La racine carrée d'un réel positif ou nul est un réel positif ou nul;
2. Nous n'avons défini la racine carrée d'un réel que si ce réel est positif ou nul.
Il en résulte que l'ensemble de définition D_g de la fonction g :
$\forall x \in D_g, \quad x \mapsto \sqrt{-x^2}$, est le singleton $\{0\}$.
En effet, si x est différent de 0, $-x^2$ est un réel strictement négatif ; on n'a pas défini la racine carrée de $-x^2$.
Si x est égal à 0, $-x^2$ est nul, et on a alors : $\sqrt{0} = 0$.

Opérations sur les fonctions numériques.

22 Désignons par Φ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle qui admettent pour ensemble de définition une partie A de $\mathbb{R}$. Nous allons définir des opérations dans l'ensemble Φ, c'est-à-dire des applications de parties de $\Phi \times \Phi$ dans Φ.

Addition des fonctions.

23 **DÉFINITION : Soient f et g deux fonctions appartenant à l'ensemble Φ ; on appelle addition dans Φ, l'opération qui, au couple (f, g), associe la fonction s appartenant à l'ensemble Φ telle que, pour tout élément x de A, on ait l'égalité : $s(x) = f(x) + g(x)$.**

La fonction s est appelée **somme** des fonctions f et g ; on note : $s = f + g$.

Propriétés de l'addition dans l'ensemble Φ.

24 1. **L'addition dans Φ est une opération commutative.**
En effet, pour tout couple de fonctions f et g appartenant toutes deux à Φ, et pour tout réel x de l'ensemble A, nous avons l'égalité : $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$, c'est-à-dire : $f + g = g + f$.

2. **L'addition dans Φ est une opération associative.**
En effet, pour tout triplet de fonctions f, g, h appartenant toutes trois à Φ, et pour tout réel x de l'ensemble A, nous avons l'égalité :
$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$,
c'est-à-dire : $(f + g) + h = f + (g + h)$.
3. **L'addition dans Φ admet un élément neutre : l'application nulle de A dans $\mathbb{R}$.**
En effet, désignons par e l'application nulle de A dans $\mathbb{R}$: $\forall x \in A, \quad e(x) = 0$.
Nous avons, pour toute fonction f appartenant à Φ et pour tout réel x de l'ensemble A, les égalités : $f(x) + e(x) = f(x)$ et $e(x) + f(x) = f(x)$,
c'est-à-dire : $f + e = f$ et $e + f = f$.
4. **Toute fonction f appartenant à Φ admet un symétrique pour la loi d'addition.**
En effet, pour toute fonction f appartenant à Φ, désignons par g la fonction définie par : $\forall x \in A, \quad g(x) = -f(x)$.
Nous avons alors, pour tout x de l'ensemble A, l'égalité : $f(x) + g(x) = 0$,
c'est-à-dire : $f + g = e$.

Des propriétés précédentes, nous déduisons le théorème :

25 **THÉORÈME : L'ensemble des fonctions numériques qui admettent A pour ensemble de définition, muni de la loi d'addition, est un groupe commutatif.**

Soustraction des fonctions.

26 Dans le groupe commutatif $(\Phi, +)$, nous définissons alors la soustraction des fonctions :

DÉFINITION : Soient f et g deux fonctions appartenant à l'ensemble Φ ; on appelle soustraction dans Φ l'opération qui, au couple (f, g) associe la fonction d définie par l'égalité : $f = g + d$.

La fonction d est appelée différence des fonctions f et g ; on note : $d = f - g$.

Multiplication des fonctions.

27 **DÉFINITION : Soient f et g deux fonctions appartenant à l'ensemble Φ ; on appelle multiplication dans Φ l'opération qui, au couple (f, g) associe la fonction p appartenant à l'ensemble Φ telle que, pour tout élément x de A, on ait l'égalité : $p(x) = f(x) . g(x)$.**

La fonction p est appelée **produit** des fonctions f et g ; on note : $p = f.g$.

Propriétés de la multiplication dans l'ensemble Φ.

28 1. **La multiplication dans Φ est commutative.**
En effet, pour tout couple de fonctions f et g appartenant toutes deux à Φ, et pour tout réel x de l'ensemble A, nous avons l'égalité :
$f(x).g(x) = g(x).f(x)$, c'est-à-dire : $f.g = g.f$.

2. **La multiplication dans Φ est une opération associative.**
En effet, pour tout triplet f, g, h de fonctions appartenant à l'ensemble Φ et pour tout réel x de l'ensemble A, on a l'égalité : $(f(x).g(x)).h(x) = f(x).(g(x).h(x))$,
c'est-à-dire : $(f.g).h = f.(g.h)$.

3. **La multiplication dans Φ est distributive sur l'addition dans Φ.**
En effet, pour tout triplet f, g, h de fonctions appartenant à l'ensemble Φ, et pour tout réel x de l'ensemble A, on a les égalités :
$f(x).(g(x) + h(x)) = f(x).g(x) + f(x).h(x)$, et
$(g(x) + h(x)).f(x) = g(x).f(x) + h(x).f(x)$,
c'est-à-dire : $f.(g + h) = f.g + f.h$ et $(g + h).f = g.f + h.f$.

4. **La multiplication dans Φ admet un élément neutre : l'application** $e_1 : \forall x \in A, \quad x \mapsto 1$.
Pour tout x de l'ensemble A, nous avons : $e_1(x) = 1$.
Nous avons alors, pour toute fonction f appartenant à Φ et pour tout réel x de l'ensemble A, les égalités : $f(x).e_1(x) = f(x)$ et $h_1(x).f(x) = f(x)$,
c'est-à-dire : $f.e_1 = f$ et $e_1.f = f$.

Division des fonctions.

29 Désignons par Φ^* le sous-ensemble de Φ formé par les fonctions g appartenant à Φ et telles que : $\forall x \in A, \quad g(x) \neq 0$.

DÉFINITION : Soient une fonction f de Φ et une fonction g de Φ^* ; on appelle division dans Φ l'application de $\Phi \times \Phi^*$ dans Φ qui, au couple (f, g), associe la fonction q appartenant à Φ telle que, pour tout élément x de A, on ait l'égalité : $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

La fonction q est appelée quotient des fonctions f et g ; on note : $q = \dfrac{f}{g}$.
La division des fonctions n'est pas une opération partout définie dans Φ.

Fonctions polynômes.

30 Soit n un entier naturel ; considérons un $(n + 1)$-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de réels.

DÉFINITION : On appelle fonction polynôme d'une variable réelle toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$.

Fonction nulle.

31 Si les réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont tous nuls, la fonction polynôme : $x \rightsquigarrow a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
On démontre et nous admettons le théorème suivant :

THÉORÈME : Une fonction polynôme $f : x \rightsquigarrow a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, est la fonction nulle si et seulement si tous les réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont nuls.

Égalité de deux fonctions polynômes. Degré.

32 On démontre et nous admettons le résultat suivant :

THÉORÈME : Soient f et g deux fonctions polynômes respectivement définies par : $f : x \rightsquigarrow a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, avec $a_n \neq 0$;
$g : x \rightsquigarrow b_0 + b_1x + \ldots + b_px^p$, avec $b_p \neq 0$.
Les fonctions f et g sont égales si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
1. $n = p$.
2. $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, a_i = b_i$.

Si f est définie par : $x \rightsquigarrow a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, avec $a_n \neq 0$, on dit que **le degré de f est n.**

Exemple : Considérons la fonction polynôme $f : x \rightsquigarrow a_0 + a_1x + a_2x^2$,
si $a_2 \neq 0$, le degré de f est 2 ;
si $a_2 = 0$ et $a_1 \neq 0$, le degré de f est 1 ;
si $a_1 = a_2 = 0$ et $a_0 \neq 0$, le degré de f est 0.

33 Remarque : Le degré de la fonction polynôme nulle n'est pas défini.

Ensemble des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

34 Soit Φ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble P des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une partie de Φ.
Nous savons que $(\Phi, +)$ est un groupe commutatif. Nous allons montrer que P est un sous-groupe de $(\Phi, +)$.
1. **P est non vide**; en effet l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartient à P.
2. **P est stable pour l'addition dans Φ.**
Considérons, en effet, deux fonctions polynômes f et g :
$f : x \rightsquigarrow a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$;
$g : x \rightsquigarrow b_0 + b_1x + \ldots + b_px^p$.
Supposons, par exemple, $n \geqslant p$; pour tout réel x, nous avons :
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_p + b_p)x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots + a_nx^n$.
La fonction $f + g$ appartient donc à P.

3. **Si f appartient à P, $-f$ appartient à P.**
Considérons en effet une fonction polynôme quelconque f de P :
$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.
Nous avons, pour tout réel x :
$(-f)(x) = -f(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \ldots + (-a_n)x^n$.
$-f$ est donc une fonction polynôme.

35 THÉORÈME : L'ensemble P des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\Phi, +)$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Produit d'une fonction polynôme par un réel.

36 Soit $f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, une fonction polynôme.
On appelle produit de f par le réel α la fonction g définie par :
$g : x \mapsto \alpha a_0 + (\alpha a_1)x + \ldots + (\alpha a_n)x^n$.
C'est une fonction polynôme, on la note : $g = \alpha f$.

EXERCICES

Ensemble de définition.

◆ Indiquer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes (nos 1 à 16) :

1 $x \mapsto 2x^2 - 3x + 5$.

2 $x \mapsto \dfrac{x-2}{x+3}$.

3 $x \mapsto \dfrac{2x-1}{(x-1)(x+4)}$.

4 $x \mapsto \dfrac{3x+1}{x^2+2x-3}$.

5 $x \mapsto \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.

6 $x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x - \mathrm{E}(x)}}$.

7 $x \mapsto \sqrt{\mathrm{E}(x) - x}$.

8 $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-9}{\mathrm{E}(x) - x}}$

9 $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{|x|+1}$.

10 $x \mapsto \dfrac{1}{|x+3| - |x-4|}$.

11 $x \mapsto \sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-3}$.

12 $x \mapsto \sqrt{-4x^2+20x-25}$.

13 $x \rightsquigarrow \sqrt{|1+x| - |2x-4|}$.

14 $x \rightsquigarrow \sqrt{x^2+4x-5} - \dfrac{1}{|x+2-3|}$.

15 $x \rightsquigarrow \sqrt{6x^2+13x-8} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

16 $x \rightsquigarrow \dfrac{\sqrt{|2x-3|+9}}{x^2+x-2}$.

◆ Préciser l'ensemble de définition, indiquer l'ensemble des valeurs et construire, dans un repère cartésien, la représentation graphique des fonctions suivantes (n°s 17 à 26) :

17 $x \rightsquigarrow x - E(x)$.

18 $x \rightsquigarrow E(x)\,[x - E(x)]$.

19 $x \rightsquigarrow (-1)^{E(x)}\,x$.

20 $x \rightsquigarrow (-1)^{E(x)}\,[x - E(x)]$.

21 $x \rightsquigarrow x - 2 + \sqrt{(x-2)^2}$.

22 $x \rightsquigarrow \dfrac{\sqrt{x^2\,(2x-5)^2}}{2x-5}$.

23 $x \rightsquigarrow \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{(E(x)-x)^2}\right)$.

24 $x \rightsquigarrow \dfrac{x^2}{x+|x|}$.

25 $x \rightsquigarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+2)^2}$.

26 $x \rightsquigarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x+2)^2}$.

Sens de variations.

◆ Préciser l'ensemble de définition et étudier le sens de variations des fonctions suivantes (n°s 27 à 40) :

27 $x \rightsquigarrow x^2 - 2x + 3$.

28 $x \rightsquigarrow -2x^2 + 4x + 5$.

29 $x \rightsquigarrow 3x^2 - 6x + 7$.

30 $x \rightsquigarrow -3x^2 + 6x + 7$.

31 $x \rightsquigarrow x^3 + 1$.

32 $x \rightsquigarrow 9 - 2x^3$.

33 $x \rightsquigarrow \dfrac{x+1}{x-2}$.

34 $x \rightsquigarrow \dfrac{3-2x}{1+x}$.

35 $x \rightsquigarrow \dfrac{1}{x^2+1}$.

36 $x \rightsquigarrow \dfrac{x^2}{x^2+2}$.

37 $x \rightsquigarrow \sqrt{x^2+2|x|+1} - \sqrt{x^2-2|x|+1}$.

38 $x \rightsquigarrow \sqrt{x^2+6\sqrt{x^2}+9} + \sqrt{x^2-6\sqrt{x^2}+9}$.

39 $x \rightsquigarrow \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x+1)^2}\right) + \dfrac{1}{x}$.

40 $x \rightsquigarrow \sqrt{(x-E(x))^2} - |x| + E(2x)$.

EXERCICES

41 Soient 2 fonctions f et g définies sur un même intervalle E.
On considère la fonction : $h = f + g$.
1° Démontrer que, si f et g sont croissantes sur E, h est croissante sur E.
2° Démontrer que, si f et g sont décroissantes sur E, h est décroissante sur E.
3° Vérifier sur les exemples suivants que, si l'une des fonctions f ou g est croissante et l'autre décroissante, on ne peut conclure a priori sur le sens de variations de h :
a) $E = \mathbb{R}^*$, $f : x \longmapsto x^2$, $g : x \longmapsto -2x$.
b) $E = \mathbb{R}^*$, $f : x \longmapsto -x^2$, $g : x \longmapsto 2x$.

42 Soient deux fonctions f et g définies sur un même intervalle E.
On considère la fonction : $h = f.g$.
Étudier le sens de variations de h dans les quatre cas suivants :
a) $f(x)$ et $g(x)$ sont positives dans E, f et g sont croissantes sur E.
b) $f(x)$ et $g(x)$ sont positives dans E, f et g sont décroissantes sur E.
c) $f(x)$ et $g(x)$ sont négatives dans E, f et g sont croissantes sur E.
d) $f(x)$ et $g(x)$ sont négatives dans E, f et g sont décroissantes sur E.

43 Soit une fonction f définie sur un intervalle E telle que :
$\forall x \in E, \quad f(x) \neq 0$.
Étudier le sens de variations de la fonction $\frac{1}{f}$ dans les deux cas suivants :
a) f est croissante sur E.
b) f est décroissante sur E.

44 Démontrer qu'une fonction f définie sur un intervalle E est injective si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante. En déduire le sens de variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction racine carrée.

45 On considère les fonctions f et g suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad f(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = x^2$,
$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad g(x) = x^3$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = 0$.
1° Démontrer que la fonction produit $f.g$ est la fonction nulle.
2° En déduire que l'ensemble des fonctions différentes de la fonction nulle n'est pas une partie stable de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de l'opération produit.

8.
Continuité. Limites

Continuité d'une fonction.

Continuité d'une fonction en un point.

1 **DÉFINITION : On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est continue en un point x_0 de cet intervalle si et seulement si, pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel α strictement positif pour lequel on a l'implication :**

$(x \in]a, b[\quad \text{et} \quad |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

Nous écrivons donc :

(f est continue au point x_0 de $]a, b[$) $\Longleftrightarrow$

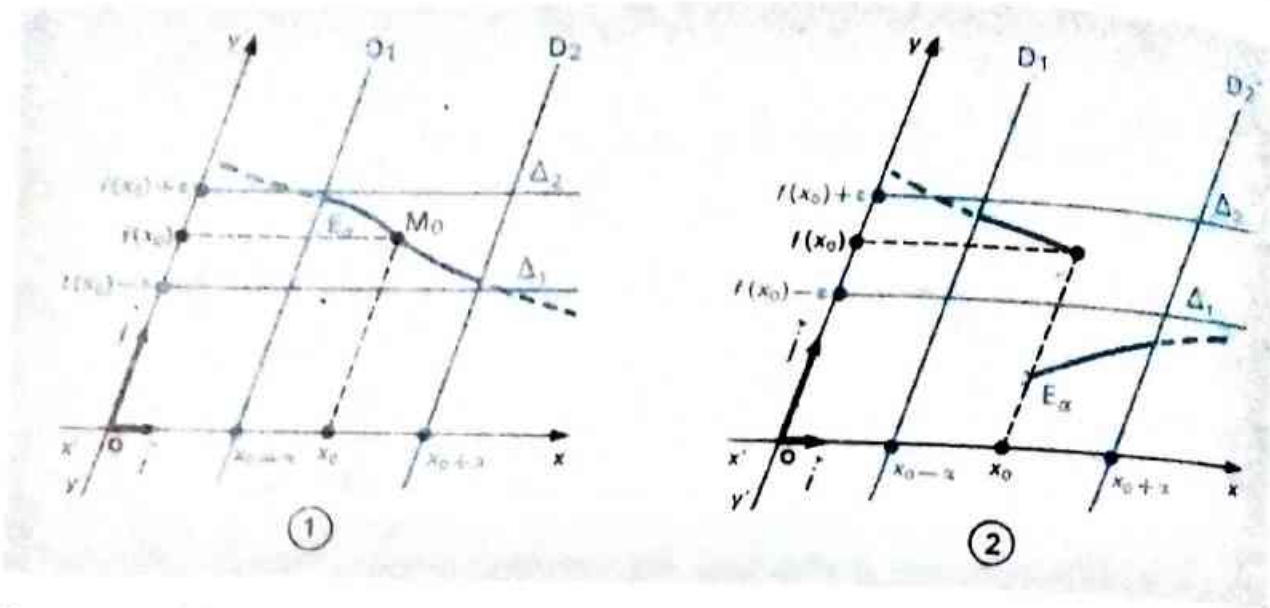
$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, (x \in]a, b[\text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)).$$

2 **Remarque :** La propriété: $|x - x_0| < \alpha$ est logiquement équivalente à la propriété : $x \in]x_0 - \alpha, \ x_0 + \alpha[$. Cette deuxième propriété est parfois plus commode à utiliser que la première.

Interprétation graphique de la continuité en un point.

3 Soient une fonction f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ et x_0 un point de cet intervalle. Désignons par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans un plan rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$, et par M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.

Soient ε un réel strictement positif et $\mathcal{B}$ la bande dont les bords sont les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives : $y = f(x_0) - \varepsilon$ et $y = f(x_0) + \varepsilon$.



Pour tout réel α strictement positif, définissons :
1. La bande $\mathcal{B}_\alpha$ dont les bords sont les droites D_1 et D_2 d'équations respectives : $x = x_0 - \alpha$ et $x = x_0 + \alpha$.
2. L'ensemble E_α des points de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse x appartient à l'intervalle $]x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha[$.

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si, pour tout ε, il existe α tel que l'on ait : $E_\alpha \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{B}_\alpha$.

Sur la figure 1, la fonction f est continue en x_0 ; sur la figure 2, la fonction f n'est pas continue en x_0.

Exemples d'étude de la continuité d'une fonction en un point.

4 Considérons l'application identique sur $\mathbb{R}$: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x$.
Soit x_0 un réel. Pour tout réel ε strictement positif, nous avons l'implication :
$(|x - x_0| < \varepsilon) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
Pour tout réel ε strictement positif, il existe donc un réel α tel que :
$(|x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
Il suffit, en effet, de prendre : $\alpha = \varepsilon$.
L'application identique sur $\mathbb{R}$ est donc continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$.

5 Considérons la fonction numérique : $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x - E(x)$.
Étudions la continuité de la fonction g au point 1.
Nous avons : $E(1) = 1$ et $g(1) = 0$.
Soit α un réel positif strictement inférieur à $\frac{1}{2}$; nous avons : $1 - \alpha > \frac{1}{2}$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]1 - \alpha,\ 1[$, nous avons : $E(x) = 0$ et $g(x) = x$.
Nous avons : $(x \in]1 - \alpha,\ 1[) \Longrightarrow (|g(x) - g(1)| = x)$,
ou encore : $(x \in]1 - \alpha,\ 1[) \Longrightarrow \left(|g(x) - g(1)| > \frac{1}{2}\right)$.

L'intervalle $]1 - \alpha, 1[$ est inclus dans l'intervalle $]1 - \alpha, 1 + \alpha[$. Il existe donc, dans tout intervalle $]1 - \alpha, 1 + \alpha[$ $\left(\text{avec } \alpha < \frac{1}{2}\right)$, des réels x pour lesquels $g(x) - g(1)$ est supérieur à $\frac{1}{2}$. La fonction g n'est pas continue au point 1.

On peut vérifier que la fonction g est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.

6 Considérons la fonction $p : \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \rightsquigarrow x^2$.
Soit x_0 un réel strictement positif. Étudions la continuité de la fonction p au point x_0.
Pour tout réel positif ou nul x, nous avons l'égalité : $p(x) - p(x_0) = x^2 - x_0^2$, ou encore : $p(x) - p(x_0) = (x - x_0)(x + x_0)$.
Soit α_1 un réel strictement positif inférieur à x_0 ; pour tout x de l'intervalle $]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1[$, la valeur absolue $| x + x_0 |$ est inférieure à $2x_0 + \alpha_1$.
Pour tout ε strictement positif, l'inégalité $| p(x) - p(x_0) | < \varepsilon$ est vérifiée si $| x - x_0 |\, | x + x_0 |$ est inférieur à ε.
Il suffit d'avoir : $| x - x_0 |\, (2x_0 + \alpha_1) < \varepsilon$, c'est-à-dire $| x - x_0 | < \dfrac{\varepsilon}{2x_0 + \alpha_1}$.
Posons : $\alpha_2 = \dfrac{\varepsilon}{2x_0 + \alpha_1}$.
En prenant pour α le plus petit des deux réels strictement positifs α_1 et α_2, nous avons : $(| x - x_0 | < \alpha) \Longrightarrow (| p(x) - p(x_0) | < \varepsilon)$.
La fonction p est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}_+^*$.

7 Considérons la fonction $p_1 : \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \rightsquigarrow \sqrt{x}$. Nous admettons que cette fonction est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ (voir exercice n° 8, p. 114).

Continuité à droite d'une fonction en un point.

8 **DÉFINITION : On dit qu'une fonction numérique f, définie sur un intervalle $[x_0, b[$, est continue à droite au point x_0 si et seulement si :**
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, (x \in [x_0, b[\quad \text{et} \quad x - x_0 < \alpha) \Longrightarrow (| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon)$.

9 **Remarque :** La propriété : $x - x_0 < \alpha$ est logiquement équivalente à la propriété $x \in [x_0, x_0 + \alpha[$. Cette deuxième propriété est parfois plus commode à utiliser que la première.

10 **Exemple :** Considérons la fonction numérique :
$g : \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x - E(x)$.
Nous avons montré que cette fonction n'est pas continue au point 1. Cherchons si elle est continue à droite en ce point. Nous avons : $E(1) = 1$, et $g(1) = 0$.
Soit α un réel positif strictement inférieur à 1 ; nous avons : $1 + \alpha < 2$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[1, 1 + \alpha[$, nous avons : $E(x) = 1$, et $g(x) = x - 1$.
Nous avons : $(x \in [1, 1 + \alpha[) \Longrightarrow (|g(x) - g(1)| = |x - 1|)$,
ou encore : $(x \in [1, 1 + \alpha[) \Longrightarrow (|g(x) - g(1)| < \varepsilon)$.
Pour tout réel ε strictement positif, prenons α égal au plus petit des deux réels α et 1.
Nous avons alors : $(x - 1 < \alpha) \Longrightarrow (|g(x) - g(1)| < \varepsilon)$.
La fonction g est continue à droite au point $x_0 = 1$.

Continuité à gauche d'une fonction en un point.

11 DÉFINITION : On dit qu'une fonction numérique f, définie sur un intervalle $]a, x_0]$, est continue à gauche au point x_0 si et seulement si :
$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, (x \in]a, x_0]$ et $x_0 - x < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$.

12 Remarque : La propriété : $x_0 - x < \alpha$ est logiquement équivalente à la propriété : $x \in]x_0 - \alpha, x_0]$. Cette propriété est parfois plus commode à utiliser que la première.

Continuité; continuité à droite; continuité à gauche.

13 Le rapprochement des définitions précédentes permet d'énoncer des conclusions importantes sur la continuité d'une fonction en un point.
1. Si une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ est continue en un point x_0 de cet intervalle, elle est continue à droite et elle est continue à gauche en x_0.
2. Si une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est continue à droite et continue à gauche en un point x_0 de cet intervalle, elle est continue au point x_0.

Continuité d'une fonction sur un intervalle ouvert.

14 DÉFINITION : On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est continue sur cet intervalle si et seulement si elle est continue en chaque point de l'intervalle $]a, b[$.

Continuité d'une fonction sur un intervalle fermé.

15 DÉFINITION : On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ est continue sur cet intervalle si et seulement si elle est continue sur l'intervalle $]a, b[$, continue à droite au point a et continue à gauche au point b.

Notions sur les limites.

Limite d'une fonction lorsque x tend vers x_0.

16 Considérons une fonction f définie sur chacun des intervalles $]a, x_0[$ et $]x_0, b[$. Soient un réel L et la fonction g définie sur l'intervalle $]a, b[$ par :
$g(x_0) = L$ et $\forall x \in]a, x_0[\cup]x_0, b[, \quad g(x) = f(x)$.

DÉFINITION : On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers x_0, ou que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers x_0, si et seulement si la fonction g est continue au point x_0.

Nous notons alors : $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

On dit aussi que L est la limite de la fonction f au point x_0.

17 Nous admettons le théorème :

THÉORÈME : Si $f(x)$ a une limite quand x tend vers x_0, cette limite est unique.

18 La fonction g est continue au point x_0 si et seulement si, pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel α strictement positif pour lequel on a l'implication :
$(x \in]a, b[\text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow (|g(x) - L| < \varepsilon)$.
Pour toute valeur de x distincte de x_0, nous avons l'égalité : $g(x) = f(x)$.
Nous en déduisons l'implication suivante, vérifiée par la fonction f telle que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers x_0 :
$(x \in]a, b[\text{ et } 0 < |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)$.
Aucune hypothèse n'est formulée ni sur l'existence de la fonction f au point x_0, ni sur l'éventuelle valeur de $f(x_0)$. Il est donc nécessaire d'introduire ici la condition : $x \neq x_0$, ou encore : $0 < |x - x_0|$.

19 Réciproquement, soient un réel L et une fonction f définie sur $]a, x_0[\cup]x_0, b[$. Supposons que pour tout réel ε strictement positif il existe un réel strictement positif α pour lequel on a l'implication :
$(x \in]a, b[\text{ et } 0 < |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)$.
Soit alors la fonction numérique g définie par : $g(x_0) = L$ et par : $g(x) = f(x)$ pour tout x de l'ensemble $]a, x_0[\cup]x_0, b[$. Cette fonction g est continue au point x_0 ; nous en concluons que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers x_0.

20 THÉORÈME : Soient une fonction f définie sur $]a, x_0[\cup]x_0, b[$ et un réel L ; $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers x_0 si et seulement si :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad (0 < |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)$.

21 Remarque : Il est parfois commode d'interpréter le théorème en disant que, pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel α strictement positif tel que, si x, différent de x_0, appartient à l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, l'image $f(x)$ appartient à l'intervalle $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

Limite d'une fonction continue en un point.

22 Une fonction f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ est continue en un point x_0 de cet intervalle si et seulement si :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad (|x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
Il résulte du théorème précédent l'équivalence logique :
(f fonction continue en x_0) $\Longleftrightarrow$ $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right)$.

THÉORÈME : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ et soit x_0 un point de cet intervalle. La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle admet pour limite $f(x_0)$ quand x tend vers x_0.

Exemple de limite.

23 Considérons la fonction $f : \forall x \in D_f, \quad x \mapsto \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$.

L'ensemble de définition D_f de cette fonction est : $\mathbb{R} - \{1\}$.
Nous allons démontrer que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 1.
En effet, pour tout réel x de D_f, le réel $x - 1$ est non nul et nous avons l'égalité :
$f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x-1}$, c'est-à-dire : $f(x) = x$.
La fonction g définie par : $g(1) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \quad g(x) = f(x)$, est l'application identique sur $\mathbb{R}$; elle est continue au point 1.
Nous en déduisons que, quand x tend vers 1, $f(x)$ a une limite et que cette limite est égale à 1.

Limite à droite d'une fonction lorsque x tend vers x_0 par valeurs supérieures.

24 Considérons une fonction f définie sur l'intervalle $]x_0, b[$. Soient un réel L et la fonction g définie sur l'intervalle $[x_0, b[$ par :
$g(x_0) = L$ et $\forall x \in [x_0, b[, \quad g(x) = f(x)$.

DÉFINITION : On dit que $f(x)$ a pour limite à droite L lorsque x tend vers x_0 par valeurs supérieures si et seulement si la fonction g est continue à droite au point x_0.

Nous notons alors : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

On dit aussi que L est la limite à droite de la fonction f au point x_0.

25 Nous admettons le théorème :

THÉORÈME : Si $f(x)$ a une limite à droite L quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures, cette limite L est unique.

On démontre et nous admettons le théorème suivant :

26 **THÉORÈME : Soient une fonction f définie sur l'intervalle $]x_0\ b[$ et un réel L; $f(x)$ a pour limite à droite L lorsque x tend vers x_0 par valeurs supérieures si et seulement si :**

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ (0 < x - x_0 < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)$.

27 Exemple : Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad \varphi(x) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = 1$.

La limite à droite de la fonction φ au point 0 est égale à 1. En effet, considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 1$.

La fonction g est continue à droite au point 1.

Nous en déduisons : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = 1$.

Limite à gauche d'une fonction lorsque x tend vers x_0 par valeurs inférieures.

28 Considérons une fonction f définie sur l'intervalle $]a, x_0[$. Soient un réel L et la fonction g définie sur l'intervalle $]a, x_0]$ par :

$g(x_0) = L$ et $\forall x \in]a, x_0[, \quad g(x) = f(x)$.

DÉFINITION : On dit que $f(x)$ a pour limite à gauche L lorsque x tend vers x_0 par valeurs inférieures si et seulement si la fonction g est continue à gauche au point x_0.

Nous notons alors : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

On dit aussi que L est la limite à gauche de la fonction f au point x_0.

Nous admettons le théorème :

29 THÉORÈME : Si $f(x)$ a une limite à gauche L quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures, cette limite L est unique.

On démontre et nous admettons le théorème suivant :

30 THÉORÈME : Soient une fonction f définie sur l'intervalle $]a, x_0[$ et un réel L ; $f(x)$ a pour limite à gauche L lorsque x tend vers x_0 par valeurs inférieures si et seulement si :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ (0 < x_0 - x < \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon).$

31 Exemple : Considérons la fonction E : $x \rightsquigarrow E(x)$.
$E(x)$ admet 0 comme limite à gauche quand x tend vers 1.
En effet, la fonction g définie sur $]0, 1]$ par : $g(1) = 0$ et $\forall x \in]0, 1[$, $g(x) = E(x)$, est continue à gauche au point 1.
Nous en déduisons : $\lim\limits_{x \to 1^-} E(x) = 0$.

Limite; limite à droite; limite à gauche.

32 Le rapprochement des théorèmes précédents permet d'énoncer des conclusions importantes sur la limite d'une fonction quand x tend vers x_0.

1. Si une fonction a une limite L quand x tend vers x_0, cette fonction a une limite à droite et une limite à gauche quand x tend vers x_0. La limite à droite et la limite à gauche sont égales à L.

2. Si une fonction a une limite à droite L_1 quand x tend vers x_0^+ et une limite à gauche L_2 quand x tend vers x_0^-, et si on a l'égalité : $L_1 = L_2$, cette fonction a une limite L quand x tend vers x_0. Cette limite L est égale à L_1 et à L_2.

Limite d'une fonction lorsque x tend vers $+\infty$.

33 Considérons une fonction f définie sur l'intervalle $]a, +\infty[$. Soit L un réel.

DÉFINITION : On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers $+\infty$, ou que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$, si et seulement si :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \ (x > A) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)$.
Nous convenons de noter : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

34 Remarques : 1. Il est parfois commode d'interpréter la définition précédente en disant que, pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que, si x appartient à l'intervalle $]A, +\infty[$, l'image $f(x)$ appartient à l'intervalle $]L - \varepsilon, \ L + \varepsilon[$.

2. Nous définissons, d'une manière analogue, une fonction f qui tend vers une limite L lorsque x tend vers $-\infty$:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x < -A) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon)$.

35 **Exemples :** 1. Considérons la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \rightsquigarrow \frac{1}{x}$

Nous allons démontrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Pour tout réel ε strictement positif nous avons l'équivalence logique :

$(x > 0, \quad |f(x)| < \varepsilon) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{\varepsilon} < x\right)$.

Posons : $A = \frac{1}{\varepsilon}$; le réel A est strictement positif.

Nous écrivons l'équivalence logique précédente sous la forme :

$(x > 0, \quad |f(x)| < \varepsilon) \Longleftrightarrow (x > A)$.

Nous en déduisons que, pour tout réel ε strictement positif, il existe un réel strictement positif, $A = \frac{1}{\varepsilon}$, pour lequel on a l'implication : $(x > A) \Longrightarrow (|f(x)| < \varepsilon)$.

Il en résulte que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

2. Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - E(x)$.

Nous allons démontrer que $g(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Soit ε un réel strictement positif inférieur à 1 ; par exemple : $\varepsilon = \frac{1}{8}$. Si $g(x)$ avait une limite L quand x tend vers $+\infty$, il existerait un réel A strictement positif pour lequel nous aurions l'implication (n° 34, p. 108) :

$(x > A) \Longrightarrow \left(g(x) \in \left]L - \frac{1}{8}, \quad L + \frac{1}{8}\right[\right)$.

Pour tout entier n, nous avons : $g(n) = 0$ et $g\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

En particulier, ces égalités sont vérifiées pour tout entier n supérieur à A.

Il n'existe aucun réel L pour lequel $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ soit inclus dans $\left]L - \frac{1}{8}, \quad L + \frac{1}{8}\right[$.

Il en résulte que $g(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0.

36 Considérons une fonction numérique f définie sur l'ensemble $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

DÉFINITION : On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 si et seulement si : $\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad (0 < |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow (f(x) > B)$.

Nous convenons de noter : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

37 **Remarques :** 1. Il est parfois commode d'interpréter la définition précédente en disant que, pour tout réel B strictement positif, il existe un réel α strictement positif tel que si x, différent de x_0, appartient à l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, l'image $f(x)$ appartient à l'intervalle $]B, + \infty[$.

2. Nous donnons une définition analogue pour une fonction f qui tend vers $- \infty$ lorsque x tend vers x_0 :

$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad (0 < |x - x_0| < \alpha) \Longrightarrow (f(x) < - B)$.

38 **Exemple :** Considérons la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x \rightsquigarrow \frac{1}{x^2}$.

Nous allons démontrer que $f(x)$ tend vers $+ \infty$ lorsque x tend vers 0.

Pour tout réel A strictement positif nous avons l'équivalence logique :

$$(f(x) > A) \iff \left(0 < x^2 < \frac{1}{A}\right). \qquad (1)$$

Posons : $\alpha = \sqrt{\frac{1}{A}}$; le réel α est strictement positif.

La fonction g : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \rightsquigarrow x^2$ est strictement croissante ; nous en déduisons l'implication : $(0 < |x| < \alpha) \Longrightarrow (0 < x^2 < \alpha^2)$,

c'est-à-dire : $(0 < |x| < \alpha) \Longrightarrow \left(0 < x^2 < \frac{1}{A}\right)$.

De l'équivalence logique (1), nous déduisons l'implication :

$(0 < |x| < \alpha) \Longrightarrow (f(x) > A)$.

Il en résulte que $f(x)$ tend vers $+ \infty$ lorsque x tend vers 0.

Fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0^+.

39 Considérons une fonction numérique f définie sur l'intervalle $]x_0, b[$.

DÉFINITION : On dit que $f(x)$ tend vers $+ \infty$ lorsque x tend vers x_0^+ si et seulement si : $\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad (0 < x - x_0 < \alpha) \Longrightarrow (f(x) > B)$.

Nous convenons de noter : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = + \infty$.

40 **Remarque :** Nous donnons une définition analogue pour une fonction f qui tend vers $- \infty$ lorsque x tend vers x_0^+ :

$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad (0 < x - x_0 < \alpha) \Longrightarrow (f(x) < - B)$.

41 **Exemple :** Considérons la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x \rightsquigarrow \frac{1}{x}$.

Nous allons démontrer que $f(x)$ tend vers $+ \infty$ lorsque x tend vers 0^+.

Pour tout réel B strictement positif, nous avons l'équivalence logique :

$$(f(x) > B) \iff \left(0 < x < \frac{1}{B}\right).$$

Posons : $\alpha = \frac{1}{B}$; le réel α est strictement positif et l'on a l'implication :

$(0 < x < \alpha) \Longrightarrow (f(x) > B)$.

Il en résulte que $f(x)$ tend vers $+ \infty$ lorsque x tend vers 0^+.

Fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0^-.

42 Considérons une fonction numérique f définie sur l'intervalle $]a, x_0[$.

DÉFINITION : On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0^- si et seulement si : $\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad (0 < x_0 - x < \alpha) \Longrightarrow (f(x) > B)$.

Nous convenons de noter : $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

43 **Remarque :** Nous donnons une définition analogue pour une fonction f qui tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0^- :

$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad (0 < x_0 - x < \alpha) \Longrightarrow (f(x) < -B)$.

44 **Exemple :** Considérons la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow \dfrac{1}{x}$

Nous allons démontrer que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0^-.
Pour tout réel B strictement positif, nous avons l'équivalence logique :

$$(f(x) < -B) \Longleftrightarrow \left(-\frac{1}{B} < x < 0\right).$$

Posons : $\alpha = -\dfrac{1}{B}$; le réel α est strictement positif et l'on a l'implication :

$(0 < -x < \alpha) \Longrightarrow (f(x) < -B)$.

Il en résulte que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^-.

Fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

45 Considérons une fonction numérique f définie dans l'intervalle $[a, +\infty[$.

DÉFINITION : On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si : $\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x > A) \Longrightarrow (f(x) > B)$.

Nous convenons de noter : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

46 **Remarques :** 1. Il est parfois commode d'interpréter la définition précédente en disant que, pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que, si x appartient à l'intervalle $]A, +\infty[$, l'image $f(x)$ appartient à l'intervalle $]B, +\infty[$.

2. Nous donnons une définition analogue dans chacun des cas suivants :

a) fonction f qui tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$:
$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x > A) \Longrightarrow (f(x) < -B)$.

b) fonction f qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$:
$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x < -A) \Longrightarrow (f(x) > B)$.

c) fonction f qui tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$:
$\forall B \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x < -A) \Longrightarrow (f(x) < -B)$.

Exemples : 1. Considérons la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow x$.
Pour tout réel B strictement positif, il existe un réel A strictement positif, le réel B par exemple, tel que l'on ait l'implication : $(x > A) \Longrightarrow (f(x) > B)$.
Il en résulte que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Considérons la fonction E : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow E(x)$.
Nous allons montrer que $E(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
Soient un réel arbitraire B et un entier n supérieur à B.
L'image par E des réels supérieurs à n est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à n.
Nous en déduisons l'implication :
$(x > n) \Longrightarrow (E(x) \geqslant n)$.
Il existe donc un entier A strictement positif, l'entier n par exemple, pour lequel on a l'implication :
$(x > A) \Longrightarrow (E(x) > B)$.
Il en résulte que $E(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Comportement d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions.

47 Les définitions que nous venons de donner permettent d'établir, dans certains cas, le "comportement "d'une fonction f dans "certaines conditions" :
comportement: $f(x)$ tend vers une limite, ou $f(x)$ tend vers $+\infty$, ou $f(x)$ tend vers $-\infty$.
conditions : x tend vers x_0, ou x tend vers $+\infty$, ou x tend vers $-\infty$.
Considérons deux fonctions f et g définies sur un intervalle ouvert A.
On suppose que l'on connaît les comportements respectifs de f et de g dans les **mêmes** conditions pour x: soit x tend vers x_0, soit x tend vers $+\infty$, soit x tend vers $-\infty$.
Les théorèmes suivants permettent de connaître, dans les mêmes conditions pour x, le comportement de la somme $f + g$, du produit $f.g$, du quotient $\frac{f}{g}$.
Nous admettons ces théorèmes sans démonstration.

Somme de deux fonctions.

48
Si $f(x)$ tend vers L_1 et si $g(x)$ tend vers L_2, $f(x) + g(x)$ tend vers $L_1 + L_2$.
Si $f(x)$ tend vers L_1 et si $g(x)$ tend vers $+\infty$, $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$.
Si $f(x)$ tend vers L_1 et si $g(x)$ tend vers $-\infty$, $f(x) + g(x)$ tend vers $-\infty$.
Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ et si $g(x)$ tend vers $+\infty$, $f(x) + g(x)$ tend vers $+\infty$.
Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et si $g(x)$ tend vers $-\infty$, $f(x) + g(x)$ tend vers $-\infty$.

49 **Remarque :** Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ et si $g(x)$ tend vers $-\infty$, il est impossible de conclure a priori.

Produit de deux fonctions.

50 Si $f(x)$ tend vers L_1 et si $g(x)$ tend vers L_2, $f(x) \cdot g(x)$ tend vers $L_1 \cdot L_2$.
Si $f(x)$ tend vers $L_1 \neq 0$ et si $g(x)$ tend vers $+\infty$, $|f(x) \cdot g(x)|$ tend vers $+\infty$.
Si $f(x)$ tend vers $L_1 \neq 0$, et si $g(x)$ tend vers $-\infty$, $|f(x) \cdot g(x)|$ tend vers $+\infty$.
Si $f(x)$ tend vers $+\infty$, et si $g(x)$ tend vers $+\infty$, $f(x) \cdot g(x)$ tend vers $+\infty$.
Si $f(x)$ tend vers $+\infty$, et si $g(x)$ tend vers $-\infty$, $f(x) \cdot g(x)$ tend vers $-\infty$.
Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et si $g(x)$ tend vers $-\infty$, $f(x) \cdot g(x)$ tend vers $+\infty$.

51 **Remarque :** Si $f(x)$ tend vers 0 et si $g(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, il est impossible de conclure a priori.

Quotient de deux fonctions.

52 Si $f(x)$ tend vers L_1 et si $g(x)$ tend vers $L_2 \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $\dfrac{L_1}{L_2}$.

Si $f(x)$ tend vers L_1 et si $g(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0.

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ et si $g(x)$ tend vers L_2, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ tend vers $+\infty$.

Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et si $g(x)$ tend vers L_2, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ tend vers $+\infty$.

Si $f(x)$ tend vers $L_1 \neq 0$ et si $g(x)$ tend vers 0, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ tend vers $+\infty$.

53 **Remarque :** Si $f(x)$ et $g(x)$ tendent simultanément vers 0, il est impossible de conclure a priori. Il en est de même si $f(x)$ et $g(x)$ tendent simultanément vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, ou tendent l'une vers $+\infty$, l'autre vers $-\infty$.

EXERCICES

Continuité.

◆ Dans chacun des exercices suivants (n°s 1 à 6), on considère une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et un point x_0 de $\mathbb{R}$. Démontrer que cette fonction est continue au point x_0.

1 $x \rightsquigarrow \dfrac{2x}{3}$.

2 $x \rightsquigarrow -\dfrac{3x}{2}$.

3 $x \rightsquigarrow 2x + 1$.

4 $x \rightsquigarrow 2 - 3x$.

5 $x \rightsquigarrow x^2 - 3x + 1$.

6 $x \rightsquigarrow -x^2 - 2x + 4$.

EXERCICES

7 On considère la fonction f définie sur $[0, 3]$ par : $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x+2}$.
Démontrer que f est continue sur $[0, 3]$.

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \longmapsto \sqrt{x}$.
1° Démontrer que f est continue en tout point x_0 de $]0, +\infty[$.
2° Démontrer que f est continue à droite au point 0.

9 Démontrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto |x|$, et par : $x \longmapsto \sqrt{|x|}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

10 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{x}{|x|}$.
Démontrer que f n'est pas continue au point 0.

11 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = E(1 + x) + E(1 - x)$.
Démontrer que f n'est pas continue au point 0.

12 Démontrer que, si f et g sont deux fonctions continues sur un même intervalle E, la fonction : $h = f + g$ est continue sur E.

Limites.

13 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1, 3\}$ par : $x \longmapsto \dfrac{(x-3)^2(x-1)^2}{(x-3)(x-1)}$
1° Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 ?
2° Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers 3 ?

14 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par : $x \longmapsto \dfrac{x^2}{|x|}$.
Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 ?

15 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par : $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{|x|}}$.
1° Démontrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.
2° Démontrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
3° Démontrer que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

16 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x+2}$.
Démontrer que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

17 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par : $x \longmapsto \dfrac{x+1}{1-2x}$.
Démontrer que $f(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

18 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto \dfrac{x+1}{2x^2+1}$.
Démontrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

19 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto \dfrac{x^3+1}{6x^2+5}$.

Démontrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$ par : $x \longmapsto \dfrac{x^4-81}{x^2-9}$.

1° Démontrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

2° Démontrer que $f(x)$ tend vers 18 quand x tend vers 3 ou vers -3.

◆ Dans chacun des exercices suivants (n°s 21 à 30), on considère une fonction f définie sur un ensemble D_f que l'on précisera. Étudier le comportement de la fonction f dans chacun des cas indiqués :

21 $f(x) = -x^2 + 6x - 1$. 1° x tend vers $+\infty$. 2° x tend vers $-\infty$.

22 $f(x) = 2x^2 + x + 1$. 1° x tend vers $+\infty$. 2° x tend vers $-\infty$.

23 $f(x) = 5x - 1 + \dfrac{1}{x^2}$. 1° x tend vers 0. 2° x tend vers $+\infty$.

3° x tend vers $-\infty$.

24 $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$. 1° x tend vers 1. 2° x tend vers $+\infty$.

3° x tend vers $-\infty$.

25 $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^2-4}$. 1° x tend vers $+\infty$. 2° x tend vers $-\infty$.

3° x tend vers $+2$. 4° x tend vers -2.

26 $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4} + \dfrac{x+6}{x^2+4x-12}$. 1° x tend vers 2. 2° x tend vers -2.

3° x tend vers -6. 4° x tend vers $+\infty$. 5° x tend vers $-\infty$.

27 $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^3-1} - \dfrac{x^2+4}{x^3+1}$. 1° x tend vers 1. 2° x tend vers -1.

3° x tend vers $+\infty$. 4° x tend vers $-\infty$.

28 $f(x) = \dfrac{x+2}{x+\sqrt{x+6}}$. 1° x tend vers -2. 2° x tend vers $+\infty$.

29 $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$, x tend vers $+\infty$.

30 $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$, x tend vers $+\infty$.

EXERCICES

✗ **31** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $x \rightsquigarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}}$.

Déterminer une fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, qui prolonge la fonction f et qui est continue sur $\mathbb{R}$.

32 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$x \rightsquigarrow x - \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}}$.

1° Déterminer une fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, qui prolonge la fonction f, et qui est continue à droite au point : $x_0 = -1$.
2° Déterminer une fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, qui prolonge la fonction f, et qui est continue à gauche au point x_0.
3° Existe-t-il une fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui prolonge f, et qui est continue au point x_0.

33 Même exercice que le n° 32 pour la fonction f définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x \rightsquigarrow \dfrac{x^2 + \sqrt{x^2}}{x^2 - \sqrt{x^2}}$, et le point : $x_0 = 0$.

34 Démontrer les théorèmes suivants énoncés et admis dans le cours :
1° Si $f(x)$ tend vers L_1 et si $g(x)$ tend vers L_2 quand x tend vers x_0, $f(x) + g(x)$ tend vers $L_1 + L_2$ quand x tend vers x_0.
2° Si $f(x)$ tend vers L_1 et si $g(x)$ tend vers L_2 quand x tend vers $+\infty$, $f(x) + g(x)$ tend vers $L_1 + L_2$ quand x tend vers $+\infty$.
3° Si $f(x)$ tend vers L_1 et si $g(x)$ tend vers L_2 quand x tend vers $-\infty$, $f(x) + g(x)$ tend vers $L_1 + L_2$ quand x tend vers $-\infty$.

35 Soit une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ et un point x_0 de cet intervalle. Démontrer que si la fonction f admet une limite quand x tend vers x_0, cette limite est unique.

36 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a, b[$ et un point x_0 de cet intervalle. Démontrer que les conditions : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L'$ et $L < L'$ impliquent l'existence d'un réel strictement positif α tel que, pour tout x de l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, on ait l'inégalité : $f(x) < g(x)$.

37 Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a, b[$ et un point x_0 de cet intervalle.
1° On suppose que, pour tout x de l'intervalle $]a, b[$, on a : $f(x) \leqslant g(x)$. Démontrer que les égalités : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L'$ impliquent l'inégalité : $L \leqslant L'$.
2° On suppose que, pour tout x de l'intervalle $]a, b[$, on a : $f(x) < g(x)$. Les égalités : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L'$, impliquent-elles l'inégalité : $L < L'$?

9.
Fonction dérivable en un point Fonction dérivée

Fonction dérivable en un point.

1 Soient une fonction numérique f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ et un point x_0 de cet intervalle. Il existe un réel positif α tel que l'intervalle ouvert $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ soit inclus dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. Considérons la fonction φ définie sur l'ensemble $]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[$ par $\varphi(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

DÉFINITION : On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ est dérivable en un point x_0 de cet intervalle si et seulement si $\varphi(h)$ tend vers une limite m quand h tend vers 0.

Nombre dérivé.

2 Soit f une fonction dérivable en un point x_0 de l'intervalle ouvert $]a, b[$. La limite m de $\varphi(h)$ est unique. On l'appelle **nombre dérivé** de la fonction f au point x_0.

Continuité d'une fonction dérivable en un point.

3 **THÉORÈME : Si une fonction f est définie sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et dérivable en un point x_0 de cet intervalle, elle est continue au point x_0.**

En effet, pour tout réel non nul h de l'intervalle $]-\alpha, +\alpha[$, nous avons l'égalité : $f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot \varphi(h)$.
f est dérivable en x_0 ; donc, lorsque h tend vers 0, $\varphi(h)$ tend vers un réel m et le produit $h \cdot \varphi(h)$ tend vers 0. Nous en déduisons que $f(x_0 + h)$ tend vers $f(x_0)$ quand h tend vers 0. D'après le théorème du n° 22, p. 106, nous concluons que f est continue au point x_0.

4 **Remarques** : 1. L'ensemble des fonctions dérivables en un point est inclus dans l'ensemble des fonctions continues en ce point.
Mais une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point. Nous en donnerons un exemple au n° 8, p. 119.

2. La fonction φ est le quotient de deux fonctions ; elle n'est pas définie au point 0. Quand h tend vers 0, le numérateur et le dénominateur tendent simultanément vers 0 ; le théorème sur la limite d'un quotient ne permet donc pas de conclure a priori l'existence d'une limite pour $\varphi(h)$ quand h tend vers 0.

Exemples de fonctions dérivables en un point.

Fonction constante sur $\mathbb{R}$.

5 Soit une fonction f constante sur $\mathbb{R}$: f : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow k$.

Considérons la fonction φ : $\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad h \rightsquigarrow \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Pour tout réel non nul h, nous avons : $\varphi(h) = 0$.
Il en résulte que $\varphi(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

THÉORÈME : Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$. Le nombre dérivé de cette fonction au point x_0 est égal à 0.

Fonction g : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x$.

6 Soient la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x$, et un point x_0 de $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction φ : $\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad h \rightsquigarrow \dfrac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$.

Pour tout réel non nul h, nous avons : $\varphi(h) = 1$.
Il en résulte que $\varphi(h)$ tend vers 1 lorsque h tend vers 0.

THÉORÈME : La fonction g : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$. Le nombre dérivé de cette fonction au point x_0 est égal à 1.

Fonction p : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \rightsquigarrow \sqrt{x}$.

7 Considérons la fonction p : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \rightsquigarrow \sqrt{x}$.
Soit x_0 un point de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$; x_0 est différent de 0.
Désignons par α un réel strictement positif et inférieur à x_0 : $x_0 - \alpha > 0$.

Considérons la fonction φ : $\forall h \in]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[, \quad h \rightsquigarrow \dfrac{p(x_0 + h) - p(x_0)}{h}$.

Nous avons : $\varphi(h) = \dfrac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$.

Multiplions les deux termes du rapport par le réel non nul : $\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}$.

Nous obtenons : $\varphi(h) = \dfrac{(\sqrt{x_0 + h})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{h\,(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \dfrac{(x_0 + h) - x_0}{h\,(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})}$.

h est un réel non nul ; simplifions par h ; nous obtenons : $\varphi(h) = \dfrac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}$.

La fonction p est continue sur $\mathbb{R}_+$. Quand h tend vers 0, $\sqrt{x_0 + h}$ tend donc vers $\sqrt{x_0}$. Le réel x_0 est différent de 0 ; nous en déduisons que $\varphi(h)$ a une limite quand h tend vers 0, et que cette limite est égale à $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

THÉORÈME : La fonction p : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \rightsquigarrow \sqrt{x}$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}_+^*$. Le nombre dérivé de cette fonction au point x_0 est égal à $\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

8 Remarque : La fonction λ : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow |x|$ n'est pas dérivable au point 0.

Considérons en effet la fonction φ : $\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad h \rightsquigarrow \dfrac{\lambda(0 + h) - \lambda(0)}{h}$.

Nous avons : $\varphi(h) = \dfrac{|h|}{h}$.

Si h est strictement positif, $\varphi(h)$ est égal à $+1$. Si h est strictement négatif, $\varphi(h)$ est égal à -1. Quand h tend vers 0, $\varphi(h)$ n'a donc pas de limite.

La fonction λ est continue au point 0 et elle n'est pas dérivable en ce point.

Nous en déduisons que **l'ensemble des fonctions dérivables au point 0 est une partie propre de l'ensemble des fonctions continues en ce point.**

Fonction linéaire tangente.

9 Considérons une fonction f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, dérivable au point x_0 de cet intervalle, et soit m le nombre dérivé en ce point.

Soit α un réel strictement positif tel que l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ soit inclus dans l'intervalle $]a, b[$; désignons par φ la fonction définie sur $]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[$ par : $\varphi(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Nous avons : $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = m$, et d'après les théorèmes sur les limites :

$\lim\limits_{h \to 0} [\varphi(h) - m] = 0$.

Désignons par $\mathcal{E}_\alpha$ l'ensemble des fonctions définies sur $]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[$ telles que : $(\varepsilon \in \mathcal{E}_\alpha) \iff \left(\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0\right)$.

La fonction ε définie par : $\forall h \in]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[, \quad \varepsilon(h) = \varphi(h) - m$ est un élément de $\mathcal{E}_\alpha$.

h est différent de 0 ; cette égalité est donc logiquement équivalente à l'égalité :

$f(x_0 + h) - f(x_0) = mh + h\,\varepsilon(h)$.

Nous concluons que, si f est dérivable au point x_0 de l'intervalle $]a, b[$, et si m est le nombre dérivé au point x_0, il existe un réel α strictement positif et une fonction ε appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}_\alpha$ tel que :
$\forall h \in]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[, \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = mh + h\,\varepsilon(h)$.
Considérons la fonction linéaire $\mathcal{L}_0$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{L}_0 : h \rightsquigarrow mh$.
Nous avons alors : $f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathcal{L}_0(h) + h\,\varepsilon(h)$.

10 DÉFINITION : Soient f une fonction définie sur $]a, b[$, x_0 un point de cet intervalle.
On dit qu'une fonction linéaire $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $h \rightsquigarrow ch$ est tangente à la fonction f au point x_0 si et seulement s'il existe un réel α strictement positif et une fonction ε appartenant à $\mathcal{E}_\alpha$ tels que :
$\forall h \in]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[, \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathcal{L}(h) + h\,\varepsilon(h)$.

Nous énonçons donc le théorème :

11 THÉORÈME : Si la fonction f définie sur $]a, b[$ est dérivable au point x_0 de cet intervalle, et si le nombre dérivé est m, la fonction linéaire $\mathcal{L}_0$ sur $\mathbb{R}$ définie par : $h \rightsquigarrow mh$ est une fonction linéaire tangente à la fonction f au point x_0.

12 Soit alors une fonction f définie sur $]a, b[$ qui admet au point x_0 de cet intervalle une application linéaire tangente $\mathcal{L} : h \rightsquigarrow ch$.
Il existe un réel α strictement positif tel que l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ soit inclus dans $]a, b[$, et une fonction ε appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}_\alpha$ telle que :
$\forall h \in]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[, \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = ch + \varepsilon(h)$.
h est différent de 0 ; nous avons donc : $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = c + \varepsilon(h)$.
Nous en concluons : $\lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right] = c$.

THÉORÈME : Si une fonction f définie sur $]a, b[$ admet au point x_0 de cet intervalle une fonction linéaire tangente $\mathcal{L} : h \rightsquigarrow ch$, la fonction f est dérivable au point x_0, et le nombre dérivé en x_0 est égal à c.

Le nombre dérivé en x_0, lorsqu'il existe, est unique ; cette unicité implique l'unicité de la fonction linéaire tangente à f en x_0, lorsqu'elle existe.

13 Il résulte de l'étude précédente le théorème suivant :

THÉORÈME : Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ et x_0 un point de cet intervalle.
Les propriétés suivantes sont logiquement équivalentes :
1. La fonction f est dérivable au point x_0 ;
2. La fonction f admet au point x_0 une fonction linéaire tangente.

Interprétation géométrique du nombre dérivé.

Limite d'une droite.

14 Considérons un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et un point M_0 de ce plan, de coordonnées (x_0, y_0).
Soient a une fonction définie sur un ensemble $]\lambda_0 - \beta, \lambda_0[\cup]\lambda_0, \lambda_0 + \beta[$ et λ un point de cet ensemble. Considérons la droite Δ_λ qui passe par M_0 et dont le coefficient directeur est $a(\lambda)$. L'équation de Δ_λ est : $y - y_0 = a(\lambda)(x - x_0)$.

DÉFINITION : On dit que la droite Δ_λ a une position limite quand λ tend vers λ_0 si et seulement si l'on a un des deux cas suivants :

1. $a(\lambda)$ tend vers une limite m quand λ tend vers λ_0. La droite Δ d'équation : $y - y_0 = m(x - x_0)$ est appelée limite de Δ_λ quand λ tend vers λ_0.

2. $a(\lambda)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand λ tend vers λ_0. La droite Δ d'équation : $x = x_0$ est appelée limite de Δ_λ quand λ tend vers λ_0.

Tangente en un point à une courbe.

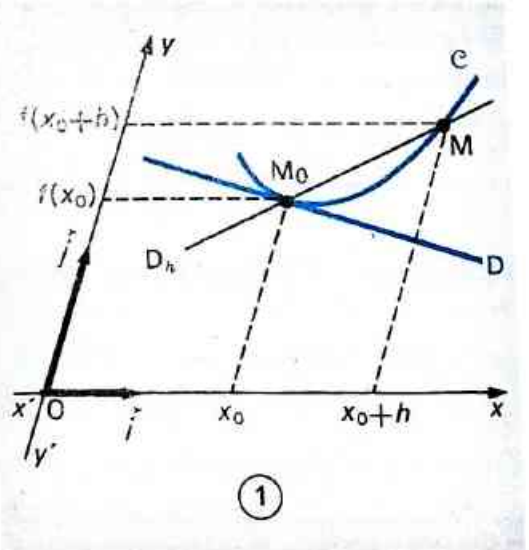
15 Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle $]a, b[$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (fig. 1).
Considérons un point M_0 de $\mathcal{C}$. L'abscisse x_0 de ce point appartient à l'ensemble de définition de la fonction f; l'ordonnée y_0 de ce point est $f(x_0)$. Considérons un autre point M de $\mathcal{C}$, distinct de M_0, et d'abscisse égale à $x_0 + h$; l'ordonnée y de M est $f(x_0 + h)$.
Les points M et M_0 déterminent une droite D_h qui n'est pas parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$. Le coefficient directeur $\varphi(h)$ de la droite D_h est donné par l'égalité :

$$\varphi(h) = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Nous avons donc :

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

L'équation de la droite D_h est :
$y - f(x_0) = \varphi(h)(x - x_0)$.



1

16 **DÉFINITION : On dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente au point M_0 si et seulement si la droite D_h a une position limite quand h tend vers 0. La droite D, limite de D_h, est appelée tangente en M_0 à la courbe $\mathcal{C}$.**

Si f est une fonction dérivable, $\varphi(h)$ tend vers une limite m quand h tend vers 0, et m est le nombre dérivé de la fonction f au point x_0.

Nous énonçons donc les théorèmes :

17 THÉORÈMES : 1. Si la fonction f est dérivable au point x_0, la courbe représentative $\mathcal{C}$ admet au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente dont le coefficient directeur m est égal au nombre dérivé de la fonction f au point x_0. L'équation de la tangente est : $y - f(x_0) = m(x - x_0)$.

2. Si la fonction f est continue au point x_0 et si le rapport $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ admet au point M_0 de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$. L'équation de la tangente en M_0 est : $x = x_0$.

18 Remarque : Supposons f dérivable au point x_0, et désignons par m le nombre dérivé en ce point ; nous savons que f admet au point x_0 la fonction linéaire tangente $\mathcal{L}$: $h \rightsquigarrow mh$.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ admet au point M_0 une tangente D d'équation : $y - f(x_0) = m(x - x_0)$.

Considérons les axes $\overrightarrow{X'M_0X}$ et $\overrightarrow{Y'M_0Y}$ respectivement parallèles aux axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$ et munis des mêmes vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Soit M un point du plan dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont (x, y) et dont les coordonnées dans le repère $(M_0, \vec{i}, \vec{j})$ sont (X, Y).

Nous avons les égalités : $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$.

L'équation de la droite D dans le repère $(M_0, \vec{i}, \vec{j})$ est alors : $Y = mX$.

Nous en déduisons la propriété suivante :

Si la fonction f admet au point x_0 la fonction linéaire tangente : $h \rightsquigarrow mh$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ admet au point M_0 une tangente D dont l'équation dans le repère $(M_0, \vec{i}, \vec{j})$ est : $Y = mX$.*

Fonction dérivable à droite en un point.

19 Soit une fonction f définie sur un intervalle $[x_0, b[$; il existe un réel strictement positif α tel que l'intervalle $]x_0, x_0 + \alpha[$ soit inclus dans l'intervalle $[x_0, b[$. Considérons la fonction φ définie sur l'intervalle $]0, \alpha[$ par : $\varphi(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

DÉFINITION : On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle $[x_0, b[$, est dérivable à droite au point x_0 si et seulement si $\varphi(h)$ a une limite à droite m quand h tend vers 0^+.

m est appelé nombre dérivé à droite de la fonction f au point x_0.

* Cette dernière propriété justifie le nom d'application linéaire tangente donné à cette fonction.

20 **Exemple :** Soit la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow |x|$. La fonction f est dérivable à droite au point 0.

En effet, considérons la fonction φ : $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $h \rightsquigarrow \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.

Pour tout point h de $\mathbb{R}_+^*$, nous avons : $f(h) = h$; nous en déduisons : $\varphi(h) = 1$.
Quand h tend vers 0^+, $\varphi(h)$ admet donc une limite à droite m_1 égale à 1. La fonction f est donc dérivable à droite au point 0; le nombre dérivé à droite de f au point 0 est 1.

Fonction dérivable à gauche en un point.

21 Soit une fonction f définie sur un intervalle $]a, x_0]$; il existe un réel strictement positif α tel que l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0[$ soit inclus dans l'intervalle $]a, x_0]$. Considérons la fonction φ définie sur l'intervalle $]-\alpha, 0[$ par :

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

DÉFINITION : On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle $]a, x_0]$, est dérivable à gauche au point x_0 si et seulement si $\varphi(h)$ a une limite à gauche m quand h tend vers 0^-.

m est appelé nombre dérivé à gauche de la fonction f au point x_0.

22 **Exemple :** Soit la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow |x|$. La fonction f est dérivable à gauche au point 0.

En effet, considérons la fonction φ : $\forall h \in \mathbb{R}_-^*$, $h \rightsquigarrow \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.

Pour tout point h de $\mathbb{R}_-^*$, nous avons : $f(h) = -h$.
Nous en déduisons : $\varphi(h) = -1$.
Quand h tend vers 0^-, $\varphi(h)$ admet donc une limite à gauche m_2 égale à -1.
La fonction f est donc dérivable à gauche au point 0; le nombre dérivé à gauche de f au point 0 est -1.

Dérivabilité; dérivabilité à droite; dérivabilité à gauche.

23 Le rapprochement des définitions précédentes permet d'énoncer des conclusions importantes sur la dérivabilité d'une fonction en un point.

1. Si une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est dérivable en un point x_0 de cet intervalle, elle est dérivable à droite et dérivable à gauche en ce point.
Le nombre dérivé à droite en x_0 et le nombre dérivé à gauche en x_0 sont égaux au nombre dérivé au point x_0.

2. Si une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est dérivable à droite et dérivable à gauche en un point x_0 de cet intervalle, et si le nombre dérivé à droite m_1 en x_0 est égal au nombre dérivé à gauche m_2 en x_0, la fonction f est dérivable au point x_0; le nombre dérivé m au point x_0 est égal à m_1 et à m_2.

Fonction dérivable sur un intervalle ouvert.

24 **DÉFINITION : On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est dérivable sur cet intervalle si et seulement si elle est dérivable en tout point x_0 de cet intervalle.**

Fonction dérivée.

25 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$. A tout point x_0 de cet intervalle associons le nombre dérivé m de la fonction en ce point.
Nous définissons ainsi, sur l'intervalle $]a, b[$, une nouvelle fonction, notée f'.
Le nombre dérivé de la fonction f en un point x_0 de l'intervalle $]a, b[$ est $f'(x_0)$.
Cette fonction f' est appelée fonction dérivée de la fonction f.

26 **Remarque :** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $]a, b[$.
Si g désigne la restriction de la fonction f à un intervalle $]c, d[$ inclus dans $]a, b[$, la fonction g est dérivable sur $]c, d[$, et sa fonction dérivée g' est la restriction de f' à l'intervalle $]c, d[$.

Exemples de fonctions dérivables sur un intervalle ouvert.

Fonction constante sur $\mathbb{R}$.

27 Du théorème du n° 5, p. 118, nous déduisons :

THÉORÈME : Une fonction f constante sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction dérivée est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0$.

Fonction g : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x$.

28 Du théorème du n° 6, p. 118, nous déduisons :

THÉORÈME : La fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow x$ **est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction dérivée g' est la fonction constante sur $\mathbb{R}$ définie par :** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 1$.

Fonction p : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \rightsquigarrow \sqrt{x}$.

29 Du théorème du n° 7, p. 119, nous déduisons :

THÉORÈME : La fonction p : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \rightsquigarrow \sqrt{x}$ **est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.**
La fonction dérivée p' est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
p' : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \rightsquigarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, **ou encore :** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad p'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Fonction dérivée de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions.

30 Dans les paragraphes suivants (nos 31 à 42), nous considérons deux fonctions f et g définies sur le même intervalle $]a, b[$ et dérivables sur cet intervalle ; soit x_0 un point quelconque de cet intervalle.
Le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 est $f'(x_0)$; le nombre dérivé de la fonction g au point x_0 est $g'(x_0)$.

Nous avons désigné par $\mathcal{E}_\alpha$ l'ensemble des fonctions ε définies sur $]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[$ pour lesquelles $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.
Il existe donc un réel α strictement positif et deux fonctions ε_1 et ε_2 appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}_\alpha$ pour lesquels on a les deux implications :

$$(0 < |h| < \alpha) \Longrightarrow (f(x_0 + h) - f(x_0) = h\,[f'(x_0) + \varepsilon_1(h)]); \qquad (1)$$

$$(0 < |h| < \alpha) \Longrightarrow (g(x_0 + h) - g(x_0) = h\,[g'(x_0) + \varepsilon_2(h)]). \qquad (2)$$

Fonction dérivée de la fonction $f + g$.

31 **THÉORÈME : Si f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $]a, b[$, la fonction $f + g$ est définie et dérivable sur le même intervalle. La fonction dérivée est : $[f + g]' = f' + g'$.**

Par définition, la fonction $f + g$ est définie sur $]a, b[$ par :
$f + g : \forall x \in]a, b[, \quad [f + g](x) = f(x) + g(x)$.

Formons la différence $[f + g](x_0 + h) - [f + g](x_0)$:
$[f + g](x_0 + h) - [f + g](x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) + g(x_0 + h) - g(x_0)$.
Des implications (1) et (2), nous déduisons l'implication :

$$(0 < |h| < \alpha) \Longrightarrow ([f + g](x_0 + h) - [f + g](x_0) = h\,[f'(x_0) + g'(x_0) + \varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)]).$$

Nous déduisons, du théorème sur la somme des limites, les égalités :

$$\lim_{h \to 0} [\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)] = \lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) + \lim_{h \to 0} \varepsilon_2(h) = 0.$$

La fonction $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ est donc une fonction de l'ensemble $\mathcal{E}_\alpha$. Nous concluons que la fonction $f + g$ est dérivable au point x_0 et que le nombre dérivé de cette fonction au point x_0 est : $f'(x_0) + g'(x_0)$.

La fonction $f + g$ est donc dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et sa fonction dérivée est la fonction $[f + g]'$ définie sur $]a, b[$ par :
$\forall x \in]a, b[, \quad x \leadsto f'(x) + g'(x)$, ou encore :
$\forall x \in]a, b[, \quad [f + g]'(x) = f'(x) + g'(x)$.
Nous en déduisons l'égalité : $[f + g]' = f' + g'$.

32 **Remarque** : On peut étendre le théorème précédent à la somme d'un nombre fini de fonctions définies et dérivables sur le même intervalle $]a, b[$.

Cas particulier.

33 Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]a, b[$ et k un réel.
La fonction p : $\forall x \in]a, b[, \quad x \rightsquigarrow f(x) + k$ est la somme de la fonction f et de la fonction g constante sur $]a, b[$ définie par : $x \rightsquigarrow k$.

Nous savons que la fonction g est dérivable et que sa fonction dérivée est la fonction nulle sur $]a, b[$.
Nous en déduisons que p est dérivable sur $]a, b[$ et que sa fonction dérivée est la fonction p' égale à f' ; nous écrivons : $\forall x \in]a, b[, \quad p'(x) = f'(x)$.

Fonction dérivée de la fonction $f \,.\, g$.

34 THÉORÈME : Si f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]a, b[$, la fonction $f \,.\, g$ est définie et dérivable sur le même intervalle. La fonction dérivée est : $[f \,.\, g]' = f' \,.\, g + f \,.\, g'$.

Par définition, la fonction $f \,.\, g$ est définie sur $]a, b[$ par :
$\forall x \in]a, b[, \quad [f.g](x) = f(x) \,.\, g(x)$.

Formons la différence $[f.g](x_0 + h) - [f.g](x_0)$:
Nous avons, pour $0 < |h| < \alpha$, les égalités :
$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,[f'(x_0) + \varepsilon_1(h)]$,
$g(x_0 + h) = g(x_0) + h[g'(x_0) + \varepsilon_2(h)]$.

Nous en déduisons, pour : $0 < |h| < \alpha$, l'égalité :
$$[f.g](x_0 + h) = f(x_0) \,.\, g(x_0) + h[f'(x_0) \,.\, g(x_0) + f(x_0) \,.\, g'(x_0) + g(x_0) \,.\, \varepsilon_1(h) + f(x_0) \,.\, \varepsilon_2(h)] + h^2[f'(x_0) \,.\, g'(x_0) + f'(x_0) \,.\, \varepsilon_2(h) + g'(x_0) \,.\, \varepsilon_1(h) + \varepsilon_1(h) \,.\, \varepsilon_2(h)].$$

Considérons la fonction ε définie sur $]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[$ par l'égalité :
$$\varepsilon(h) = g(x_0) \,.\, \varepsilon_1(h) + f(x_0) \,.\, \varepsilon_2(h) + h[f'(x_0) \,.\, g'(x_0) + f'(x_0) \,.\, \varepsilon_2(h) + g'(x_0) \,.\, \varepsilon_1(h) + \varepsilon_1(h) \,.\, \varepsilon_2(h)].$$
Nous avons alors l'implication :
$$(0 < |h| < \alpha) \Longrightarrow ([f.g]\,(x_0 + h) - [f.g](x_0) = h\,[f'(x_0) \,.\, g(x_0) + f(x_0) \,.\, g'(x_0) + \varepsilon(h)]).$$
Quand h tend vers 0, $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ tendent vers 0. Nous déduisons des théorèmes sur les limites de la somme et du produit de deux fonctions que $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0. La fonction ε appartient donc à l'ensemble $\mathcal{E}_\alpha$.

Nous concluons que la fonction $f \,.\, g$ est dérivable au point x_0 et que le nombre dérivé de cette fonction au point x_0 est : $f'(x_0) \,.\, g(x_0) + f(x_0) \,.\, g'(x_0)$.

La fonction $f \,.\, g$ est donc dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et sa fonction dérivée est la fonction $[f.g]'$ définie sur $]a, b[$ par :
$\forall x \in]a, b[, \quad x \rightsquigarrow f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$, ou encore :
$\forall x \in]a, b[, \quad [f.g]'(x) = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$.
Nous en déduisons l'égalité : $[f.g]' = f'.g + f.g'$.

Cas particuliers.

35 Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]a, b[$ et k un réel.
La fonction p : $\forall x \in]a, b[, \quad x \leadsto k.f(x)$ est le produit de la fonction f et de la fonction g constante sur $]a, b[$ définie par : $x \leadsto k$.
Nous savons que la fonction g est dérivable et que sa fonction dérivée est la fonction nulle sur $]a, b[$.
Nous en déduisons que p est dérivable sur $]a, b[$ et que sa fonction dérivée est la fonction p' égale à $k.f'$; nous écrivons : $\forall x \in]a, b[, \quad p'(x) = k.f'(x)$.

36 Soit la fonction r définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad r(x) = x^2$.
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x$.
Nous avons : $r = f.f$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée f' est la fonction constante : $x \leadsto 1$.
Nous en déduisons que r est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; sa fonction dérivée est : $r' = f'.f + f.f' = 2f'.f$.
Nous avons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad r'(x) = 2x$.

37 Soit n un entier naturel non nul et la fonction s définie sur $\mathbb{R}$ par l'égalité : $s(x) = x^n$.
On démontre et nous admettons que la fonction s est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée s' est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad s'(x) = nx^{n-1}$.

38 Soient $n + 1$ réels $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ et la fonction polynôme f :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leadsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.
Il résulte des théorèmes précédents que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que la fonction dérivée est la fonction polynôme f' définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leadsto a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1}$.

Fonction dérivée de la fonction $\frac{1}{g}$.

39 **THÉORÈME : Si g est une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert $]a, b[$ et si la fonction g ne s'annulle pas sur $]a, b[$, alors la fonction $\frac{1}{g}$ est définie et dérivable sur cet intervalle et la fonction dérivée est :**
$\left[\frac{1}{g}\right]' = \frac{-g'}{g^2}$.

Supposons que la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a, b[$.
Calculons la différence $\left[\frac{1}{g}\right](x_0 + h) - \left[\frac{1}{g}\right](x_0)$; nous avons :
$\left[\frac{1}{g}\right](x_0 + h) - \left[\frac{1}{g}\right](x_0) = \frac{g(x_0) - g(x_0 + h)}{g(x_0 + h) \cdot g(x_0)}$.

De l'implication (2), nous déduisons l'implication :
$(0 < |h| < \alpha) \Longrightarrow (g(x_0) - g(x_0 + h) = h[-g'(x_0) - \varepsilon_2(h)])$.
Désignons par φ la fonction définie, pour h différent de 0, par :

$$\varphi(h) = \frac{\left[\frac{1}{g}\right](x_0 + h) - \left[\frac{1}{g}\right](x_0)}{h}.$$

Nous déduisons, de l'implication précédente :

$$(0 < |h| < \alpha) \Longrightarrow \left(\varphi(h) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)} - \frac{\varepsilon_2(h)}{g(x_0) \cdot g(x_0 + h)}\right).$$

g est une fonction continue en x_0 ; donc, quand h tend vers 0, $g(x_0 + h)$ tend vers $g(x_0)$, et le dénominateur $g(x_0) \cdot g(x_0 + h)$ tend vers le réel non nul $[g(x_0)]^2$.
Quand h tend vers 0, $\varepsilon_2(h)$ tend vers 0.
Il résulte du théorème sur les limites que, lorsque h tend vers 0, $\varphi(h)$ a une limite donnée par l'égalité : $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

Nous en déduisons que la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur $]a, b[$ et que sa fonction dérivée est la fonction $\left[\frac{1}{g}\right]'$ définie sur $]a, b[$ par :

$\forall x \in]a, b[, \quad x \leadsto \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$, ou encore :

$\forall x \in]a, b[, \quad \left[\frac{1}{g}\right]'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Nous en déduisons l'égalité : $\left[\frac{1}{g}\right]' = \frac{-g'}{g^2}$.

Cas particuliers.

40 Soit la fonction h : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x \leadsto \frac{1}{x}$ et soit g la fonction : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x \leadsto x$.

Nous avons : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

Dans tout intervalle ouvert où la fonction h est définie, la fonction h' existe et est déterminée par : $h' = -\frac{g'}{g^2}$.

Nous avons donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad h'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

41 Soit p un entier non nul et soit la fonction : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x \leadsto \frac{1}{x^p}$.

On démontre et nous admettons que cette fonction est définie et dérivable sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction dérivée est donnée par :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x \leadsto \frac{-p}{x^{p+1}}$.

Dérivée de la fonction $\frac{f}{g}$.

42 THÉORÈME : Si f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert $]a, b[$, et si la fonction g ne s'annule pas sur cet intervalle, la fonction $\frac{f}{g}$ est définie et dérivable sur cet intervalle. La fonction dérivée est : $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$.

Supposons que la fonction g ne s'annule pas sur $]a, b[$.

La fonction $\frac{f}{g}$ est le produit de la fonction f par la fonction $\frac{1}{g}$: $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$.

Nous en déduisons que la fonction $\frac{f}{g}$ produit de deux fonctions dérivables sur $]a, b[$, est une fonction dérivable sur $]a, b[$.

Nous avons : $\left[f \cdot \frac{1}{g}\right]' = f' \cdot \left[\frac{1}{g}\right] + f \cdot \left[\frac{1}{g}\right]'$. ou encore : $\left[f \cdot \frac{1}{g}\right]' = \frac{f'}{g} - \frac{f.g'}{g^2}$.

Nous écrivons : $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$.

Tableau récapitulatif.

43 Résumons les principaux résultats établis : k désigne un réel, p un élément de $\mathbb{N}^*$.

Fonction	Fonction dérivée
$f : \forall x \in \mathbb{R},\quad x \rightsquigarrow f(x) = k.$	$f' : \forall x \in \mathbb{R},\quad x \rightsquigarrow f'(x) = 0.$
$f : \forall x \in \mathbb{R},\quad x \rightsquigarrow f(x) = x.$	$f' : \forall x \in \mathbb{R},\quad x \rightsquigarrow f'(x) = 1.$
$f : \forall x \in \mathbb{R},\quad x \rightsquigarrow f(x) = x^p.$	$f' : \forall x \in \mathbb{R},\quad x \rightsquigarrow f'(x) = px^{p-1}$
$f : \forall x \in \mathbb{R}^*,\quad x \rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{x}$	$f' : \forall x \in \mathbb{R}^*,\quad x \rightsquigarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$
$f : \forall x \in \mathbb{R}^*,\quad x \rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{x^p}.$	$f' : \forall x \in \mathbb{R}^*,\quad x \rightsquigarrow f'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}}.$
$f : \forall x \in \mathbb{R}_+,\quad x \rightsquigarrow f(x) = \sqrt{x}.$	$f' : \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad x \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$
Si f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur $]a, b[$	
$f + g : x \rightsquigarrow f(x) + g(x).$ $f.g : x \rightsquigarrow f(x).g(x).$	$[f + g]' : x \rightsquigarrow f'(x) + g'(x).$ $[f.g]' : x \rightsquigarrow f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$
Si de plus, g ne s'annule pas dans $]a, b[$, on a :	
$\frac{f}{g} : x \rightsquigarrow \frac{f(x)}{g(x)}.$	$\left[\frac{f}{g}\right]' : x \rightsquigarrow \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}.$

Fonction dérivée seconde.

44 Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]a, b[$; désignons par f' la fonction dérivée. Si la fonction f' est dérivable sur $]a, b[$, sa fonction dérivée est appelée fonction dérivée seconde de f et est notée f''.

Nous avons par exemple :

f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;

f' : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$;

f'' : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x$.

Signe de la fonction dérivée et sens de variations.

Soit une fonction f définie et dérivable dans un intervalle ouvert E.

Nous supposons qu'il existe des intervalles inclus dans E dans lesquels nous connaissons le signe de la fonction dérivée.

Nous admettons le théorème suivant :

45 **THÉORÈME : 1. Si, dans un intervalle ouvert, la fonction dérivée f' est la fonction nulle, la fonction f est constante sur cet intervalle.**

2. Si, dans un intervalle ouvert, la fonction f' est positive ou nulle, et si elle ne s'annule qu'en un nombre fini de points, la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

3. Si, dans un intervalle ouvert, la fonction f' est négative ou nulle et si elle ne s'annule qu'en un nombre fini de points, la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Exemple : La fonction affine f, déterminée par : $x \rightsquigarrow f(x) = ax + b$, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa fonction dérivée f' est la fonction constante définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$.

Il résulte des théorèmes précédents qu'une fonction affine est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si a est positif et qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si a est négatif.

EXERCICES

Nombre. dérivé. Fonction linéaire tangente.

◆ Dans chacun des exercices suivants (nos 1 à 14), on considère une fonction numérique f et un réel x_0. Pour chaque fonction f, déterminer le nombre dérivé de f au point x_0 et la fonction linéaire tangente à f en x_0.

1 f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x + 3$; $x_0 = 3$.

2 f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x^2 - 2x$; $x_0 = 2$.

3 f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto -6x^2 + 11x + 1$; $x_0 = 1$.

4 f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3 - 1$; $x_0 = 0$.

5 f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2x^3 - 6x$; $x_0 = 1$.

6 f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto -x^3 + 2x - 6$; $x_0 = 2$.

7 f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto -3x^4 + 6x^2$; $x_0 = 1$.

8 f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto -2x^7 + x^5$; $x_0 = -1$.

9 f : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$; $x_0 = 0$.

10 f : $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-3}$; $x_0 = 2$.

11 f : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $x \longmapsto \dfrac{1-2x}{x-2}$; $x_0 = 1$.

12 f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$; $x_0 = 1$.

13 f : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$; $x_0 = -2$.

14 f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^3 - x}{x^4 + 1}$; $x_0 = -1$.

15 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto \sqrt{|x|}$.

1° Quel est le nombre dérivé de cette fonction au point : $x_0 = -4$?

2° Démontrer que cette fonction n'est pas dérivable au point : $x_0 = 0$.

16 Soit la fonction E définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \longmapsto E(x)$.

1° Démontrer que cette fonction est dérivable en tout point x_0 qui n'est pas un entier positif. Quel est le nombre dérivé de E en un tel point ?

2° Démontrer que cette fonction est dérivable à droite en tout point x_0 qui est un entier positif. Quel est le nombre dérivé à droite de E en un tel point ?

3° La fonction E est-elle dérivable à gauche en un point x_0 qui est un entier positif ?

EXERCICES

Interprétation géométrique du nombre dérivé.

◆ Dans chacun des exercices suivants (n^{os} 17 à 21), on donne l'équation d'une courbe $\mathcal{C}$ dans un repère cartésien et les abscisses de deux points de cette courbe. Construire la tangente à $\mathcal{C}$ en chacun de ces points et former l'équation de la tangente.

	Équation de la courbe	Abscisses des points donnés
17	$y = \frac{x^2}{2} - x$;	1 et 3
18	$y = 2x^2 - 3x + 5$;	$\frac{1}{2}$ et 1
19	$y = \frac{5x - 1}{4x - 1}$;	-2 et 0
20	$y = x^3 - x^2 - 6x + 4$;	2 et -1
21	$y = \frac{3x - 1}{x^2 + 3}$;	1 et -1

22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x^2$.

1° Démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, on a l'égalité :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

2° Soient $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f, et A et B deux points de cette courbe. Déduire de l'égalité précédente qu'il existe un point M, de la courbe $\mathcal{C}$, dont l'abscisse appartient à $]a, b[$, où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle au support du segment [A, B].

Soit P le milieu du segment [A, B]. Montrer que le support de [P, M] est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$.

23 On considère la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 3$.

Soient $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère cartésien, et A le point de coordonnées (0, 2). Soient un réel m et D_m la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est m.

1° Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D_m.

2° Déterminer m pour que l'intersection de $\mathcal{C}$ et D_m soit un singleton $\{M_0\}$. Déterminer les coordonnées de M_0.

3° Démontrer que la tangente en M_0 à la courbe $\mathcal{C}$ est la droite définie par les points M_0 et A.

24 On considère la fonction f : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 3$ et la fonction g : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x^2 - 6x$.

Soient $\mathcal{C}$ et Γ les courbes représentatives respectives de la fonction f et de la fonction g dans un repère cartésien.

1° Démontrer que les courbes $\mathcal{C}$ et Γ se coupent en un seul point M.

2° Démontrer que les courbes $\mathcal{C}$ et Γ admettent en M une tangente commune dont on écrira l'équation.

3° Plus généralement on considère la fonction h :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \mapsto (4 + m)x^2 - 2(3 + m)x + m$ où m est un paramètre réel différent de -3. Soit $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h.

Démontrer que la courbe $\mathcal{H}$ est tangente en M à la courbe $\mathcal{C}$.

25 On donne la fonction $f : \forall x \in \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^2}{2} - 2x + 1$.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
Démontrer qu'il existe un seul point M de la courbe $\mathcal{C}$ tel que le coefficient directeur m de la tangente en ce point soit égal à -1. Quelles sont les coordonnées du point M ? Écrire l'équation de la tangente en ce point.

◆ Même exercice que le n° 25 pour les fonctions et les coefficients directeurs suivants (n°s 26 à 29) :

26 $\forall x \in \mathbb{R},\quad x \longmapsto -3x - x$; $\quad m = 1$.

27 $\forall x \in \mathbb{R},\quad x \longmapsto -3x^2 - x + 2$; $\quad m = -3$.

28 $\forall x \in \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^2 - 5x + 3$; $\quad m = -1$.

29 $\forall x \in \mathbb{R},\quad x \longmapsto (x-1)(x-3)$; $\quad m = -2$.

30 On considère la fonction $f : \forall x \in \mathbb{R} - \{3\},\quad x \longmapsto \frac{x-2}{x-3}$.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
1° Démontrer qu'il existe deux points M_1 et M_2 de la courbe $\mathcal{C}$ tels que les tangentes en ces points aient pour coefficient directeur : $m_1 = -1$.
Déterminer les coordonnées de ces points. Écrire les équations des tangentes en ces points.
2° Existe-t-il des points de $\mathcal{C}$ pour lesquels le coefficient directeur m_2 de la tangente est égal à 1 ?

◆ Même exercice que le n° 30 pour les fonctions et les coefficients directeurs suivants (n°s 31 et 32) :

31 $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\},\quad x \longmapsto \frac{3x}{2x-1}$; $\quad m_1 = -3$; $\ m_2 = 3$.

32 $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\},\quad x \longmapsto \frac{2x-1}{1-3x}$; $\quad m_1 = 2$; $\ m_2 = -2$.

33 On considère la fonction $f : \forall x \in \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3 - 3x + 2$.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
Déterminer les points de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$.
Écrire l'équation de la tangente en ces points.

◆ Même exercice que le n° 33 pour les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ (n°s 34 à 37) par :

34 $x \longmapsto \frac{x^3}{3} - 9x + 7$.

35 $x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

36 $x \longmapsto x^3 + 3x - 2$.

37 $x \longmapsto x^3 - 6x + 5$.

EXERCICES

Fonctions dérivées.

♦ Dans chacun des exercices suivants (nos 38 à 63) on considère une fonction numérique f dont on précisera l'ensemble de définition D_f. Indiquer dans quel ensemble la fonction f est dérivable et déterminer la fonction dérivée.

38 $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$.

39 $x \mapsto -x^3 + x^2 - 1$.

40 $x \mapsto 3x^2 - 5x + 1$.

41 $x \mapsto x^3 + 2x - 1$.

42 $x \mapsto x^4 + \frac{x^3}{3} - 15$.

43 $x \mapsto -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 5x + 9$.

44 $x \mapsto \frac{6x+1}{5x-1}$.

45 $x \mapsto \frac{2x}{x-2}$.

46 $x \mapsto \frac{5-x}{x-4}$.

47 $x \mapsto \frac{x+3}{x-1}$.

48 $x \mapsto 2x(3x-5)$.

49 $x \mapsto (x-1)(5x+2)$.

50 $x \mapsto 6x\left(\frac{x}{12} - 7\right)$.

51 $x \mapsto (3x+4)(-2x+5)$.

52 $x \mapsto (1+x)\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 3\right)$.

53 $x \mapsto (1+x+x^2)(-2x^2+3)$.

54 $x \mapsto (1-x^2)(x^3 + \sqrt{x} - 1)$.

55 $(1-\sqrt{x})\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + x^3 - x\right)$.

56 $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$.

57 $x \mapsto \frac{1}{x-1} + \frac{2x-5}{x-2}$.

58 $x \mapsto \frac{x-3}{2-x} + \frac{3x-7}{3+5x}$.

59 $x \mapsto \frac{3x-2}{x+2} - \frac{3x+2}{x-2}$.

60 $x \mapsto \frac{x^2-5x+3}{x^2-5}$.

61 $x \mapsto \frac{-x^2+6x-8}{2x^2+1}$.

62 $x \mapsto \frac{x^3-9}{x^3+9}$.

63 $x \mapsto \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$.

64 Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert E.

1° Démontrer que la fonction $f \circ f$ est dérivable sur E.
Quelle est sa fonction dérivée ?

2° Démontrer que la fonction $f \circ f \circ f$ est dérivable sur E.
Quelle est sa fonction dérivée ?

3° En déduire la fonction dérivée de la fonction :

f : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x}}$.

65 Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert E. On suppose que les fonctions g et g' ne s'annulent pas sur cet intervalle. Soit x_0 un point de E.

1° Démontrer que le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$ admet une limite quand x tend vers x_0 et que cette limite est égale à $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

2° En déduire la limite du rapport $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 1}$ quand x tend vers 1.

66 Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

1° Montrer que, si f est la fonction nulle, on a l'égalité : $a_0 = 0$.

2° Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f. Montrer que, si f est la fonction nulle, on a l'égalité : $a_1 = 0$.

3° Démontrer alors le théorème admis dans le cours (n° 31, p. 97) : la fonction polynôme f est nulle si et seulement si tous les réels $a_0, a_1, \ldots a_n$ sont nuls.

67 Soit f la fonction polynôme : $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

1° Déterminer les images du réel 0 par les fonctions f, f', f''.

2° Démontrer que f'' est une fonction dérivable.
On désigne par f''' la fonction dérivée de f''. Déterminer $f'''(0)$.

3° En déduire l'égalité : $f(x) = f(0) + \dfrac{x}{1!} f'(0) + \dfrac{x^2}{2!} f''(0) + \dfrac{x^3}{3!} f'''(0)$.

68 Soit f une fonction polynôme telle que : $f(x_0) \neq 0$.
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et g la fonction polynôme définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x - x_0)^n f(x)$.

1° Démontrer qu'il existe une fonction polynôme g_1, telle que l'on ait :
$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (x - x_0)^{n-1} g_1(x)$, avec : $g_1(x_0) \neq 0$.

2° Démontrer qu'il existe une fonction polynôme g_2 telle que l'on ait :
$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = (x - x_0)^{n-2} g_2(x)$, avec : $g_2(x_0) \neq 0$.

3° Réciproquement, démontrer que, si une fonction polynôme g est telle que : $g(x_0) = g'(x_0) = 0$ et $g''(x_0) \neq 0$, alors il existe une fonction polynôme f telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x - x_0)^2 f(x)$, et : $f(x_0) \neq 0$.

4° Soit g la fonction polynôme : $x \mapsto x^3 + px + q$ où p et q sont des réels. Soient x_0 et x_1 deux réels distincts. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $g(x)$ s'écrive sous la forme :
$g(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)$ est : $4p^3 + 27q^2 = 0$.

69 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
si : $x \leqslant 1$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$, et si : $x > 1$, $f(x) = 2$.

1° Démontrer que la fonction est continue au point 1.

2° Démontrer que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et déterminer sa fonction dérivée.

3° Démontrer que f admet une fonction dérivée seconde f''.
f'' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

70 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ et $f(1) = 2$.

Démontrer que cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Quelle est sa fonction dérivée ?

EXERCICES

71 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.

1° Démontrer que cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2° Quelle est sa fonction dérivée ? Est-elle continue ?

72 Soient f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et n un entier relatif.

1° Démontrer que le rapport $\dfrac{f(x+nh)-f(x)}{h}$ tend vers $nf'(x)$ quand h tend vers 0.
2° Utiliser le résultat précédent pour démontrer que :
$\dfrac{[f(x+2h)]^2-[f(x-h)]^2}{h}$ tend vers $6f(x)f'(x)$ quand h tend vers 0.

Sens de variations.

73 On donne la fonction $f : \forall x \in \mathbb{R},\ x \longmapsto 2x^2-5x+1$.
1° Préciser l'ensemble dans lequel la fonction f est dérivable, quelle est la fonction dérivée f' ?
2° Déterminer les intervalles dans lesquels la fonction dérivée f' a un signe constant. En déduire le sens de variations de f dans chacun de ces intervalles.

◆ Même exercice que le n° 73 pour les fonctions suivantes (n°s 74 à 79) :

74 $\forall x \in \mathbb{R},\quad x \longmapsto 3x^2+4x+2$.

75 $\forall x \in \mathbb{R},\quad x \longmapsto (2x-3)(x+1)$.

76 $\forall x \in \mathbb{R}-\{4\},\quad x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x-4}$.

77 $\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{5}{2}\right\},\quad x \longmapsto \dfrac{x+3}{2x-5}$.

78 $\forall x \in \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^3+6x+7$.

79 $\forall x \in \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^5-3x^2+1$.

10.
Étude de certaines fonctions

Généralités.

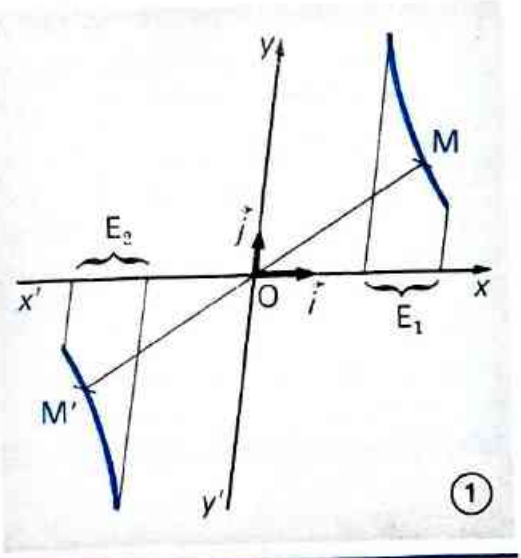
1 Nous allons étudier les variations de quelques fonctions et tracer leurs courbes représentatives dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Nous serons, dans certains cas, amenés à mettre en évidence certains éléments de symétrie des courbes représentatives.

Fonction impaire.

2 Soit E_1 un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$, et soit E_2 l'ensemble des réels opposés des éléments de E_1 pour la loi d'addition dans $\mathbb{R}$.
Considérons une fonction f dont l'ensemble de définition est $E_1 \cup E_2$.

DÉFINITION : On dit que la fonction f est impaire si et seulement si, pour tout x de l'ensemble de définition, on a l'égalité : $f(-x) = -f(x)$.

3 Soit $M(x, y)$ un point de la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$; considérons le point $M'(x', y')$ symétrique du point M par rapport au point O ; nous avons les égalités : $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases}$
Nous avons d'autre part :
$y = f(x)$ et $f(x') = -f(x)$.
Nous en déduisons : $y' = f(x')$.
Le point M' appartient à la courbe $\mathcal{C}$.
Le symétrique par rapport au point O de tout point M de la courbe $\mathcal{C}$ appartient donc à la courbe $\mathcal{C}$ (fig. 1).



①

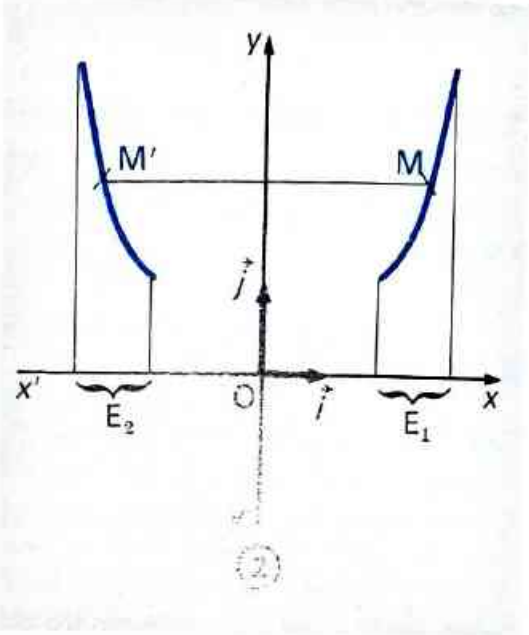
THÉORÈME : Si $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction impaire dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point O est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

Fonction paire.

4 Soit E_1 un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$ et soit E_2 l'ensemble des réels opposés des éléments de E_1 pour la loi d'addition dans $\mathbb{R}$.
Considérons une fonction f dont l'ensemble de définition est $E_1 \cup E_2$.

DÉFINITION : On dit que la fonction f est paire si et seulement si, pour tout x de l'ensemble de définition, on a l'égalité : $f(-x) = f(x)$.

5 Soit $M(x, y)$ un point de la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont les axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$ sont **perpendiculaires.** Considérons le point $M'(x', y')$ symétrique du point M par rapport au support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$; nous avons les égalités :
$\begin{cases} x' = -x; \\ y' = y. \end{cases}$
Nous avons d'autre part :
$y = f(x)$ et $f(x') = f(x)$.
Nous en déduisons : $y' = f(x')$.
Le point M' appartient à la courbe $\mathcal{C}$.
Le symétrique par rapport au support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$ de tout point M de la courbe $\mathcal{C}$ appartient donc à la courbe $\mathcal{C}$ (fig. 2).



(2)

THÉORÈME : Si les axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$ sont perpendiculaires, et si $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction paire, le support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

6 **Remarque :** Si la fonction f est une fonction paire ou si c'est une fonction impaire, on peut se borner à étudier cette fonction dans l'ensemble E_1 ; l'étude dans E_2 s'en déduit en utilisant les propriétés de symétrie mises en évidence.

Maximum local en un point.

7 **DÉFINITION : On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle E, possède un maximum local en un point x_0 de cet intervalle s'il existe un réel α strictement positif tel que, pour tout élément x de l'intersection des intervalles E et $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, on ait l'inégalité : $f(x) \leqslant f(x_0)$.**

Maximum local strict en un point.

8 **DÉFINITION : On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle** E, **possède un maximum local strict en un point x_0 de cet intervalle s'il existe un réel α strictement positif tel que, pour tout élément x distinct de x_0 de l'intersection des intervalles** E **et** $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, **on ait l'inégalité :** $f(x) < f(x_0)$.

Maximum global en un point.

9 **DÉFINITION : On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle** E, **possède un maximum global en un point x_0 de cet intervalle si, pour tout élément x de l'intervalle** E, **on a l'inégalité :** $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Maximum global strict en un point.

10 **DÉFINITION : On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle** E, **possède un maximum global strict en un point x_0 de cet intervalle si, pour tout élément x de l'intervalle** E **distinct de x_0, on a l'inégalité :** $f(x) < f(x_0)$.

11 Remarque : Si une fonction f possède en un point x_0 un maximum global strict, elle présente aussi un maximum local strict en ce point. Cependant, une fonction f peut posséder en x_0 un maximum global large qui soit aussi un maximum local strict.

Minimum local, minimum local strict.

12 En remplaçant dans les définitions d'un maximum local en un point et d'un maximum local strict en un point le signe $\leqslant$ par le signe $\geqslant$, et le signe $<$ par le signe $>$, nous obtenons les définitions respectives d'un **minimum local** en un point et d'un **minimum local strict** en un point.

Minimum global, minimum global strict.

13 En remplaçant dans les définitions d'un maximum global en un point et d'un maximum global strict en un point le signe $\leqslant$ par le signe $\geqslant$, et le signe $<$ par le signe $>$, nous obtenons les définitions respectives d'un **minimum global** en un point et d'un **minimum global strict** en ce point.

Extremum.

14 Lorsqu'une fonction f possède en un point x_0 un maximum ou un minimum, on dit qu'elle possède un **extremum** en ce point.

Exemples de fonctions polynômes.

Exemples de fonctions f : $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Si a est nul, f est une fonction affine. Nous avons déjà fait l'étude de ces fonctions ; nous supposons donc a différent de 0.

Premier exemple : f : $x \mapsto x^2 - 4x + 3$.

15 Ensemble de définition : La fonction f est une fonction polynôme ; son ensemble de définition est donc l'ensemble $\mathbb{R}$.

16 Étude de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$: Nous allons montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Pour tout x différent de zéro, nous avons : $f(x) = x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$.

Il résulte du théorème sur les limites que, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, x^2 tend vers $+\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $-\frac{4}{x}$ et $\frac{3}{x^2}$ tendent vers 0 ; donc, la somme $1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$ tend vers 1.

Dans ces conditions, $f(x)$ est le produit d'un facteur qui tend vers $+\infty$ et d'un facteur qui tend vers 1. Lorsque x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, $f(x)$ tend donc vers $+\infty$.

17 Sens de variations : La fonction f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$; sa fonction dérivée est définie par : $f' : x \mapsto 2x - 4$.
Nous étudions le sens de variations de la fonction f en étudiant le signe du réel $2x - 4$.
Nous avons donc : $(f'(x) = 0) \iff (x = 2)$;
$(f'(x) > 0) \iff (x > 2)$; $(f'(x) < 0) \iff (x < 2)$.

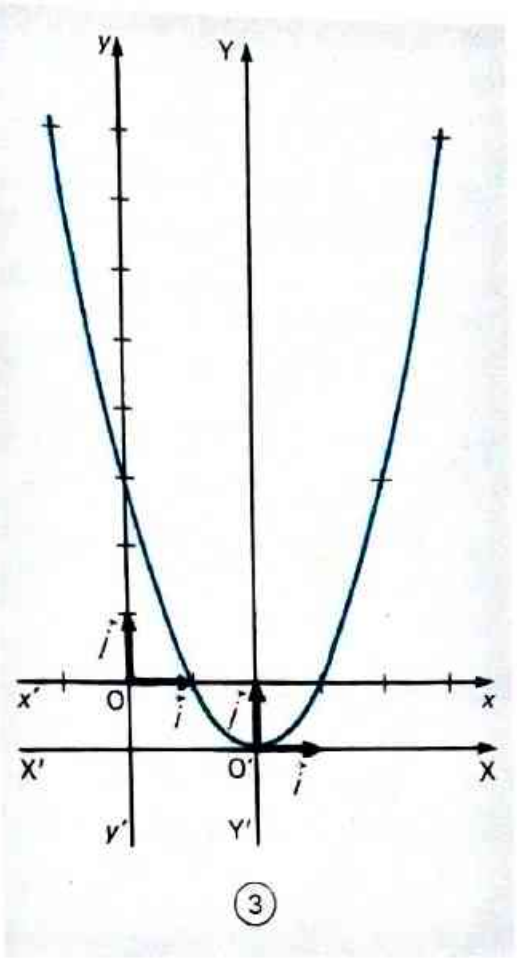
Il en résulte que la fonction f est strictement décroissante dans l'intervalle $]-\infty, 2[$ et strictement croissante dans l'intervalle $]2, +\infty[$.
f est une fonction strictement décroissante dans $]-\infty, 2[$; nous avons donc, pour tout x de cet intervalle, l'inégalité : $f(x) > f(2)$.
f est une fonction strictement croissante dans $]2, +\infty[$; nous avons donc, pour tout x de cet intervalle, l'inégalité : $f(2) < f(x)$.
Pour tout réel x, nous avons donc : $f(x) \geqslant f(2)$; la fonction f possède un minimum global pour : $x = 2$.
De plus, pour tout x différent de 2, nous avons : $f(x) > f(2)$. La fonction f possède pour : $x = 2$ un minimum global strict.

18 Tableau de variations :

x	$-\infty$		$+2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

19 **Graphe :** Le tableau ci-dessous donne sept couples $(x, f(x))$, éléments du graphe de la fonction f :

x	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$
$f(x)$	$+8$	$+3$	0	-1	0	$+3$	$+8$



③

20 **Courbe représentative :** Considérons un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les éléments du graphe indiqués dans le tableau ci-dessus permettent de placer sept points de la courbe. On démontre et nous admettons que la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}$ que nous avons dessinée (fig. 3) et qui passe par ces sept points.

Une équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $y = x^2 - 4x + 3$.

21 **Équation réduite :** Nous avons : $f'(2) = 0$. Au point $O'(2, -1)$, la tangente est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$. Si les axes sont perpendiculaires, le point O' est appelé le sommet de la courbe $\mathcal{C}$.

Considérons le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$, et désignons respectivement par (x_0, y_0) les coordonnées du point O' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et par (X, Y) les coordonnées du même point M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

Nous avons établi, en classe de Seconde, les deux égalités : $\begin{cases} x = x_0 + X, \\ y = y_0 + Y. \end{cases}$

Dans cet exemple, nous avons : $x_0 = 2$ et $y_0 = -1$; nous avons donc :

$\begin{cases} x = 2 + X; \\ y = -1 + Y. \end{cases}$

Il en résulte les équivalences logiques :

$(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (y = x^2 - 4x + 3)$;

$(y = x^2 - 4x + 3) \Longleftrightarrow (-1 + Y = (2 + X)^2 - 4(2 + X) + 3)$.

Après simplification, nous obtenons : $(y = x^2 - 4x + 3) \Longleftrightarrow (Y = X^2)$.
Nous avons donc l'équivalence logique : $(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (Y = X^2)$.
Nous disons que : $Y = X^2$, équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$, est l'équation réduite de la courbe $\mathcal{C}$.

22 **Axe de symétrie** : La fonction : $X \rightsquigarrow X^2$ est paire ; nous en déduisons que, si les axes sont perpendiculaires, le support de l'axe $\overrightarrow{Y'O'Y}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

Deuxième exemple : $f : x \rightsquigarrow -\frac{x^2}{2} + x + 4$.

23 **Ensemble de définition** : La fonction f est une fonction polynôme ; son ensemble de définition est donc l'ensemble $\mathbb{R}$.

24 **Étude de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$** : Nous allons montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers $-\infty$.

Pour tout x différent de 0, nous avons : $f(x) = -x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}\right)$.

Il résulte du théorème sur les limites que, lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $-x^2$ tend vers $-\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $-\frac{1}{x}$ et $-\frac{4}{x^2}$ tendent vers 0 ; donc, la somme $\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}$ tend vers $\frac{1}{2}$.

Dans ces conditions, $f(x)$ est le produit d'un facteur qui tend vers $-\infty$ et d'un facteur qui tend vers $\frac{1}{2}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $f(x)$ tend donc vers $-\infty$.

25 **Sens de variations** : La fonction f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous étudions le sens de variations de f en étudiant le signe de la fonction dérivée f' : $x \rightsquigarrow -x + 1$.

Nous avons donc : $(f'(x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 1)$;

$(f'(x) > 0) \Longleftrightarrow (x < 1)$; $(f'(x) < 0) \Longleftrightarrow (x > 1)$.

Il en résulte que la fonction f est strictement croissante dans l'intervalle $]-\infty, 1[$ et strictement décroissante dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

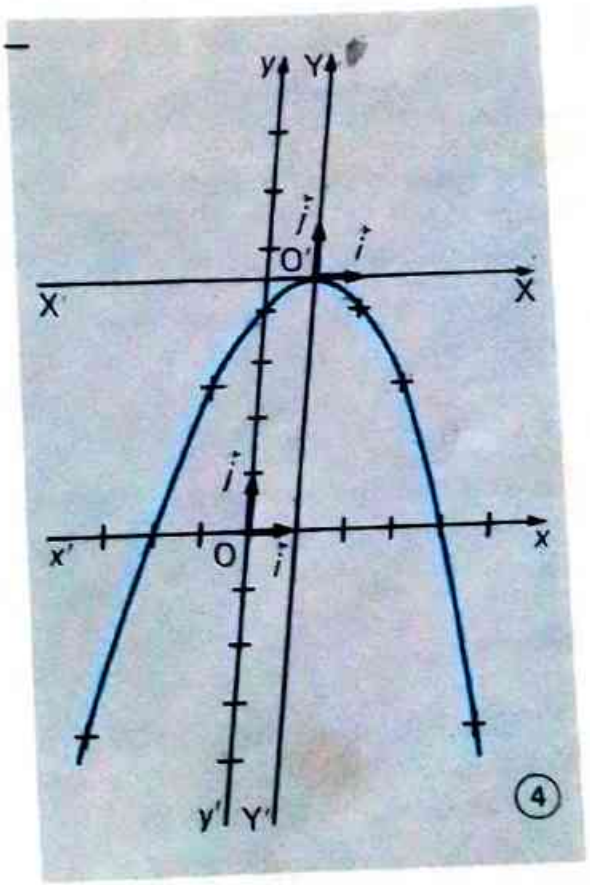
f est une fonction strictement croissante dans $]-\infty, 1[$; nous avons donc, pour tout x de cet intervalle, l'inégalité : $f(x) < f(1)$.
f est une fonction strictement décroissante dans $]1, +\infty[$; nous avons donc, pour tout x de cet intervalle, l'inégalité : $f(x) < f(1)$. La fonction f possède un maximum global pour : $x = 1$.
Pour : $x \neq 1$, nous avons : $f(x) < f(1)$; le maximum est un maximum global strict.

26 **Tableau de variations :**

x	$-\infty$		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+4,5$	↘	$-\infty$

27 **Graphe :** Le tableau ci-dessous donne six couples $(x, f(x))$, éléments du graphe de la fonction :

x	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+4$
$f(x)$	0	$+2,5$	$+4$	$+4,5$	$+4$	0



28 **Courbe représentative :** Considérons un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les éléments du graphe indiqués dans le tableau ci-dessus permettent de placer six points de la courbe. On démontre et nous admettons que la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}$ que nous avons dessinée (fig. 4) et qui passe par ces six points.
Une équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$.

29 **Équation réduite :** Nous avons : $f'(1) = 0$. Au point $O'(1 ; 4,5)$, la tangente est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$.
Si les axes sont perpendiculaires, le point O' est appelé le sommet de la courbe $\mathcal{C}$.
Considérons le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ et désignons respectivement par (x_0, y_0) les coordonnées du point O' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par (X, Y) les coordonnées du même point M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.

Dans cet exemple, nous avons : $x_0 = 1$ et $y_0 = 4{,}5$; nous avons donc :

$$\begin{cases} x = 1 + X, \\ y = 4{,}5 + Y. \end{cases}$$

Il en résulte les équivalences logiques :

$$(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow \left(y = -\frac{x^2}{2} + x + 4\right);$$

$$\left(y = -\frac{x^2}{2} + x + 4\right) \Longleftrightarrow \left(4{,}5 + Y = -\frac{(1+X)^2}{2} + (1+X) + 4\right).$$

Après simplification, nous obtenons : $\left(y = -\frac{x^2}{2} + x + 4\right) \Longleftrightarrow \left(Y = -\frac{X^2}{2}\right)$.

Nous avons donc l'équivalence logique : $(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow \left(Y = -\frac{X^2}{2}\right)$.

Nous disons que : $Y = -\frac{X^2}{2}$ équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$, est l'équation réduite de la courbe $\mathcal{C}$.

30 **Axe de symétrie** $\mathcal{C}$: La fonction : $X \rightsquigarrow -\frac{X^2}{2}$ est paire ; nous en déduisons que, si les axes sont perpendiculaires, le support de l'axe $\overrightarrow{Y'O'Y}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

Exemples de fonctions f : $x \rightsquigarrow x^3 + px + q$.

Premier exemple : f : $x \rightsquigarrow x^3 + x - 2$.

31 **Ensemble de définition** : La fonction f est une fonction polynôme ; son ensemble de définition est donc l'ensemble $\mathbb{R}$.

32 **Étude de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$:** Nous allons montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Pour tout x différent de zéro, nous avons : $f(x) = x^3\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$.

$f(x)$ est le produit de deux facteurs x^3 et $1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$.

Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{2}{x^3}$ tendent vers 0, donc, la somme $1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ tend vers 1.

Pour tout réel x positif, le réel x^3 est positif. Donc, quand x tend vers $+\infty$, x^3 tend vers $+\infty$.
Pour tout réel x négatif, le réel x^3 est négatif. Donc, quand x tend vers $-\infty$, x^3 tend vers $-\infty$.
Quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ est le produit d'un facteur qui tend vers $+\infty$ et d'un facteur qui tend vers 1. Il en résulte que $f(x)$ tend vers $+\infty$.
Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ est produit d'un facteur qui tend vers $-\infty$ et d'un facteur qui tend vers 1. Il en résulte que $f(x)$ tend vers $-\infty$.

33 **Sens de variations** : La fonction f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous étudions le sens de variations de f en étudiant le signe de la fonction dérivée f' : $x \longrightarrow 3x^2 + 1$.
Nous avons donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > 0$.
La fonction f est strictement croissante sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

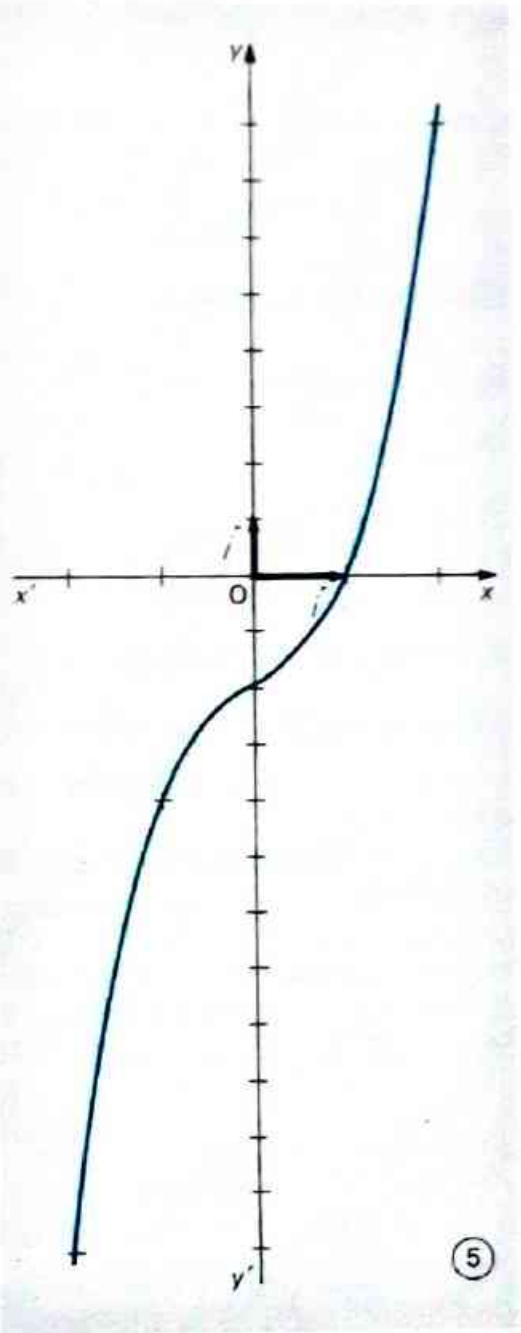
34 **Tableau de variations** :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

35 **Graphe** : Le tableau ci-dessous donne cinq couples $(x, f(x))$ qui sont des éléments du graphe de la fonction f :

x	-2	-1	0	$+1$	$+2$
$f(x)$	-12	-4	-2	0	$+8$

36 **Courbe représentative :** La courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée dans un repère cartésien. Elle passe par les cinq points dont nous venons de calculer les coordonnées (fig. 5).
Une équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $y = x^3 + x - 2$.



⑤

37 **Équation réduite** : Soit O' le point d'intersection de la courbe représentative $\mathcal{C}$ et de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$; les coordonnées du point O' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont : $x_0 = 0$ et $y_0 = -2$.
Désignons par (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par (X, Y) les coordonnées de ce même point M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$. Dans cet exemple, nous avons : $x = X$ et $y = -2 + Y$.
Il en résulte les équivalences logiques :
$(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (y = x^3 + x - 2)$.
$(y = x^3 + x - 2) \Longleftrightarrow (-2 + Y = X^3 + X - 2)$.
Après simplification, nous obtenons : $(y = x^3 + x - 2) \Longleftrightarrow (Y = X^3 + X)$.
Nous avons donc l'équivalence logique : $(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (Y = X^3 + X)$.
Nous disons que : $Y = X^3 + X$, équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$, est l'équation réduite de la courbe $\mathcal{C}$.

38 **Centre de symétrie** : La fonction : $X \mapsto X^3 + X$ est une fonction impaire. Nous en déduisons que O' est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

Deuxième exemple : $f : x \mapsto x^3 - 2$.

39 **Ensemble de définition** : La fonction f est une fonction polynôme ; son ensemble de définition est donc l'ensemble $\mathbb{R}$.

40 **Étude de la fonction quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$** : Nous allons montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Pour tout x différent de zéro, nous avons : $f(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x^3}\right)$.

Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $-\frac{2}{x^3}$ tend vers 0.

Pour tout réel x positif, le réel x^3 est positif. Donc, quand x tend vers $+\infty$, x^3 tend vers $+\infty$.
Pour tout réel x négatif, le réel x^3 est négatif. Donc, quand x tend vers $-\infty$, x^3 tend vers $-\infty$.
Quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ est le produit d'un facteur qui tend vers 1 et d'un facteur qui tend vers $+\infty$. Il en résulte que $f(x)$ tend vers $+\infty$.
Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ est le produit d'un facteur qui tend vers 1 et d'un facteur qui tend vers $-\infty$. Il en résulte que $f(x)$ tend vers $-\infty$.

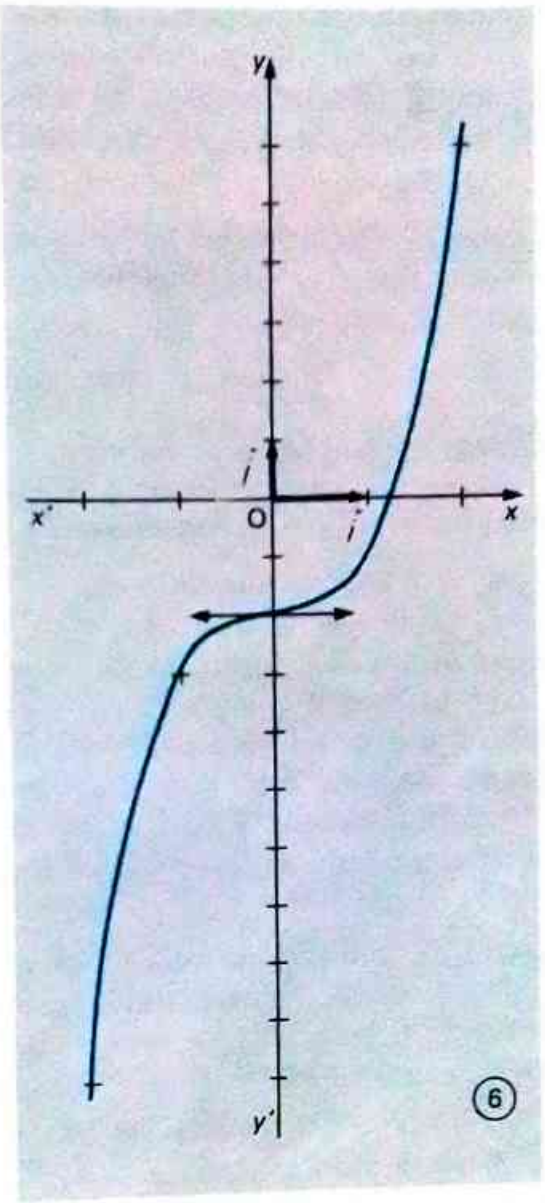
41 **Sens de variations** : La fonction f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous étudions le sens de variations de f en étudiant le signe de la fonction dérivée f' : $x \mapsto 3x^2$.
Nous avons : $(f'(x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0)$; $(f'(x) > 0) \Longleftrightarrow (x \neq 0)$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

42 **Tableau de variations :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↗	$+\infty$

43 **Graphe :** Le tableau ci-dessous donne cinq couples $(x, f(x))$ qui sont des éléments du graphe de la fonction :

x	-1	0	$+1$	$+2$	$+2{,}5$
$f(x)$	-3	-2	-1	$+6$	$+13{,}6$



⑥

44 **Courbe représentative :** La courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée dans un repère cartésien (fig. 6). Elle passe par les cinq points dont nous venons de calculer les coordonnées. Au point d'abscisse 0, la tangente est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$.
Une équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $y = x^3 - 2$.

45 **Équation réduite :** Soit O′ le point d'intersection de la courbe représentative $\mathcal{C}$ et de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$; les coordonnées de O′ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont :
$x_0 = 0, \quad y_0 = -2$.
Désignons par (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par (X, Y) les coordonnées de ce même point M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$. Dans cet exemple, nous avons : $x = X, \quad Y = -2 + Y$.
Il en résulte les équivalences logiques :
$(M \in \mathcal{C}) \iff (y = x^3 - 2)$,
$(y = x^3 - 2) \iff (-2 + y = X^3 - 2)$.
Après simplification, nous obtenons : $(y = x^3 - 2) \iff (Y = X^3)$.
Nous avons donc l'équivalence logique : $(M \in \mathcal{C}) \iff (Y = X^3)$.
Nous disons que : $Y = X^3$, équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$, est l'équation réduite de la courbe $\mathcal{C}$.

46 **Centre de symétrie :** La fonction : $X \rightsquigarrow X^3$ est une fonction impaire.
Nous en déduisons que O′ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

Troisième exemple : $f : x \mapsto -x^3 + 3x - 2$.

47 **Ensemble de définition** : La fonction f est une fonction polynôme ; son ensemble de définition est donc l'ensemble $\mathbb{R}$.

48 **Étude de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$** : Nous allons montrer que $f(x)$ tens $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Pour tout x différent de zéro, nous avons : $f(x) = -x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$.

Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $-\frac{3}{x^2}$ et $\frac{2}{x^3}$ tendent vers zéro ; donc la somme $1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ tend vers 1.

Pour tout réel x négatif, le réel $-x^3$ est positif ; donc, quand x tend vers $-\infty$, $-x^3$ tend vers $+\infty$.

Pour tout réel x positif, le réel $-x^3$ est négatif ; donc, quand x tend vers $+\infty$, $-x^3$ tend vers $-\infty$.

Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ est le produit d'un facteur qui tend vers 1 et d'un facteur qui tend vers $+\infty$; il en résulte que $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ est le produit d'un facteur qui tend vers 1 et d'un facteur qui tend vers $-\infty$; il en résulte que $f(x)$ tend vers $-\infty$.

49 **Sens de variations** : La fonction f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous étudions le sens des variations de f en étudiant le signe de la fonction dérivée f' : $x \mapsto -3x^2 + 3$.

Nous avons donc : $(f'(x) = 0) \iff (x = 1 \text{ ou } x = -1)$.

Le signe de $f'(x)$ est le signe du produit $3(1 - x^2)$, c'est-à-dire celui du produit $(1 - x)(1 + x)$.

Appliquons, à chaque facteur du produit, le théorème sur le signe du binôme du premier degré ; puis dressons le tableau suivant, dans lequel nous marquons, suivant les valeurs de x, les signes des facteurs :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
signe de $1 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $1 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous en déduisons : $(f'(x) < 0) \iff (x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$;
$(f'(x) > 0) \iff (x \in]-1, 1[)$.

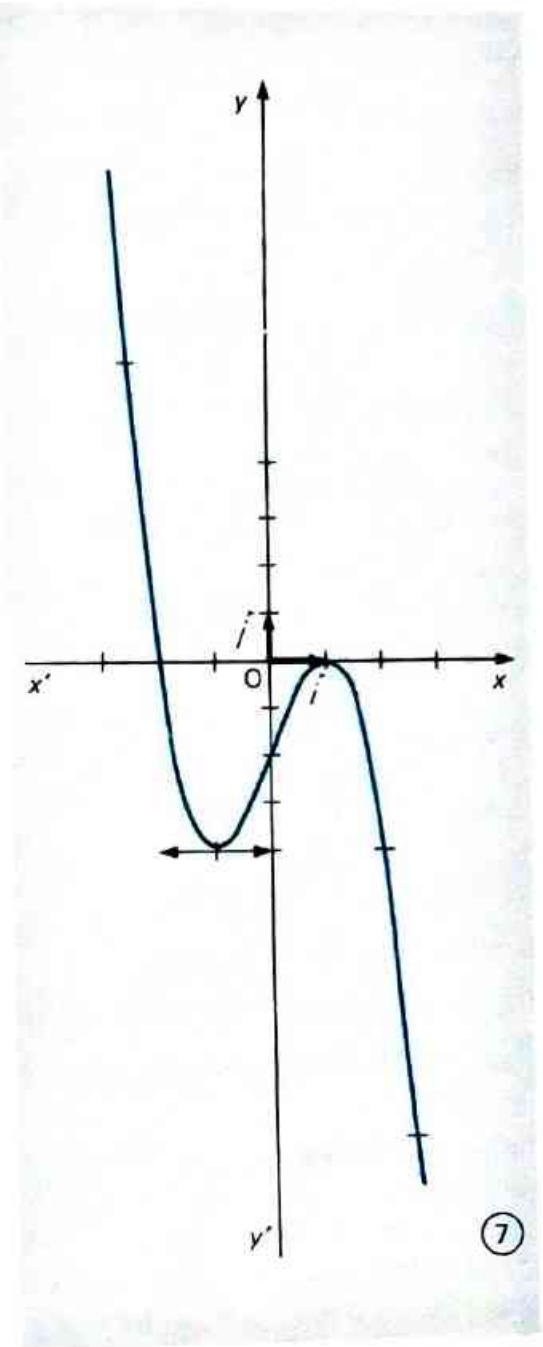
La fonction étudiée est donc strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ et strictement croissante sur l'intervalle $]-1, 1[$.
Pour : $x = -1$, la fonction possède un minimum local strict ; pour : $x = 1$, la fonction possède un maximum local strict.

50 **Tableau de variations :**

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

51 **Graphe** : Le tableau ci-dessous donne sept couples $(x, f(x))$ qui sont des éléments du graphe de la fonction f :

x	$-2{,}5$	-2	-1	0	$+1$	$+2$
$f(x)$	$+6{,}1$	0	-4	-2	0	-4



⑦

52 **Courbe représentative :** La courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée dans un repère cartésien (fig. 7). Elle passe par les six points dont nous venons de calculer les coordonnées. Au point d'abscisse -1, la tangente est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$; au point d'abscisse 1, la tangente est le support de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$.
Une équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $y = -x^3 + 3x - 2$.

53 **Équation réduite :** Soit O' le point d'intersection de la courbe représentative $\mathcal{C}$ et de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$; les coordonnées de O' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont : $x_0 = 0$, $y_0 = -2$.
Désignons par (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par (X, Y) les coordonnées de ce même point M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$. Dans cet exemple, nous avons : $x = X$, $y = -2 + Y$.

Il en résulte les équivalences logiques :
$(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (y = -x^3 + 3x - 2)$,
$(y = -x^3 + 3x - 2) \Longleftrightarrow (-2 + Y = -X^3 + X - 2)$.
Après simplification, nous obtenons :
$(y = -x^3 + 3x - 2) \Longleftrightarrow (Y = -X^3 + 3X)$.
Nous avons donc l'équivalence logique : $(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (Y = -X^3 + 3X)$.
Nous disons que : $Y = -X^3 + 3X$, équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ est l'équation réduite de la courbe $\mathcal{C}$.

54 **Centre de symétrie** : La fonction : $X \mapsto -X^3 + 3X$ est une fonction impaire. Nous en déduisons que O' est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

Exemple de fonctions $f : x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$.

Fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$.

55 **Ensemble de définition** : La fonction f est une fonction polynôme ; son ensemble de définition est donc l'ensemble $\mathbb{R}$.
C'est une fonction paire ; nous étudions donc cette fonction dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$. L'étude dans l'ensemble $\mathbb{R}_-$ s'en déduit par les propriétés de symétrie mises en évidence au début de ce chapitre.

56 **Étude de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$** : Nous allons montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
Pour tout x strictement positif, nous avons : $f(x) = x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)$.
Quand x tend vers $+\infty$, x^4 tend vers $+\infty$; $-\frac{2}{x^2}$ et $\frac{3}{x^4}$ tendent vers 0, et la somme $\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}$ tend vers $\frac{1}{4}$.
Quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$, produit du facteur x^4 qui tend vers $+\infty$ et du facteur $\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}$ qui tend vers $\frac{1}{4}$, tend donc vers $+\infty$.

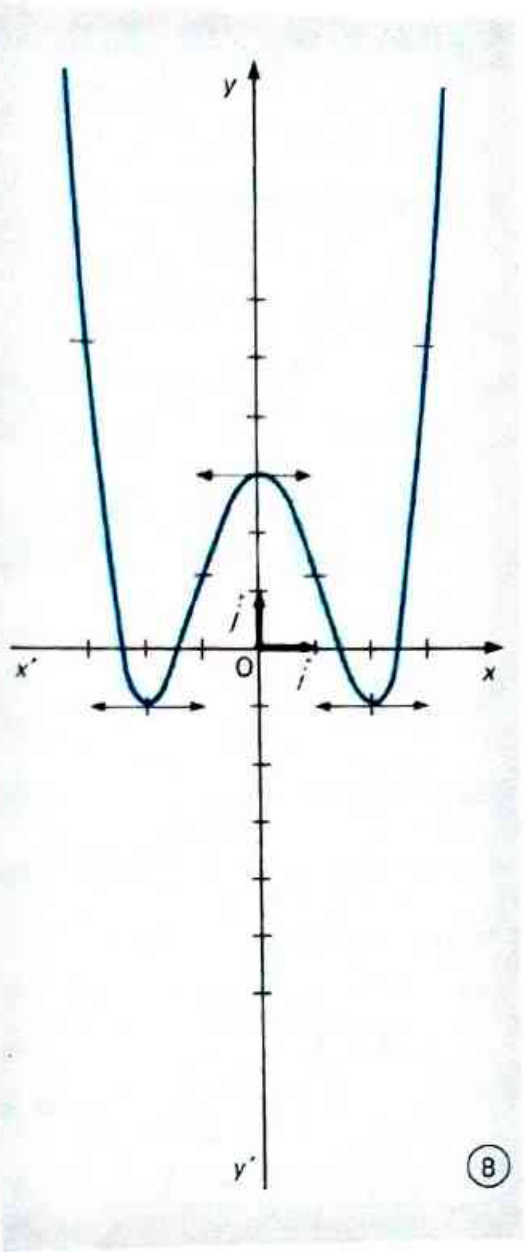
57 **Sens de variations** : La fonction f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous étudions le sens de variations de f en étudiant, dans $\mathbb{R}_+$, le signe de la fonction dérivée f' : $x \mapsto x^3 - 4x$.
Nous avons : $f'(x) = x(x + 2)(x - 2)$.
Dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$, $f'(x)$ s'annule pour : $x = 0$ et pour : $x = 2$.
Si x appartient à $\mathbb{R}_+^* - \{2\}$, les facteurs x et $x + 2$ sont positifs ; le signe de $f'(x)$ est donc le signe du binôme $x - 2$.
Si x appartient à $\mathbb{R}_+$, nous avons donc : $(f'(x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0$ ou $x = 2)$; $(f'(x) > 0) \Longleftrightarrow (x \in]2, +\infty[)$; $(f'(x) < 0) \Longleftrightarrow (x \in]0, 2[)$.
Dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$, la fonction étudiée est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 2[$; elle est strictement croissante sur l'intervalle $]2, +\infty[$.
La fonction f présente pour : $x = 0$ un maximum local strict et pour : $x = 2$ un minimum local strict ; ce minimum est aussi un minimum global.

58 **Tableau de variations :**

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+3$	↘	-1	↗	$+\infty$

59 **Graphe :** Le tableau ci-dessous donne trois couples $(x, f(x))$ qui sont des éléments du graphe de la fonction :

x	0	$+1$	$+3$
$f(x)$	-1	$+1{,}25$	$+5{,}25$



⑧

Déterminons les valeurs positives de x pour lesquelles $f(x)$ s'annule, c'est-à-dire cherchons les racines positives de l'équation : $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3 = 0$.

Posons $x^2 = n$. Nous en déduisons l'équation : $\frac{1}{4}n^2 - 2n + 3 = 0$, c'est-à-dire : $n^2 - 8n + 12 = 0$. Cette équation a deux racines positives : $n' = 2$ et $n'' = 6$.

Il en résulte que les racines positives de l'équation : $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3 = 0$ sont $x_1' = \sqrt{2}$ et $x_1'' = \sqrt{6}$.

60 **Courbe représentative ; axe de symétrie:** La courbe est tracée dans un repère orthonormé. La partie de courbe qui correspond aux valeurs positives de x passe par les six points dont nous venons de calculer les coordonnées.

Le support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.

La partie de courbe qui correspond aux valeurs négatives de x est donc obtenue par symétrie par rapport au support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$ (fig. 8).

Aux points d'abscisse -2, 0 et 2, la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$.

Exemples de fonctions homographiques.

Premier exemple : $f : \forall x \in D_f,\ x \rightsquigarrow \dfrac{3x+7}{2x+2}$.

61 Ensemble de définition. Pour tout réel x différent de -1 on peut calculer le réel : $f(x) = \dfrac{3x+7}{2x+2}$. L'ensemble de définition D_f est donc l'ensemble $\mathbb{R} - \{-1\}$.

62 Étude de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Nous allons montrer que $f(x)$ tend vers $\dfrac{3}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

En effet, pour tout x différent de zéro, nous avons : $f(x) = \dfrac{3+\frac{7}{x}}{2+\frac{2}{x}}$.

Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\dfrac{7}{x}$ et $\dfrac{2}{x}$ tendent vers zéro ; donc $3+\dfrac{7}{x}$ tend vers 3 et $2+\dfrac{2}{x}$ tend vers 2.

D'après les théorèmes sur les limites, il en résulte que $f(x)$ tend vers $\dfrac{3}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

63 Étude de la fonction lorsque x tend vers -1 : Montrons que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $(-1)^+$, et vers $-\infty$ quand x tend vers $(-1)^-$.
Quand x tend vers -1, le numérateur $3x+7$ tend vers 4 et le dénominateur $2x+2$ tend vers 0 ; donc $|f(x)|$ tend vers $+\infty$. Il en résulte que, pour tout réel B strictement positif, il existe un réel α strictement positif tel que l'on ait l'implication : $(0 < |x+1| < \alpha) \Longrightarrow (|f(x)| > B)$.
En particulier, on peut choisir α tel que le réel $3x+7$ soit positif dans l'intervalle $]-1-\alpha,\ -1+\alpha[$.
Dans l'intervalle $]-1,\ -1+\alpha[$, $2x+2$ est positif ; on a donc : $|f(x)| = f(x)$; d'où l'implication : $(0 < x+1 < \alpha) \Longrightarrow (f(x) > B)$.
Nous concluons : $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $(-1)^+$.
Dans l'intervalle $]-1-\alpha,\ -1[$, $2x+2$ est négatif ; on a donc : $|f(x)| = -f(x)$; d'où l'implication : $(-\alpha < x+1 < 0) \Longrightarrow (f(x) < -B)$.
Nous concluons : $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $(-1)^-$.

64 Sens de variations : La fonction f est le quotient de deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$:

$u : \forall x \in \mathbb{R},\ x \rightsquigarrow 3x+7$; $u' : \forall x \in \mathbb{R},\ x \rightsquigarrow 3$;
$v : \forall x \in \mathbb{R},\ x \rightsquigarrow 2x+2$; $v' : \forall x \in \mathbb{R},\ x \rightsquigarrow 2$.

La fonction dérivée f' est définie par :

$$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2},$$

ou encore : $f'(x) = \dfrac{3(2x+2) - 2(3x+7)}{(2x+2)^2}$.

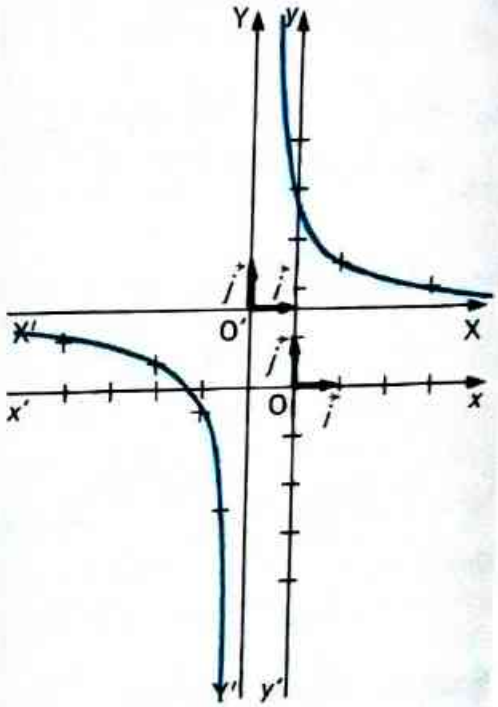
Après simplification, nous obtenons : $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$.

Nous en déduisons : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, \quad f'(x) < 0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

65 Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$\frac{3}{2}$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $\frac{3}{2}$



⑨

66 Graphe : Le tableau ci-dessous donne sept couples $(x, f(x))$ qui sont des éléments du graphe de la fonction f :

x	-5	-3	-2	$-1,5$	0	$+1$	$+3$
$f(x)$	$+1$	$+0,5$	$-0,5$	$-2,5$	$+3,5$	$+2,5$	$+2$

67 Courbe représentative : Considérons un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (fig. 9).

Les éléments du graphe que nous venons de déterminer permettent de placer sept points de la courbe représentative. On démontre et nous admettons que la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}$ que nous avons dessinée et qui passe par ces sept points. Cette courbe $\mathcal{C}$ est obtenue en joignant les points d'abscisse inférieure à -1, puis les points d'abscisse supérieure à -1.

L'équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $y = \dfrac{3x+7}{2x+2}$.

68 **Équation réduite** : La fonction f n'est pas définie au point : $x_0 = -1$. Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la limite de $f(x)$ est : $y_0 = 1{,}5$.
Soit O′ le point dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont : $x_0 = -1$, $y_0 = 1{,}5$.
Désignons par (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par (X, Y) les coordonnées de ce même point M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$.
Dans cet exemple, nous avons : $x = -1 + X$, $y = 1{,}5 + Y$.
Il en résulte les équivalences logiques :

$$(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow \left(y = \frac{3x+7}{2x+2}\right);$$

$$\left(y = \frac{3x+7}{2x+2}\right) \Longleftrightarrow \left(1{,}5 + Y = \frac{3(-1+X)+7}{2(-1+X)+2}\right).$$

Après simplification, nous obtenons : $\left(y = \frac{3x+7}{2x+2}\right) \Longleftrightarrow \left(Y = \frac{2}{X}\right)$.

Nous avons donc l'équivalence logique : $(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow \left(Y = \frac{2}{X}\right)$.

Nous disons que : $Y = \frac{2}{X}$, équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ est l'équation réduite de la courbe $\mathcal{C}$.

69 **Centre de symétrie** : La fonction : $X \rightsquigarrow \frac{2}{X}$ est une fonction impaire. Nous en déduisons que O′ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

Notion d'asymptote.

70 Construisons la droite D d'équation : $y = \frac{3}{2}$; elle est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$. Soit M un point de la courbe $\mathcal{C}$, et P le point de D qui a même abscisse que le point M ; nous avons alors :

$$\overline{PM} = f(x) - \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad PM = \left| f(x) - \frac{3}{2} \right|.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers $\frac{3}{2}$; la distance PM tend alors vers 0.
Nous disons que la droite D est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

71 D'une façon générale, soit une fonction f définie dans un intervalle $]a, +\infty[$; supposons que, lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction f admette une limite λ :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda.$$

On dit que la droite D, d'équation : $y = \lambda$, est asymptote à la courbe représentative de la fonction f, lorsque x tend vers $+\infty$.
On définit d'une façon analogue une droite asymptote à la courbe représentative de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$.

72 Dans l'exemple étudié, lorsque x tend vers $+\infty$, on a : $f(x) > \frac{3}{2}$; l'ordonnée du point M est supérieure à l'ordonnée du point P ; nous disons que, lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe représentative est "au-dessus" de l'asymptote.

Lorsque x tend vers $-\infty$, on a : $f(x) < \frac{3}{2}$; l'ordonnée du point M est inférieure à l'ordonnée du point P ; nous disons que, lorsque x tend vers $-\infty$, la courbe représentative est "au-dessous" de l'asymptote.

73 Construisons la droite Δ d'équation : $x = -1$; elle est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$. Soit M un point de la courbe $\mathcal{C}$, et Q le point de Δ qui a même ordonnée que le point M ; nous avons alors : $QM = |x + 1|$.
Lorsque x tend vers -1, la valeur absolue $|x + 1|$ tend vers 0 ; la distance OM tend vers l'infini et la distance QM tend vers 0. Nous disons que la droite Δ est asymptote à la courbe.

74 D'une façon générale, soit une fonction f définie dans un intervalle $[a, b]$; supposons, par exemple, que lorsque x tend vers a^+, $f(x)$ tende vers $+\infty$.
On dit que la droite Δ, d'équation : $x = a$, est asymptote à la courbe lorsque x tend vers a par valeurs supérieures.
On définit d'une façon analogue une droite asymptote à la courbe représentative dans chacun des cas suivants : $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a^- ; $f(x)$ tend vers $-\infty$, quand x tend vers a^+ ou vers a^-.

75 Dans l'exemple étudié, la droite Δ est asymptote à la courbe lorsque x tend vers $(-1)^+$ et lorsque x tend vers $(-1)^-$.
Pour : $x > -1$, nous disons que la courbe est "à droite" de l'asymptote Δ ; pour : $x < -1$, nous disons que la courbe est "à gauche" de l'asymptote Δ.

Deuxième exemple : $f : \forall x \in D_f,\ x \rightsquigarrow \frac{2x+3}{1-x}$.

76 **Ensemble de définition** : Pour tout réel x différent de 1, nous pouvons calculer le réel : $f(x) = \frac{2x+3}{1-x}$. L'ensemble de définition D_f est : $\mathbb{R} - \{1\}$.

77 **Étude de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$** : Nous allons montrer que $f(x)$ tend vers -2 lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. En effet, pour tout x différent de 0, nous avons : $f(x) = \frac{2 + \frac{3}{x}}{\frac{1}{x} - 1}$. Quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, $\frac{3}{x}$ et $\frac{1}{x}$ tendent vers 0 ; donc $2 + \frac{3}{x}$ tend vers 2 et $\frac{1}{x} - 1$ tend vers -1. D'après les théorèmes sur les limites, il résulte que $f(x)$ tend vers -2 lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

78 **Étude de la fonction lorsque x tend vers 1** : Nous allons montrer que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 1^+ et que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1^-.

Quand x tend vers 1, le numérateur $2x + 3$ tend vers 5 et le dénominateur $1 - x$ tend vers 0 ; donc $|f(x)|$ tend vers $+\infty$.

Il en résulte que, pour tout réel B strictement positif, il existe un réel α strictement positif tel que l'on ait l'implication : $(0 < |1 - x| < \alpha) \Longrightarrow (|f(x)| > B)$.

En particulier, on peut choisir α tel que le réel $2x + 3$ soit positif dans l'intervalle $]1 - \alpha,\ 1 + \alpha[$.

Dans l'intervalle $]1 - \alpha, 1[$, $1 - x$ est positif ; on a donc : $|f(x)| = f(x)$;
d'où l'implication : $(0 < 1 - x < \alpha) \Longrightarrow (f(x) > B)$.
Nous concluons : $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1^-.

Dans l'intervalle $]1, 1 + \alpha[$, $1 - x$ est négatif ; on a donc : $|f(x)| = -f(x)$;
d'où l'implication : $(-\alpha < 1 - x < 0) \Longrightarrow (f(x) < -B)$.
Nous concluons : $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 1^+.

79 **Sens de variations** : La fonction f est le quotient de deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$:

u : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \rightsquigarrow 2x + 3$; u' : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \rightsquigarrow 2$;
v : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \rightsquigarrow 1 - x$; v' : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \rightsquigarrow -1$.

La fonction dérivée f' est définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2},$$

ou encore : $f'(x) = \dfrac{2(1 - x) + (2x + 3)}{(1 - x)^2}$.

Après simplification, nous obtenons : $f'(x) = \dfrac{5}{(1 - x)^2}$.

Nous en déduisons : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\},\ f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

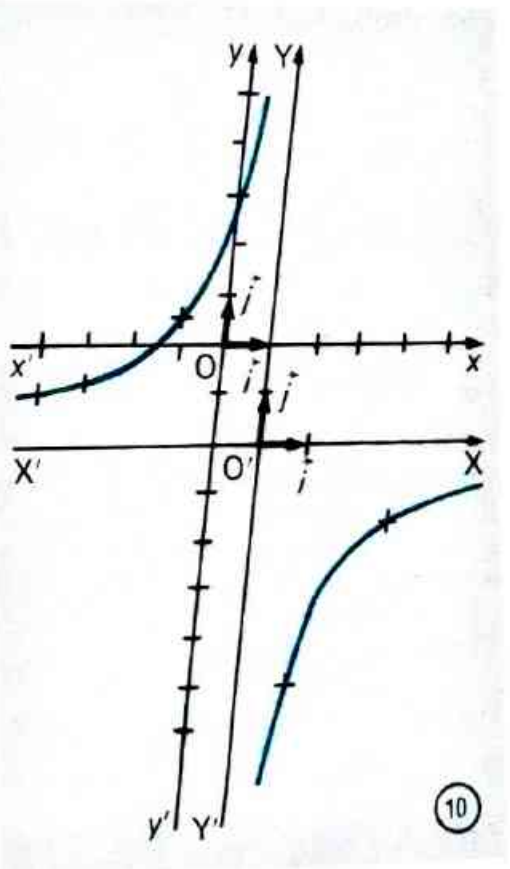
80 **Tableau de variations** :

x	$-\infty$		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	-2	⟶	$+\infty$ ‖ $-\infty$	⟶	-2

81 **Graphe** : Le tableau ci-dessous donne sept couples $(x, f(x))$ qui sont des éléments du graphe de la fonction f :

x	-4	-3	$-1,5$	-1	0	$+2$	$+4$	$+6$
$f(x)$	-1	$-0,75$	0	$+0,5$	$+3$	-7	$-3,7$	-3

82 **Courbe représentative** : Considérons un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (fig. 10).
Les éléments du graphe que nous venons de déterminer permettent de placer sept points de la courbe. On démontre et nous admettons que la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}$ que nous avons dessinée et qui passe par ces sept points.
Cette courbe $\mathcal{C}$ est obtenue en joignant les points d'abscisse inférieure à 1, puis les points d'abscisse supérieure à 1.
Une équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $y = \dfrac{2x+3}{1-x}$.



(10)

83 **Équation réduite** : La fonction f n'est pas définie au point : $x_0 = 1$.
Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la limite de $f(x)$ est : $y_0 = -2$.
Soit O' le point dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont :
$x_0 = 1$ et $y_0 = -2$.
Désignons par (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par (X, Y) les coordonnées de ce même point M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$. Dans cet exemple, nous avons : $x = 1 + X$; $y = -2 + Y$.
Il en résulte les équivalences logiques :

$$(M \in \mathcal{C}) \iff \left(y = \frac{2x+3}{1-x}\right);$$

$$\left(y = \frac{2x+3}{1-x}\right) \iff \left(-2 + Y = \frac{2(1+X)+3}{1-(1+X)}\right).$$

Après simplification, nous obtenons : $\left(y = \dfrac{2x+3}{1-x}\right) \iff \left(Y = -\dfrac{5}{X}\right)$.

Nous avons l'équivalence logique : $(M \in \mathcal{C}) \iff \left(Y = -\dfrac{5}{X}\right)$.

Nous disons que : $Y = -\frac{5}{X}$ équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O', \vec{I}, \vec{j})$ est l'équation réduite de la courbe $\mathcal{C}$.

84 **Centre de symétrie** : La fonction : $X \mapsto -\frac{5}{X}$ est une fonction impaire. Nous en déduisons que O' est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

85 **Asymptotes** : Une étude analogue à celle des n^{os} 70 à 75 montre que la droite D d'équation : $y = -2$ et la droite Δ d'équation : $x = 1$ sont deux asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.

Autre exemple de fonction.

Fonction f : $x \mapsto x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

86 **Ensemble de définition** : Pour tout réel x différent de -1, on peut calculer le réel : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. L'ensemble de définition D_f est : $\mathbb{R} - \{-1\}$.

87 **Étude de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$:** Lorsque x tend vers $+\infty$, $x - 1$ tend vers $+\infty$ et $\frac{1}{x+1}$ tend vers 0 ; $f(x)$ tend donc vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, $x - 1$ tend vers $-\infty$ et $\frac{1}{x+1}$ tend vers 0 ; $f(x)$ tend donc vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

88 **Étude de la fonction lorsque x tend vers -1 :** Lorsque x tend vers $(-1)^-$, $x - 1$ tend vers -2 et $\frac{1}{x+1}$ tend vers $-\infty$; $f(x)$ tend donc vers $-\infty$ lorsque x tend vers $(-1)^-$.

Lorsque x tend vers $(-1)^+$, $x - 1$ tend vers -2 et $\frac{1}{x+1}$ tend vers $+\infty$; $f(x)$ tend donc vers $+\infty$ lorsque x tend vers $(-1)^+$.

89 **Sens de variations** : La fonction f est la somme de deux fonctions u et v dérivables dans chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$:

u : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $x \mapsto x - 1$; u' : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $x \mapsto 1$.

v : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $x \mapsto \frac{1}{x+1}$; v' : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $x \mapsto -\frac{1}{(x+1)^2}$

La fonction dérivée f' est définie par :

$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[, \quad f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$,

c'est-à-dire : $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est le signe du produit $x(x+2)$; ce signe est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-$	-2	$-$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$x(x+2)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons les équivalences logiques :

$(f'(x) > 0) \iff (x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[)$;

$(f'(x) < 0) \iff (x \in]-2, -1[\cup]-1, 0[)$.

La fonction étudiée est donc strictement croissante dans chacun des intervalles $]-\infty, -2[$ et $]0, +\infty[$; elle est strictement décroissante dans chacun des intervalles $]-2, -1[$ et $]-1, 0[$.

Pour : $x = -2$, la fonction possède un maximum local strict ; pour $x = 0$, elle possède un minimum local strict.

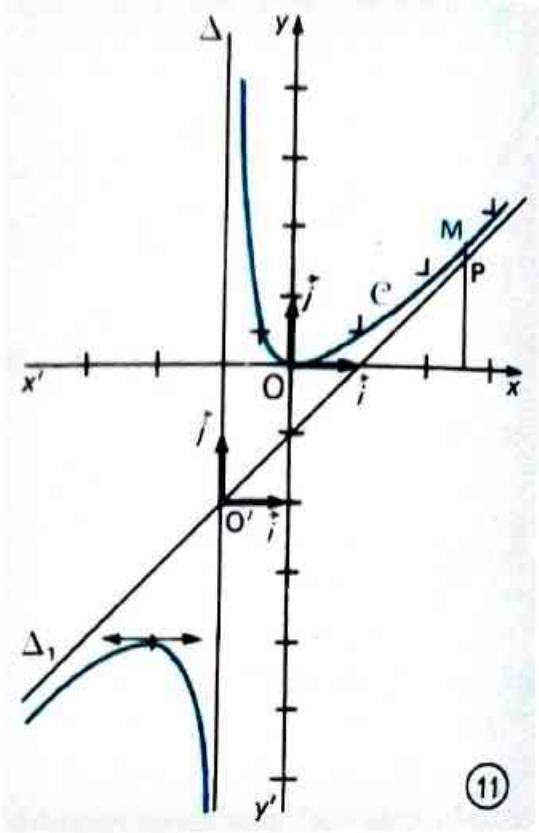
90 **Tableau de variations :**

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$+\infty$ ‖	↘	0	↗	$+\infty$

91 **Graphe :** Le tableau ci-dessous donne neuf couples $(x, f(x))$, éléments du graphe de la fonction f :

x	-4	-3	-2	$-1,5$	$-0,5$	0	$+1$	$+2$	$+3$
$f(x)$	$-5,3$	$-4,5$	-4	$-4,5$	$+0,5$	0	$+0,5$	$+1,3$	$+2,2$

92 Courbe représentative : Considérons un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ que nous supposons orthonormé. Les éléments du graphe indiqués dans le tableau ci-dessus permettent de placer neuf points de la courbe. On démontre et nous admettons que la courbe représentative est la courbe $\mathcal{C}$ que nous avons dessinée (fig. 11) et qui passe par ces neuf points.
Une équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est : $y = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.



93 Asymptotes :
1. Traçons la droite Δ d'équation : $x = -1$. Une étude analogue à celle du n° 74, p. 155, montre que cette droite Δ est une asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}$.
2. Construisons ensuite la droite Δ_1 d'équation : $y = x - 1$.

Soit M un point de la courbe $\mathcal{C}$ et P le point de Δ_1 qui a même abscisse que M; nous avons alors : $\overline{PM} = \dfrac{1}{x+1}$ et $PM = \left|\dfrac{1}{x+1}\right|$.
Lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la distance PM tend vers 0.
Nous disons que la droite Δ_1 est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, on a : $\overline{PM} > 0$; l'ordonnée du point M est supérieure à celle du point P; on dit que, lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe représentative est "au-dessus" de l'asymptote Δ_1.
Lorsque x tend vers $-\infty$, on a : $\overline{PM} < 0$, l'ordonnée du point M est inférieure à celle du point P; on dit que, lorsque x tend vers $-\infty$, la courbe représentative est "au-dessous" de l'asymptote Δ_1.

94 Équation réduite : Soit O' le point d'intersection des asymptotes Δ et Δ_1; le point O' est le point de Δ_1 dont l'abscisse est : $x_0 = -1$; son ordonnée est donc : $y_0 = x_0 - 1 = -2$.
Désignons par (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par (X, Y) les coordonnées du même point M dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$. Dans cet exemple, nous avons : $x = -1 + X$ et $y = -2 + Y$.
Il en résulte les équivalences logiques :

$$(M \in \mathcal{C}) \iff \left(y = x - 1 + \frac{1}{x+1}\right);$$

$$\left(y = x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) \iff \left(-2 + Y = (-1 + X) - 1 + \frac{1}{1 + (-1 + X)}\right).$$

Après simplification, nous obtenons : $\left(y = x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) \Longleftrightarrow \left(Y = X + \frac{1}{X}\right)$.

Nous avons donc l'équivalence logique : $(M \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow \left(Y = X + \frac{1}{X}\right)$.

Nous disons que : $Y = X + \frac{1}{X}$, équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ est l'équation réduite de la courbe $\mathcal{C}$.

95 **Centre de symétrie :** La fonction : $X \rightsquigarrow X + \frac{1}{X}$ est impaire ; nous en déduisons que le point O' est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

EXERCICES

◆ Parmi les fonctions suivantes (n°s 1 à 10), indiquer celles qui sont paires et celles qui sont impaires.

Fonctions paires. Fonctions impaires.

1 $x \rightsquigarrow x^2 + 2x$.

2 $x \rightsquigarrow x^3 - 4x$.

3 $x \rightsquigarrow 2x^3 + x - 1$.

4 $x \rightsquigarrow -x^3 + 2x^2$.

5 $x \rightsquigarrow 4x^3 - 2x$.

6 $x \rightsquigarrow -x^4 + x^2 - 1$.

7 $x \rightsquigarrow -3x^4 + x^3 - x^2$.

8 $x \rightsquigarrow \frac{x}{x^2+1}$.

9 $x \rightsquigarrow \frac{x^3 - 2x}{-x^3 + 4x}$.

10 $x \rightsquigarrow (x^2 + 2)(2x^3 - x)$.

11 Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
On considère les deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$, $\quad h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$.

1° Démontrer que g est une fonction paire et que h est une fonction impaire.
2° En déduire que, pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, il existe une fonction g paire et une fonction h impaire uniques, telles que : $f = g + h$.

12 Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :
$x \rightsquigarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$.
1° Démontrer que f est une fonction paire si et seulement si, pour tout indice k tel que : $0 \leqslant 2k + 1 \leqslant n$, on a : $a_k = 0$.
2° Démontrer que f est une fonction impaire si et seulement si, pour tout indice k tel que : $0 \leqslant 2k \leqslant n$, on a : $a_k = 0$.

EXERCICES

13 Soit f une fonction paire définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
1° Soit x_0 un réel. Démontrer l'égalité : $f'(-x_0) = -f'(x_0)$.
2° En déduire que la fonction dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.
3° Que peut-on dire de la fonction dérivée d'une fonction impaire ?

14 Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert E et x_0 un point de E.
1° Démontrer que si f est maximum au point x_0, on a : $f'(x_0) = 0$.
2° Démontrer que si f est minimum au point x_0, on a : $f'(x_0) = 0$.
3° En déduire une condition nécessaire pour que f soit maximum ou minimum en un point x_0.
4° Utiliser l'exemple suivant, pour montrer que cette condition n'est pas suffisante : $f : \forall x \in \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + 4$.

Étude de fonctions.

◆ Dans chacun des exercices (nos 15 à 24), on considère une fonction numérique f.
1° Faire l'étude de la fonction f.
2° Tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère cartésien.
3° Donner l'équation réduite de la courbe $\mathcal{C}$.

15 $x \mapsto x^2 - x - 2$.

16 $x \mapsto -x^2 - 1$.

17 $x \mapsto x^2 - x - 6$.

18 $x \mapsto -2x^2 + x + 1$.

19 $x \mapsto x^2 + 3x + 2$.

20 $x \mapsto -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{2}{3}$.

21 $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x + 1$.

22 $x \mapsto -3x^2 - 4x + 4$.

23 $x \mapsto |x| + x^2$.

24 $x \mapsto |-x^2 + 5x| - 4$.

◆ Dans chacun des exercices suivants (nos 25 à 32), on considère une fonction f et la courbe représentative $\mathcal{C}$ de cette fonction dans un repère cartésien dont les axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$ sont orthogonaux.
1° Déterminer le réel x_0 pour lequel la fonction f possède un maximum ou un minimum.
2° Préciser si la fonction f possède un maximum en x_0 ou si elle possède un minimum en x_0.
3° Quelles sont les coordonnées du sommet de la courbe $\mathcal{C}$?

25 $x \mapsto 3x^2 - 2x + 4$.

26 $x \mapsto 9 - x^2$.

27 $x \mapsto \frac{4x^2}{3} - 4x + \frac{3}{2}$.

28 $x \mapsto -\frac{5}{6}x^2 - \frac{10x}{3} + 1$.

29 $x \mapsto \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 2$.

30 $x \mapsto -\frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + 2$.

31 $x \mapsto x^2 + 3x - 1$.

32 $x \mapsto -\frac{x^2}{2} + 4x - 3$.

33 Le plan est rapporté à un repère cartésien dont les axes $\overrightarrow{x'Ox}$ et $\overrightarrow{y'Oy}$ sont orthogonaux. Soit m un réel non nul. On considère la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation : $y = mx^2 + 2mx + m + 1$.

1° Démontrer que les coordonnées du sommet de la courbe sont indépendantes de m.

2° Déterminer m pour que la courbe $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$ au point d'abscisse 3.

3° En déduire alors l'abscisse du second point d'intersection B de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$.

34 Soient a et a' des réels non nuls, b, c, b' des réels. On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = ax^2 + bx + c$ et la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation : $y = a'x^2 + b'x + c$. On désigne par $\mathcal{K}$ l'ensemble $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.

1° Démontrer que, si les réels a, a', b, b' vérifient les conditions : $a = a'$ et $b \neq b'$, $\mathcal{K}$ est un singleton $\{A\}$. Quelles sont les coordonnées du point A ?

2° On suppose que a est différent de a'. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{K}$ soit un singleton.

3° La condition de la question 2 est supposée satisfaite. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ admettent en leur point d'intersection une tangente commune dont on écrira l'équation.

35 On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 3$.

1° Vérifier que le point A de coordonnées $(2, -3)$ est un point de $\mathcal{C}$.

2° Soit D la tangente en A de la courbe $\mathcal{C}$. Quelle est l'équation de D ?

3° On considère la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation : $y = x^2 + 8x + 26$.
Démontrer que D coupe $\mathcal{C}'$ en un seul point B dont on donnera les coordonnées.

4° Quelle est la tangente en B à la courbe $\mathcal{C}'$?

36 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = x^2 - 3x + 2$.

Soient D la droite d'équation : $y = -\frac{1}{2}$, F le point de coordonnées $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ et M un point de coordonnées (x, y).

1° Démontrer qu'un point M appartient à la courbe $\mathcal{C}$ si et seulement si sa distance à la droite D est égale à sa distance au point F.

2° Soit M_0 un point de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse x_0 est différente de $\frac{3}{2}$ et dont l'ordonnée est y_0 et soit H_0 la projection orthogonale du point M_0 sur la droite D. On désigne par A_0 le milieu du segment $[F, H_0]$.
Déterminer le coefficient directeur de la droite D définie par les points M_0 et A_0. En déduire que la droite D est la tangente en M_0 à la courbe $\mathcal{C}$.

3° Déduire des questions 1° et 2° que la projection orthogonale du point F sur la tangente en un point M de la courbe $\mathcal{C}$ est un point de la droite D' d'équation : $y = -\frac{1}{4}$.

EXERCICES

◆ Étudier et représenter graphiquement les fonctions f suivantes (n°s 37 à 52). On précisera chaque fois, s'il en existe, les éléments de symétrie de la courbe représentative et les coordonnées des points où la tangente est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$.

37 $x \rightsquigarrow \frac{x^3}{3} + x - 2.$

38 $x \rightsquigarrow -x^3 - \frac{x}{4} - 1.$

39 $x \rightsquigarrow \frac{x^3}{3} - x + 2.$

40 $x \rightsquigarrow -3x^3 + 3x - 2.$

41 $x \rightsquigarrow x^3 - 1.$

42 $x \rightsquigarrow -x^3 - 1.$

43 $x \rightsquigarrow x^3 + 5x - 4.$

44 $x \rightsquigarrow -x^3 + 2x - \frac{1}{3}.$

45 $x \rightsquigarrow x^3 - 4x + 1.$

46 $x \rightsquigarrow \frac{-x^3}{18} + \frac{3x}{2} + 1.$

47 $x \rightsquigarrow x^4 + x^2 - 1.$

48 $x \rightsquigarrow -\frac{x^4}{2} - 2x^2 + \frac{5}{2}.$

49 $x \rightsquigarrow x^4 + 2x^2 - 3.$

50 $x \rightsquigarrow -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4} + 3.$

51 $x \rightsquigarrow |x^4 - x^2|.$

52 $x \rightsquigarrow |x^4 - 8x^2 + 7|.$

53 Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = x^3 - 3x + 1$, et le point C de coordonnées (0, 1).
Démontrer que le point C est un centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$.

54 Soit un réel m. On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :
$y = m\frac{x^3}{2} - (m^2 - 1)x + 2.$
Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points où la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale.

55 On considère les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations respectives :
$y = x^3 - 2x + 3$ et $y = 2x^2 - 3x + 3$.
1° Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
2° Écrire les équations des tangentes à chacune de ces courbes en leurs points d'intersection.

56 Soit un réel m. On considère la courbe d'équation : $y = x^3 - mx + m$.
1° Déterminer, en fonction de m, les coordonnées des points M de la courbe tels que les tangentes en ces points passent par le point A(1, 0).
2° En déduire que de tels points M appartiennent à l'une ou l'autre des droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x = \frac{3}{2}$.

◆ Étudier et représenter graphiquement les fonctions f suivantes (n^{os} 57 à 68). Indiquer les coordonnées du centre de symétrie de la courbe représentative et donner l'équation réduite de leur courbe représentative.

57 $x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$.

58 $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

59 $x \mapsto \dfrac{x-1}{3x+2}$.

60 $x \mapsto \dfrac{3x+2}{1-x}$.

61 $x \mapsto \dfrac{x-1}{2x-4}$.

62 $x \mapsto \dfrac{x+1}{3-x}$.

63 $x \mapsto \dfrac{x-2}{2x+1}$.

64 $x \mapsto \dfrac{1-2x}{1+2x}$.

65 $x \mapsto \dfrac{x-4}{2x-1}$.

66 $x \mapsto \dfrac{3-2x}{x-1}$.

67 $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

68 $x \mapsto \dfrac{4-x}{4+x}$.

69 On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = \dfrac{3x+1}{2x+1}$.
Déterminer les coordonnées des points de la courbe $\mathcal{C}$ où les tangentes à cette courbe ont respectivement pour coefficients directeurs : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, 9.

70 Soit un réel m. On considère la fonction f déterminée par :
$\forall x \in D_f, x \mapsto \dfrac{2x-m}{2x+m}$.
Indiquer suivant les valeurs de m, le sens de variations de la fonction f.

◆ Même exercice que le n° 70 pour les fonctions f suivantes définies par :

71 $x \mapsto \dfrac{3x+m}{x+m+2}$.

72 $x \mapsto \dfrac{mx+2}{mx+3}$.

73 $x \mapsto \dfrac{5x+4m}{mx+5}$.

74 $x \mapsto \dfrac{(m+1)x-(2m+3)}{(m+5)x-(2m-1)}$.

75 Soit m un réel différent de $\frac{1}{2}$. On considère les courbes $\mathcal{C}_m$ d'équations :
$y = \dfrac{x+2m-1}{x-2m+1}$.
1° Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ se coupent en un point A dont on déterminera les coordonnées.
2° Déterminer m pour que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_m$ au point A ait un coefficient directeur égal à 2. Tracer dans ce cas la courbe $\mathcal{C}_m$.

EXERCICES

76 On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = x^2 - x + 1$ et la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation : $y = \frac{1}{1+x}$.

1° Démontrer que ces deux courbes se coupent en un point A dont on donnera les coordonnées.

2° Démontrer que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ admettent en leur point d'intersection une tangente commune.

◆ Étudier et représenter graphiquement les fonctions f suivantes (n°s 77 à 84), définies sur $\mathbb{R}^*$. On précisera chaque fois le centre de symétrie de la courbe représentative et s'il en existe, les coordonnées des points où la tangente est parallèle au support de l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$.

77 $x \longmapsto x + 1 - \frac{2}{x}$

78 $x \longmapsto x - 2 - \frac{3}{x}$

79 $x \longmapsto -x - 2 + \frac{3}{x}$

80 $x \longmapsto -x + 1 + \frac{2}{x}$

81 $x \longmapsto 2x + 3 + \frac{1}{x}$

82 $x \longmapsto 2x - 5 + \frac{3}{x}$

83 $x \longmapsto -2x + 5 - \frac{2}{x}$

84 $x \longmapsto -3x + 5 - \frac{2}{x}$

85 On donne la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$, où a, b, c sont des réels : on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé.

1° Calculer les coordonnées du point d'intersection A des asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$.

2° Soient x_1 et y_1 les coordonnées d'un point M_1 qui appartient à $\mathcal{C}$. Calculer en fonction de x_1, les coordonnées x_2 et y_2 du point M_2 symétrique de M_1 par rapport à A.

3° Écrire l'égalité, indépendante de x_1, qui lie x_2 et y_2. Déduire de cette égalité que le point M_2 appartient aussi à $\mathcal{C}$. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}$?

86 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$x \longmapsto \sqrt{(x+2)^2} + \frac{1}{x+1}$.

1° Démontrer que cette fonction est dérivable à gauche et à droite au point -2.

2° Étudier le comportement de $f(x)$ et de $f(x) - (x + 2)$ quand x tend vers $+\infty$. Étudier le comportement de $f(x) + (x + 2)$ quand x tend vers $-\infty$.

3° On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A le point de coordonnées $(-1, 0)$.

Quelle est l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$?

Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$. Préciser le tracé de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage du point B dont l'abscisse dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ est -1.

87 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$x \mapsto \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$. On pose : $x_0 = 1$.

1° Étudier le comportement de f lorsque x tend vers x_0, lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $-\infty$.

2° Étudier le sens de variations de f.

3° On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A le point de coordonnées $(x_0, 0)$.

Quelle est l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$? Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

88 Même exercice que le n° 87 pour la fonction f définie par :

$f : \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}\ x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$ et pour le réel : $x_0 = 3$.

89 Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de la fonction $f : \forall x \in \mathbb{R}^*, x \mapsto ax + b - \dfrac{6}{x}$ passe par le point A de coordonnées (2, 0) et admette pour tangente en ce point la droite d'équation : $y = x + 2$.

Étudier les variations de la fonction f ainsi déterminée et construire sa courbe représentative.

11.
Équations et inéquations à une inconnue

Équations à une inconnue.

Notion d'équation à une inconnue.

1 Soient f une application d'un ensemble A dans un ensemble B, et b un élément de B.

DÉFINITION : Résoudre dans un ensemble C, l'équation à une inconnue : $f(x) = b$, c'est déterminer l'ensemble E des éléments x de $A \cap C$ dont l'image par f est b.

La lettre x qui figure dans l'écriture : $f(x) = b$ est appelée l'**inconnue.**
Tout élément x_0 de $A \cap C$ dont l'image par f est b est appelé une **solution**, ou encore une **racine**, dans C de l'équation : $f(x) = b$.
L'ensemble E est appelé ensemble des solutions dans C de l'équation : $f(x) = b$.
Si E est l'ensemble vide, on dit que l'équation n'a pas de solution dans C ; on dit aussi que l'équation est impossible dans C.

2 Nous rappelons les résultats suivants, lorsque l'ensemble A est une partie de C.
1. Quel que soit l'élément b de B, si l'application f de A dans B est **injective,** l'équation : $f(x) = b$ a **au plus une** solution dans A.
2. Quel que soit l'élément b de B, si l'application f de A dans B est **surjective,** l'équation : $f(x) = b$ a **au moins une** solution dans A.
3. Quel que soit l'élément b de B, si l'application f de A dans B est **bijective,** l'équation : $f(x) = b$ a **une solution unique** dans A.

Équation numérique dans $\mathbb{R}$.

3 Soient f une fonction et D_f son ensemble de définition; nous avons : $D_f \subset \mathbb{R}$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$, c'est déterminer l'ensemble E, inclus dans D_f, défini par : $E = \{x \mid x \in D_f \text{ et } f(x) = 0\}$.

4 **Remarque** : Si f est une fonction numérique d'une variable réelle et si C est une partie de $\mathbb{R}$, résoudre dans C l'équation : $f(x) = 0$, c'est déterminer l'ensemble E' défini par : $E' = \{x \mid x \in D_f \cap C \text{ et } f(x) = 0\}$.

5 Exemples : 1. Soit la fonction f : $\forall x \in D_f,\ x \rightsquigarrow \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

L'ensemble de définition est : $D_f = \mathbb{R}_+ - \{1\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1} = 0$, c'est déterminer l'ensemble E, inclus dans D_f, défini par : $E = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}_+ - \{1\} \text{ et } \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} = 0\right\}$.

Nous avons donc : $E = \{0\}$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \rightsquigarrow (x-1)(2x+1)$.

L'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = 0$ est : $E = \left\{-\dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

L'ensemble E' des solutions dans $\mathbb{Z}$ de la même équation est : $E' = \{1\}$.

Équations équivalentes.

6 Soient deux équations numériques : $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$ à résoudre dans le même ensemble C.

DÉFINITION : On dit que deux équations sont équivalentes dans C si et seulement si l'ensemble E_1 des solutions dans C de la première est égal à l'ensemble E_2 des solutions dans C de la seconde.

Équation : $f(x) = g(x)$.

7 Soient f et g des fonctions numériques d'une variable réelle dont les ensembles de définition respectifs sont D_f et D_g. La fonction $f - g$ est définie sur l'ensemble $D_f \cap D_g$ par : $\forall x \in D_f \cap D_g,\ x \rightsquigarrow f(x) - g(x)$.

L'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = g(x)$ est le sous-ensemble de $D_f \cap D_g$ défini par : $E = \{x \mid x \in D_f \cap D_g \text{ et } f(x) - g(x) = 0\}$.

Il est essentiel de noter que l'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = g(x)$ est nécessairement inclus dans $D_f \cap D_g$.

Soient, par exemple, les fonctions f et g définies par :

$f : \forall x \in D_f,\ x \rightsquigarrow \dfrac{1}{x} + x^2$; $g : \forall x \in D_g,\ x \rightsquigarrow \dfrac{1}{x}$.

Nous avons : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$; nous en déduisons : $D_f \cap D_g = \mathbb{R}^*$.

L'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\dfrac{1}{x} + x^2 = \dfrac{1}{x}$ est nécessairement inclus dans $\mathbb{R}^*$: $E = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}^* \text{ et } \dfrac{1}{x} + x^2 = \dfrac{1}{x}\right\}$,

ou encore : $E = \{x \mid x \in \mathbb{R}^* \text{ et } x^2 = 0\}$.

Nous en déduisons : $E = \varnothing$; l'équation : $\dfrac{1}{x} + x^2 = \dfrac{1}{x}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

8 **Remarque** : Si C est une partie de $\mathbb{R}$, l'ensemble E' des solutions dans C de l'équation : $f(x) = g(x)$ est l'intersection $E \cap C$; c'est l'ensemble défini par : $E' = \{x \mid x \in D_f \cap D_g \cap C \text{ et } f(x) - g(x) = 0\}$.

Règles générales de résolution des équations.

9 Nous rappelons deux règles qui permettent de remplacer une équation par une équation équivalente :
Soit, dans une partie C de $\mathbb{R}$, une équation : $f(x) = g(x)$ et soit h une fonction dont l'ensemble de définition contient C.
1. L'équation : $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ est équivalente dans C à l'équation : $f(x) = g(x)$.
2. Si, de plus, l'image par h de tout élément de C est non nulle, l'équation : $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ est équivalente dans C à l'équation : $f(x) = g(x)$.

Équation du premier degré à une inconnue.

10 Si f est une fonction affine, l'équation : $f(x) = 0$ est appelée équation du premier degré à une inconnue. Nous rappelons les résultats établis en classe de Seconde :

THÉORÈME : Soit E l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $ax + b = 0$. On a les implications suivantes :

$$(a \neq 0) \Longrightarrow \left(E = \left\{-\frac{b}{a}\right\}\right); \qquad \begin{array}{l}(a = 0 \text{ et } b \neq 0) \Longrightarrow (E = \varnothing);\\ (a = 0 \text{ et } b = 0) \Longrightarrow (E = \mathbb{R}).\end{array}$$

11 **Exemple** : Soit m un réel ; proposons-nous de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(m^2 - 1)x + (m - 1) = 0$.
Appliquons les résultats précédents ; nous obtenons :
1. Si : $m^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire si : $m \neq 1$ et $m \neq -1$, on a :
$E = \left\{-\frac{m-1}{m^2-1}\right\}$, ou encore : $E = \left\{\frac{-1}{m+1}\right\}$.
2. Si : $m^2 - 1 = 0$ et si : $m - 1 \neq 0$, c'est-à-dire si : $m = -1$, on a : $E = \varnothing$.
3. Si : $m^2 - 1 = 0$ et si : $m - 1 = 0$, c'est-à-dire si : $m = 1$, on a : $E = \mathbb{R}$.
On dit parfois que l'on a discuté et résolu l'équation suivant les valeurs numériques du paramètre m.

Équation du second degré à une inconnue.

12 Soient a, b, c trois réels et f la fonction : $x \rightsquigarrow ax^2 + bx + c$.
La fonction f n'est pas une fonction affine si et seulement si a est non nul : l'équation : $f(x) = 0$ est alors une équation du second degré à une inconnue.

Nous rappelons les résultats établis en classe de Seconde :

THÉORÈME : Soit a un réel non nul, et soit E l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.
On appelle discriminant de l'équation, le réel : $\Delta = b^2 - 4ac$.
On a les implications suivantes :

$$(\Delta < 0) \Longrightarrow (E = \varnothing); \quad (\Delta = 0) \Longrightarrow \left(E = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}\right).$$

$$(\Delta > 0) \Longrightarrow \left(E = \left\{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}\right).$$

Cas particuliers.

13 Rappelons que, si les réels a et c sont de signes contraires, l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes x' et x''.
Rappelons ensuite quelques cas particuliers étudiés en classe de Seconde, et dans lesquels nous supposons que a est un réel non nul.
Équation : $ax^2 + bx = 0$. L'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation est : $E = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.
Équation : $ax^2 + c = 0$. Soit E l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation. On a les implications :
$(ac > 0) \Longrightarrow (E = \varnothing)$; $(ac = 0) \Longrightarrow (E = \{0\})$;

$$(ac < 0) \Longrightarrow \left(E = \left\{\sqrt{\frac{-c}{a}}, -\sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}\right).$$

Somme et produit des racines.

14 Rappelons les résultats qui concernent la somme et le produit des racines de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.
1. Lorsqu'une équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ admet dans l'ensemble $\mathbb{R}$ deux racines distinctes ou confondues leur somme est égale à $-\frac{b}{a}$, leur produit est égal à $\frac{c}{a}$.
2. Si deux réels x' et x'' ont pour somme $-\frac{b}{a}$ et pour produit $\frac{c}{a}$, ces réels sont les deux racines de l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$.

15 Soient S et P deux réels. Recherchons s'il existe deux réels x' et x'' pour lesquels on a : $\begin{cases} x' + x'' = S; \\ x'\,x'' = P. \end{cases}$
Nous rappelons les résultats suivants :
1. Si $S^2 - 4P$ est un réel négatif, il n'existe aucun couple de réels dont la somme et le produit soient respectivement égaux à S et à P.

2. Si $S^2 - 4P$ est un réel positif, il existe deux réels distincts x' et x'' uniques dont la somme et le produit sont respectivement égaux à S et à P ; ce sont les deux racines de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

3. Si le réel $S^2 - 4P$ est nul, on a alors : $x' = x'' = \frac{S}{2}$; c'est l'unique solution de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

Signe des racines.

16 Nous rappelons enfin les résultats qui concernent le signe des racines dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.

Si le rapport $\frac{c}{a}$ est négatif, l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux racines de signes contraires.

Si le rapport $\frac{c}{a}$ est nul, l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une racine égale à 0 et une racine égale à $-\frac{b}{a}$.

Si le rapport $\frac{c}{a}$ est positif, et si le discriminant est négatif, l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Si le rapport $\frac{c}{a}$ est positif, et si le discriminant est positif ou nul, l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux racines de même signe ; ce signe commun est celui de $-\frac{b}{a}$.

Inéquations à une inconnue.

Notion d'inéquation numérique à une inconnue.

17 Soient f une fonction numérique d'une variable réelle, et D_f son ensemble de définition. Désignons par E, E_1, E_2 les parties suivantes de l'ensemble D_f :

$E = \{x \mid x \in D_f \text{ et } f(x) = 0\}$;
$E_1 = \{x \mid x \in D_f \text{ et } f(x) > 0\}$;
$E_2 = \{x \mid x \in D_f \text{ et } f(x) < 0\}$.

L'ensemble E est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = 0$.
Nous disons que E_1 est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $f(x) > 0$, et que E_2 est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $f(x) < 0$.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $f(x) \geqslant 0$ est l'ensemble $E \cup E_1$.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$ est l'ensemble $E \cup E_2$.

18 Remarque : Si f est une fonction numérique, et si C est une partie de $\mathbb{R}$, résoudre dans C l'inéquation : $f(x) > 0$, c'est déterminer l'ensemble : $E_1' = E_1 \cap C$ des solutions dans $\mathbb{R}$ qui appartiennent à l'ensemble C. Cet ensemble E_1' est le sous-ensemble de $D_f \cap C$ défini par : $E_1' = \{x \mid x \in D_f \cap C \text{ et } f(x) > 0\}$.

Inéquations équivalentes.

19 Soient deux inéquations numériques à résoudre dans le même ensemble C.

DÉFINITION : On dit que deux inéquations sont équivalentes dans C si et seulement si l'ensemble des solutions dans C de la première est égal à l'ensemble des solutions dans C de la seconde.

Inéquation : $f(x) > g(x)$.

20 Soient f et g des fonctions numériques dont les ensembles respectifs de définition sont D_f et D_g. La fonction $f - g$ est définie sur l'ensemble $D_f \cap D_g$.
L'ensemble E_1 des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $f(x) > g(x)$ est le sous-ensemble de $D_f \cap D_g$ défini par : $E_1 = \{x \mid x \in D_f \cap D_g \text{ et } f(x) - g(x) > 0\}$.

21 **Remarque** : Si C est une partie de $\mathbb{R}$, l'ensemble E_1' des solutions dans C de l'inéquation : $f(x) > g(x)$ est le sous-ensemble de $C \cap D_f \cap D_g$ défini par : $E_1' = \{x \mid x \in C \cap D_f \cap D_g \text{ et } f(x) - g(x) > 0\}$.

Règles générales de résolution des inéquations.

22 Nous rappelons trois règles qui permettent de remplacer une inéquation par une inéquation équivalente.
Soit, dans une partie C de $\mathbb{R}$, une inéquation : $f(x) > g(x)$, et soit h une fonction dont l'ensemble de définition contient C.
1. L'inéquation : $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ est équivalente dans C à l'inéquation : $f(x) > g(x)$.
2. Si l'image par h de tout élément de C est strictement positive, l'inéquation : $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ est équivalente dans C à l'inéquation : $f(x) > g(x)$.
3. Si l'image par h de tout élément de C est strictement négative, l'inéquation : $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ est équivalente dans C à l'inéquation : $f(x) > g(x)$.

Inéquation du premier degré à une inconnue.

23 Soit la fonction affine f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow ax + b$.
Nous rappelons les résultats établis en classe de Seconde qui permettent de déterminer les trois ensembles :
$E = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } ax + b = 0\}$;
$E_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } ax + b > 0\}$;
$E_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } ax + b < 0\}$.

Premier cas : $a \in \mathbb{R}_+^*$; nous avons :

$$E = \left\{-\frac{b}{a}\right\} ; \quad E_1 = \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[; \quad E_2 = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[.$$

Deuxième cas : $a \in \mathbb{R}^*$; nous avons :

$E = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$; $E_1 = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right[$; $E_2 = \left]-\frac{b}{a}, +\infty\right[$.

Troisième cas : $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}^*$; nous avons : $E = \varnothing$; $E_1 = \mathbb{R}$; $E_2 = \varnothing$.

Quatrième cas : $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}^*$; nous avons : $E = \varnothing$; $E_1 = \varnothing$; $E_2 = \mathbb{R}$.

Cinquième cas : $a = 0$ et $b = 0$; nous avons : $E = \mathbb{R}$; $E_1 = \varnothing$; $E_2 = \varnothing$.

24 La résolution des inéquations : $ax + b \geqslant 0$ ou $ax + b \leqslant 0$ résulte de la détermination des ensembles E, E_1, E_2.

25 **Exemple** : Soit m un réel, proposons-nous de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(m - 1)\,x \geqslant (m + 1)$.

Nous déduisons de l'étude précédente les résultats suivants :

1. Si : $m - 1 > 0$, c'est-à-dire si : $m > 1$, on a :

$E \cup E_1 = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \geqslant \frac{m+1}{m-1}\right\}$, ou encore : $E \cup E_1 = \left[\frac{m+1}{m-1}, +\infty\right[$.

2. Si : $m - 1 < 0$, c'est-à-dire si : $m < 1$, on a :

$E \cup E_1 = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leqslant \frac{m+1}{m-1}\right\}$, ou encore : $E \cup E_1 = \left]-\infty, \frac{m+1}{m-1}\right]$.

3. Si : $m - 1 = 0$, c'est-à-dire si : $m = 1$, on a : $E \cup E_1 = \varnothing$.

Système d'inéquations.

26 Considérons, par exemple, les inéquations : $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) < 0$.

Résoudre le système (S) : $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$, c'est déterminer l'ensemble des réels x qui sont solutions à la fois de l'inéquation : $f(x) \geqslant 0$ et de l'inéquation : $g(x) < 0$.
Si E' et E'' sont les ensembles respectifs des solutions de chacune de ces inéquations, l'ensemble des solutions du système (S) est : $E = E' \cap E''$.

27 **Exemple** : Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système (S) : $\begin{cases} x - 1 \geqslant mx + 2 \\ 2x + 1 < (m + 1)\,x + (3m + 1). \end{cases}$

Résolvons d'abord dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x - 1 \geqslant mx + 2$.
Soit E' l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette inéquation ; nous avons :
$(x \in E') \Longleftrightarrow ((1 - m)\,x \geqslant 3)$.

Si : $m > 1$, on a : $E' = \left]-\infty, \frac{3}{1-m}\right]$.

Si : $m < 1$, on a : $E' = \left]\frac{3}{1-m}, +\infty\right[$.

Si : $m = 1$, on a : $E' = \varnothing$.

Résolvons ensuite dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2x + 1 < (m + 1)x + (3m + 1)$.
Soit E'' l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette inéquation ; nous avons :
$(x \in E'') \longleftrightarrow ((1 - m)\, x < 3m)$.

Si : $m > 1$, on a : $E'' = \left]\dfrac{3m}{1-m}, +\infty\right[$.

Si : $m < 1$ on a : $E'' = \left]-\infty, \dfrac{3m}{1-m}\right[$.

Si : $m = 1$, on a : $E'' = \mathbb{R}$.

Résolvons enfin le système (S) dans $\mathbb{R}$; nous avons : $E = E' \cap E''$.

Si : $m = 1$, on a : $E = \varnothing \cap \mathbb{R} = \varnothing$.

Si : $m \neq 1$, on doit comparer $\dfrac{3}{1-m}$ et $\dfrac{3m}{1-m}$; pour cela calculons la différence :

$d = \dfrac{3}{1-m} - \dfrac{3m}{1-m}$;

nous trouvons : $d = 3$; nous en déduisons : $\dfrac{3}{1-m} > \dfrac{3m}{1-m}$

Si : $m > 1$, on a : $E' = \left]-\infty, \dfrac{3}{1-m}\right[$; $E'' = \left]\dfrac{3m}{1-m}, +\infty\right[$.

Nous en déduisons : $E = \left]\dfrac{3m}{1-m}, \dfrac{3}{1-m}\right[$.

Si : $m < 1$, on a : $E' = \left[\dfrac{3}{1-m}, +\infty\right[$; $E'' = \left]-\infty, \dfrac{3m}{1-m}\right[$.

Nous en déduisons : $E = \varnothing$.

En résumé, pour le système (S), nous avons les solutions suivantes dans $\mathbb{R}$:

si : $m \leqslant 1$, $E = \varnothing$; si : $m > 1$, $E = \left]\dfrac{3m}{1-m}, \dfrac{3}{1-m}\right[$.

Inéquation du second degré à une inconnue.

28 Soient a, b, c trois réels ; supposons a non nul et considérons la fonction f :
$x \longmapsto ax^2 + bx + c$.
Nous nous proposons d'étudier, suivant la valeur numérique donnée au réel x, le signe du réel : $f(x) = ax^2 + bx + c$, et de déterminer les trois ensembles :
$E = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) = 0\}$;
$E_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) > 0\}$;
$E_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) < 0\}$.

Le réel a n'est pas nul. Pour tout réel x, nous avons les égalités :

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

C'est sur la forme : $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$, appelée forme canonique, que nous allons étudier le signe de $f(x)$.
Soit : $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.

29 **Premier cas :** $\Delta < 0$.

Pour tout réel x, le réel $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est positif ou nul ; le réel $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ est strictement positif.

Le réel $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ est strictement positif.

Nous en concluons :

si : $a > 0$, $E = \varnothing$; $E_1 = \mathbb{R}$; $E_2 = \varnothing$;
si : $a < 0$, $E = \varnothing$; $E_1 = \varnothing$; $E_2 = \mathbb{R}$.

Nous avons donc, pour : $\Delta < 0$:

si : $a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$; si : $a < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

30 **Deuxième cas :** $\Delta = 0$.

Pour tout réel x, nous avons : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Nous concluons :

si : $a > 0$, $E = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$; $E_1 = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$; $E_2 = \varnothing$;

si : $a < 0$, $E = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$; $E_1 = \varnothing$; $E_2 = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

Nous avons donc, pour : $\Delta = 0$:

si : $a > 0$, $\left(x = -\frac{b}{2a}\right) \iff (f(x) = 0)$; $\left(x \neq -\frac{b}{2a}\right) \iff (f(x) > 0)$;

si : $a < 0$, $\left(x = -\frac{b}{2a}\right) \iff (f(x) = 0)$; $\left(x \neq -\frac{b}{2a}\right) \iff (f(x) < 0)$.

31 **Troisième cas :** $\Delta > 0$.

L'équation : $f(x) = 0$ admet alors deux racines distinctes que nous notons x' et x'' ; convenons de noter x' la plus petite des deux racines.
Nous avons alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x')(x - x'')$.
L'ensemble E est égal à $\{x', x''\}$.
Nous effectuons l'étude du signe de $f(x)$ au moyen du tableau suivant :

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$x - x'$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x''$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x')(x - x'')$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous concluons :
si : $a > 0$, $E = \{x', x''\}$; $E_1 =]-\infty, x'[\cup]x'', +\infty[$; $E_2 =]x', x''[$;
si : $a < 0$, $E = \{x', x''\}$; $E_1 =]x', x''[$; $E_2 =]-\infty, x'[\cup]x'', +\infty[$.

32 En résumé, si a est différent de 0, le signe du réel : $f(x) = ax^2 + bx + c$ est donné par les conclusions suivantes :
si : $\Delta < 0$, quel que soit x, le réel $f(x)$ a le signe du coefficient a de x^2 ;
si : $\Delta = 0$, quel que soit x différent de $-\frac{b}{2a}$, le réel $f(x)$ a le signe du coefficient a de x^2 ;
si $\Delta > 0$, le réel $f(x)$ a le signe contraire du signe du coefficient a de x^2 lorsque x appartient à l'intervalle ouvert $]x', x''[$; le réel $f(x)$ a le signe du coefficient a de x^2 lorsque x appartient au complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'intervalle fermé $[x', x'']$.

33 **Exemples :** 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2x^2 + x - 3 < 0$.
L'équation : $2x^2 + x - 3 = 0$ admet pour racine le réel 1. Le produit des racines est $-\frac{3}{2}$; l'autre racine est donc égale à $-\frac{3}{2}$.
Le coefficient de x^2 est positif ; nous en concluons que l'ensemble des solutions de l'inéquation dans $\mathbb{R}$: $2x^2 + x - 3 < 0$ est l'intervalle ouvert $\left]-\frac{3}{2}, 1\right[$.

2. Résoudre l'inéquation : $x - 1 \geqslant \frac{3}{x+1}$.
La fonction g : $x \rightsquigarrow x - 1 - \frac{3}{x+1}$ admet pour ensemble de définition : $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$.
L'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation est inclus dans $\mathbb{R} - \{-1\}$.
Nous avons l'équivalence logique :
$$\left(x - 1 - \frac{3}{x+1} \geqslant 0\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{x^2-4}{x+1} \geqslant 0\right).$$
Nous étudions le signe du réel $\frac{x^2-4}{x+1}$ dans l'ensemble $\mathbb{R} - \{-1\}$ au moyen du tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		$+2$		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$\frac{x^2-4}{x+1}$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	

L'ensemble E des solutions de l'inéquation : $x - 1 \geqslant \frac{3}{x+1}$ est :
$E = [-2, -1[\cup [2, +\infty[$.

Équations diverses.

Résolution dans un ensemble C de l'équation : $f_1(x) . f_2(x) . f_3(x) = 0$.

34 Considérons trois fonctions numériques f_1, f_2, f_3 et une partie C de $\mathbb{R}$.
Nous avons montré en Seconde que l'ensemble des solutions dans C de l'équation : $f_1(x) . f_2(x) . f_3(x) = 0$ est la réunion des ensembles respectifs des solutions dans C des équations : $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$.

35 Exemple : Considérons l'équation dans $\mathbb{R}$: $(x + 2)(x - 2)(5x - 2) = 0$.
L'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation est la réunion des ensembles respectifs des solutions dans $\mathbb{R}$ des équations :
$x + 2 = 0$; $x - 2 = 0$; $5x - 2 = 0$.
Nous avons donc : $E = \left\{-2, 2, \frac{2}{5}\right\}$.

Résolution dans un ensemble C de l'équation : $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

36 Soient f et g deux fonctions numériques, D_f et D_g les ensembles de définition respectifs de f et de g, et C une partie de $\mathbb{R}$. Désignons par D_g' le sous-ensemble de D_g des réels pour lesquels $g(x)$ est non nul. L'ensemble de définition de $\frac{f}{g}$ est $D_f \cap D_g'$.

L'ensemble E des solutions dans C de l'équation : $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ est donc une partie de $C \cap D_f \cap D_g'$.
Pour tout réel x qui appartient à $D_f \cap D_g'$, nous avons l'équivalence logique :
$\left(\frac{f(x)}{g(x)} = 0\right) \iff (f(x) = 0)$.

Il en résulte qu'un réel x_0 de C est une solution de l'équation : $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si et seulement si on a : $f(x_0) = 0$ et $g(x_0) \neq 0$.
Désignons par E_1 l'ensemble des solutions dans C de l'équation : $f(x) = 0$, et par E_2 l'ensemble des solutions dans C de l'équation : $g(x) = 0$.
Il résulte du raisonnement précédent l'égalité : $E = E_1 - E_2$.

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = \sqrt{g(x)}$.

37 Désignons respectivement par D_f et par D_g les ensembles de définition de f et de g et par D_g' l'ensemble des réels x pour lesquels $g(x)$ est positif ou nul.
L'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = \sqrt{g(x)}$ est une partie de $D_f \cap D_g'$.

Pour tout réel x de l'ensemble $D_f \cap D'_g$, nous avons :

$(f(x) = \sqrt{g(x)}) \Longleftrightarrow ((f(x))^2 = g(x) \quad \text{et} \quad f(x) \geqslant 0)$.

Il en résulte que E est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ du système suivant :

$$\begin{cases} (f(x))^2 = g(x) \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

38 **Exemple** : Proposons-nous de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x - 2 = \sqrt{2x - 1}$.

Nous avons : $(x - 2 = \sqrt{2x - 1}) \Longleftrightarrow ((x - 2)^2 = 2x - 1 \quad \text{et} \quad x - 2 \geqslant 0)$,

c'est-à-dire : $(x - 2 = \sqrt{2x - 1}) \Longleftrightarrow (x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{et} \quad x - 2 \geqslant 0)$.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2 - 6x + 5 = 0$ sont : $x' = 1$; $x'' = 5$.

Seul le réel x'' est solution de l'inéquation : $x - 2 \geqslant 0$.

Nous en concluons que l'équation : $x - 2 = \sqrt{2x - 1}$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique : $x'' = 5$.

Équation comportant plus d'un radical.

39 Nous traitons uniquement un exemple.

Proposons-nous de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 5} = \sqrt{x + 4}. \qquad (1)$$

Pour que x_0 soit une solution de cette équation, il est nécessaire que l'on ait :

$x_0 + 1 \geqslant 0$, $2x_0 + 5 \geqslant 0$, $x_0 + 4 \geqslant 0$.

Il en résulte que l'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (1) est inclus dans $[-1, +\infty[$.

D'autre part, E est inclus dans l'ensemble F des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$(\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 5})^2 = x + 4$$

c'est-à-dire, après simplification : $\sqrt{(x + 1)(2x + 5)} = -x - 1$.

L'ensemble F est inclus dans l'ensemble G des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$(x + 1)(2x + 5) = (x + 1)^2$$

c'est-à-dire : $(x + 1)(x + 4) = 0$.

Nous avons : $G = \{-1, -4\}$.

E est donc une partie de $G \cap [-1, +\infty[$.

-4 n'appartient pas à $[-1, +\infty[$; -4 n'appartient donc pas à E.

D'autre part, on vérifie que -1 est solution de l'équation (1).

Nous en déduisons : $E = \{-1\}$.

EXERCICES

1 Soit m un réel. On considère l'équation : $2x + 3 = mx - 5$.

1° Discuter et résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

2° Discuter et résoudre cette équation dans $\mathbb{Z}$.

◆ Même exercice que le n° 1 pour les équations suivantes (nos 2 à 7).

2 $2mx + 1 = 4x - 3$.

3 $1 - 3mx = 9x - 8$.

4 $(m + 2)x - m = 2m^2$.

5 $mx - 6 = 3x + m - m^2$.

6 $\dfrac{x + m}{m - 1} = 2x - 3$.

7 $\dfrac{2x + m}{m + 3} = -2\left(x - \dfrac{1}{5}\right)$.

◆ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (nos 8 à 21).

8 $3x^2 - 14x + 8 = 0$.

9 $16x^2 - 56x + 49 = 0$.

10 $x^2\sqrt{3} + (\sqrt{3} - 3)x + 3 = 0$.

11 $2x^2 + 5x + 4 = 0$.

12 $6x^2 - 3x\sqrt{3} + 1 = 0$.

13 $-x^2\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})x + 2 = 0$.

14 $\dfrac{3x + 2}{x - 1} = \dfrac{x}{x + 2}$.

15 $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{2x + 3} = \dfrac{1}{2}$.

16 $\dfrac{3x - 4}{x} + \dfrac{8 - 2x}{x + 2} = 2$.

17 $\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}$.

18 $\dfrac{2x^2 + 11x + 5}{x^2 + 3x\sqrt{2} + 4} = 0$.

19 $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x + 2} = 0$.

20 $\dfrac{2x^2 + x - 1}{2x^2 - 9x + 4} = 0$.

21 $\dfrac{2x^2 - 3x\sqrt{2} + 2}{x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}} = 0$.

◆ Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (nos 22 à 27), où x est l'inconnue et m un paramètre réel.

22 $\dfrac{1}{x - m} + \dfrac{1}{x - 2m} + \dfrac{1}{x - 3m} = 0$.

23 $\dfrac{1}{x - m} + \dfrac{1}{x - 2m} = \dfrac{1}{m}$.

24 $\dfrac{1}{4x + m} + \dfrac{1}{2x + m} - \dfrac{1}{m} = 0$.

25 $\dfrac{1}{x - m} + \dfrac{m}{x - 1} = 2$.

26 $\dfrac{2mx^2 - (m^2 + 4)x + 2m}{mx^2 + (m^2 - 2)x - 2m} = 0$.

27 $\dfrac{x^2 - (2 - m)x - 2m}{x^2 - (m - 3)x - 3m} = 0$.

28 Soient p_1, p_2, q_1, q_2 quatre réels. On désigne par E_1 l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ et par E_2 l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$.

1° Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait : $E_1 = E_2$.

2° On suppose : $p_1 \neq p_2$. Démontrer que, pour que $E_1 \cap E_2$ soit non vide, il est nécessaire que l'on ait l'égalité :

$(q_1 - q_2)^2 - (p_2 - p_1)(p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0$.

3° Soit m un réel. On pose :

$p_1 = 1 - m$, $p_2 = -m - 3$, $q_1 = -2(m + 1)$, $q_2 = 3m$.

Déterminer m pour que l'on ait : $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.

Déterminer dans ce cas les ensembles E_1 et E_2.

◆ Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (n°s 29 à 34), où x est l'inconnue et m un paramètre réel.

29 $(m^2 + 2)x - 5 \geqslant 0$.

30 $(m-3)x - m^2 + 2m - 3 > 0$.

31 $(m-2)(2mx - 3) > 4 - 2x$.

32 $\dfrac{mx + 2}{x - 3} \leqslant \dfrac{2m - 1}{4}$.

33 $\dfrac{m}{x - 2} > \dfrac{3m - 1}{x + 1}$.

34 $\dfrac{mx + 5}{1 - m} \geqslant \dfrac{x - 2}{3}$.

◆ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (n°s 35 à 42).

35 $-2x^2 + 5x - 2 > 0$.

36 $3x^2 - 5x - 2 < 0$.

37 $4(x - 1) \geqslant x(3x - 4)$.

38 $(5 - 2x)^2 \leqslant (3x - 7)^2 - 16$.

39 $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 3x + 1} \leqslant 1$.

40 $\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x - 4} > 2$.

41 $\dfrac{5x^2 + 16}{x + 2} \leqslant 7$.

42 $x - \dfrac{1}{x} > 1$.

◆ Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (n°s 43 à 46), où x est l'inconnue et m un paramètre réel.

43 $\dfrac{x}{2m + 3} > (m + 1)x$.

44 $\dfrac{6x + 2m - 4}{m - 2} > (m - 1)x + 2$.

45 $\dfrac{2x + 3}{m} < (2m - 3)x - \dfrac{3}{m}$.

46 $\dfrac{2(x + 3)}{m + 1} < (2m - 1)x$.

47 On considère l'équation : $x^2 - 3(m + 1)x + m(m - 2) = 0$.

Étudier, suivant les valeurs du paramètre m, l'existence dans $\mathbb{R}$ et le signe des racines de cette équation.

EXERCICES

◆ Même exercice que le n° 47 pour les équations suivantes (n°s 48 à 57).

48 $(m-1)x^2 + (m+2)x - 3m + 1 = 0$.

49 $-2x^2 + (3m-1)x + m^2 - 5 = 0$.

50 $(2-m)x^2 - 3x + 1 - 2m = 0$.

51 $x^2 - (1-m)x + 2m^2 - 2m - 1 = 0$.

52 $(3-2m)x^2 + (m+2)x + m - 1 = 0$.

53 $(m-2)x^2 + 2(m-2)x + 3m + 4 + 0$.

54 $(2m+3)x^2 + (m+1)x + 4 = 0$.

55 $mx^2 - (4m-3)x + 7m - 3 = 0$.

56 $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 6 = 0$.

57 $(m^2+m-2)x^2 - (2m^2+m+3)x + m^2 - 1 = 0$.

58 1° Soit l'équation E_1 : $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$, où x est l'inconnue et m un paramètre réel.
Étudier, suivant les valeurs de m, l'existence dans $\mathbb{R}$ et le signe des racines de cette équation.
2° Soient x' et x'' ces racines. Former l'équation du second degré E_2 qui a pour racines : $X' = 2x' + 3$ et $X'' = 2x'' + 3$. Comparer les discriminants des deux équations E_1 et E_2.
3° Étudier, suivant les valeurs de m, le signe des racines de l'équation E_2.
4° Pour quelles valeurs de m l'équation E_1 admet-elle, dans $\mathbb{R}$, des racines qui vérifient l'inéquation $2x + 3 \geqslant 0$?

59 1° Soit l'équation E_1 : $x^2 - 2mx + m^2 - m + 2 = 0$, où x est l'inconnue et m un paramètre réel.
Étudier, suivant les valeurs de m, l'existence dans $\mathbb{R}$ et le signe des racines de cette équation.
2° Soient x' et x'' ces racines. Former l'équation du second degré E_2 qui admet pour racines : $X' = 4x' - 3m$ et $X'' = 4x'' - 3m$.
Étudier, suivant les valeurs de m, le signe des racines de cette équation.
3° Pour quelles valeurs de m l'équation E_1 admet-elle, dans $\mathbb{R}$, des racines qui vérifient l'inéquation : $4x - 3m > 0$?

60 Soit l'équation : $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + (m+2)^2(m+1) = 0$ où x est l'inconnue et m un paramètre réel.
1° Étudier, suivant les valeurs de m, l'existence dans $\mathbb{R}$ et le signe des racines de cette équation.
2° Montrer que, lorsqu'elles existent, les racines x' et x'' vérifient une égalité indépendante de m.
3° Déterminer m pour que les racines x' et x'' vérifient l'égalité : $x' = 2x''$.

61 Soit l'équation E : $x^2 - 2(1 + 2m)x + 3 + 4m = 0$ où x est l'inconnue et m un paramètre réel.

1° Étudier, suivant les valeurs de m, l'existence dans $\mathbb{R}$ et le signe des racines de l'équation E.

2° Montrer que, lorsqu'elles existent, les racines x' et x'' vérifient une égalité indépendante de m.

3° Exprimer, en fonction de m, la somme $x'^3 + x''^3$.

4° Déterminer m pour que les racines x' et x'' vérifient l'égalité : $x' = 3x''$.

5° Former l'équation du second degré E' qui admet pour racines : $X' = x'^2$ et $X'' = x''^2$.

◆ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivants (n°s 62 à 65).

62 $\begin{cases} 10 \leqslant \dfrac{3x-1}{x+2} \\ \dfrac{3x-1}{x+2} < -4 \end{cases}$

63 $\begin{cases} 3x^2 - 8x + 5 < 0 \\ |3x - 2| < 2 \end{cases}$

64 $\begin{cases} |x^2 + x - 2| < 2 - x \\ 2x^2 + 5x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$

65 $\begin{cases} 4x^2 + 7x + 3 < 0 \\ 7x^2 - 13x - 2 < 0 \end{cases}$

◆ Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivants (n°s 66 et 67), où x est l'inconnue et m un paramètre réel.

66 $\begin{cases} -x^2 + 4x + m^2 - 4 < 0. \\ 6x^2 + x - 2 > 0. \end{cases}$

67 $\begin{cases} x^2 - 1 < 0. \\ x^2 + mx + \dfrac{m^2}{4} > 0. \end{cases}$

68 On considère la fonction polynôme f définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3.$

1° Vérifier que 1 est racine de l'équation : $f(x) = 0$.

2° Déterminer deux réels a et b tels que l'on ait :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x - 1)^2(ax + b).$

3° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$ et l'inéquation : $f(x) > 0$.

69 On considère la fonction polynôme f définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$

1° Soit a un réel. On pose : $x = X + a$. Soit F la fonction définie par :

$\forall X \in \mathbb{R},\ F(X) = f(X + a).$

Déterminer le réel a pour que $F(X)$ puisse s'écrire sous la forme : $F(X) = X^3 + pX + q$, où p et q sont des réels, et déterminer p et q.

2° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$ et l'inéquation : $f(x) \geqslant 0$.

◆ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (n°s 70 à 73).

70 $x^4 - 4x^2 - 45 = 0.$

71 $x^4 - x^2 + 1 = 0.$

72 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

73 $-\dfrac{x^4}{2} - 2x^2 + \dfrac{5}{2} = 0.$

EXERCICES

74 On considère la fonction polynôme f définie par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1$.

1° Vérifier que, si x_0 est une racine de l'équation : $f(x) = 0$, x_0 est différent de zéro, et $\frac{1}{x_0}$ est aussi une racine de l'équation.

2° On pose : $X_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$. Démontrer que, si x_0 est une racine de l'équation : $f(x) = 0$, X_0 est une racine de l'équation : $X^2 - 5X + 6 = 0$.

3° En déduire les racines de l'équation : $f(x) = 0$.

4° Utiliser une méthode analogue pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

◆ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (n°s 75 à 81).

75 $\sqrt{2x+1} = x - 1$.

76 $\sqrt{3x-2} = 5x - 8$.

77 $\sqrt{\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}} - 2|x| = 0$.

78 $\sqrt{\frac{4x}{3} + 5} = 2|x| - 3$.

79 $\sqrt{x-3} - \sqrt{6x+1} + 4 = 0$.

80 $\sqrt{5-2x} - \sqrt{x+3} - \sqrt{5x+14} = 0$.

81 $x + \sqrt{-x^2 + x + 6} = \sqrt{2x\sqrt{-x^2 + x + 6} - x}$.

◆ Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (n°s 82 à 87), où x est l'inconnue et m un paramètre réel.

82 $\sqrt{x^2 - 2x + 1 - m^2} = x - m$.

83 $\sqrt{(m^2-1)x^2 + 2mx + 1} = mx + 2$.

84 $\sqrt{x^2 - 2mx + 4} = x - 1$.

85 $\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = m^2$.

86 $\sqrt{x+m} + \sqrt{x-m} = \sqrt{2x+2}$.

87 $\sqrt{mx^2 - 4x + 4 - m} = x - 2$.

◆ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes (n°s 88 à 93).

88 $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 1$.

89 $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 4$.

90 $\sqrt{3x^2+1} < 3x + 1$.

91 $\frac{x-3}{\sqrt{x^2-5}} < \frac{\sqrt{x^2-5}}{x-3}$.

92 $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3} < \sqrt{2x+7}$.

93 $\sqrt{3x-2} \geqslant \sqrt{4x+17} - \sqrt{x+7}$.

12.

Équations et inéquations à plusieurs inconnues

Généralités.

Fonction numérique de plusieurs variables réelles.

1 Soient n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et le n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ce n-uplet est un élément de l'ensemble $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION : Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$; on appelle fonction numérique de n variables réelles, toute application f de A dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble A est l'ensemble de définition de la fonction numérique f.
Par exemple, soient x, y, z, t quatre réels; l'application g de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$:
$g : (x, y, z, t) \longmapsto 3x - 4y - 2z - t + 1$,
est une fonction de quatre variables réelles.

Équation numérique à plusieurs inconnues.

2 Soit une fonction numérique f de n variables réelles dont l'ensemble de définition est une partie A de $\mathbb{R}^n$; résoudre dans une partie C de $\mathbb{R}^n$ l'équation : $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, c'est déterminer l'ensemble E des n-uplets qui sont éléments de $A \cap C$ et dont l'image par f est le réel 0 :
$E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \cap C \text{ et } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\}$.
Chaque n-uplet élément de E est appelé solution dans C de l'équation :
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.
Par exemple, le quadruplet $(0, 1, 2, 1)$ est une solution dans $\mathbb{Z}^4$ de l'équation : $g(x, y, z, t) = 3x - 4y + 2z - t + 1 = 0$.

Inéquation numérique à plusieurs inconnues.

3 D'une façon analogue, résoudre dans l'ensemble C l'inéquation :
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$, c'est déterminer l'ensemble E_1 défini par :
$E_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \cap C \text{ et } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0\}$.

Système de p équations à n inconnues.

4 D'une façon générale, soient p fonctions numériques de n variables réelles : $f_1, f_2, \ldots, f_p$; nous supposons que ces fonctions ont toutes pour ensemble de définition une partie A de $\mathbb{R}^n$.

Résoudre dans C le système des p équations : $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases}$

c'est déterminer l'ensemble E des n-uplets, éléments de $A \cap C$, dont les images respectives par les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont toutes nulles.
Chaque n-uplet élément de E est appelé solution dans C du système des p équations à n inconnues.

Systèmes équivalents.

5 On dit que deux systèmes d'équations à n inconnues sont équivalents dans un ensemble C si et seulement si l'ensemble des solutions dans C du premier système est égal à l'ensemble des solutions dans C du second système.

Systèmes du premier degré à deux inconnues.

Équation et inéquation du premier degré à deux inconnues.

6 **DÉFINITIONS : Soient a, b, c, trois réels.**

1. On appelle équation du premier degré à deux inconnues l'équation : $ax + by + c = 0$.

2. On appelle inéquation du premier degré à deux inconnues l'inéquation : $ax + by + c > 0$, ou l'inéquation : $ax + by + c < 0$.

Résolution dans $\mathbb{R}^2$ de l'équation : $ax + by + c = 0$.

Nous avons établi, en classe de Seconde, les résultats suivants :

7 Premier cas : L'un des réels a ou b n'est pas nul, par exemple : $b \neq 0$.

THÉORÈME : Si b est différent de 0, l'équation : $ax + by + c = 0$ admet une infinité de solutions. L'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'équation : $ax + b + c = 0$ est l'ensemble des couples : $\left(x_0, -\frac{ax_0}{b} - \frac{c}{b}\right)$, où x_0 est un réel quelconque.

8 **Remarques** : 1. Nous constatons que l'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'équation : $ax + by + c = 0$ est alors le graphe de la fonction numérique d'une variable réelle : $x \longmapsto -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.

2. Si a est différent de 0, l'ensemble E est aussi l'ensemble des couples $\left(-\frac{b}{a}y_0 - \frac{c}{a}, y_0\right)$, où y_0 est un réel quelconque.

9 **Deuxième cas : Les deux réels a et b sont nuls.**

1. Si c est différent de 0, l'équation n'a pas de solution ; l'ensemble E est vide.

2. Si c est égal à 0, tout couple de réels est solution de l'équation ; l'ensemble E est l'ensemble $\mathbb{R}^2$.

Résolution dans $\mathbb{R}^2$ de l'inéquation : $ax + by + c > 0$.

Nous avons établi en classe de Seconde le résultat suivant :

10 **THÉORÈME : Si les réels a et b ne sont pas tous deux nuls : $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite Δ qui partage le plan en deux demi-plans ouverts. Pour tout point $M(x, y)$ de l'un de ces demi-plans ouverts, le réel $ax + by + c$ est positif ; pour tout point $M(x, y)$ de l'autre demi-plan ouvert, le réel $ax + by + c$ est négatif.**

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'inéquation : $ax + by + c > 0$ est donc l'ensemble des couples de réels qui sont les coordonnées des points d'un des demi-plans ouverts dont la frontière est la droite Δ d'équation : $ax + by + c = 0$.

11 **Exemple** : Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$ l'équation : $2x - y + 4 = 0$ et l'inéquation : $2x - y + 4 > 0$.

L'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'équation : $2x - y + 4 = 0$ est l'ensemble des couples de réels $(x_0, 2x_0 + 4)$ où x_0 est un réel quelconque.

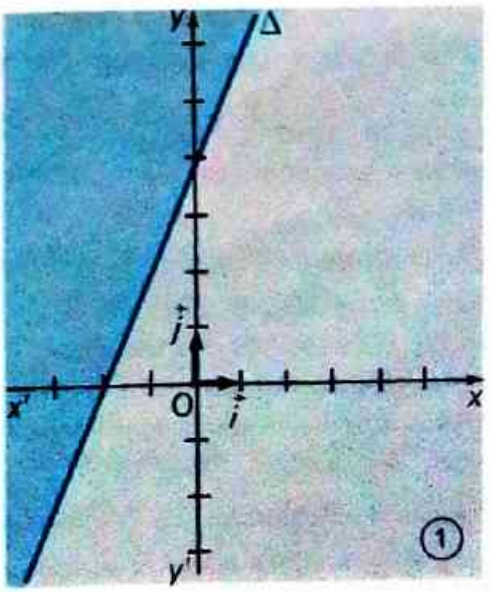
Dans le plan rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, traçons la droite Δ d'équation : $y = 2x + 4$.

Si M est un point de coordonnées (x_0, y_0), nous avons l'équivalence logique :

$((x_0, y_0) \in E) \Longleftrightarrow (M \in \Delta)$.

Les coordonnées du point O vérifient l'inégalité : $f(0, 0) > 0$.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'inéquation : $2x - y + 4 > 0$ est donc l'ensemble des couples de réels qui sont les coordonnées des points du demi-plan ouvert, de frontière Δ, auquel appartient le point O (fig. 1).



Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

12 Soient a, b, c, a', b', c' six réels. Considérons le système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$

Nous avons donné en classe de Seconde la définition et les résultats suivants :

On appelle **déterminant du système**, le réel $ab' - ba'$, que l'on écrit : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

Le système admet dans $\mathbb{R}^2$ une solution unique si et seulement si le déterminant est différent de 0 ; cette solution unique est le couple :

$$\left(-\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, -\frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \right).$$

Si le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est nul et si l'un des deux déterminants $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ est différent de 0, le système n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$; l'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble vide.

Si les trois déterminants $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ sont nuls et si les quatre réels a, b, a', b' ne sont pas tous nuls, le système est alors équivalent à une seule équation ; il admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}^2$, par exemple, si a est différent de 0, l'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples $\left(-\frac{b}{a} y_0 - \frac{c}{a}, y_0 \right)$, où y_0 est un réel quelconque.

Si les quatre réels a, b, a', b' sont tous nuls, et si l'un des réels c ou c' est différent de 0, le système n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$; l'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble vide.

Si les six réels a, b, c, a', b', c' sont tous nuls, tout couple (x_0, y_0) de réels est une solution du système ; l'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$.

Méthodes pratiques de résolution.

13 Nous supposons connues les méthodes pratiques de résolution exposées dans les classes précédentes : résolution par combinaison linéaire et résolution par substitution.

Nous rappelons aussi que, si dans un plan P rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont les équations de deux droites D_1 et D_2 ; l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ du système est l'ensemble des coordonnées des points communs aux droites D_1 et D_2.

Nous rappelons enfin que, dans le plan vectoriel $\vec{P}$ associé à un plan P, si $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives (a, a'), (b, b'), (c, c') dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, la résolution du système peut être considérée comme la détermination des couples de réels (x, y) qui vérifient l'équation vectorielle : $x\vec{A} + y\vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$.

14 Exemple : Soit m un réel ; résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} (2m-4)x + my = m-3, \\ (2m-5)x + (m-1)y = m. \end{cases}$

Le déterminant du système est : $D = \begin{vmatrix} 2m-4 & m \\ 2m-5 & m-1 \end{vmatrix}$, c'est-à-dire : $D = (2m-4)(m-1) - (2m-5)m$;
après simplification, nous trouvons : $D = 4 - m$.
Le système admet une solution unique si et seulement si m est différent de 4.

Supposons donc m différent de 4, et opérons par combinaison linéaire, en retranchant la première équation de la seconde ; nous obtenons le système équivalent :
$\begin{cases} (2m-4)x + my = m-3, \\ -x - y = 3. \end{cases}$

Nous en déduisons successivement :
$y = -x - 3$ et
$(2m-4)x + m(-x-3) = m-3$;
cette dernière équation est équivalente à : $x(m-4) = 4m - 3$.
Nous avons : $m \neq 4$; nous en déduisons :
$x = \dfrac{4m-3}{m-4}$; $y = -x - 3 = \dfrac{15-7m}{m-4}$.

Si m est égal à 4, le système à résoudre est :
$\begin{cases} 4x + 4y = 1, \\ 3x + 3y = 4. \end{cases}$

Ce système est équivalent au système : $\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Ce système n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}^2$.

En résumé, si nous désignons par E l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ du système proposé, nous avons :

si $m \neq 4$, $E = \left\{\left(\dfrac{4m-3}{m-4}, \dfrac{15-7m}{m-4}\right)\right\}$;

si $m = 4$, $E = \varnothing$.

Système de plusieurs inéquations du premier degré à deux inconnues.

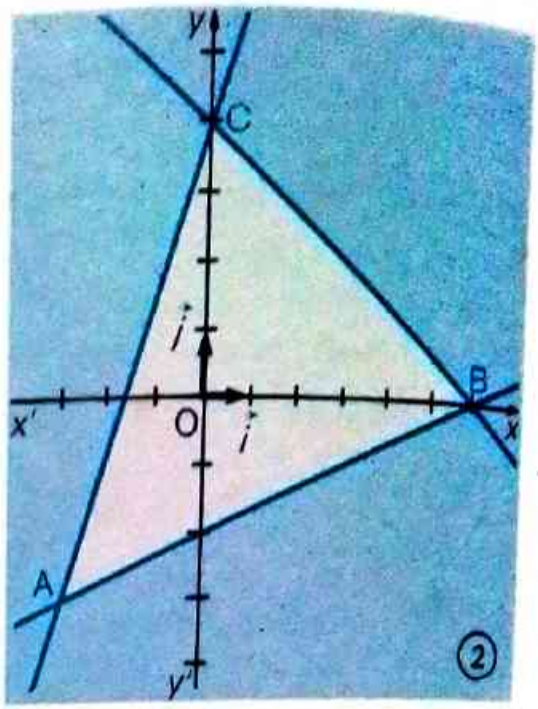
15 Nous donnons, à titre d'exemple, la résolution d'un système de trois inéquations du premier degré à deux inconnues : $\begin{cases} 2x + 3y - 12 \leqslant 0, \\ 7x - 3y + 12 \geqslant 0, \\ -x + 3y + 6 \geqslant 0. \end{cases}$

Dans le plan P rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ traçons les trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 qui admettent pour équations respectives (fig. 2) :

Δ_1 : $2x + 3y - 12 = 0$;
Δ_2 : $7x - 3y + 12 = 0$;
Δ_3 : $-x + 3y + 6 = 0$.

Elles se coupent deux à deux aux points : $A(-3, -3)$, $B(6, 0)$, $C(0, 4)$. Pour chaque inéquation, le demi-plan ouvert dont aucun des points n'est image d'une solution de l'inéquation est teinté en bleu (fig. 2).

Nous trouvons ainsi que l'ensemble des images des solutions du système proposé est l'ensemble des points du triangle ABC.



Autres exemples de systèmes.

Système de trois équations du premier degré à trois inconnues.

16 Soient $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', d, d', d''$, douze réels.
Considérons le système de trois équations :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, & (1) \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, & (2) \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0. & (3) \end{cases}$$

Résoudre ce système dans $\mathbb{R}^3$, c'est déterminer l'ensemble E des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ qui sont solution de chacune des équations du système.
Pour déterminer l'ensemble E, nous remplaçons le système proposé par des systèmes équivalents en utilisant des substitutions ou des combinaisons linéaires.
Nous donnons, ci-dessous, trois exemples de résolution.

17 **Premier exemple** : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2, & (1) \\ -x + 4y + z = 4, & (2) \\ 2x + 2y - z = 3. & (3) \end{cases}$$

Nous écrivons un système équivalent en conservant l'équation (1), en remplaçant l'équation (2) par une combinaison linéaire des équations (1) et (2), et l'équation (3) par une combinaison linéaire des équations (1) et (3) de façon que les équations (2') et (3') obtenues soient des équations à deux inconnues.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2, & (1) \\ 2y + 4z = 6, & (2') \\ 6y - 7z = -1. & (3') \end{cases}$$

Nous résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système des deux équations (2') et (3') à deux inconnues y et z ; nous trouvons une seule solution, le couple (1, 1).
Nous trouvons alors, pour seule solution dans $\mathbb{R}^3$ du système proposé, le triplet (1, 1, 1).

18 **Deuxième exemple :** Soit m un réel ; résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} -y + z = m, & (1) \\ -z + x = m^2 + 1, & (2) \\ -x + y = 1 - 4m. & (3) \end{cases}$$

Pour tout triplet de réels solution du système, la somme :
$(-y + z) + (-z + x) + (-x + y)$ est nulle ; nous devons donc avoir : $m + (m^2 + 1) + (1 - 4m) = 0$, c'est-à-dire $m^2 - 3m + 2 = 0$.
Les racines de l'équation : $m^2 - 3m + 2 = 0$ sont 1 et 2.

Nous concluons :
Si le réel m appartient à l'ensemble $\mathbb{R} - \{1, 2\}$, l'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble vide.
Si : $m = 1$, l'ensemble E des solutions du système proposé est égal à l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} -y + z = 1, \\ -z + x = 2. \end{cases}$$

L'ensemble E est alors l'ensemble des triplets $(2 + \alpha, \alpha - 1, \alpha)$ où α est un réel quelconque.
Si : $m = 2$, l'ensemble E des solutions du système proposé est égal à l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} -y + z = 2, \\ -z + x = 5. \end{cases}$$

L'ensemble E est alors l'ensemble des triplets $(5 + \alpha, \alpha - 2, \alpha)$ où α est un réel quelconque.

19 **Troisième exemple :** Soit m un réel ; résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} 2x + my + (m + 1)z = 5, & (1) \\ 4x + 2y + (m + 3)z = m + 9, & (2) \\ (m + 1)x + y + 2z = 3 + 2m. & (3) \end{cases}$$

De l'équation (1), il résulte : $x = \frac{5}{2} - \frac{m}{2}y - \frac{m+1}{2}z$

Nous écrivons le système équivalent :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{m}{2}y - \frac{m+1}{2}z, & (1') \\ 10 - 2my - 2(m + 1)z + 2y + (m + 3)z = m + 9, & (2') \\ \frac{5}{2}(m + 1) - \frac{m(m+1)}{2}y - \frac{(m+1)^2}{2}z + y + 2z = 3 + 2m. & (3') \end{cases}$$

Après simplifications nous obtenons le système équivalent :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{m}{2}y - \frac{m+1}{2}z, & (1') \\ 2y(1-m) + z(1-m) + 1 - m = 0, & (2') \\ y(1-m)(m+2) + z(1-m)(m+3) - (1-m) = 0 & (3') \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{m}{2}y - \left(\frac{m+1}{2}\right)z, & (1') \\ (1-m)(2y+z+1) = 0, & (2') \\ (1-m)[y(m+2) + z(m+3) - 1] = 0. & (3') \end{cases}$$

Si : $m = 1$, les équations (2') et (3') sont vérifiées pour tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.
Le système est alors équivalent à la seule équation (1').
L'équation (1') admet pour solutions dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des triplets $\left(\frac{5-\alpha}{2} - \beta, \alpha, \beta\right)$, où α et β sont deux réels quelconques.

Si : $m \neq 1$, le système proposé est équivalent au système :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{my}{2} - \frac{m+1}{2}z, & (1') \\ 2y + z + 1 = 0, & (2'') \\ y(m+2) + z(m+3) - 1 = 0. & (3'') \end{cases}$$

Résolvons le système des deux équations (2'') et (3'') à deux inconnues y et z ; le déterminant est : $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m+2 & m+3 \end{vmatrix} = m + 4$.

Si : $m = -4$, le système des équations (2'') et (3'') est : $\begin{cases} 2y + z + 1 = 0, \\ -2y - z - 1 = 0. \end{cases}$
L'ensemble des solutions de ce système est l'ensemble des couples $(\gamma, -1-2\gamma)$, où γ est un réel quelconque.
De l'équation (1'), nous déduisons alors : $x = 1 - \gamma$.

Nous concluons :
Si : $m = -4$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système proposé est l'ensemble des triplets $(1-\gamma, \gamma, -1-2\gamma)$ où γ est un réel quelconque.
Si : $m \neq -4$, le système des équations (2'') et (3'') admet une solution unique : $(-1, 1)$; nous en déduisons alors : $x = 2$.
Il en résulte que : si : $m \neq -4$ et si : $m \neq -1$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système proposé est le singleton $\{(2, -1, 1)\}$.

Système d'inéquations à deux inconnues.

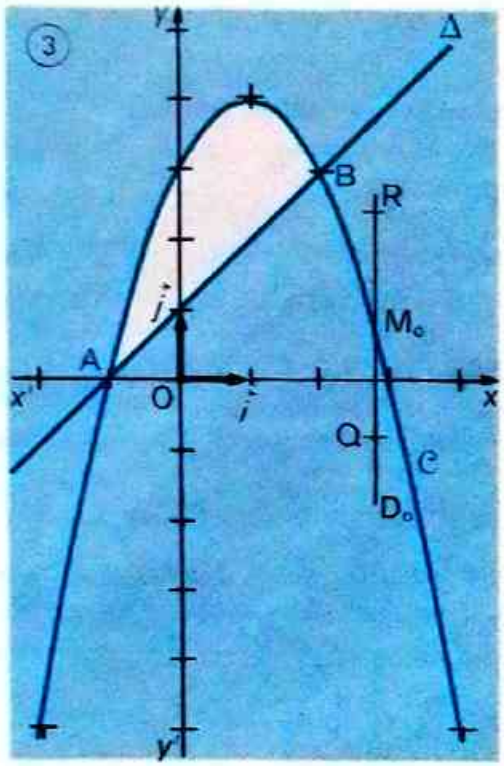
20 Exemple : Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} x - y + 1 < 0, & (1) \\ x^2 - 2x + y - 3 < 0. & (2) \end{cases}$$

Considérons les fonctions numériques de deux variables réelles respectivement définies par : $f : (x, y) \rightsquigarrow x - y + 1$; $g : (x, y) \rightsquigarrow x^2 - 2x + y - 3$.

Dans un plan P, rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, traçons la droite Δ d'équation : $x - y + 1 = 0$. Nous avons $f(0, 0) = 1$.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'inéquation (1) est l'ensemble des couples qui sont coordonnés des points du demi-plan ouvert de frontière Δ auquel n'appartient pas le point O (fig. 3).
L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient : $g(x, y) = 0$ est l'ensemble des points de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = -x^2 + 2x + 3$.
Cette courbe $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction φ :
$x \mapsto -x^2 + 2x + 3$.
L'ensemble de définition de la fonction φ est l'ensemble $\mathbb{R}$; la fonction dérivée est la fonction φ' définie par : $x \mapsto -2x + 2$. Nous avons donc :
$(\varphi'(x) = 0) \iff (x = 1)$;
$(\varphi'(x) > 0) \iff (x < 1)$;
$(\varphi'(x) < 0) \iff (x > 1)$.
Il en résulte le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$



Nous obtenons la courbe $\mathcal{C}$ dessinée sur la figure 3.

Pour tout réel x_0, la droite D_0 d'équation : $x = x_0$ rencontre la courbe $\mathcal{C}$ en un point unique M_0 d'ordonnée :
$y_0 = -x_0^2 + 2x_0 + 3$.
Ce point M_0 détermine sur D_0 deux demi-droites ouvertes ; pour tout point Q, d'ordonnée y_1, de l'une de ces demi-droites, on a : $y_1 < y_0$, c'est-à-dire $x_0^2 - 2x_0 + y_1 - 3 < 0$; pour tout point R, d'ordonnée y_2, de l'autre demi-droite ouverte, on a : $y_2 > y_0$, c'est-à-dire $x_0^2 - 2x_0 + y_2 - 3 > 0$.
Nous disons qu'un point Q est "au-dessous" de la courbe $\mathcal{C}$ et qu'un point R est "au-dessus" de la courbe $\mathcal{C}$.
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^2$ de l'inéquation (2) est l'ensemble des couples de réels, coordonnées des points du plan P qui sont au-dessous de la courbe $\mathcal{C}$.
Pour chacune des inéquations (1) et (2), les parties du plan auxquelles appartiennent les points dont les coordonnées ne sont pas solution de l'inéquation sont teintées en bleu.
Les points dont les coordonnées sont solutions du système proposé sont les points de la partie du plan non teintée en bleu.

Déterminons les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ ; nous devons résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x^2 - 2x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

Opérons par substitution ; nous obtenons le système équivalent :

$$\begin{cases} y = 1 + x, \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^2 - x - 2 = 0$ est : $\{-1, 2\}$.
Nous en déduisons les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ :
A$(-1, 0)$; B$(2, 3)$.

Exemple de problème dont la résolution conduit à des équations et à des inéquations.

21 **Exemple** : Dans un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un point M de coordonnées (x, y). Soit l'équation du second degré : $u^2 - ux + y = 0$.
Déterminer les parties P_1, P_2, P_3 du plan P définies par :
$(M \in P_1) \Longleftrightarrow$ (l'équation admet dans $\mathbb{R}$ une racine) ;
$(M \in P_2) \Longleftrightarrow$ (l'équation admet dans $\mathbb{R}$ deux racines distinctes) ;
$(M \in P_3) \Longleftrightarrow$ (l'équation admet dans $\mathbb{R}$ deux racines dont les valeurs absolues sont inférieures à 1).

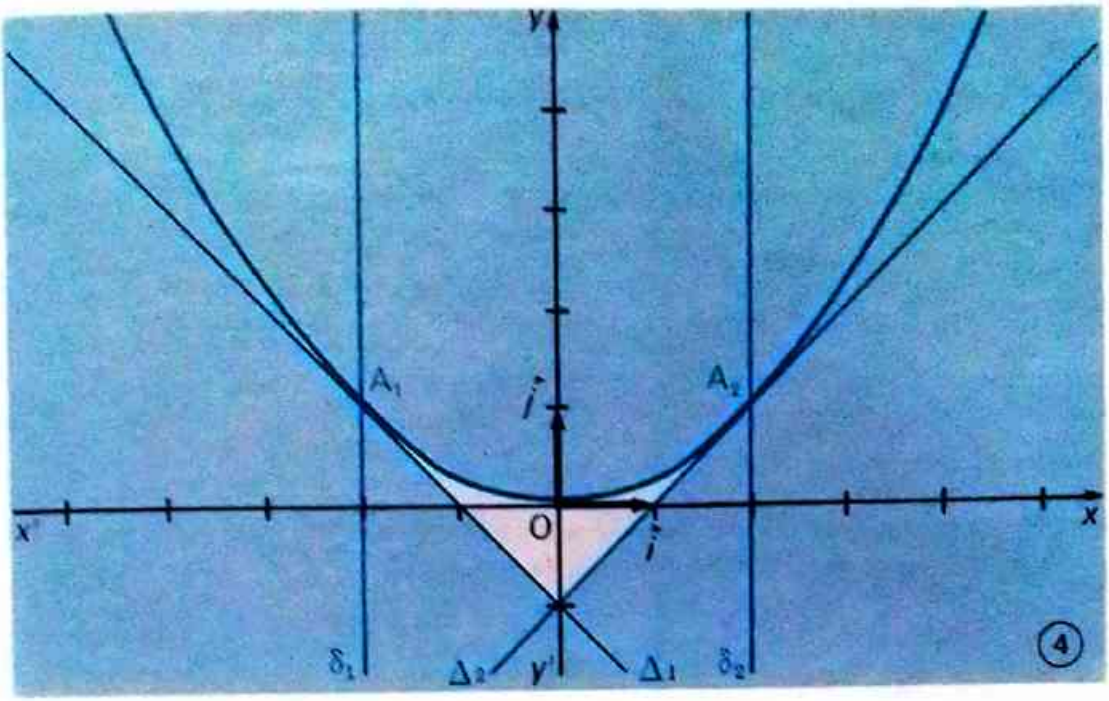
Calculons le discriminant de l'équation : $\Delta = x^2 - 4y$.

Considérons, dans le plan P, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = \frac{x^2}{4}$; c'est la courbe représentative de la fonction $g : x \rightsquigarrow \frac{x^2}{4}$.

La fonction g est définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$; c'est une fonction paire.
Le tableau de variations dans $\mathbb{R}_+$ est :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$
$g(x)$	0	$\longrightarrow +\infty$

Si les axes sont perpendiculaires, le support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}$ (fig. 4).
Désignons par φ la fonction numérique de deux variables réelles :
$\varphi : (x, y) \rightsquigarrow x^2 - 4y$. Nous avons : $\Delta = \varphi(x, y)$.
Déterminons alors la partie P_1 du plan P ; nous avons :
$(M \in P_1) \Longleftrightarrow (\varphi(x, y) = 0)$.



Il en résulte l'égalité : $P_1 = \mathcal{C}$. La partie P_1 est donc la courbe $\mathcal{C}$.
De même, nous avons l'équivalence logique : $(M \in P_2) \Longleftrightarrow (\varphi(x, y) > 0)$.
Une étude analogue à celle du n° 20, p. 193, nous permet de conclure que l'ensemble P_2 est l'ensemble des points du plan P situés au-dessous de la courbe $\mathcal{C}$.
Cherchons enfin à déterminer la partie P_3 pour les points M de laquelle on a : $|u'| < 1$ et $|u''| < 1$. On a nécessairement $P_3 \subset P_1 \cup P_2$.
Désignons par u' la plus petite des deux racines lorsqu'elles sont distinctes; nous avons : $(M \in P_3) \Longleftrightarrow (-1 < u' \leqslant u'' < +1)$.
Posons : $f(u) = u^2 - ux + y$.

Nous avons les implications :

$$(-1 \notin [u', u'']) \Longrightarrow (f(-1) > 0);$$
$$(+1 \notin [u', u'']) \Longrightarrow (f(+1) > 0);$$
$$([u', u''] \subset [-1, 1]) \Longrightarrow \left(-1 < \frac{u' + u''}{2} < 1\right).$$

Réciproquement, si Δ est positif ou nul, les trois conditions simultanées : $f(-1) > 0$, $f(+1) > 0$ et $-1 < \frac{u' + u''}{2} < +1$, impliquent les inégalités : $-1 < u' \leqslant u'' < +1$, c'est-à-dire les inégalités : $|u'| < 1$ et $|u''| < 1$.

Nous avons : $\begin{cases} f(-1) = 1 + x + y; \\ f(+1) = 1 - x + y; \\ \dfrac{u' + u''}{2} = \dfrac{x}{2}. \end{cases}$

Traçons la droite Δ_1 d'équation : $1 + x + y = 0$ et la droite Δ_2 d'équation : $1 - x + y = 0$. Ces deux droites se coupent au point de coordonnées $(0, -1)$. La première est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A_1 de coordonnées $(-2, 1)$; la deuxième est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A_2 de coordonnées $(2, 1)$.

Enfin, traçons les deux droites δ_1 et δ_2 d'équations respectives : $\frac{x}{2} = -1$ et : $\frac{x}{2} = +1$; ce sont les parallèles au support de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$ qui passent respectivement par les points A_1 et A_2.

Nous déterminons successivement, comme il a été indiqué dans les paragraphes précédents :

le demi-plan ouvert de frontière Δ_1 pour lequel on a : $1 + x + y > 0$,

le demi-plan ouvert de fontière Δ_2 pour lequel on a : $1 - x + y > 0$,

le demi-plan ouvert de frontière δ_1 pour lequel on a : $\frac{x}{2} > -1$,

le demi-plan ouvert de frontière δ_2 pour lequel on a : $\frac{x}{2} < 1$.

L'intersection de ces demi-plans ouverts et de la partie $P_1 \cup P_2$ définit la partie P_3 ; c'est la partie du plan non teintée en bleu sur la figure 4.

EXERCICES

1 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 2x + 4y = 14. \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 10x + 4y = 3, \\ 20y - 5x = 4. \end{cases}$

◆ Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants (nos 2 à 7), où m est un paramètre réel.

2 $\begin{cases} mx - y = m, \\ x + my = m + 1. \end{cases}$ $\qquad$ **3** $\begin{cases} mx + y = 2m - 1, \\ x + my = 2m^2 - 1. \end{cases}$

4 $\begin{cases} (1 - m)x + (m + 3)y = 3m + 1, \\ 2(1 - m)x + (m + 6)y = m + 2. \end{cases}$

5 $\begin{cases} mx - 3y = 3m - 1, \\ 2m(-x + y + 1) + x + y = \frac{2}{3}. \end{cases}$

6 $\begin{cases} 3(m^2 + 1)x - (m - 12)y + 5m = 3, \\ (m - 1)x - 2y + \frac{2}{5} = \frac{2m}{3}. \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2m(x + 1) + 3x - y + \frac{4}{5} = 0, \\ (6m - 13)x - m(y + 1) + 3y = 2(2m + 1). \end{cases}$

◆ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants (nos 8 à 11).

8 $\begin{cases} \frac{4}{x - 2} + \frac{1}{y - 1} = 5, \\ \frac{4}{x - 2} - \frac{1}{y - 1} = 2. \end{cases}$ $\qquad$ **9** $\begin{cases} \frac{4}{x} - y^2 + 7 = 2, \\ \frac{1}{x} + 2y^2 = 5. \end{cases}$

10 $\begin{cases} 5x + 2 - \dfrac{3}{y^2} = 15, \\ 5x + 2 - \dfrac{1}{y^2} = 33. \end{cases}$ **11** $\begin{cases} y^2 - \dfrac{(x-1^3}{3} = 1, \\ 2(x-1)^3 - \dfrac{y^2}{4} = 17. \end{cases}$

◆ Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants (nos 12 et 17) où m est un paramètre réel.

12 $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = m, \\ mx + y = m(m-1). \end{cases}$ **13** $\begin{cases} (m+1)^2 \dfrac{x}{y} + \dfrac{2}{y} = m^2 + m + 3, \\ 2\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 2(m+3). \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ x(2+m) + y(3+2m) + 1 + 2m = 0, \\ x + 2y + 2 = 0. \end{cases}$

15 $\begin{cases} 4x - 3y = 2, \\ 2x - y = 2, \\ 4(x - m^2) + y(2m^2 - 3) = m^2 - 2m - 1. \end{cases}$

16 $\begin{cases} (m-1)x + (m^2+1)y = 1 + m, \\ x + (2m-1)y = 2, \\ (m-1)x + (m^2 + m - 2)y = (m-1)^2. \end{cases}$

17 $\begin{cases} mx + (m+1)y = m - 3, \\ 3(1-m)x + (m+7)y = -m^2 + 2m + 4, \\ 4m^2x + 3(1-m)y = -3(m^2+3). \end{cases}$

◆ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants (nos 18 à 21) :

18 $\begin{cases} x + y = -2, \\ 4xy = -5. \end{cases}$ **19** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 55, \\ x - y = 5. \end{cases}$

20 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$ **21** $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 6, \\ x^2 + y^2 - xy = 10. \end{cases}$

22 Soient deux réels a et b. On considère le système $\begin{cases} x + y + xy = a, \\ (x-y)^2 = b. \end{cases}$

1° Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}^2$ ce système.

2° Dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point M de coordonnées (a, b). Déterminer le nombre des solutions (x, y) du système d'après la position du point M dans le plan.

3° Déterminer les solutions de ce système dans le cas suivant : $a = 2$, $b = 4$.

◆ Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : (nos 23 et 24), où m est un paramètre réel.

23 $\begin{cases} (x+y)^2 - 2m(x+y) + m^2 + m - 5 = 0, \\ 3x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$

24 $\begin{cases} x + y + \sqrt{x-y} = m, \\ x - y + \sqrt{x-y} = 2m - 3. \end{cases}$

EXERCICES

25 Soient deux réels a et b. On considère l'équation :
$x^2 - 2(1 + a)x + b + a^2 + 3 = 0$.

1° Dans un plan P rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par M le point de coordonnées (a, b). Déterminer les parties du plan P auxquelles le point M doit appartenir pour que l'équation satisfasse aux conditions :
a) Elle admet deux racines égales.
b) Elle admet deux racines distinctes.
c) Elle n'admet pas de racines.
d) Elle admet une racine nulle.
e) Elle admet deux racines opposées.
Déduire de cette étude l'existence et le signe des racines dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivant la position du point M dans le plan.
2° Construire dans P l'ensemble des points M tels que l'équation ait deux racines x' et x'' dans $\mathbb{R}$ qui vérifient l'égalité : $x' + 2x'' = 0$.

26 Soient deux réels a et b. On considère l'équation :
$x^2 - ax + a - b = 0$.

Dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par M le point de coordonnées (a, b). Déterminer les parties P_1, P_2, P_3 du plan P définies respectivement par les équivalences logiques.
1° $(M \in P_1) \Longleftrightarrow$ (l'équation a deux racines dans $\mathbb{R}$).
2° $(M \in P_2) \Longleftrightarrow$ (l'équation a deux racines dans $\mathbb{R}$ dont la somme est supérieure ou égale à 2).
3° $(M \in P_3) \Longleftrightarrow$ (l'équation a deux racines dans $\mathbb{R}$ dont le produit est supérieur ou égal à 1).
On sera amené à construire 3 courbes. Déterminer les points communs à ces courbes.

27 Déterminer l'ensemble des points M d'un plan dont les coordonnées (x, y) vérifient le système : $\begin{cases} 2y + x^2 < 0, \\ x - 2y + 3 > 0. \end{cases}$

28 Déterminer l'ensemble des points M d'un plan dont les coordonnées (x, y) vérifient l'inéquation : $(y - x^2)(x + y) < 0$.

◆ Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants (n°s 29 à 32).

29 $\begin{cases} y + z = 1, \\ z + x = 4, \\ x + y = -1. \end{cases}$

30 $\begin{cases} x + y + 2z = 4, \\ 2x - y + 3z = 6, \\ x - 3y + 4z = 7. \end{cases}$

31 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 9, \\ 2x + 5y - z = 10, \\ 3x + 3y + 2z = 12. \end{cases}$

32 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ 2x - 3y + z = 1, \\ 5x - 11y = -17. \end{cases}$

33 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :
$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ -4x + 2y + z = 3, \\ -2x + y + 4z = 4, \\ 10x - 5y - 6z = -10. \end{cases}$

34 Soient quatre réels a, b, c, m. Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = a, \\ x + (m+1)y + z = b, \\ x + y + (m+1)z = c. \end{cases}$$

35 Soient quatre réels a, b, c, m. On considère le système :

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = a, \\ 2x + my + 2z = b, \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = c. \end{cases}$$

1° Démontrer que si le produit $m(m-1)(m-2)$ est différent de zéro ce système a une solution unique (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbb{R}^3$. On ne demande pas le calcul explicite de (x_0, y_0, z_0).

2° Discuter suivant les valeurs de a, b, c et résoudre dans chacun des cas suivants : $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$.

36 On considère la fonction polynôme f définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, où a_0, a_1, a_2 sont des réels.

1° On suppose que l'équation : $f(x) = 0$ a trois racines distinctes dans $\mathbb{R}$: x_1, x_2, x_3, et on considère la fonction polynôme g définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Déterminer les réels a_0, a_1, a_2, en fonction de x_1, x_2, x_3 pour lesquels on a l'égalité : $f = g$.

2° Soient a, b, c trois réels deux à deux distincts. On considère le système :

$$\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0, \\ b^3 + b^2x + by + z = 0, \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0. \end{cases}$$

Démontrer que (x_0, y_0, z_0) est une solution du système si et seulement si l'équation : $u^3 + x_0u^2 + y_0u + z_0 = 0$, où u est l'inconnue, admet dans $\mathbb{R}$ les trois racines : a, b, c.

En déduire que le système a une solution unique dans $\mathbb{R}^3$: (x_0, y_0, z_0) et exprimer x_0, y_0, z_0 en fonction de a, b, c.

Application : $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$.

37 Soit m un paramètre réel. On considère le système (1) :

$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = m, \\ x + (m+1)y + z = m + 2, \\ x + y + (m+1)z = -2(m+1). \end{cases}$$

1° Discuter et résoudre ce système dans $\mathbb{R}^3$.

2° On suppose que le produit $m(m+3)$ est différent de zéro. Soit k un réel. Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (2) :

$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = m, \\ x + (m+1)y + z = m + 2, \\ x + y + (m+1)z = -2(m+1), \\ x^2 + y^2 + z^2 = k^2. \end{cases}$$

3° Application : $k^2 = \frac{26}{9}$. Déterminer m pour que le système (2) ait une solution unique dans $\mathbb{R}^3$.

TROISIÈME PARTIE

espaces vectoriels et matrices

13.
Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

Généralités.

Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1 **DÉFINITION : Soit** E **un ensemble muni d'une loi interne partout définie, notée** $+$**, et d'une loi externe à opérateurs dans** $\mathbb{R}$**, notée** $.$**, qui à tout couple** (α, x) **de** $\mathbb{R} \times E$ **associe un élément de** E **noté** $\alpha \,.\, x$**. On dit que** E**, muni de ces deux lois, est un espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$**, ou encore que** $(E, +, .)$ **est un espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$**, si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :**

1. $(E, +)$ **est un groupe commutatif ;**

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$;

3. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ (\alpha + \beta).x = (\alpha.x) + (\beta.x)$;

4. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \alpha.(x + y) = (\alpha.x) + (\alpha.y)$;

5. $\forall x \in E,\ 1.x = x$.

Les éléments de E sont appelés les **vecteurs** de E.
La loi interne $+$ dans E est appelée **addition dans** E.
La loi externe dans E, à opérateurs dans $\mathbb{R}$, est appelée **multiplication externe des vecteurs de** E **par les réels**, ou plus simplement **multiplication externe.**
La propriété 2 est appelée **associativité mixte.**
La propriété 3 est appelée **distributivité** de la multiplication externe sur l'addition dans $\mathbb{R}$.
La propriété 4 est appelée **distributivité** de la multiplication externe sur l'addition dans E.

2 **Remarques :** 1. Nous utilisons la même notation, $+$, pour désigner l'addition dans $\mathbb{R}$ et l'addition dans E. Cela ne présente en pratique aucune difficulté. Lorsque nous écrivons par exemple : $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x)$, le signe $+$ du premier membre, entre α et β, représente l'addition dans $\mathbb{R}$ et le signe $+$ du deuxième membre, entre $(\alpha \cdot x)$ et $(\beta \cdot x)$, représente l'addition dans E.

2. En pratique, le composé d'un élément α de $\mathbb{R}$ et d'un vecteur x de E par la multiplication externe est noté αx au lieu de $\alpha \cdot x$.

Nous écrivons alors l'égalité : $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$ sous la forme : $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x$.

Exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Espace vectoriel $\mathbb{R}$.

3 Nous savons que $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$, est un corps commutatif. En particulier $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif. Si nous considérons la multiplication dans $\mathbb{R}$ comme une multiplication externe dans $\mathbb{R}$ à opérateurs dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{R}$ est alors muni d'une loi interne et d'une loi externe respectivement définies par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightsquigarrow x + y,$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\alpha, x) \rightsquigarrow \alpha x.$

On vérifie que $\mathbb{R}$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

4 Définissons dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels, les deux lois suivantes :

Addition dans $\mathbb{R}^2$:

Soient : $x = (a_1, a_2)$ et $y = (b_1, b_2)$, deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^2$. L'addition dans $\mathbb{R}^2$ est définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \rightsquigarrow x + y = (a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2).$

Multiplication externe :

Soit : $x = (a_1, a_2)$, un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. La multiplication externe est définie par :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad (\alpha, x) \rightsquigarrow \alpha x = (\alpha a_1, \alpha a_2).$

Nous avons montré, en classe de Seconde, que l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

5 Définissons dans l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de réels, les deux lois suivantes :

Addition dans $\mathbb{R}^3$:

Soient : $x = (a_1, a_2, a_3)$ et $y = (b_1, b_2, b_3)$, deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^3$. L'addition dans $\mathbb{R}^3$ est définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \forall y \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \rightsquigarrow x + y = (a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \quad a_3 + b_3).$

Multiplication externe :
Soit : $x = (a_1, a_2, a_3)$, un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$. La multiplication externe est définie par :
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad (\alpha, x) \rightsquigarrow \alpha x = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$.

Nous avons montré, en classe de Seconde, que l'ensemble $\mathbb{R}^3$, muni de ces deux lois, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Droite vectorielle. Plan vectoriel.

6 Nous avons montré, en classe de Seconde, qu'une droite vectorielle $\vec{D}$ et un plan vectoriel $\vec{P}$, respectivement munis de l'addition des vecteurs et de la multiplication des vecteurs par les réels, sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Espace vectoriel des fonctions numériques.

7 Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\Phi = \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques de A dans $\mathbb{R}$. Nous avons défini dans Φ les deux lois suivantes :

Addition dans E :
La somme $f + g$ de deux fonctions f et g de Φ est définie par :
$\forall x \in A, \quad x \rightsquigarrow [f + g](x) = f(x) + g(x)$.
L'addition dans E est définie par : $\forall f \in \Phi, \quad \forall g \in \Phi, \quad (f, g) \rightsquigarrow f + g$.

Multiplication externe :
Le produit αf d'une fonction f de Φ par un réel α est défini par :
$\forall x \in A, \quad x \rightsquigarrow [\alpha f](x) = \alpha(f(x))$.
La multiplication externe est définie par : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in \Phi, \quad (\alpha, f) \rightsquigarrow \alpha f$.

8 Montrons que l'ensemble Φ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$(\Phi, +)$ est un groupe commutatif.
On a montré (n° 25, p. 95) que $(\Phi, +)$ est un groupe commutatif pour lequel l'élément neutre est la fonction nulle, notée **0**, définie par : $\forall x \in A, \quad x \rightsquigarrow \mathbf{0}(x) = 0$, et pour lequel l'opposé d'une fonction f appartenant à Φ est la fonction $-f$ définie par : $\forall x \in A, \quad x \rightsquigarrow [-f](x) = -f(x)$.

Associativité mixte.
Soient α et β deux réels quelconques et f une fonction quelconque appartenant à Φ. Pour tout élément x de A, nous avons :
$[\alpha(\beta f)](x) = \alpha(\beta(f(x))) = \alpha\beta f(x)$, et :
$[(\alpha\beta) f](x) = (\alpha\beta) f(x) = \alpha\beta f(x)$.
Nous en déduisons : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in \Phi, \quad \alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$.

Distributivité de la multiplication externe sur l'addition dans $\mathbb{R}$.
Soient α et β deux réels quelconques et f une fonction quelconque de Φ. Pour tout élément x de A, nous avons :
$[(\alpha + \beta) f](x) = (\alpha + \beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$, et :
$[\alpha f + \beta f](x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$.
Nous en déduisons : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall \beta \in \mathbb{R}, \ \forall f \in \Phi, \ (\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f$.

Distributivité de la multiplication externe sur l'addition dans Φ.
Soient α un réel quelconque et f et g deux fonctions quelconques appartenant à Φ. Pour tout élément x de A, nous avons :
$[\alpha(f + g)](x) = \alpha [(f + g)(x)] = \alpha [f(x) + g(x)] = \alpha f(x) + \alpha g(x)$, et :
$[\alpha f + \alpha g](x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$.
Nous en déduisons : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall f \in \Phi, \ \forall g \in \Phi, \ \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.

Produit d'un élément de Φ par le réel 1.
Soit f une fonction quelconque appartenant à Φ. Pour tout élément x de A, nous avons : $(1 f)(x) = 1(f(x)) = f(x)$.
Nous en déduisons : $\forall f \in \Phi, \ 1 f = f$.

9 En conclusion, l'ensemble Φ, muni des deux lois définies ci-dessus, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Calculs dans un espace vectoriel.

Propriétés de l'addition dans E.

10 Considérons un espace vectoriel (E, +, .). Nous savons que (E, +) est un groupe commutatif. Nous avons donc les propriétés suivantes :

1. Associativité : $\forall (x, y, z) \in E^3, \ (x + y) + z = x + (y + z)$.
2. Il existe un élément neutre unique 0_E : $\forall x \in E, \ x + 0_E = 0_E + x = x$.
3. Tout élément x de E admet un symétrique unique, noté $-x$:
$\forall x \in E, \ x + (-x) = (-x) + x = 0_E$.
Le vecteur $-x$ est appelé **opposé** du vecteur x.
4. Commutativité : $\forall (x, y) \in E^2, \ x + y = y + z$.

Il en résulte que tout élément de E est régulier pour l'addition dans E :
$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ \forall z \in E, \ (x + y = x + z) \Longrightarrow (y = z)$.
On peut définir une nouvelle loi interne dans E, appelée soustraction, par :
$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ (x, y) \rightsquigarrow x - y = x + (-y) = (-y) + x$.
La soustraction dans E possède les propriétés suivantes :
$\forall x \in E, \ -(-x) = x$;
$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ -(x + y) = -x - y$;
$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ (x - y = 0_E) \Longleftrightarrow (x = y)$.

Propriétés de la multiplication externe.

11 THÉORÈME : Le produit d'un vecteur x de E par un réel α est le vecteur nul 0_E si et seulement si le vecteur x est nul ou le réel α est nul.

12 Démontrons d'abord les égalités : $\alpha 0_E = 0_E$ et $0x = 0_E$.

1. Pour tout réel α et pour tout vecteur x de E, nous avons :
$x + 0_E = x$ et $\alpha(x + 0_E) = \alpha x$.
Utilisons la distributivité de la multiplication externe sur l'addition dans E, il en résulte : $\alpha(x + 0_E) = \alpha x + \alpha 0_E$.
Nous avons donc : $\alpha x + \alpha 0_E = \alpha x$.
Dans le groupe $(E, +)$, tout élément est régulier. Nous en concluons :
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha 0_E = 0_E$.

2. Pour tout réel α et pour tout vecteur x de E, nous avons :
$\alpha + 0 = \alpha$ et $(\alpha + 0)\, x = \alpha x$.
Utilisons la distributivité de la multiplication externe sur l'addition dans $\mathbb{R}$, il en résulte : $(\alpha + 0)\, x = \alpha x + 0x$.
Nous avons donc : $\alpha x + 0x = \alpha x$.
Dans le groupe $(E, +)$, tout élément est régulier. Nous en concluons :
$\forall x \in E$, $0x = 0_E$.

13 Réciproquement, nous allons montrer que, si le produit αx d'un réel α par un vecteur x de E est le vecteur nul 0_E, alors le réel α est nul ou le vecteur x est nul ; nous allons donc démontrer l'implication : $(\alpha x = 0_E) \Longrightarrow (\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E)$. (1)
Si α est nul, l'implication (1) est vraie.

Supposons α non nul ; α admet dans le groupe $(\mathbb{R}^*, .)$ un inverse : $\alpha^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}$.
Nous avons les égalités : $\alpha^{-1}(\alpha x) = (\alpha^{-1}\, \alpha)\, x = 1\, x = x$, et : $\alpha^{-1}\, 0_E = 0_E$.
De l'égalité : $\alpha x = 0_E$, nous déduisons : $\alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}\, 0_E$, c'est-à-dire : $x = 0_E$.
Le théorème est donc démontré.

14 THÉORÈME : Pour tout réel α et pour tout vecteur x de E on a les égalités : $-(\alpha x) = (-\alpha)x = \alpha(-x)$.

1. Démontrons l'égalité : $-(\alpha x) = (-\alpha)x$.
Pour tout réel α, nous avons l'égalité : $\alpha + (-\alpha) = 0$.
Nous en déduisons, pour tout vecteur x de E, l'égalité :
$[\alpha + (-\alpha)]\, x = 0x$, c'est-à-dire : $[\alpha + (-\alpha)]\, x = 0_E$.
La multiplication externe est distributive sur l'addition dans $\mathbb{R}$; il en résulte :
$\alpha x + (-\alpha)\, x = 0_E$.
Le vecteur $(-\alpha)x$ est donc l'opposé du vecteur αx : $-(\alpha x) = (-\alpha)x$.

2 Démontrons l'égalité : $-(\alpha x) = \alpha(-x)$.
Pour tout vecteur x de E, nous avons l'égalité : $x + (-x) = 0_E$.
Nous en déduisons, pour tout réel α, l'égalité :
$\alpha[x + (-x)] = \alpha 0_E$; c'est-à-dire : $\alpha[x + (-x)] = 0_E$.
La multiplication externe est distributive sur l'addition dans E ; il en résulte :
$\alpha x + \alpha(-x) = 0_E$.
Le vecteur $\alpha(-x)$ est donc l'opposé du vecteur αx : $-(\alpha x) = \alpha(-x)$.

15 Les trois notations $-(\alpha x)$, $(-\alpha)x$ et $\alpha(-x)$ représentent l'opposé du vecteur αx. Nous convenons de noter ce vecteur : $-\alpha x$.
Nous avons alors : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $-\alpha x = -(\alpha x) = (-\alpha)x = \alpha(-x)$.

16 Remarque : Si : $\alpha = 1$, nous avons : $(-1)x = -(1x)$,
c'est-à-dire : $(-1)x = -x$.

17 THÉORÈME : Pour tout réel α, pour tout réel β et pour tout vecteur x de E, on a l'implication : $(\alpha x = \beta x) \Longrightarrow (\alpha = \beta$ ou $x = 0_E)$.

L'égalité : $\alpha x = \beta x$ est logiquement équivalente à l'égalité :
$\alpha x + (-\beta)x = \beta x + (-\beta x)$; c'est-à-dire : $\alpha x + (-\beta)x = 0_E$.
Nous en déduisons l'égalité : $[\alpha + (-\beta)]x = 0_E$,
c'est-à-dire : $(\alpha - \beta)x = 0_E$.
Utilisons le théorème n° 12, p. 206 ; il en résulte : $\alpha - \beta = 0$ ou $x = 0_E$;
c'est-à-dire : $\alpha = \beta$ ou $x = 0_E$.

18 THÉORÈME : Pour tout réel α, pour tout vecteur x de E et pour tout vecteur y de E, on a l'implication : $(\alpha x = \alpha y) \Longrightarrow (\alpha = 0$ ou $x = y)$.

L'égalité : $\alpha x = \alpha y$ est logiquement équivalente à l'égalité :
$\alpha x + \alpha(-y) = \alpha x + (-\alpha y)$; c'est-à-dire : $\alpha x + \alpha(-y) = 0_E$.
Nous en déduisons l'égalité : $\alpha[x + (-y)] = 0_E$,
c'est-à-dire l'égalité : $\alpha(x - y) = 0_E$.
Utilisons le théorème n° 12, p. 206 ; il en résulte : $\alpha = 0$ ou $x - y = 0_E$; c'est-à-dire : $\alpha = 0$ ou $x = y$.

19 THÉORÈME : La multiplication externe est distributive sur la soustraction dans $\mathbb{R}$.

En effet, quels que soient les réels α et β et le vecteur x de E, nous avons les égalités :
$(\alpha - \beta)x = [\alpha + (-\beta)]x = \alpha x + (-\beta)x = \alpha x - \beta x$.

20 THÉORÈME: La multiplication externe est distributive sur la soustraction dans E.

En effet, quels que soient le réel α et les vecteurs x et y de E, nous avons les égalités :
$\alpha(x - y) = \alpha\,[x + (-y)] = \alpha x + \alpha(-y) = \alpha x - \alpha y$.

Sous-espaces vectoriels.

Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

21 Exemple : Considérons un plan vectoriel $\vec{P}$. Nous savons que $\vec{P}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour l'addition des vecteurs et pour la multiplication externe des vecteurs par les réels.

Soit $\vec{D}$ une droite vectorielle de $\vec{P}$. Nous avons démontré en Seconde les propriétés:
$\forall \vec{U} \in \vec{P},\ \forall \vec{V} \in \vec{P},\ (\vec{U} \in \vec{D} \text{ et } \vec{V} \in \vec{D}) \Longrightarrow (\vec{U} + \vec{V} \in \vec{D})$;
$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \vec{U} \in \vec{P},\ (\vec{U} \in \vec{D}) \Longrightarrow (\alpha\vec{U} \in \vec{D})$.

La droite vectorielle $\vec{D}$ est donc une partie stable de $\vec{P}$ pour l'addition dans $\vec{P}$ et pour la multiplication externe.

Nous avons alors montré que $\vec{D}$, muni des lois induites sur $\vec{D}$ par les deux lois définies dans $\vec{P}$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

22 Nous allons démontrer que ce résultat est général.

THÉORÈME : Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit F une partie non vide de E. Si F est une partie stable pour l'addition dans E et pour la multiplication externe, alors F muni des lois induites sur F par les deux lois définies dans E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Considérons une partie F non vide de E, pour laquelle on a :
$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Longrightarrow (x + y \in F)$;
$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ (x \in F) \Longrightarrow (\alpha x \in F)$.
Nous utilisons les mêmes notations pour désigner les lois + et . définies dans E et les lois induites correspondantes définies dans F.

1. Montrons que $(F, +)$ est un groupe commutatif. Cela revient à montrer que F est un sous-groupe du groupe commutatif $(E, +)$.
Nous savons déjà que F est une partie stable pour l'addition dans E. Montrons que le vecteur nul 0_E appartient à F.
F est une partie non vide de E ; il existe donc au moins un vecteur x_0 de F qui appartient à F : $x_0 \in F$.
F est stable pour la multiplication externe. Nous en déduisons : $0x_0 \in F$, c'est-à-dire : $0_E \in F$.

Montrons enfin que l'opposé $-x$ de tout vecteur x de F appartient à F.
F est stable pour la multiplication externe. Nous avons donc : $\forall x \in F, \quad (-1)x \in F$,
c'est-à-dire : $\quad -x \in F$.

2. Les propriétés suivantes dans F résultent des propriétés correspondantes dans E :
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in F, \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x$;
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in F, \quad (\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$;
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in F, \quad \forall y \in F, \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
$\forall x \in F, \quad 1\, x = x$.

23 Le théorème précédent nous permet de donner la définition :

DÉFINITION : On appelle sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $\mathbb{R}$, toute partie F non vide de E qui est stable pour l'addition dans E et pour la multiplication externe.

Exemples de sous-espaces vectoriels.

24 Pour tout espace vectoriel $(E, +, .)$, E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

25 Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et x_0 un vecteur de E.
Considérons l'ensemble : $F = \{x \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad x = \alpha x_0\}$.

F est une partie de E ; en effet, nous avons : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha x_0 \in E$.
F est non vide ; en effet, nous avons : $1\, x_0 = x_0$, donc : $x_0 \in F$.

F est stable pour l'addition dans E. Considérons, en effet, deux éléments quelconques x et y de F ; il existe deux réels α et β tels que : $x = \alpha x_0$ et $y = \beta x_0$.
Nous avons : $x + y = \alpha x_0 + \beta x_0 = (\alpha + \beta)\, x_0$.
Nous en déduisons : $\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad (x \in F \text{ et } y \in F) \Longrightarrow (x + y \in F)$.

F est stable pour la multiplication externe. Considérons, en effet, un élément quelconque x de F ; il existe un réel α tel que : $x = \alpha x_0$.
Nous avons, pour tout réel β : $\beta x = \beta(\alpha x_0) = (\beta\alpha)\, x_0$.
Nous en déduisons : $\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad (x \in F) \Longrightarrow (\beta x \in F)$.

F est donc un sous-espace vectoriel de E.

26 Nous savons que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de l'addition des fonctions et de la multiplication externe des fonctions par les réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Considérons alors l'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Nous avons montré en Seconde que $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, stable pour les deux lois définies dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
$\mathcal{A}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

De même, l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions en escalier de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

27 Soit : $J =]a, b[$, un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ des fonctions de J dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour l'addition des fonctions et la multiplication externe des fonctions par les réels.
Désignons par $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de J dans $\mathbb{R}$ continues sur J.
On vérifie que, si f et g sont des fonctions continues sur J, alors $f + g$, et, pour tout réel α, αf sont des fonctions continues sur J.
Il en résulte que $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$.
De même, l'ensemble $\mathcal{D}(J, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur J est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(J, \mathbb{R})$.

28 Considérons l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré* inférieur ou égal à 2.
$\mathcal{C}$ est une partie de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Un élément quelconque f de $\mathcal{C}$ est défini par :
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax^2 + bx + c.$

Si f et g sont deux éléments quelconques de $\mathcal{C}$, nous avons :
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax^2 + bx + c;$
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a'x^2 + b'x + c'.$

La fonction somme $f + g$ est un élément de $\mathcal{C}$; en effet, nous avons :
$f + g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (a + a')\,x^2 + (b + b')\,x + (c + c').$
$\mathcal{C}$ est donc une partie stable pour l'addition dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout réel λ, λf est un élément de $\mathcal{C}$; en effet, nous avons :
$\lambda f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (\lambda a)\,x^2 + (\lambda b)\,x + (\lambda c).$
$\mathcal{C}$ est donc une partie stable pour la multiplication externe dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

D'autre part, $\mathcal{C}$ est non vide ; en effet la fonction nulle **0** appartient à $\mathcal{C}$.
L'ensemble $\mathcal{C}$ est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Intersection de deux sous-espaces vectoriels.

29 **THÉORÈME : Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.**

Considérons deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.

$F \cap G$ est non vide.

En effet, nous avons : $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Il en résulte : $0_E \in F \cap G$.

$F \cap G$ est stable pour l'addition dans E.

Considérons deux vecteurs quelconques x et y de $F \cap G$; nous avons :
$(x \in F \cap G) \Longrightarrow (x \in F \text{ et } x \in G)$;
$(y \in F \cap G) \Longrightarrow (y \in F \text{ et } y \in G)$.

*Le degré de la fonction polynôme nulle n'est pas défini. Nous convenons que cette fonction appartient à l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à k, quel que soit l'entier naturel k.

F est un sous-espace vectoriel de E, il en résulte :
$(x \in F \text{ et } y \in F) \Longrightarrow (x + y \in F)$.
G est un sous-espace vectoriel de E, il en résulte :
$(x \in G \text{ et } y \in G) \Longrightarrow (x + y \in G)$.
Nous en déduisons l'implication :
$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ (x \in F \cap G \text{ et } y \in F \cap G) \Longrightarrow (x + y \in F \cap G)$.

$F \cap G$ est stable pour la multiplication externe.

Considérons un vecteur x quelconque de $F \cap G$. Nous avons :
$(x \in F \cap G) \Longrightarrow (x \in F \text{ et } x \in G)$.
F et G sont des sous-espaces vectoriels de E ; pour tout réel α, nous avons donc :
$(x \in F) \Longrightarrow (\alpha x \in F)$; et :
$(x \in G) \Longrightarrow (\alpha x \in G)$.
Nous en déduisons l'implication :
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E, \ (x \in F \cap G) \Longrightarrow (\alpha x \in F \cap G)$.

30 **Remarque :** Deux sous-espaces vectoriels de E ne sont jamais disjoints ; en effet leur intersection contient toujours le sous-espace $\{0_E\}$.

Dépendance linéaire. Indépendance linéaire.

Combinaison linéaire de p vecteurs.

31 **DÉFINITION : Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$, p vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, p réels. On appelle combinaison linéaire des p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ affectés des coefficients respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ le vecteur x de E défini par : $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p$.**

Par convention, nous disons que, pour tout vecteur x_1 de E et pour tout réel α_1, le vecteur $\alpha_1 x_1$ est une combinaison linéaire du vecteur x_1.

32 **Exemples :** 1. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les trois fonctions f, g, h de $\mathcal{A}$ définies par :
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto 1$;
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x$;
$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto 2x + 1$.
Pour tout triplet (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$, la fonction : $\varphi = \alpha f + \beta g + \gamma h$, définie par : $x \mapsto \alpha + \beta x + \gamma (2x + 1)$, est une combinaison linéaire de f, g, h.

2. Dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, le vecteur 0_E est la combinaison linéaire de p vecteurs quelconques $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de E affectés des coefficients 0, 0, ... 0.
Nous avons en effet : $0_E = 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_p$.

Sous-espace des combinaisons linéaires de p vecteurs.

33 Considérons un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ et p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de E. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble des combinaisons linéaires de ces p vecteurs. Au n° 25, p. 209, nous avons montré que, si p est égal à 1, l'ensemble des combinaisons linéaires d'un vecteur x_1, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs αx_1, où α est un réel quelconque, est un sous-espace vectoriel de E.

34 Nous allons démontrer que ce résultat est général.

THÉORÈME : L'ensemble des combinaisons linéaires de p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Désignons par C l'ensemble des combinaisons linéaires des p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$.
Un vecteur x de E est un élément de C si et seulement s'il existe p réels : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ tels que l'on ait l'égalité : $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p$.

C est non vide. En effet, nous avons l'égalité : $0_E = 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_p$.
Nous avons donc : $0_E \in C$.

C est stable pour l'addition dans E. Considérons, en effet, deux vecteurs quelconques x et y de C. Il existe p réels : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et p réels : $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ pour lesquels nous avons :
$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p$, et : $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p$.
Il en résulte :
$x + y = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p) + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p)$.
Nous en déduisons successivement :
$x + y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p$;
$x + y = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p + \beta_p x_p$;
$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \ldots + (\alpha_p + \beta_p)x_p$.
Le vecteur $x + y$ appartient donc à C. Nous avons démontré l'implication :
$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ (x \in C \text{ et } y \in C) \Longrightarrow (x + y \in C)$.

C est stable pour la multiplication externe. Considérons, en effet, un vecteur quelconque x de E. Il existe p réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ pour lesquels nous avons :
$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p$.
Pour tout réel α, nous avons : $\alpha x = \alpha(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p)$.
Nous en déduisons successivement :
$\alpha x = \alpha(\alpha_1 x_1) + \alpha(\alpha_2 x_2) + \ldots + \alpha(\alpha_p x_p)$;
$\alpha x = (\alpha\alpha_1)x_1 + (\alpha\alpha_2)x_2 + \ldots + (\alpha\alpha_p)x_p$.
Le vecteur αx appartient donc à C. Nous avons démontré l'implication :
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E, \ (x \in C) \Longrightarrow (\alpha x \in C)$.
L'ensemble C est donc un **sous-espace vectoriel** de E.

35 Exemple : Considérons l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et les deux fonctions f et g de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ respectivement définies par :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto 1$;

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x$.

L'ensemble C des combinaisons linéaires des deux fonctions f et g est l'ensemble des fonctions h pour lesquelles il existe deux réels α et β tels que : $h = \alpha f + \beta g$.

Une telle fonction h est définie par :

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha + \beta x$.

C est donc l'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions affines sur $\mathbb{R}$. Il résulte du théorème précédent que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous avions déjà mis en évidence cette propriété au n° 26, p. 209.

Système fini de vecteurs.

36 **DÉFINITION : On appelle système de p vecteurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$ distincts ou non d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, le p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.**

Il résulte de la définition précédente, qu'un système de p vecteurs est un élément du produit cartésien E^p.

Vecteurs linéairement dépendants. Système lié.

37 **DÉFINITION : On dit que p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ sont linéairement dépendants, ou encore que le système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est lié, si et seulement s'il existe p réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, non tous nuls, pour lesquels on a l'égalité :**

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p = 0_E$.

Un système de p vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est donc lié si et seulement s'il existe un p-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ de $\mathbb{R}^p$, différent du p-uplet nul $(0, 0, \ldots, 0)$, pour lequel on a : $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p = 0_E$.

38 Exemples : 1. Le vecteur 0_E constitue un système lié.

En effet, nous avons par exemple : $1 . 0_E = 0_E$.

2. Soient les trois fonctions suivantes de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$f : x \mapsto x - 2$;

$g : x \mapsto x - 3$;

$h : x \mapsto 2x - 1$.

Considérons alors la fonction : $\varphi = -5f + 3g + h$.

Nous avons : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = -5(x - 2) + 3(x - 3) + (2x - 1) = 0$

φ est la fonction nulle **0** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Le système (f, g, h) est donc un système lié de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

39 **Remarques** : 1. Si l'un des vecteurs d'un système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est le vecteur nul 0_E, ce système est lié.
En effet, supposons, par exemple, que l'on ait : $x_p = 0_E$.
Nous avons : $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_{p-1} + 1\,x_p = 0_E$.

2. Si deux vecteurs d'un système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sont égaux, ce système est lié.
En effet, supposons, par exemple, que l'on ait : $x_{p-1} = x_p$.
Nous avons : $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 1\,x_{p-1} + (-1)x_p = 0_E$.

3. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est un système lié, alors pour tout vecteur x de E, le système $(x_1, x_2, \ldots, x_p, x)$ est lié.
En effet, le système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est lié ; il existe donc un p-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ de $\mathbb{R}^p$, différent du p-uplet $(0, 0, \ldots, 0)$, pour lequel on a :
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p = 0_E$.
Pour tout vecteur x de E, nous avons alors :
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ \alpha_p x_p + 0x = 0_E$, et le $(p+1)$-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, 0)$ est différent du $(p+1)$-uplet $(0, 0, \ldots, 0, 0)$.

Propriété d'un système lié.

40 Considérons, dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, un système lié $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et supposons p supérieur ou égal à 2. Il existe p réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, non tous nuls, pour lesquels on a : $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p\, x_p = 0_E$.
L'un au moins des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ est non nul ; supposons, par exemple, que α_p soit non nul et posons : $\beta = \dfrac{1}{\alpha_p}$.
Nous avons alors : $\beta(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p) = 0_E$; c'est-à-dire :
$(\beta\alpha_1)x_1 + (\beta\alpha_2)x_2 + \ldots + (\beta\alpha_{p-1})x_{p-1} + x_p = 0_E$.
Nous en déduisons : $x_p = (-\beta\alpha_1)x_1 + (-\beta\alpha_2)x_2 + \ldots + (-\beta\alpha_{p-1})x_{p-1}$.
Le vecteur x_p est une combinaison linéaire des $p-1$ vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

41 Réciproquement, si un vecteur x_p de E est une combinaison linéaire des $p-1$ vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ de E, il existe $p-1$ réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{p-1}$ pour lesquels on a : $x_p = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ldots + \lambda_{p-1} x_{p-1}$.
Nous en déduisons : $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{p-1} x_{p-1} + (-x_p) = 0_E$.
Il en résulte que le système $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p)$ est lié.

42 **THÉORÈME : Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Un système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de p vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est lié si et seulement si l'un au moins de ces p vecteurs est une combinaison linéaire des $p-1$ autres.**

Vecteurs linéairement indépendants. Système libre.

43 **DÉFINITION : On dit que p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ sont linéairement indépendants, ou encore que le système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est libre, si et seulement si ces p vecteurs ne sont pas dépendants.**

Un système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est donc libre si et seulement si :

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p,$$
$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p = 0_E) \longrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0).$$

44 **Exemples** : 1. Tout vecteur x non nul de E est linéairement indépendant.
Nous avons, en effet, l'implication :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\alpha x = 0_E \text{ et } x \neq 0_E) \longrightarrow (\alpha = 0).$$

2. Considérons, dans l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les deux fonctions : $f_1 : x \mapsto 1$ et $f_2 : x \mapsto x$.
Si α_1 et α_2 sont deux réels pour lesquels on a : $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = \mathbf{0}$, pour tout réel x, nous avons l'égalité : $\alpha_1 + \alpha_2 x = 0$.
Prenons : $x = 0$, il en résulte : $\alpha_1 = 0$.
Prenons alors : $x = 1$, il en résulte : $\alpha_2 = 0$.
Nous avons donc l'implication :

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = \mathbf{0}) \longrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = 0).$$

Le système (f_1, f_2) est donc un système libre dans $\mathcal{A}$.

45 **Remarques** : 1. Soient p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de E linéairement indépendants, et $p - 1$ quelconques de ces p vecteurs, par exemple le système : $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$.
Si ce système était lié, le système $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p)$ serait aussi lié.
Il en résulte que, si p vecteurs de E sont linéairement indépendants, alors $p - 1$ quelconques de ces p vecteurs sont linéairement indépendants.

2. Nous savons que, si l'un des vecteurs d'un système est le vecteur nul 0_E, ce système est lié. Il en résulte que, si un système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est libre, les p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont non nuls.

3. Nous savons que, si deux vecteurs d'un système sont égaux, le système est lié. Il en résulte que, si un système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est libre, les p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont deux à deux distincts.

EXERCICES

Espaces vectoriels

1 Soit $(E, \star)$ un groupe. On définit dans E une loi de composition externe à opérateurs dans $\mathbb{R}$, notée $.$, telle que, pour tout couple (x, y) de E^2 et pour tout couple (α, β) de $\mathbb{R}^2$, on ait :

$(\alpha + \beta) . x = (\alpha . x) \star (\beta . x)$

$\alpha . (x \star y) = (\alpha . x) \star (\alpha . y)$

$\alpha . (\beta . x) = (\alpha\beta) . x$

$1 . x = x$.

Développer de deux manières : $(1 + 1) . (x \star y)$.

En déduire que $(E, \star)$ est un groupe commutatif, et que $(E, \star, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2 Démontrer que l'ensemble P des fonctions polynômes muni de la loi d'addition des fonctions et de la multiplication externe des fonctions par les réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On définit dans E^2 une loi de composition interne, notée $\star$, par : $(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et une loi de composition externe, notée $\perp$ par : $\alpha \perp (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$. Démontrer que $(E^2, \star, \perp)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

4 On désigne par (a, b, c), (a', b', c'), (x, y, z) des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, par α, β des réels. Dans chacun des cas suivants, déterminer le vecteur (x, y, z) défini par : $(x, y, z) = \alpha(a, b, c) + \beta(a', b', c')$.

1° $(a, b, c) = (1, 3, -2)$; $(a', b', c') = (2, -5, 4)$; $\alpha = 3$, $\beta = -2$.

2° $(a, b, c) = (-2, 1, 4)$; $(a', b', c') = (3, -2, 5)$; $\alpha = 4$, $\beta = 2$.

5 On désigne par f_1, f_2, f_3, f des vecteurs de l'espace vectoriel P sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes (voir exercice n° 2), par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels. Dans chacun des cas suivants, déterminer le vecteur f défini par :

$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$;

$f_1 : x \rightsquigarrow 2x^4 + 3x - 1$;

$f_2 : x \rightsquigarrow x^4 + 3x^3 + 2$;

$f_3 : x \rightsquigarrow 3x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x$.

1° $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$.

2° $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$.

Sous-espaces vectoriels

6 Soit k un réel. On considère l'ensemble, noté E_k, des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ qui possèdent la propriété :

$\forall (x, y, z) \in E_k$, $x + y - 2z = k$.

1° Déterminer le réel k pour que E_k soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2° On considère l'ensemble F des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ qui possèdent la propriété :

$\forall (x, y, z) \in F$, $x + y - 3z = 0$.

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3° Démontrer que $E_0 \cap F$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont : $(a, -a, 0)$, où a est un réel quelconque.

7 Soit a un réel positif. On considère l'espace vectoriel Φ sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques définies sur un intervalle $]-a, a[$.

1° Démontrer que l'ensemble E des fonctions paires est un sous-espace vectoriel de Φ.

2° Démontrer que l'ensemble F des fonctions impaires est un sous-espace vectoriel de Φ.

3° Déterminer le sous espace vectoriel $E \cap F$.

8 On considère l'espace vectoriel P sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes.

1° Démontrer que l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 6 est un sous espace vectoriel de P. L'ensemble des fonctions polynômes de degré 6 est-il un sous-espace vectoriel de P ?

2° Démontrer que l'ensemble des fonctions polynômes qui sont paires et dont le degré est inférieur ou égal à 6 est un sous-espace vectoriel E. Caractériser E.

3° Démontrer que l'ensemble des fonctions polynômes qui sont impaires et dont le degré est inférieur ou égal à 6 est un sous-espace vectoriel F. Caractériser F.

9 On considère l'espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies sur un intervalle ouvert J.

1° Démontrer que l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur J est un sous-espace vectoriel de E.

2° Soit ω un réel. Démontrer que l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur J qui sont telles que : $f'' + \omega^2 f = 0_E$ est un sous-espace vectoriel de E.

10 Soient un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ et deux sous-espaces vectoriels A et B tels que : $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

1° Montrer qu'il existe un vecteur x qui appartient à A et qui n'appartient pas à B, et un vecteur y qui appartient à B et qui n'appartient pas à A.

2° Démontrer que $x + y$ n'appartient pas à A.

3° Démontrer que $x + y$ n'appartient pas à B.

4° En déduire que $A \cup B$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

11 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1° Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E, on désigne par $A * B$ la partie de E définie par :

$$(x \in A * B) \Longleftrightarrow (\exists a \in A \text{ et } \exists b \in B,\ x = a + b)$$

Montrer que $A * B$ est un sous-espace vectoriel de E.

2° Démontrer que $A \cap B = \{0_E\}$ si et seulement si pour tout vecteur x de $A * B$, le couple (a, b) de $A \times B$ qui vérifie : $x = a + b$, est unique.

3° Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. On définit une loi de composition interne $*$ dans $\mathcal{E}$ par : $\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}$, $(A, B) \longmapsto A * B$.

a) Montrer que la loi $*$ est associative et commutative.

b) La loi $*$ admet-elle un élément neutre ?

c) L'ensemble $\mathcal{E}$ muni de la loi $*$ est-il un groupe ?

d) Montrer que pour tout sous-espace A de $\mathcal{E}$ on a : $A * A = A$.

EXERCICES

Dépendance linéaire. Indépendance linéaire.

12 Soient deux vecteurs x et y d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. On considère les vecteurs z_1, z_2, z définis par les égalités suivantes :

$$z_1 = -3x + \frac{5}{4}y, \qquad z_2 = \frac{2}{3}x + 7y, \qquad z = \frac{3}{4}z_1 + \frac{1}{2}z_2.$$

Démontrer que z, x, y sont dépendants.

13 Soient deux vecteurs dépendants x et y d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ et deux combinaisons linéaires z_1 et z_2 des vecteurs x et y.

1° On suppose que le vecteur x n'est pas nul. Montrer qu'il existe deux réels α_1 et α_2 qui vérifient les égalités : $z_1 = \alpha_1 x$ et $z_2 = \alpha_2 x$.
En déduire que z_1 et z_2 sont dépendants.

2° Démontrer que, dans tous les cas, les vecteurs z_1 et z_2 sont dépendants.

14 Soient deux vecteurs x et y d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ et deux combinaisons linéaires z_1 et z_2 des vecteurs x et y.

1° Démontrer que, si z_1 et z_2 sont linéairement indépendants, x et y sont linéairement indépendants.

2° Déduire de la question précédente l'équivalence logique :
(le système $(x + y, x - y)$ est libre) $\Longleftrightarrow$ (le système (x, y) est libre).

15 On considère trois triplets a, b, c de $\mathbb{R}^3$:
$a = (1, 3, -2)$; $b = (-5, 1, 4)$; $c = (-1, 1, 1)$.

1° Démontrer que a et b sont linéairement indépendants.

2° Démontrer que b et c sont linéairement indépendants.

3° Démontrer que a et c sont linéairement indépendants.

4° a, b, c sont-ils linéairement indépendants ?

5° Démontrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs a et b est l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que : $8z + 7x + 3y = 0$.
Que peut-on dire des sous espaces vectoriels engendrés respectivement par b et c, par a et c, par a, b et c ?

16 On considère les trois triplets a, b, c de $\mathbb{R}^3$:
$a = (2, -1, 3)$; $b = (1, 2, 1)$; $c = (1, 1, 1)$.

1° Traiter les quatre premières questions de l'exercice précédent.

2° Démontrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3$ engendré par les vecteurs a et b est l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que : $-7x + y + 5z = 0$.
Donner une caractérisation analogue des sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par b et c, et par a et c.

17 On considère les deux triplets a et b de $\mathbb{R}^3$:
$a = (3, -1, 1)$; $b = (4, 1, -2)$.

1° Démontrer que a et b sont linéairement indépendants.

2° Caractériser le sous-espace vectoriel A engendré par a et b.

3° Déterminer le réel k pour que le triplet $c_1 = (k, -2, 1)$ appartienne à A.

4° Déterminer le réel λ pour que le triplet $c_2 = (13, \lambda, 1)$ appartienne à A.
Que peut-on dire des triplets a, b, c_1 et des triplets a, b, c_2 ?

14.

Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (suite)

Espaces vectoriels de dimension finie.

Système générateur.

1 **DÉFINITION : On dit qu'un système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de p vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est un système générateur si et seulement si le sous-espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces p vecteurs est égal à E.**

On dit aussi que l'espace vectoriel E est **engendré** par les p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Un système $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est donc un système générateur de E si et seulement si :

$\forall x \in E, \quad \exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \quad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p.$

2 **Exemples** : 1. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et les trois fonctions de $\mathcal{C}$ suivantes :

$f_1 : x \rightsquigarrow 1 ; \quad f_2 : x \rightsquigarrow x ; \quad f_3 : x \rightsquigarrow x^2.$

Une fonction f quelconque de $\mathcal{C}$ est définie par :

$f : x \rightsquigarrow ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels.

Nous avons donc : $f = cf_1 + bf_2 + af_3$.

Il en résulte que (f_1, f_2, f_3) est un système générateur de $\mathcal{C}$.

2. Considérons, dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}$, les quatre fonctions suivantes :

$g_1 : x \rightsquigarrow 2 ; \quad g_2 : x \rightsquigarrow x + 1 ; \quad g_3 : x \rightsquigarrow x^2 - 1 ; \quad g_4 : x \rightsquigarrow x - 1.$

Montrons que toute fonction f de $\mathcal{C}$ est une combinaison linéaire de g_1, g_2, g_3, g_4.

f est définie par : $x \rightsquigarrow ax^2 + bx + c$.

Cherchons s'il existe quatre réels α_1, α_2, α_3, α_4 pour lesquels on a :
$f = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4$,
c'est-à-dire :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = 2\alpha_1 + \alpha_2 (x + 1) + \alpha_3 (x^2 - 1) + \alpha_4 (x - 1)$;
ou encore :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = \alpha_3 x^2 + (\alpha_2 + \alpha_4) x + (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)$.
Nous en déduisons les égalités :
$a = \alpha_3$; $b = \alpha_2 + \alpha_4$; $c = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$.

Prenons, par exemple : $\alpha_1 = \dfrac{c - b - a}{2}$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = a$, $\alpha_4 = 0$.
Les réels α_1, α_2, α_3, α_4 ainsi choisis vérifient les trois égalités précédentes ; nous avons donc : $f = \dfrac{c - b - a}{2} g_1 + b g_2 + a g_3 + 0\, g_4$.

Remarquons que les réels α_1, α_2, α_3, α_4 ne sont pas déterminés de façon unique. Nous aurions pu prendre, par exemple :
$\alpha_1 = \dfrac{a + c}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{b}{2}$, $\alpha_3 = a$, $\alpha_4 = \dfrac{b}{2}$.

Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.

3 **DÉFINITION : On dit qu'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est de dimension finie si et seulement s'il possède au moins un système fini générateur.**

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est donc de dimension finie si et seulement s'il existe p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de E tels que tout vecteur x de E soit une combinaison linéaire de ces p vecteurs.

4 **Exemples :** 1. Il résulte des exemples du n° 2, p. 219, que l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est un espace vectoriel de dimension finie.

2. Nous avons montré, en classe de Seconde, que tout vecteur $\vec{W}$ d'un plan vectoriel $\vec{P}$ est une combinaison linéaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ linéairement indépendants. Un plan vectoriel $\vec{P}$ est donc un espace vectoriel de dimension finie.

3. Le corps $\mathbb{R}$ des réels considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (n° 3, p. 203) est un espace vectoriel de dimension finie. En effet, tout vecteur α de $\mathbb{R}$ est une combinaison linéaire du vecteur 1.

4. $\{0_E\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.

5 **Remarque :** Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ peut ne pas être de dimension finie. Par exemple, l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie. On démontre en effet que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne possède pas de système fini générateur.

Propriété d'un espace vectoriel de dimension finie.

6 **THÉORÈME : Si un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ possède un système générateur de p vecteurs, tout système de $p+1$ vecteurs de E est un système lié.**

Nous admettons ce théorème. A titre d'exemple, nous allons le démontrer pour : $p = 1$, et pour : $p = 2$.

7 **Premier cas : $p = 1$.**

Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ engendré par un vecteur e_1 de E.
Pour tout vecteur x de E, il existe un réel α_1 pour lequel on a : $x = \alpha_1 e_1$.
Considérons un système (x, y) de deux vecteurs de E et montrons qu'il est lié.

Si l'un des vecteurs x ou y est le vecteur nul 0_E, alors le système (x, y) est lié.

Supposons que x et y sont tous les deux différents de 0_E. Il existe deux réels non nuls α_1 et β_1 pour lesquels on a : $x = \alpha_1 e_1$ et $y = \beta_1 e_1$.

Nous en déduisons : $\beta_1 x = \beta_1 \alpha_1 e_1$ et $\alpha_1 y = \alpha_1 \beta_1 e_1$.
Nous avons donc : $\beta_1 x = \alpha_1 y$, c'est-à-dire : $\beta_1 x - \alpha_1 y = 0$.

α_1 et β_1 sont non nuls : (x, y) est donc un système lié.

8 **Deuxième cas : $p = 2$.**

Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ engendré par deux vecteurs e_1 et e_2 de E.
Pour tout vecteur x de E, il existe deux réels α_1 et α_2 pour lesquels on a :
$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.
Considérons un système (x, y, z) de trois vecteurs de E et montrons qu'il est lié.

Si l'un des vecteurs x, y, ou z est le vecteur nul 0_E, alors le système (x, y, z) est lié.

Supposons que x, y, z sont tous les trois différents de 0_E.
Il existe six réels α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 pour lesquels on a :
$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$; $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$; $z = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$.

Le vecteur x est non nul ; l'un au moins des réels α_1 et α_2 est donc non nul. Supposons, par exemple, que α_1 soit non nul.

Nous avons : $\alpha_1^{-1} x = e_1 + \alpha_1^{-1} \alpha_2 e_2$.

Nous en déduisons : $e_1 = \alpha_1^{-1} x - \alpha_1^{-1} \alpha_2 e_2$,

et : $y = \beta_1 (\alpha_1^{-1} x - \alpha_1^{-1} \alpha_2 e_2) + \beta_2 e_2$.

Posons : $\lambda = \alpha_1^{-1} \beta_1$ et $\mu = -\alpha_1^{-1} \beta_1 \alpha_2 + \beta_2$.

Nous avons : $y = \lambda x + \mu e_2$.

Deux cas, et deux seulement, sont possibles :

1. Le réel μ est nul.
Nous avons alors : $y = \lambda x$. Dans ce cas le système (x, y) est lié ; il en résulte que le système (x, y, z) est lié.

2. Le réel μ est non nul.
Nous avons : $\mu^{-1}y = \mu^{-1}\lambda x + e_2$.
Nous en déduisons :
$e_2 = -\mu^{-1}\lambda x + \mu^{-1}y$, et : $e_1 = \alpha_1^{-1}x - \alpha_1^{-1}\alpha_2(-\mu^{-1}\lambda x + \mu^{-1}y)$.
Posons : $\delta_1 = \alpha_1^{-1} + \alpha_1^{-1}\alpha_2\mu^{-1}\lambda$; $\delta_2 = -\mu^{-1}\lambda$;
$\delta'_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2\mu^{-1}$; $\delta'_2 = \mu^{-1}$.
Nous obtenons : $e_1 = \delta_1 x + \delta'_1 y$ et $e_2 = \delta_2 x + \delta'_2 y$.
De l'égalité : $z = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$, il résulte alors l'égalité :
$z = \gamma_1(\delta_1 x + \delta'_1 y) + \lambda_2(\delta_2 x + \delta' y)$,
c'est-à-dire : $z = (\gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2)x + (\gamma_1\delta'_1 + \gamma_2\delta'_2)y$.
Le vecteur z est une combinaison linéaire des vecteurs x et y.
Le système (x, y, z) est donc lié.

9 Il résulte du théorème précédent que, **si un espace vectoriel** E **admet un système générateur de** p **vecteurs, tout système libre possède au plus** p **vecteurs.**

Bases d'un espace vectoriel.

Base d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.

10 DÉFINITION : On dit qu'un système $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ **de vecteurs d'un espace vectoriel** E **sur** $\mathbb{R}$ **de dimension finie est une base si et seulement si c'est un système générateur libre.**

Un système : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, est donc une base de E si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
1. $\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$,
$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0_E) \Longrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0)$;
2. $\forall x \in E$, $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

11 **Remarque** : Deux vecteurs quelconques d'un système libre sont distincts; deux vecteurs quelconques d'une base sont donc distincts.

12 **Exemples** : 1. Considérons l'espace vectoriel : $E = \mathbb{R}^2$, et les deux couples : $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.
Pour tout couple : $x = (a, b)$ de E, nous avons :
$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, c'est-à-dire : $x = ae_1 + be_2$.
(e_1, e_2) est donc un système générateur de E.

Si a et b sont deux réels pour lesquels on a : $ae_1 + be_2 = 0_E$, on a alors :
$(a, b) = (0, 0)$, c'est-à-dire : $a = b = 0$.
(e_1, e_2) est donc un système libre de E.
En conclusion, le système (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et les trois fonctions f_1, f_2, f_3 suivantes de $\mathcal{C}$:
$f_1 : x \mapsto 1$; $f_2 : x \mapsto x$; $f_3 : x \mapsto x^2$.
Nous avons montré que (f_1, f_2, f_3) est un système générateur de $\mathcal{C}$.
Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont trois réels pour lesquels on a : $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = \mathbf{0}$,
nous avons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$, c'est-à-dire :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0$.
Nous en déduisons (n° 31, p. 97) : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
(f_1, f_2, f_3) est donc un système libre de $\mathcal{C}$.
En conclusion, le système (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathcal{C}$.

13 On démontre (voir exercice n° 18, p. 238) et nous admettons le théorème suivant :

THÉORÈME : Tout espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, différent de $\{0_E\}$, de dimension finie admet au moins une base.

Notion de dimension.

14 Considérons deux bases : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et : $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$ d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.
$\mathcal{B}$ est un système générateur de E et $\mathcal{B}'$ est un système libre de E.
$\mathcal{B}'$ possède donc au plus n vecteurs : $p \leqslant n$.
$\mathcal{B}'$ est un système générateur de E et $\mathcal{B}$ est un système libre de E.
$\mathcal{B}$ possède donc au plus p vecteurs : $n \leqslant p$.
Il en résulte l'égalité : $n = p$.

THÉORÈME ET DÉFINITION : Si une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ possède n vecteurs, toute autre base de E possède n vecteurs. Cet entier naturel n est appelé dimension de l'espace vectoriel E.

Nous notons alors : $\dim E = n$.

15 **Remarque** : L'espace vectoriel $\{0_E\}$ ne possède pas de base puisque tout vecteur d'un système libre est différent du vecteur nul.
Par convention, nous disons que la dimension de l'espace vectoriel $\{0_E\}$ est zéro : $\dim \{0_E\} = 0$.

16 **Exemples** : 1. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}$. Le système constitué par le seul vecteur 1 est une base de $\mathbb{R}$. Nous avons donc : $\dim \mathbb{R} = 1$.
2. Le système $((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Nous avons donc : $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

3. Nous avons vu (n° 12, p. 223) que l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 admet le système (f_1, f_2, f_3) pour base. Nous avons donc : $\dim \mathcal{C} = 3$.

Caractérisation d'une base.

17 THÉORÈME : Soit E un espace vectoriel de dimension n. Tout système libre de n vecteurs de E est une base de E.

Considérons un système libre : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base, nous devons montrer que $\mathcal{B}$ est un système générateur de E, c'est-à-dire que tout vecteur x de E est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Considérons le système $(e_1, e_2, \ldots, e_n, x)$. Il possède $n + 1$ vecteurs ; c'est donc un système lié. Il existe donc $n + 1$ réels non tous nuls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \alpha$ pour lesquels on a : $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n + \alpha x = 0_E$.
Le réel α est non nul ; en effet, si α était nul, la combinaison linéaire $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ serait nulle et l'un au moins des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ serait non nul, ce qui est contraire à l'hypothèse d'indépendance des vecteurs $e_1, e_2 \ldots, e_n$.
Nous avons alors : $x = (-\alpha^{-1}\alpha_1)e_1 + (-\alpha^{-1}\alpha_2)e_2 + \ldots + (-\alpha^{-1}\alpha_n)e_n$.
Le théorème est démontré.

18 THÉORÈME : Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est un système de p vecteurs de E tel que, pour tout vecteur x de E, il existe un p-uplet unique $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ qui vérifie : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_p e_p$, alors $\mathcal{B}$ est une base de E et l'on a l'égalité : $n = p$.

Considérons un système : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$, qui vérifie la propriété :
$\forall x \in E, \ \exists ! (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \ x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_p e_p$.

Tout vecteur x de E est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$; $\mathcal{B}$ est donc un système générateur de E.

D'autre part, il existe un p-uplet unique $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ de $\mathbb{R}^p$ pour lequel on a : $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_p e_p = 0_E$.
L'égalité : $0e_1 + 0e_2 + \ldots + 0e_p = 0_E$, montre que ce p-uplet est le p-uplet $(0, 0, \ldots, 0)$. Il en résulte l'implication :
$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$,
$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_p e_p = 0_E) \Longrightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0)$.
$\mathcal{B}$ est donc un système libre de E ; c'est une base de E.

E est de dimension n et toute base de E a n vecteurs.
Nous avons donc l'égalité : $n = p$.

Coordonnées d'un vecteur.

Coordonnées d'un vecteur dans une base.

19 Considérons un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension n et une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.
$\mathcal{B}$ est un système générateur de E ; pour tout vecteur x de E il existe donc au moins un n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ pour lequel on a :
$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Montrons que ce n-uplet est unique.
Si $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ est un n-uplet de $\mathbb{R}^n$ pour lequel on a :
$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$,
nous avons l'égalité : $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$.
Nous en déduisons : $(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0_E$.
$\mathcal{B}$ est un système libre de E ; l'égalité précédente implique donc les égalités :
$\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0$;
c'est-à-dire : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\alpha_i = \beta_i$.

THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, il existe un n-uplet unique $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ pour lequel on a :
$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.
On dit que les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Pour chaque i appartenant à $\{1, 2, \ldots, n\}$, le réel α_i est appelé **coordonnée** du vecteur x sur e_i, ou $i^{\text{ème}}$ **coordonnée** de x dans la base $\mathcal{B}$.

20 Exemples : 1. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ et la base 1 de $\mathbb{R}$. Pour tout réel α nous avons : $\alpha = \alpha 1$.
L'unique coordonnée du vecteur α de $\mathbb{R}$ dans la base 1 est le réel α.

2. Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et la base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$:
$e_1 = (1, 0)$; $e_2 = (0, 1)$.
Pour tout vecteur : $x = (a, b)$, de $\mathbb{R}^2$, nous avons : $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$,
c'est-à-dire : $x = ae_1 + be_2$.
La coordonnée de x sur e_1 est a ; la coordonnée de x sur e_2 est b.

3. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ et la base (f_1, f_2, f_3) (voir n° 12, p. 223).
Pour toute fonction f de $\mathcal{C}$: $x \mapsto ax^2 + bx + c$, nous avons :
$f = cf_1 + bf_2 + af_3$.
Les coordonnées de f dans la base (f_1, f_2, f_3) sont (c, b, a).

Étude d'une bijection.

21 Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots e_n)$, une base de E.
Soit φ l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ définie de la façon suivante : à tout vecteur x de E, on associe le n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ où, pour tout i appartenant à $\{1, 2, \ldots, n\}$, α_i est la coordonnée de x sur e_i.
Nous avons donc : $\varphi(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$,
avec : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

L'application φ est injective. En effet, si : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ et $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$, sont deux vecteurs de E qui vérifient :
$\varphi(x) = \varphi(y)$,
c'est-à-dire : $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$,
on a : $x = y$.

L'application φ est surjective. En effet, pour tout n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de E, l'image par φ du vecteur : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, est $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.
L'application φ est donc une bijection de E sur $\mathbb{R}^n$.

22 Il en résulte les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME : Un vecteur x de E est nul si et seulement si toutes ses coordonnées dans une base $\mathcal{B}$ sont nulles.

Nous savons qu'un vecteur x est indépendant si et seulement s'il est non nul. Nous en déduisons qu'un vecteur x est indépendant si et seulement si l'une au moins de ses coordonnées dans une base $\mathcal{B}$ est non nulle.

THÉORÈME : Deux vecteurs x et y de E sont égaux si et seulement si leurs coordonnées respectives, sur chacun des vecteurs d'une base $\mathcal{B}$, sont égales.

Coordonnées d'une somme de vecteurs.

23 Considérons deux vecteurs x et y de E et leurs coordonnées respectives $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dans une base : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, de E.
Nous avons les égalités :
$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$;
$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$.

Nous en déduisons successivement les égalités :
$x + y = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n)$,
$x + y = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \beta_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n + \beta_n e_n$,
$x + y = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)e_n$.

THÉORÈME : Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, une base de E. Pour tout i appartenant à $\{1, 2, \ldots, n\}$, la coordonnée sur e_i de la somme $x + y$ de deux vecteurs x et y de E est égale à la somme des coordonnées respectives de x et de y sur e_i.

Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel.

24 Considérons un réel λ et un vecteur x de E. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les coordonnées de x dans la base : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Nous avons l'égalité : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.
Nous en déduisons successivement les égalités :
$\lambda x = \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n)$;
$\lambda x = (\lambda\alpha_1)e_1 + (\lambda\alpha_2)e_2 + \ldots + (\lambda\alpha_n)e_n$.

THÉORÈME : Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et : $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, une base de E. Pour tout i appartenant à $\{1, 2, \ldots, n\}$, la coordonnée sur e_i du produit λx d'un vecteur x de E par un réel λ est égale au produit de la coordonnée de x sur e_i par λ.

Les exercices de ce chapitre sont groupés avec ceux du chapitre 15 (p. 236 à 238).

15.

Espaces vectoriels de dimension 1, 2, 3

Espaces vectoriels de dimension 1.

Espace vectoriel E_1.

1 Un espace vectoriel E_1 sur $\mathbb{R}$ est de dimension 1 si et seulement s'il possède une base constituée par un vecteur e_1. Cet espace vectoriel E_1 est alors l'ensemble des vecteurs λe_1, où λ est un réel quelconque.
On dit aussi que E_1 est une " droite vectorielle ".

Bases de E_1.

2 Tout vecteur e non nul de E_1 constitue un système libre de E_1. L'espace vectoriel E_1 est de dimension 1, il en résulte que e est une base de E_1.
Tout vecteur e non nul de E_1 constitue donc une base de E_1.

Coordonnées d'un vecteur dans une base de E_1.

3 Soit e_1 une base de E_1. Pour tout vecteur x de E_1, il existe un réel unique α_1 pour lequel on a : $x = \alpha_1 e_1$. Il en résulte que l'application :
$\varphi_1 : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha_1 = \varphi_1(x)$ est une bijection.

Sous-espaces vectoriels de E_1.

4 Nous savons que $\{0_{E_1}\}$ et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de E_1.
Nous allons montrer que ce sont les seuls sous-espaces vectoriels de E_1.
En effet, si F est un sous-espace vectoriel de E_1 distinct de $\{0_{E_1}\}$, il existe dans F au moins un vecteur x non nul. Ce vecteur x constitue une base de E_1 ; pour tout vecteur y de E_1, il existe donc un réel α pour lequel on a : $y = \alpha x$.
F est un sous-espace vectoriel ; pour tout réel α, le produit αx appartient à F. Il en résulte que tout vecteur y de E_1 appartient à F. Nous avons donc : $E_1 \subset F$.
F est un sous-espace de E_1, nous avons aussi : $F \subset E_1$. F est donc égal à E_1.

THÉORÈME : Dans un espace vectoriel E_1 de dimension 1, les seuls sous-espaces vectoriels sont $\{0_{E_1}\}$ et E_1.

$\{0_{E_1}\}$ est de dimension 0 ; il en résulte que la dimension d'un sous-espace vectoriel de E_1 est inférieure ou égale à 1.

Espaces vectoriels de dimension 2.

Espace vectoriel E_2.

5 Un espace vectoriel E_2 sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2 si et seulement s'il possède une base constituée par deux vecteurs e_1 et e_2.
E_2 est alors l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs e_1 et e_2.
On dit aussi que E_2 est un " plan vectoriel ".

Vecteurs dépendants de E_2.

6 E_2 est un espace vectoriel de dimension 2. Tout système (x, y, z) de trois vecteurs de E_2 est donc lié.
Cherchons à quelle condition deux vecteurs x et y de E_2 constituent un système (x, y) lié.
Le système (x, y) est lié si et seulement s'il existe un couple (λ, μ) de $\mathbb{R}^2$, distinct du couple (0, 0), pour lequel on a : $\lambda x + \mu y = 0_E$.
Soit (e_1, e_2) une base de E. Désignons respectivement par (α_1, α_2) et par (β_1, β_2) les coordonnées de x et de y dans la base (e_1, e_2).
Nous avons donc : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ et : $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$.
L'ensemble des couples (λ, μ) qui vérifient : $\lambda x + \mu y = 0_E$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu = 0, \\ \alpha_2 \lambda + \beta_2 \mu = 0. \end{cases}$$

Ce système a une solution (λ, μ), distincte de (0, 0), si et seulement si son déterminant est nul : $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$.

THÉORÈME : Soient (e_1, e_2) une base de l'espace vectoriel E_2 et x et y deux vecteurs de coordonnées respectives (α_1, α_2) et (β_1, β_2) dans la base (e_1, e_2). Le système (x, y) est lié si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ est nul.

Le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ est appelé déterminant du système (x, y) dans la base (e_1, e_2).

Bases de E_2.

7 Soit (e_1, e_2) une base de E_2. Toute autre base de E_2 possède donc deux vecteurs.
Un système (x, y) de deux vecteurs est une base de E_2 si et seulement si le système (x, y) est libre.
Désignons respectivement par (α_1, α_2) et (β_1, β_2) les coordonnées de x et de y dans la base (e_1, e_2).
Il résulte du théorème précédent que le système (x, y) est libre si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ du système (x, y) dans la base (e_1, e_2) est non nul.

THÉORÈME : Soient (e_1, e_2) une base de l'espace vectoriel E_2 et x et y deux vecteurs de coordonnées respectives (α_1, α_2) et (β_1, β_2) dans la base (e_1, e_2). Le système (x, y) est une base de E_2 si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ est non nul.

8 Exemple : Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 et la base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ constituée par les deux couples : $e_1 = (1, 0)$ et : $e_2 = (0, 1)$.
Considérons les vecteurs : $x = (2, 3)$ et : $y = (1, 5)$ de $\mathbb{R}^2$.
Nous avons : $x = 2\,e_1 + 3\,e_2$ et : $y = e_1 + 5\,e_2$.
Le déterminant du système (x, y) dans la base (e_1, e_2) est donc :
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$
Le système (x, y) est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Coordonnées d'un vecteur dans une base de E_2.

9 Soit (e_1, e_2) une base de E_2. Pour tout vecteur x de E_2, il existe un couple unique (α_1, α_2) de $\mathbb{R}^2$ pour lequel on a : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.
Il en résulte que l'application $\varphi_2 : E_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \rightsquigarrow (\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_2(x)$ est une bijection.

Sous-espaces vectoriels de E_2.

10 Nous savons que $\{0_{E_2}\}$ et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E_2. D'autre part, pour tout vecteur x non nul de E_2, l'ensemble des combinaisons linéaires du vecteur x est un sous-espace vectoriel de E_2 et il est de dimension 1.

11 Nous allons montrer que tout sous-espace vectoriel F de E_2 est de l'un des trois types précédents.
Considérons donc un sous-espace vectoriel F de E_2.

Si $F = \{0_{E_2}\}$, la propriété précédente est vraie.

Supposons donc que F est distinct de $\{0_{E_2}\}$.
Il existe alors dans F au moins un vecteur e_1 non nul.
Désignons par C l'ensemble des combinaisons linéaires du vecteur e_1. C est un sous-espace vectoriel de E_2.
D'autre part, F est un sous-espace vectoriel de E_2; pour tout réel λ, nous avons donc : $(e_1 \in F) \Longrightarrow (\lambda e_1 \in F)$.
C est donc inclus dans F.
Deux cas et deux seulement sont possibles :

Premier cas : $C = F$.
Alors F est engendré par le vecteur non nul e_1 ; c'est un sous-espace vectoriel de E_2 de dimension 1.

Deuxième cas : $C \neq F$.
Il existe alors au moins un vecteur e_2 de F qui n'appartient pas à C. Le système (e_1, e_2) est libre ; il en résulte que (e_1, e_2) est une base de E_2.
Tout vecteur x de E_2 est donc une combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2 : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.
F est un sous-espace vectoriel de E_2 ; nous avons l'implication :
$(e_1 \in F \text{ et } e_2 \in F) \Longrightarrow (\forall \alpha_1 \in \mathbb{R}, \ \forall \alpha_2 \in \mathbb{R}, \ \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in F)$.
Tout vecteur x de E_2 appartient donc à F.
Nous avons l'inclusion : $E_2 \subset F$.
F est un sous-espace vectoriel de E_2 ; nous avons aussi : $F \subset E_2$.
F est donc égal à E_2.

THÉORÈME : Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E_2 de dimension 2, une et une seule des propriétés suivantes est vérifiée :

1. $F = \{0_{E_2}\}$; **dim** $F = 0$.
2. **F est engendré par un vecteur e_1 non nul de E_2 ; dim** $F = 1$.
3. $F = E_2$; **dim** $F = 2$.

Il en résulte que la dimension d'un sous-espace vectoriel de E_2 est inférieure ou égale à 2.

Construction d'une base de E_2.

12 Pour construire une base de E_2, il faut trouver dans E_2 deux vecteurs e_1 et e_2 linéairement indépendants. En particulier ces deux vecteurs doivent être non nuls.
Choisissons dans E_2 un vecteur non nul e_1. Soit C le sous-espace vectoriel engendré par e_1 ; nous avons : $\dim C = 1$.
Tout vecteur e_2 de E_2 qui n'appartient pas à C constitue, avec e_1, un système libre (e_1, e_2), donc une base de E.

13 **Exemple** : Le vecteur : $e_1 = (1, 0)$, de $\mathbb{R}^2$ est non nul.
Le sous-espace vectoriel C engendré par e_1 est défini par :
$C = \{x \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad x = \lambda e_1\}$.
Pour tout vecteur : $e_2 = (a, b)$, qui n'appartient pas à C, le système (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Nous pouvons prendre, par exemple : $e_2 = (1, 1)$.

Espace vectoriel de dimension 3.

Espace vectoriel E_3.

14 Un espace vectoriel E_3 sur $\mathbb{R}$ est de dimension 3 si et seulement s'il possède une base constituée par trois vecteurs e_1, e_2 et e_3.
E_3 est alors l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs e_1, e_2 et e_3.

Condition de dépendance de deux vecteurs de E_3.

15 Considérons une base (e_1, e_2, e_3) de E_3 et deux vecteurs x et y de E_3 de coordonnées respectives $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, dans la base (e_1, e_2, e_3).
Si le vecteur x est nul, le système (x, y) est lié.
Supposons alors que l'on a : $x \neq 0_{E_3}$. Dans ces conditions, le système (x, y) est lié si et seulement s'il existe deux réels λ et μ non tous deux nuls pour lesquels on a : $\lambda x + \mu y = 0_{E_3}$, c'est-à-dire : $\lambda x = -\mu y$.
Le réel μ est non nul. En effet, si μ était nul, le vecteur λx serait nul. Le vecteur x est non nul ; le réel λ serait donc nul. Les deux réels λ et μ seraient nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse de dépendance des vecteurs x et y.
Nous avons donc : $y = -\dfrac{\lambda}{\mu} x$.
c'est-à-dire : $y = \rho x$, avec : $\rho = -\dfrac{\lambda}{\mu}$.
Réciproquement, si on a : $y = \rho x$, c'est-à-dire : $\rho x - y = 0_{E_3}$, le système (x, y) est lié.
Si x est un vecteur non nul, nous avons donc démontré l'équivalence logique :
$((x, y)$ lié$) \iff (\exists \rho \in \mathbb{R}, \quad y = \rho x)$.

Nous avons les égalités :
$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ et : $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$.
L'égalité : $y = \rho x$, est donc logiquement équivalente aux égalités :
$\beta_1 = \rho\alpha_1$; $\beta_2 = \rho\alpha_2$; $\beta_3 = \rho\alpha_3$.

THÉORÈME : Soient (e_1, e_2, e_3) une base de E_3 et x et y deux vecteurs de E_3 de coordonnées respectives $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3). Si x est non nul, le système (x, y) est lié si et seulement s'il existe un réel ρ pour lequel on a : $\beta_1 = \rho\alpha_1$; $\beta_2 = \rho\alpha_2$; $\beta_3 = \rho\alpha_3$.

16 Remarque : Si les trois coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de x sont non nulles, la condition précédente peut être énoncée :
si x est un vecteur dont toutes les coordonnées sont non nulles, le système (x, y) est lié si et seulement si on a les égalités :
$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3}$.

Bases de E_3.

17 Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E_3. Toute autre base de E_3 possède trois vecteurs. Un système (x, y, z) de trois vecteurs est une base si et seulement si c'est un système libre, c'est-à-dire si et seulement si on a l'implication :
$(\lambda x + \mu y + \nu z = 0_{E_3}) \Longrightarrow (\lambda = \mu = \nu = 0)$.
Désignons respectivement par $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ les coordonnées de x, de y, et de z dans la base (e_1, e_2, e_3).
Nous avons l'équivalence logique :

$$(\lambda x + \mu y + \nu z = 0_{E_3}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 = 0 \\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 = 0 \\ \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + \nu\gamma_3 = 0 \end{array} \right).$$

(x, y, z) est donc un système libre si et seulement si le système de trois équations, où les inconnues sont λ, μ, ν :

$$\begin{cases} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \nu\gamma_1 = 0 \\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \nu\gamma_2 = 0 \\ \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + \nu\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

admet pour unique solution le triplet $(0, 0, 0)$.

Coordonnées d'un vecteur dans une base de E_3.

18 Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E_3. Pour tout vecteur x de E_3, il existe un triplet unique $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de $\mathbb{R}^3$ pour lequel on a : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.

Il en résulte que l'application $\varphi_3 : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \rightsquigarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \varphi_3(x)$ est une bijection.

Sous-espaces vectoriels de E_3.

19 Nous savons que $\{0_{E_3}\}$ et E_3 sont des sous-espaces vectoriels de E_3.
Si x est un vecteur non nul de E_3, l'ensemble des combinaisons linéaires du vecteur x est un sous-espace vectoriel de E_3 et il est de dimension 1.
Si x et y sont deux vecteurs linéairement indépendants de E_3, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs x et y est un sous-espace vectoriel de E_3. Il est de dimension 2, puisque (x, y) est une base de ce sous-espace.

20 Nous allons montrer que tout sous-espace vectoriel F de E_3 est de l'un des quatre types précédents.
Considérons un sous-espace vectoriel F de E_3.

Si : $F = \{0_{E_3}\}$, la propriété précédente est vraie.

Supposons donc que F est distinct de $\{0_{E_3}\}$.
Il existe alors dans F au moins un vecteur e_1 non nul.
Désignons par C_1 l'ensemble des combinaisons linéaires du vecteur e_1. C'est un sous-espace vectoriel de E_3.
F est un sous-espace vectoriel de E_3 ; pour tout réel α_1, nous avons donc : $(e_1 \in F) \Longrightarrow (\alpha_1 e_1 \in F)$.
C_1 est donc inclus dans F.
Deux cas et deux seulement sont possibles :

Premier cas : $C_1 = F$
Alors F est engendré par le vecteur e_1 non nul ; c'est un sous-espace vectoriel de E_3 de dimension 1.

Deuxième cas : $C_1 \neq F$.
Il existe alors au moins un vecteur e_2 de F qui n'appartient pas à C_1. Le système (e_1, e_2) est donc libre.
Désignons par C_2 l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs e_1 et e_2. C'est un sous-espace vectoriel de E_3 ; (e_1, e_2) est une base de ce sous-espace, il est donc de dimension 2.
F est un sous-espace vectoriel de E_3 ; nous avons donc l'implication :
$(e_1 \in F \text{ et } e_2 \in F) \Longrightarrow (\forall \alpha_1 \in \mathbb{R}, \ \forall \alpha_2 \in \mathbb{R}, \ \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in F)$
Tout vecteur x de C_2 appartient donc à F.
C_2 est donc inclus dans F.
Deux cas et deux seulement sont alors possibles.

1. $C_2 = F$.
Alors F est engendré par deux vecteurs linéairement indépendants e_1 et e_2 ; c'est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

2. $C_2 \neq F$.
Il existe alors au moins un vecteur e_3 de F qui n'appartient pas à C_2. Le système (e_1, e_2, e_3) est donc libre ; c'est une base de E_3.
Tout vecteur x de E_3 est une combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, e_3 :
$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.

F est un sous-espace vectoriel de E_3 ; nous avons donc l'implication :

$(e_1 \in F,\ e_2 \in F,\ e_3 \in F) \longrightarrow (\forall(\alpha_1\ \alpha_2,\ \alpha_3) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \in F)$.

Tout vecteur x de E_3 appartient donc à F.
Nous avons l'inclusion : $E_3 \subset F$.
F est un sous-espace vectoriel de E_3, nous avons : $F \subset E_3$.
F est donc égal à E_3.

---

21 THÉORÈME : Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E_3 de dimension 3, une et une seule des quatre propriétés suivantes est vérifiée :

1. $F = \{0_{E_3}\}$ **; dim** $F = 0$.

2. F **est engendré par un vecteur** e_1 **non nul de** E_3 **; dim** $F = 1$.

3. F **est engendré par deux vecteurs** e_1 **et** e_2 **linéairement indépendants de** E_3 **; dim** $F = 2$.

4. $F = E_3$ **; dim** $F = 3$.

Il en résulte que la dimension d'un sous-espace vectoriel de E_3 est inférieure ou égale à 3.

Construction d'une base de E_3.

22 Pour construire une base de E_3 choisissons dans E_3 un vecteur non nul : e_1.
Soit C_1 le sous-espace vectoriel engendré par e_1 : dim $C_1 = 1$.
Choisissons alors un vecteur e_2 de E_3 qui n'appartient pas à C_1. Le système (e_1, e_2) est libre.
Soit C_2 le sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs e_1 et e_2 linéairement indépendants : dim $C_2 = 2$.
Pour tout vecteur e_3 de E_3 qui n'appartient pas à C_2, le système (e_1, e_2, e_3) est libre ; c'est donc une base de E_3.

23 Exemple : Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ des triplets de réels. Le vecteur : $e_1 = (1, 0, 0)$ est non nul.
Le sous-espace vectoriel C_1 engendré par e_1 est défini par :
$C_1 = \{x \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda e_1\}$.
C'est donc l'ensemble des triplets dont les deux dernières coordonnées sont nulles.
Le triplet : $e_2 = (1, 1, 0)$, n'appartient pas à C_1. Le système (e_1, e_2) est donc libre.
Le sous-espace vectoriel C_2 engendré par e_1 et e_2 est défini par :
$C_2 = \{x \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists \mu \in \mathbb{R},\ x = \lambda e_1 + \mu e_2\}$.
C'est donc l'ensemble des triplets dont la dernière coordonnée est nulle.
Le triplet : $e_3 = (1, 1, 1)$, n'appartient pas à C_2.
Le système (e_1, e_2, e_3) est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICES

1 Soient E_3 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E_3. On considère un réel m et les deux vecteurs x et y de E_3 dont les coordonnées dans la base (e_1, e_2, e_3) sont respectivement :
$(m + 1, 5m + 5, 2m - 1)$ et $(m - 1, 2m + 1, m - 1)$.
Déterminer m pour que le sous-espace vectoriel engendré par x et y soit un sous-espace vectoriel de dimension 1.

2 Soient E_2 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et une base (e_1, e_2) de E_2. On considère un réel m et les trois vecteurs x, y, z de E_2 dont les coordonnées dans la base (e_1, e_2) sont respectivement :
(m, m) ; $(m - 2, 1 - 2m)$; $(4m - 3, 2m + 3)$.
Déterminer m pour que deux au moins des vecteurs x, y, z constituent un système lié.

3 Soient E_2 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et une base (e_1, e_2) de E_2. On considère les vecteurs : $e'_1 = 3e_1 + 2e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$.
1° Démontrer que (e'_1, e'_2) est une base de E_2.
2° Soit x un vecteur de E_2 dont les coordonnées dans la base (e_1, e_2) sont (α_1, α_2). Déterminer les coordonnées (α'_1, α'_2) de x dans la base (e'_1, e'_2).
3° Déterminer les vecteurs de E_2 qui ont les mêmes coordonnées dans la base (e_1, e_2) et dans la base (e'_1, e'_2).

4 On considère les deux triplets de $\mathbb{R}^3$:
$x_1 = (1, 2, 3)$ et $x_2 = (2, -1, 1)$.
1° Démontrer que : $y_1 = (1, 0, 1)$, et : $y_2 = (0, 1, 1)$, sont deux triplets qui appartiennent au sous-espace A engendré par x_1 et par x_2.
2° Quel est le sous-espace engendré par y_1 et par y_2 ?
3° Quelle est la dimension du sous-espace A ?

5 Soient les trois triplets de $\mathbb{R}^3$:
$x_1 = (a_1, b_1, c_1)$; $x_2 = (0, b_2, c_2)$; $x_3 = (0, 0, c_3)$.
Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si on a :
$a_1 b_2 c_3 \neq 0$.

6 Montrer que les triplets : $c_1 = (0, 1, 2)$, $c_2 = (1, -2, 3)$, $c_3 = (2, 3, 4)$ constituent une base de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer les coordonnées dans cette base des vecteurs suivants :
$x_1 = (1, 1, 1)$; $x_2 = (0, 0, 0)$; $x_3 = (1, 2, 3)$.

7 Soient x_1, x_2, x_3 trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et deux réels λ et μ.
1° Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $(x_1, x_2 + \lambda x_1, x_3 + \mu x_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2° Soient : $x_1 = (2, -1, 3)$; $x_2 = (3, 5, -4)$; $x_3 = (-5, -17, 18)$.
Déterminer λ et μ pour que l'on ait :
$x_2 + \lambda x_1 = (0, a, b)$ et $x_3 + \mu x_1 = (0, c, d)$,
où a, b, c, d sont quatre réels que l'on calculera.
En déduire que (x_1, x_2, x_3) est lié. Déterminer les trois réels α, β, γ pour lesquels on a : $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = (0, 0, 0)$.

8 On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ engendré par les triplets : $e_1 = (1, -1, 2)$ et $e_2 = (2, 1, 3)$.
1° Démontrer que (e_1, e_2) est une base de E.
2° On considère le triplet : $x = (3, 3, 4)$. Démontrer que x appartient à E et déterminer ses coordonnées dans la base (e_1, e_2).

9 1° Démontrer que les triplets de $\mathbb{R}^3$:
$e_1 = (1, -2, 4)$, $e_2 = (-1, -2, -1)$, $e_3 = (2, 4, -3)$
constituent une base de $\mathbb{R}^3$.
2° Exprimer les coordonnées des triplets : $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1)$, dans la base (e_1, e_2, e_3).

10 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble E des vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ tels que : $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 - \alpha_4 = 0$.
1° Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2° Démontrer que les vecteurs : $e_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 0, 1, 1)$, constituent une base de E. Quelle est la dimension de E ?

11 Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère les fonctions polynômes f_1, f_2, f_3, f_4 définies respectivement par :
$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = (x - 1)(x - 2)$,
$f_4(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
1° Démontrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathcal{E}$.
2° Déterminer les coordonnées de la fonction f définie par : $f(x) = x^3$, dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4).

12 Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère les fonctions polynômes f_1, f_2, f_3, f_4 définies respectivement par :
$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x(x - 1)$, $f_4(x) = x(x - 1)(x - 2)$.
1° Démontrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathcal{E}$.
2° Déterminer les coordonnées de la fonction f définie par : $f(x) = x^3$, dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4).

13 Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère les fonctions polynômes f_1, f_2, f_3, f_4 définies respectivement par :
$f_1(x) = (1 - x)^3$, $f_2(x) = x(1 - x)^2$, $f_3(x) = x^2(1 - x)$, $f_4(x) = x^3$.
1° Démontrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathcal{E}$.
2° Soit f une fonction polynôme de $\mathcal{E}$. Déterminer en fonction de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ les coordonnées de f dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4).

14 Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère les fonctions polynomes f, g, h définies respectivement par :
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$, $g(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 2$,
$h(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$, où α et β sont deux réels.
Déterminer, suivant les valeurs de α et β, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par f, g et h.

EXERCICES

15 Soit E_3 un espace vectoriel de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E_3. On considère le système (e'_1, e'_2, e'_3) défini par :
$e'_1 = e_1 + e_2$; $e'_2 = e_2 + e_3$; $e'_3 = e_3 + e_1$.
1° Démontrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E_3.
2° Soit : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, un vecteur de E_3. Déterminer, en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les coordonnées $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$ de x dans la base (e'_1, e'_2, e'_3).

16 Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de E. On considère le système (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) défini par :
$e'_1 = e_1 + e_2$; $e'_2 = e_2 + e_3$, $e'_3 = e_3 + e_4$; $e'_4 = e_4 + e_1$.
1° Démontrer que (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) est un système lié.
2° Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par e'_1, e'_2, e'_3, e'_4.

17 On désigne par P l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes.
1° Soit $\mathcal{A}$ un système fini de fonctions polynômes. Démontrer qu'il existe au moins une fonction polynôme qui n'est pas une combinaison linéaire des fonctions polynômes de $\mathcal{A}$.
2° En déduire que P n'est pas un espace vectoriel de dimension finie.

18 On désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et par $\mathcal{A}$ un système fini générateur de E.
1° Montrer que si : $E = \{0_E\}$, E n'admet pas de base.
2° On suppose désormais : $E \neq \{0_E\}$. Soit x_1 un vecteur non nul de $\mathcal{A}$. Démontrer que, si x_1 n'engendre pas E, il existe un vecteur x_2 de $\mathcal{A}$ tel que le système (x_1, x_2) soit libre.
3° Démontrer que, si le système (x_1, x_2) n'engendre pas E, il existe un vecteur x_3 de $\mathcal{A}$ tel que le système (x_1, x_2, x_3) soit libre.
4° Indiquer comment la méthode précédente permet de construire une base $\mathcal{B}$ de E dont les vecteurs appartiennent à $\mathcal{A}$.

19 On désigne par E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie non nulle et par $\mathcal{A}_n$ un système générateur fini de E, constitué par n vecteurs.
1° Démontrer que si $\mathcal{A}_n$ n'est pas un système libre, il existe un vecteur x_1 de $\mathcal{A}_n$ qui est une combinaison linéaire de $n - 1$ autres vecteurs de $\mathcal{A}_n$. Ces $n - 1$ vecteurs constituent un système noté $\mathcal{A}_{n-1}$.
2° Démontrer que si $\mathcal{A}_{n-1}$ n'est pas un système libre, il existe un vecteur x_2 de $\mathcal{A}_{n-1}$ qui est une combinaison linéaire des $n - 2$ autres vecteurs de $\mathcal{A}_{n-1}$. Ces $n - 2$ vecteurs constituent un système noté $\mathcal{A}_{n-2}$.
3° Indiquer comment la méthode précédente permet de construire une base $\mathcal{B}$ de E dont les vecteurs appartiennent à $\mathcal{A}_n$.

16.
Applications linéaires

Application linéaire d'un espace vectoriel dans un espace vectoriel.

1 **DÉFINITION : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une application f de E dans F est linéaire si et seulement si :**

$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$;
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Une application linéaire de E dans F est aussi appelée **homomorphisme** de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F.
Si : E = F, une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E.

2 **Exemples** : 1. L'application identique id_E d'un espace vectoriel E sur lui-même est une application linéaire. En effet, nous avons :
$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad id_E(x + y) = x + y = id_E(x) + id_E y$;
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad id_E(\alpha x) = \alpha x = \alpha\, id_E(x)$.

2. L'application nulle φ d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F définie par : $\varphi : E \longrightarrow F, \quad x \rightsquigarrow \varphi(x) = 0_F$, est une application linéaire.
En effet, nous avons :
$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad \varphi(x + y) = 0_F = 0_F + 0_F = \varphi(x) + \varphi(y)$;
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad \varphi(\alpha x) = 0_F = \alpha\, 0_F = \alpha\varphi(x)$.

3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel a non nul, l'homothétie vectorielle h de rapport a, c'est-à-dire l'application définie par :
$h : E \longrightarrow E, \quad x \rightsquigarrow h(x) = ax$, est une application linéaire.
En effet, nous avons :
$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad h(x + y) = a(x + y) = ax + ay = h(x) + h(y)$;
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad h(\alpha x) = a(\alpha x) = \alpha(ax) = \alpha h(x)$.

4. Considérons un espace vectoriel E_2 de dimension 2, une base : $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, de E_2, et l'application φ_2 de E_2 dans $\mathbb{R}^2$ définie au n° 9, p. 230.
On vérifie que φ_2 est une application linéaire.

Propriétés des applications linéaires.

3 Considérons deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{R}$ et une application linéaire f de E dans F. Nous rappelons les propriétés mises en évidence en classe de Seconde.

4 **Image du vecteur nul de E.**

Pour tout vecteur x de E, nous avons : $0_E = 0x$.

f est linéaire ; nous avons donc : $f(0_E) = f(0x) = 0f(x) = 0_F$.

L'image par f du vecteur nul de E est le vecteur nul de F.

5 **Image de l'opposé d'un vecteur.**

Pour tout vecteur x de E, nous avons l'égalité : $-x = (-1)x$.

Nous en déduisons : $f(-x) = f((-1)x) = (-1)f(x) = -f(x)$.

L'image par une application linéaire f de l'opposé d'un vecteur est l'opposé de l'image par f de ce vecteur.

6 **Image de la différence de deux vecteurs.**

Quels que soient les vecteurs x et y de E, nous avons :

$f(x - y) = f(x + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y)$.

L'image par une application linéaire f de la différence de deux vecteurs est la différence des images par f de ces deux vecteurs.

7 **Image d'une combinaison linéaire.**

Quels que soient les deux vecteurs x et y de E et quels que soient les réels α et β, nous avons :

$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Nous avons donc :

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

D'une manière générale, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des réels et si $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont des vecteurs de E, on démontre l'égalité :

$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_p f(x_p)$.

Noyau d'une application linéaire.

8 **DÉFINITION : Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. On appelle noyau de l'application linéaire f l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est 0_F.**

Le noyau d'une application linéaire est noté : $N(f)$; c'est un sous-ensemble de E.

Il résulte de la définition précédente, l'équivalence logique :

$\forall x \in E,\ (x \in N(f)) \Longleftrightarrow (f(x) = 0_F)$.

9 **THÉORÈME : Le noyau d'une application linéaire de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.**

N(f) n'est pas vide.

En effet, l'égalité : $f(0_E) = 0_F$, implique : $0_E \in N(f)$.

N(f) est stable pour l'addition dans E.

En effet, si x et y sont deux vecteurs quelconques de N(f), nous avons : $f(x) = 0_F$ et $f(y) = 0_F$.
Nous en déduisons : $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0_F + 0_F = 0_F$.
Nous avons donc l'implication :
$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ (x \in N(f) \text{ et } y \in N(f)) \Longrightarrow (x + y \in N(f))$.

N(f) est stable pour la multiplication externe dans E.

En effet, si x est un vecteur de N(f), nous avons : $f(x) = 0_F$.
Pour tout réel α, nous avons alors : $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha 0_F = 0_F$.
Nous avons donc l'implication : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E, \ (x \in N(f)) \Longrightarrow (\alpha x \in N(f))$.

En conclusion, N(f) est un sous-espace vectoriel de E.

10 Exemple : Considérons un espace vectoriel E_2 de dimension 2 et une base (e_1, e_2) de E_2. Pour tout vecteur x de E_2, il existe donc un couple (α_1, α_2) unique de réels tels que : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.
Soit f l'application de E_2 dans E_2 définie par : $x \rightsquigarrow f(x) = \alpha_1 e_1$.
Cette application f est linéaire.
En effet, quels que soient les vecteurs : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ et $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$, de E_2, nous avons : $x + y = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2$.
Nous avons donc : $f(x + y) = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_1 = f(x) + f(y)$.
Pour tout réel α, nous avons : $\alpha x = (\alpha\alpha_1) e_1 + (\alpha\alpha_2) e_2$.
Nous avons donc : $f(\alpha x) = (\alpha\alpha_1) e_1 = \alpha(\alpha_1 e_1) = \alpha f(x)$.
Le noyau N(f) de cette application linéaire f est l'ensemble des vecteurs : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, de E pour lesquels on a : $\alpha_1 e_1 = 0_{E_2}$.
Le vecteur e_1 n'est pas nul. Un vecteur x de E_2 appartient donc à N(f) si et seulement si sa coordonnée α_1 sur e_1 est nulle.
N(f) est donc le sous-espace vectoriel de E_2 engendré par le vecteur e_2.

Caractérisation d'une application linéaire injective.

11 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application linéaire de E dans F.
Supposons que l'application f soit injective et déterminons son noyau N(f).
Un vecteur x de E appartient à N(f) si et seulement si : $f(x) = 0_F$.
Nous savons que : $f(0_E) = 0_F$.
Nous avons donc l'équivalence logique : $(x \in N(f)) \Longleftrightarrow (f(x) = f(0_E))$.
L'application f est injective : $(f(x) = f(0_E)) \Longrightarrow (x = 0_E)$.
Le noyau d'une application linéaire injective de E dans F est donc : $N(f) = \{0_E\}$.

12 Réciproquement, considérons une application linéaire f de E dans F dont le noyau est : $N(f) = \{0_E\}$, et montrons que f est injective.
Considérons deux vecteurs x et y de E, pour lesquels on a : $f(x) = f(y)$.
Nous en déduisons l'égalité : $f(x) - f(y) = 0_F$, c'est-à-dire : $f(x - y) = 0_F$.
Le vecteur $x - y$ appartient donc à : $N(f) = \{0_E\}$.
Il en résulte l'égalité : $x - y = 0_E$, c'est-à-dire : $x = y$.
L'application f est donc injective.

13 THÉORÈME : Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est injective si et seulement si son noyau est égal à $\{0_E\}$.

Image d'une application linéaire.

14 DÉFINITION : Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. On appelle image de l'application linéaire f le sous-ensemble $f(E)$ de F, image de E par f.

L'image d'une application linéaire f est notée $\mathrm{Im}(f)$.
Nous avons donc : $\mathrm{Im}(f) = f(E)$.

15 THÉORÈME : L'image d'une application linéaire f de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F.

$\mathrm{Im}(f)$ **n'est pas vide.**
En effet, nous avons : $f(0_E) = 0_F$; il en résulte : $0_F \in \mathrm{Im}(f)$.

$\mathrm{Im}(f)$ **est stable pour l'addition dans** F.
Considérons, en effet, deux éléments quelconques u et v de $\mathrm{Im}(f)$. Par définition, il existe un vecteur x de E et un vecteur y de E pour lesquels on a :
$f(x) = u$ et $f(y) = v$.
Nous en déduisons : $u + v = f(x) + f(y) = f(x + y)$.
Le vecteur $u + v$ de F est l'image par f du vecteur $x + y$ de E ; c'est donc un élément de $\mathrm{Im}(f)$:
$\forall u \in F, \quad \forall v \in F, \quad (u \in \mathrm{Im}(f) \quad \text{et} \quad v \in \mathrm{Im}(f)) \Longrightarrow (u + v \in \mathrm{Im}(f))$.

$\mathrm{Im}(f)$ **est stable pour la multiplication externe dans** F.
Considérons, en effet, un élément quelconque u de $\mathrm{Im}(f)$, Il existe alors un vecteur x de E pour lequel on a : $f(x) = u$.
Pour tout réel α, nous en déduisons : $\alpha u = \alpha f(x) = f(\alpha x)$.
Le vecteur αu de F, image de αx par f, appartient donc à $\mathrm{Im}(f)$:
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in F, \quad (u \in \mathrm{Im}(f)) \Longrightarrow (\alpha u \in \mathrm{Im}(f))$.

L'image $\mathrm{Im}(f)$ de l'application linéaire f est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F.

16 Exemple : Reprenons l'application linéaire f de E_2 dans E_2 définie au n° 10, p. 241, par : $x \rightsquigarrow f(x) = \alpha_1 e_1$.
L'image $\mathrm{Im}(f)$ de cette application linéaire est le sous-espace vectoriel de E_2 engendré par le vecteur e_1.
En effet, par définition de f, l'image de tout vecteur x de E_2 appartient à ce sous-espace. D'autre part, si : $x = \alpha_1 e_1$, est un vecteur de ce sous-espace, il est l'image par f d'au moins un vecteur de E_2 : le vecteur $\alpha_1 e_1$.

Forme linéaire sur un espace vectoriel.

17 **DÉFINITION : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.**

18 Exemples : 1. L'application nulle d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire sur E.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, il existe un n-uplet unique de réels $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ pour lequel on a : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.
Pour chaque entier i appartenant à $\{1, 2, \ldots n\}$, l'application linéaire :
$f_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow \alpha_i$ est une forme linéaire sur E.

Composée de deux applications linéaires.

19 **THÉORÈME : Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. L'application composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.**

Posons : $h = g \circ f$.
h est une application de E dans G ; montrons qu'elle est linéaire.
Quels que soient les vecteurs x et y de E nous avons :
$h(x + y) = g[f(x + y)] = g[f(x) + f(y)] = g[f(x)] + g[f(y)] = h(x) + h(y)$.
Pour tout réel α et pour tout vecteur x de E, nous avons :
$h(\alpha x) = g[f(\alpha x)] = g[\alpha f(x)] = \alpha g[f(x)] = \alpha h(x)$.
L'application h est donc linéaire.

Isomorphismes.

Isomorphisme d'un espace vectoriel sur un espace vectoriel.

20 **DÉFINITION : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une application f de E dans F est un isomorphisme de E sur F si et seulement si f est linéaire et bijective.**

21 **Exemples** : 1. L'application id_E de E dans E est linéaire et bijective ; c'est un isomorphisme de E sur lui-même.

2. Soient E_2 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E_2. L'application φ_2 qui, à tout vecteur : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ de E_2, associe le couple (α_1, α_2) de $\mathbb{R}^2$ est linéaire et bijective ; c'est un isomorphisme de E_2 sur $\mathbb{R}^2$.

Isomorphisme réciproque d'un isomorphisme.

22 Considérons un isomorphisme f d'un espace vectoriel E sur un espace vectoriel F. L'application f est une bijection de E sur F. Soit : $g = f^{-1}$, l'application réciproque de f ; g est une bijection de F sur E. Nous allons montrer que g est linéaire.

1. Considérons deux vecteurs u et v quelconques de F.
Posons : $x = g(u)$ et $y = g(v)$.
g est la bijection réciproque de f, nous avons donc :
$u = f(x)$ et $v = f(y)$.
Nous en déduisons : $u + v = f(x) + f(y)$
c'est-à-dire : $u + v = f(x + y)$.
L'égalité précédente est logiquement équivalente à l'égalité :
$g(u + v) = x + y$, c'est-à-dire : $g(u + v) = g(u) + g(v)$.

2. Considérons un réel quelconque α et un vecteur quelconque u de F.
Posons : $x = g(u)$. Nous avons aussi : $u = f(x)$.
Nous en déduisons : $\alpha u = \alpha f(x)$, c'est-à-dire : $\alpha u = f(\alpha x)$.
L'égalité précédente est logiquement équivalente à l'égalité : $g(\alpha u) = \alpha x$, c'est-à-dire : $g(\alpha u) = \alpha g(u)$.

La bijection réciproque d'une bijection linéaire est une application linéaire.

23 **THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f un isomorphisme de E sur F. La bijection réciproque f^{-1} de f est un isomorphisme de F sur E appelé isomorphisme réciproque de f.**

Espaces vectoriels isomorphes.

24 **DÉFINITION : On dit qu'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est isomorphe à un espace vectoriel F sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un isomorphisme de E sur F.**

Si E est isomorphe à F, il existe un isomorphisme f de E sur F.
f^{-1} est alors un isomorphisme de F sur E ; F est isomorphe à E.
On dit que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes.

25 **Exemple** : Nous savons que l'application φ_2 de E_2 dans $\mathbb{R}^2$ est un isomorphisme de E_2 sur $\mathbb{R}^2$. Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 est donc isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Il en résulte que deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension 2, E_2 et F_2, sont isomorphes. En effet, E_2 est isomorphe à $\mathbb{R}^2$; il existe donc un isomorphisme φ de E_2 sur $\mathbb{R}^2$.

De même, F_2 est isomorphe à $\mathbb{R}^2$; il existe donc un isomorphisme ψ de F_2 sur $\mathbb{R}^2$.

L'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est un isomorphisme de E_2 sur F_2.

EXERCICES

1 On considère deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

1° Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. Montrer que l'application, notée $f + g$, de E dans F définie par :

$f + g : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto [f + g](x) = f(x) + g(x)$, est linéaire.

2° Soient α un réel et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Montrer que l'application notée αf, de E dans F définie par :

$\alpha f : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto [\alpha f](x) = \alpha[f(x)]$, est linéaire.

3° Montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ muni de l'addition : $(f, g) \longmapsto f + g$, et de la multiplication externe : $(\alpha, f) \longmapsto \alpha f$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

4° On suppose que l'on a : $E = F$. Montrer que, quelles que soient les applications f, g, h de $\mathcal{L}(E, E)$ et le réel λ, on a les égalités :

$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$; $\quad h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$;

$\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$.

2 1° Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application linéaire de E dans F. Démontrer que si $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est un système lié, $\big(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_p)\big)$ est un système lié.

2° On désigne par P l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes. On considère l'application φ de P dans P qui, à toute fonction polynôme f associe la fonction dérivée seconde de f : $\varphi : P \longrightarrow P,\ f \longmapsto f''$.

a) Démontrer que φ est un endomorphisme de P.

b) Déterminer les images par φ des fonctions polynômes f_1, f_2, f_3 définies par : $f_1(x) = 38$, $f_2(x) = 3x - 1$, $f_3(x) = x^2 - 7x + 5$.

En déduire qu'il existe dans P des vecteurs linéairement indépendants dont les images par φ sont des vecteurs linéairement dépendants.

3 1° Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On désigne par f une application linéaire de E dans F, et par g une application linéaire de F dans G. Démontrer l'inclusion : $N(f) \subset N(g \circ f)$.

2° On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes et par φ l'application de E dans E définie par : $\varphi(f) = f'$.

a) Démontrer que φ est linéaire.

b) Vérifier que la fonction polynôme f_1 définie par : $f_1(x) = x$, n'appartient pas à $N(\varphi)$ et appartient à $N(\varphi \circ \varphi)$.

3° Soit f un endomorphisme de E. Démontrer l'équivalence logique :

$\big(N(f \circ f) = N(f)\big) \Longleftrightarrow \big(N(f) \cap f(E) = \{0_E\}\big)$.

EXERCICES

4 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application linéaire de E dans F.

1° Démontrer que, si A est un sous espace-vectoriel de E, $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

2° Supposons que E est un espace vectoriel de dimension n et soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Montrer que $\big(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\big)$ est un système générateur de $f(E)$. Comparer $\dim E$ et $\dim f(E)$.

3° En déduire que, si F est un espace vectoriel de dimension finie p supérieur à n, il n'existe pas d'application linéaire surjective de E sur F.

4° On suppose désormais que E et F sont tous deux des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

a) Démontrer que, si f est surjective, $\big(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\big)$ est une base de F. En déduire que f est injective.

b) Démontrer que, si f est injective, $\big(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\big)$ est une base de F. En déduire que f est surjective.

c) Énoncer le théorème ainsi démontré pour deux espaces vectoriels de même dimension.

5 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et f une application linéaire de E dans F. On désigne par H un sous-espace vectoriel de F et par A la partie de E définie par : $(x \in A) \iff (f(x) \in H)$.

1° Démontrer que A n'est pas vide et que $N(f)$ est inclus dans A.

2° Démontrer que A est un sous espace-vectoriel de E.

6 Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, x_0 un vecteur non nul de E, et f un endomorphisme de E. On pose : $f^0 = id_E$; $f^1 = f$; et pour $n \geqslant 2$: $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\leftarrow n \text{ facteurs} \rightarrow}$.

On suppose que f vérifie la propriété suivante :

le système $\big(f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^n(x_0)\big)$ est une base de E.

1° Démontrer que le système $\big(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E. En déduire que f est un isomorphisme de E sur E.

2° Démontrer qu'il existe n réels $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ tels que l'on ait l'égalité : $f^n(x_0) + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0) + ... + \lambda_0 x_0 = 0_E$.

3° Soit g l'endormorphisme de E défini par :
$g = f^n + \lambda_{n-1} f^{n-1} + ... + \lambda_0 f^0$.
Démontrer que les images par g des n vecteurs : $x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)$ sont égales au vecteur 0_E. En déduire que g est la fonction nulle.

7 1° Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Soit : $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$, un vecteur de E. On définit une application φ de E dans $\mathbb{R}^n$ par : $\varphi(x) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Démontrer que φ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

2° Démontrer que deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de dimension n sont isomorphes.

3° Démontrer que deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

17.
Applications linéaires (suite)

Nous étudions dans ce chapitre les propriétés des applications linéaires dont l'espace de départ est un espace vectoriel E_2 sur $\mathbb{R}$ de dimension 2, puis les propriétés des applications linéaires de E_2 dans E_2. La plupart de ces propriétés seront utilisées lors de l'étude de la Géométrie vectorielle. L'espace vectoriel sera alors le plan vectoriel $\vec{P}$ associé à un plan géométrique P. En conséquence, dès ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes :

un vecteur de E_2 est noté $\vec{X}$,

une base de E_2 est notée $(\vec{i}, \vec{j})$,

les coordonnées d'un vecteur $\vec{X}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont notées x et y,

le vecteur nul de E_2 est noté : $\vec{0}$, etc...

Application linéaire dont l'espace vectoriel de départ est E_2.

Détermination d'une application linéaire de E_2 dans un espace vectoriel.

1 Considérons un espace vectoriel E_2 sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et un espace vectoriel F sur $\mathbb{R}$. Désignons par $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2.

2 Soit f une application linéaire de E_2 dans F. Pour tout vecteur $\vec{X}$ de E_2, de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, nous avons :
$f(\vec{X}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = x f(\vec{i}) + y f(\vec{j})$.
Il en résulte que, **pour déterminer l'image $f(\vec{X})$ d'un vecteur $\vec{X}$ de E_2 par l'application linéaire f, il suffit de connaître les images $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ des vecteurs d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et les coordonnées (x, y) du vecteur $\vec{X}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.**

3 Considérons deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de F et cherchons s'il existe une application linéaire g de E_2 dans F pour laquelle on a :
$g(\vec{i}) = \vec{u}$, $g(\vec{j}) = \vec{v}$.

1. S'il existe une telle application g, elle est unique.
En effet, pour tout vecteur $\vec{X}$ de E_2 de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a nécessairement les égalités :
$g(\vec{X}) = g(x\vec{i} + y\vec{j}) = xg(\vec{i}) + yg(\vec{j}) = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Si g existe, c'est donc nécessairement l'application h qui, à tout vecteur $\vec{X}$ de E_2, de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, associe le vecteur $x\vec{u} + y\vec{v}$ de F.

2. L'application h ainsi définie vérifie les égalités :
$h(\vec{i}) = \vec{u}$ et $h(\vec{j}) = \vec{v}$.
En effet, pour tout vecteur $\vec{X}$, nous avons : $h(\vec{X}) = h(x\vec{i} + y\vec{j}) = x\vec{u} + y\vec{v}$.
En particulier, nous avons :
$h(\vec{i}) = h(1\vec{i} + 0\vec{j}) = 1\vec{u} + 0\vec{v} = \vec{u}$;
$h(\vec{j}) = h(0\vec{i} + 1\vec{j}) = 0\vec{u} + 1\vec{v} = \vec{v}$.

3. Montrons que l'application h est linéaire.
Considérons deux vecteurs quelconques $\vec{X}$ et $\vec{X}_1$ de coordonnées respectives (x,y) et (x_1,y_1) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{X}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$,
et : $\vec{X} + \vec{X}_1 = (x + x_1)\vec{i} + (y + y_1)\vec{j}$.
Par définition de l'application h, nous avons :
$h(\vec{X}) = x\vec{u} + y\vec{v}$, $h(\vec{X}_1) = x_1\vec{u} + y_1\vec{v}$, et :
$h(\vec{X} + \vec{X}_1) = (x + x_1)\vec{u} + (y + y_1)\vec{v}$.
Il en résulte : $\forall \vec{X} \in E_2$, $\forall \vec{X}_1 \in E_2$, $h(\vec{X} + \vec{X}_1) = h(\vec{X}) + h(\vec{X}_1)$.
Pour tout réel α, nous avons : $\alpha\vec{X} = (\alpha x)\vec{i} + (\alpha y)\vec{j}$.
Nous en déduisons : $h(\alpha\vec{X}) = (\alpha x)\vec{u} + (\alpha y)\vec{v}$.
Il en résulte : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{X} \in E_2$, $h(\alpha\vec{X}) = \alpha h(\vec{X})$.

4 **THÉORÈME : Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base d'un espace vectoriel E_2 sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un espace vectoriel F sur $\mathbb{R}$. Il existe une application linéaire h unique de E_2 dans F pour laquelle on a : $h(\vec{i}) = \vec{u}$, $h(\vec{j}) = \vec{v}$; l'image par h d'un vecteur $\vec{X}$ de E_2, de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, est le vecteur $x\vec{u} + y\vec{v}$ de F.**

Détermination d'une forme linéaire sur E_2.

5 En appliquant le théorème précédent dans le cas où F est l'espace vectoriel $\mathbb{R}$, nous obtenons :

THÉORÈME : Soient $(\vec{i}, \vec{j})$ une base d'un espace vectoriel E_2 sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et deux réels a et b. Il existe une forme linéaire unique h sur E_2 pour laquelle on a : $h(\vec{i}) = a$ et $h(\vec{j}) = b$; l'image par h d'un vecteur $\vec{X}$ de E_2, de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, est le réel $ax + by$.

Applications linéaires de E_2 dans E_2.

Noyau et image d'une application linéaire de E_2 dans E_2.

6 Soit f une application linéaire de E_2 dans E_2. Nous savons que f est déterminée par la donnée des images $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ de deux vecteurs d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de E_2. Étudions, dans tous les cas possibles, le noyau et l'image de f.

7 **Premier cas :** $f(\vec{i}) = \vec{0}$ et $f(\vec{j}) = \vec{0}$.

Alors, pour tout vecteur $\vec{X}$ de E_2, de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, nous avons : $f(\vec{X}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) = x\,\vec{0} + y\,\vec{0} = \vec{0}$.

L'application f est donc l'application nulle de E_2 dans E_2.

Nous avons les égalités : $N(f) = E_2$ et $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}\}$.

THÉORÈME : Soient f une application linéaire de E_2 dans E_2 et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2. Si les images $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ sont égales au vecteur nul $\vec{0}$ de E_2, l'application f est l'application nulle de E_2 dans E_2 et l'on a : $N(f) = E_2$ et $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}\}$.

8 **Deuxième cas :** $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ sont linéairement dépendants, et l'un de ces deux vecteurs est non nul.

Supposons, par exemple : $f(\vec{i}) \neq \vec{0}$.

Nous savons que $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ sont linéairement dépendants si et seulement s'il existe un réel ρ pour lequel on a : $f(\vec{j}) = \rho\, f(\vec{i})$.

L'image d'un vecteur $\vec{X}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est alors :
$f(\vec{X}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) = (x + \rho y) f(\vec{i})$.
Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs $\vec{X}$ pour lesquels on a : $f(\vec{X}) = \vec{0}$,
c'est-à-dire : $(x + \rho y) f(\vec{i}) = \vec{0}$.
$N(f)$ est donc l'ensemble des vecteurs $\vec{X}$ dont les coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ vérifient l'égalité : $x + \rho y = 0$, c'est-à-dire : $x = -\rho y$.
Un vecteur $\vec{X}$ appartient donc au noyau de f si et seulement s'il existe un réel y pour lequel on a : $\vec{X} = (-\rho y)\vec{i} + y\vec{j}$, c'est-à-dire : $\vec{X} = y(-\rho\vec{i} + \vec{j})$.
$N(f)$ est donc le sous-espace vectoriel de E_2 engendré par le vecteur $-\rho\vec{i} + \vec{j}$.
$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de E_2 ; $-\rho\vec{i} + \vec{j}$ n'est donc pas nul.
Il en résulte que $N(f)$ est un sous-espace de dimension 1.

Soit F_1 le sous-espace vectoriel de dimension 1 de E_2 engendré par le vecteur non nul $f(\vec{i})$.
Il résulte de l'égalité précédente : $\forall \vec{X} \in E_2,\ f(\vec{X}) \in F_1$.
Nous avons donc l'inclusion : $\mathrm{Im}(f) \subset F_1$.
Soit $\vec{X}_1$ un vecteur quelconque de F_1 ; il existe un réel α pour lequel on a :
$\vec{X}_1 = \alpha f(\vec{i})$, c'est-à-dire : $\vec{X}_1 = f(\alpha\vec{i})$.
$\vec{X}_1$ est donc l'image par f du vecteur : $\vec{X} = \alpha\vec{i}$ de E_2 ; il en résulte : $F_1 \subset \mathrm{Im}(f)$.
En conclusion, on a l'égalité : $\mathrm{Im}(f) = F_1$,
c'est-à-dire : $\mathrm{Im}(f) = \{\vec{X}_1 \mid \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \vec{X}_1 = \alpha f(\vec{i})\}$.

THÉORÈME : Soient f une application linéaire de E_2 dans E_2 et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2. Si les images $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ sont des vecteurs linéairement dépendants dont l'un au moins n'est pas nul, le noyau $N(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels de dimension 1 de E_2.

9 **Remarque.** Dans ce cas nous avons : $N(f) \neq \{\vec{0}\}$ et $\mathrm{Im}(f) \neq E_2$.
L'application f n'est donc ni injective ni surjective.

10 **Troisième cas :** $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ sont linéairement indépendants. Dans ce cas, $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ est une base de E_2.
Pour tout vecteur $\vec{X}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, nous avons :
$f(\vec{X}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j})$.
Un vecteur $\vec{X}$ appartient au noyau $N(f)$ si et seulement si on a : $f(\vec{X}) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si on a : $xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) = \vec{0}$.
$(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ est une base de E_2 ; nous en déduisons l'équivalence logique :
$(\vec{X} \in N(f)) \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.
Il en résulte : $N(f) = \{\vec{0}\}$.

L'image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E_2 : la dimension de ce sous-espace est donc inférieure ou égale à 2.

Les deux vecteurs $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ de $\mathrm{Im}(f)$ constituent un système libre ; la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est donc 2.

Il en résulte l'égalité : $\mathrm{Im}(f) = E_2$.

Les deux égalités : $N(f) = \{\vec{0}\}$ et $\mathrm{Im}(f) = E_2$, montrent que f est une bijection de E_2 sur E_2. C'est donc un isomorphisme de E_2 sur lui-même.

THÉORÈME : Soient f une application linéaire de E_2 dans E_2 et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2. Si les images $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ sont deux vecteurs linéairement indépendants de E_2, on a : $N(f) = \{\vec{0}\}$ et $\mathrm{Im}(f) = E_2$, et f est un isomorphisme de E_2 sur lui-même.

Caractérisation des isomorphismes de E_2 sur lui-même.

11 **THÉORÈME : Si f est une application linéaire de E_2 dans E_2, les quatre propriétés suivantes sont logiquement équivalentes :**

(a) Les images des vecteurs d'une base de E_2 constituent une base de E_2 ;

(b) $N(f) = \{\vec{0}\}$, c'est-à-dire : f est injective ;

(c) $\mathrm{Im}(f) = E_2$, c'est-à-dire : f est surjective ;

(d) f est un isomorphisme de E_2 sur lui-même.

Les implications : $(a) \Longrightarrow (b)$; $(a) \Longrightarrow (c)$, $(a) \Longrightarrow (d)$ résultent du théorème précédent.

Il nous reste donc à démontrer les implications :

$(b) \Longrightarrow (a)$; $(c) \Longrightarrow (a)$; $(d) \Longrightarrow (a)$.

Démontrons, par exemple, la première : $(b) \Longrightarrow (a)$. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2. L'étude faite aux n^{os} 6 à 10, p. 249 à p. 251, montre que si le noyau $N(f)$ est $\{\vec{0}\}$, alors le système $\left(f(\vec{i}), f(\vec{j})\right)$ est un système libre, c'est-à-dire, une base de E_2.

Nous avons donc : $(b) \Longrightarrow (a)$.

Les deux autres implications se démontrent d'une manière analogue.

Groupe linéaire de E_2.

12 Considérons l'ensemble des isomorphismes de E_2 sur lui-même.

Nous notons cet ensemble : $GL(E_2)$.

Tout isomorphisme f de E_2 sur E_2 est une bijection ; $GL(E_2)$ est donc un sous-ensemble du groupe $\mathcal{B}(E_2)$ des permutations de E_2.

Montrons que $GL(E_2)$ est un sous-groupe de $\mathcal{B}(E_2)$

$GL(E_2)$ est non vide.
En effet, l'application id_{E_2} appartient à $GL(E_2)$.

$GL(E_2)$ est stable pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{B}(E_2)$.
En effet, si f et g sont deux isomorphismes de E_2 sur E_2 la composée $g \circ f$ est linéaire et bijective ; c'est donc un isomorphisme de E_2 sur E_2.

Le symétrique pour la loi $\circ$ de tout élément de $GL(E_2)$ appartient à $GL(E_2)$.
En effet, nous avons montré que si f est un isomorphisme de E_2 sur E_2, f^{-1} est aussi un isomorphisme de E_2 sur E_2.

THÉORÈME ET DÉFINITION : L'ensemble $GL(E_2)$ des isomorphismes de E_2 sur E_2 est un sous-groupe du groupe $\mathcal{B}(E_2)$ des permutations de E_2. Ce sous-groupe est appelé groupe linéaire de E_2.

13 **Remarque** : On démontre (voir exercice n° 5, p. 262) que $GL(E_2)$ n'est pas un groupe commutatif.

Applications linéaires et matrices.

Matrice dans une base d'une application linéaire de E_2 dans E_2.

14 Considérons une application linéaire f de E_2 dans E_2 et une base : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, de E_2.
L'application f est déterminée par la donnée des images $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
Désignons respectivement par (a, b) et par (c, d) les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$: $f(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$; $f(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$.

L'application linéaire f est donc déterminée par la donnée du tableau suivant :

	Images des vecteurs de la base :	
	$f(\vec{i})$	$f(\vec{j})$
Coordonnée sur $\vec{i}$	a	c
Coordonnée sur $\vec{j}$	b	d

On convient de résumer ce tableau sous la forme suivante : $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$
Ce tableau carré de quatre réels a, b, c, d est appelé **matrice de l'application linéaire f dans la base : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.**

Matrice carrée d'ordre 2.

15 **DÉFINITION: Soient** a, b, c, d **quatre réels. On dit que le tableau carré** $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ **est une matrice carrée d'ordre 2.**

Les réels a, b, c, d sont les coefficients de la matrice.

La matrice $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ comporte deux lignes et deux colonnes :

la première ligne est : $\begin{bmatrix} a & c \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$

la deuxième ligne est : $\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ b & d \end{bmatrix}$

la première colonne est : $\begin{bmatrix} a & \bullet \\ b & \bullet \end{bmatrix}$

la deuxième colonne est : $\begin{bmatrix} \bullet & c \\ \bullet & d \end{bmatrix}$

16 Nous avons alors la définition :

DÉFINITION : On appelle matrice d'une application linéaire f **de** E_2 **dans** E_2, **dans une base :** $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ **de** E_2, **la matrice carrée d'ordre** 2, **dont la première colonne est constituée par les coordonnées de** $f(\vec{i})$ **dans la base** $\mathcal{B}$ **et dont la deuxième colonne est constituée par les coordonnées de** $f(\vec{j})$ **dans la base** $\mathcal{B}$.

Nous notons cette matrice $M(f, \mathcal{B})$; avec les notations précédentes, nous avons :

$f(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$
$f(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$ et : $M(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

17 **Exemples** : 1. Considérons l'application nulle φ de E_2 dans E_2.

Nous avons : $\varphi(\vec{i}) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$ et $\varphi(\vec{j}) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$.

La matrice de l'application nulle dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est donc : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On dit que cette matrice est la **matrice carrée nulle d'ordre 2.**

2. Considérons l'application identique de E_2 dans E_2.

Nous avons : $id_{E_2}(\vec{i}) = 1\vec{i} + 0\vec{j}$ et $id_{E_2}(\vec{j}) = 0\vec{i} + 1\vec{j}$.

Nous avons donc : $M(id_{E_2}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On dit que cette matrice est la **matrice carrée unité d'ordre 2. On la note** I_2.

3. Soit p l'application linéaire de E_2 dans E_2 qui à tout vecteur $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j}$ associe le vecteur $x\vec{i}$. Nous avons : $p(\vec{i}) = \vec{i}$ et $p(\vec{j}) = \vec{0}$.

Nous avons donc : $M(p, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Matrices égales.

18 DÉFINITION : On dit que deux matrices $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$ sont égales si et seulement si on a : $a = a'$; $b = b'$; $c = c'$; $d = d'$.

Il résulte de cette définition que deux applications linéaires f et g de E_2 dans E_2 sont égales si et seulement si leurs matrices respectives dans une base : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ de E_2, sont égales :
Si f et g sont deux applications linéaires de E_2 dans E_2, nous avons :
$(f = g) \Longleftrightarrow (M(f, \mathcal{B}) = M(g, \mathcal{B}))$.

Étude d'une bijection.

19 Désignons par $\mathcal{L}(E_2)$ l'ensemble des applications linéaires de E_2 dans E_2 et par $\mathcal{M}_2$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

Soit : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, une base de E_2.
Nous pouvons alors définir une application Ψ de $\mathcal{L}(E_2)$ dans $\mathcal{M}_2$ par :
$\forall f \in \mathcal{L}(E_2)$, $f \rightsquigarrow \Psi(f) = M(f, \mathcal{B})$.
Cette application Ψ est une injection ; en effet, nous avons :
$(\Psi(f) = \Psi(g)) \Longleftrightarrow (M(f, \mathcal{B}) = M(g, \mathcal{B})) \Longleftrightarrow (f = g)$.
Montrons que Ψ est une surjection.

Soit : $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2$.

Désignons par f l'application linéaire de E_2 dans E_2 déterminée par :
$f(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$.
Pour cette application f, nous avons : $\Psi(f) = A$.
L'application Ψ de $\mathcal{L}(E_2)$ dans $\mathcal{M}_2$ est injective et surjective ; c'est donc une bijection de $\mathcal{L}(E_2)$ sur $\mathcal{M}_2$.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2.

20 Considérons une matrice carrée d'ordre 2 : $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Le déterminant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, c'est-à-dire le réel $(ad - bc)$ est appelé déterminant de la matrice A ; on le note : Dét A.

Par exemple, si : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, nous avons : Dét A = 0.

Si : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, nous avons : Dét A = 1.

Matrice d'un isomorphisme de E_2 sur E_2.

21 THÉORÈME : Soient f une application linéaire de E_2 dans E_2, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2 et $M(f, \mathcal{B})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. L'application linéaire f est un isomorphisme de E_2 sur E_2 si et seulement si le déterminant de la matrice $M(f, \mathcal{B})$ est non nul.

Posons : $f(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$.

Nous avons : $M(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Nous savons que f est un isomorphisme de E_2 sur E_2 si et seulement si les vecteurs $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ sont linéairement indépendants, c'est-à-dire si et seulement si le déterminant du système $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ dans la base $\mathcal{B}$ est non nul.

Le déterminant du système $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ dans la base $\mathcal{B}$ est : $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

C'est aussi le déterminant de la matrice $M(f, \mathcal{B})$.

f est donc un isomorphisme de E_2 sur E_2 si et seulement si : Dét $M(f, \mathcal{B}) \neq 0$.

22 Exemples : 1. La matrice, dans une base $\mathcal{B}$, de l'application nulle est : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; son déterminant est 0. L'application nulle n'est pas un isomorphisme de E_2 sur E_2.

2. La matrice dans une base $\mathcal{B}$ de l'application identique id_{E_2} est : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; son déterminant est 1. L'application id_{E_2} est un isomorphisme de E_2 sur E_2.

Matrice de la composée de deux applications linéaires.

23 Considérons deux applications linéaires f et g de E_2 dans E_2 dont les matrices dans une base : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, sont respectivement :

$M(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ et $M(g, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$.

Nous nous proposons de déterminer la matrice de l'application linéaire $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$. Nous avons :

$f(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$; $f(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$; $g(\vec{i}) = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$; $g(\vec{j}) = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j}$.

Nous en déduisons :

$$[g \circ f](\vec{i}) = g[f(\vec{i})] = g[a\vec{i} + b\vec{j}] = ag(\vec{i}) + bg(\vec{j})$$
$$= a(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}) + b(\gamma\vec{i} + \delta\vec{j}) = (a\alpha + b\gamma)\vec{i} + (a\beta + b\delta)\vec{j}.$$
$$[g \circ f](\vec{j}) = g[f(\vec{j})] = g[c\vec{i} + d\vec{j}] = cg(\vec{i}) + dg(\vec{j})$$
$$= c(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}) + d(\gamma\vec{i} + \delta\vec{j}) = (c\alpha + d\gamma)\vec{i} + (c\beta + d\delta)\vec{j}.$$

La matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ est donc : $M(g \circ f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & c\alpha + d\gamma \\ a\beta + b\delta & c\beta + d\delta \end{bmatrix}$.

Produit de deux matrices carrées d'ordre 2.

24 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2$. Nous allons définir le produit de la matrice A par la matrice B, que nous noterons BA, de façon que, si A et B sont respectivement les matrices dans une base $\mathcal{B}$ de deux applications linéaires f et g de E_2 dans E_2, BA soit la matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$.

DÉFINITION : Soient : $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ **et** $B = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ **deux matrices carrées d'ordre 2. On appelle produit de la matrice A par la matrice B la matrice carrée d'ordre 2, notée BA, définie par :**

$$BA = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & c\alpha + d\gamma \\ a\beta + b\delta & c\beta + d\delta \end{bmatrix}.$$

L'application de $\mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2$ dans $\mathcal{M}_2$ qui à tout couple (A, B) de deux matrices associe la matrice BA produit de A par B est appelée multiplication des matrices carrées d'ordre 2.

Il résulte du calcul fait au n° 23 que, si A et B sont respectivement les matrices dans une base $\mathcal{B}$ de deux applications linéaires de E_2 dans E_2, la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'application linéaire $g \circ f$ est : BA.

Nous avons donc : $M(g \circ f, \mathcal{B}) = M(g, \mathcal{B})\, M(f, \mathcal{B})$.

L'application Ψ de $\mathcal{L}(E_2)$ dans $\mathcal{M}_2$ est donc un **isomorphisme** de $\mathcal{L}(E_2)$ muni de la loi $\circ$ sur $\mathcal{M}_2$ muni de la loi de multiplication des matrices.

Calcul d'un produit de matrices.

25 Considérons deux matrices carrées d'ordre 2 : $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$.

Soit : $C = \begin{bmatrix} t & v \\ u & w \end{bmatrix}$, la matrice BA produit de A par B.

Pour obtenir le coefficient t du produit BA, on effectue le produit du premier coefficient α de la **première ligne** de B par le premier coefficient a de la **première colonne** de A, et le produit du deuxième coefficient γ de la **première ligne** de B par le deuxième coefficient b de la **première colonne** de A, puis l'on ajoute les produits obtenus. Ce calcul peut être représenté par le schéma suivant :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \cdot \\ b & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Les schémas suivants indiquent la méthode pour obtenir les autres coefficients de la matrice BA.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & c \\ \cdot & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & c\alpha + d\gamma \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \beta & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \cdot \\ b & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ a\beta + b\delta & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \beta & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdot & c \\ \cdot & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & c\beta + d\delta \end{bmatrix}$$

On dit que le produit BA est obtenu en effectuant le "produit" de chaque ligne de B par chaque colonne de A.

26 **Exemples :** 1. Nous avons : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Nous avons : $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Nous remarquons sur ces exemples que la multiplication des matrices carrées n'est pas commutative.

Déterminant d'un produit de deux matrices.

27 Considérons deux matrices carrées d'ordre 2 :

$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$.

La matrice produit BA est : $BA = \begin{bmatrix} a\alpha + b\gamma & c\alpha + d\gamma \\ a\beta + b\delta & c\beta + d\delta \end{bmatrix}$.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \text{Dét BA} &= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) \\ &= ac\alpha\beta + ad\alpha\delta + bc\beta\gamma + bd\gamma\delta - ac\alpha\beta - ad\beta\gamma - bc\alpha\delta - bd\gamma\delta \\ &= ad(\alpha\delta - \beta\gamma) - bc(\alpha\delta - \beta\gamma) \\ &= (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma). \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'égalité : Dét BA = (Dét B)(Dét A).

THÉORÈME : Le déterminant d'un produit de deux matrices carrées d'ordre 2 est égal au produit des déterminants de ces deux matrices.

Exemples d'utilisation des matrices.

Image d'un vecteur par une application linéaire.

28 Considérons une application linéaire f de E_2 dans E_2 et une base : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, de E_2.

Désignons par M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Nous avons donc : $f(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j}$.

Soit $\vec{X}$ un vecteur de E_2 de coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B}$; nous nous proposons de déterminer les coordonnées (u, v) du vecteur : $\vec{U} = f(\vec{X})$.

Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j}$; nous en déduisons :

$$\vec{U} = f(\vec{X}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) = x(a\vec{i} + b\vec{j}) + y(c\vec{i} + d\vec{j})$$

c'est-à-dire : $\vec{U} = (ax + cy)\,\vec{i} + (bx + dy)\,\vec{j}$.

Nous avons donc les égalités :

$u = ax + cy$;

$v = bx + dy$.

Ces égalités permettent de calculer les coordonnées de : $\vec{U} = f(\vec{X})$, dans la base $\mathcal{B}$, lorsque l'on connaît les coordonnées de $\vec{X}$ dans la baxe $\mathcal{B}$ et la matrice M de f dans cette base.

Nous convenons d'écrire les deux égalités précédentes sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

On dit que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ sont des matrices colonnes à deux coefficients, appelées matrice colonne du vecteur $\vec{X}$ dans la base $\mathcal{B}$ et matrice colonne du vecteur $\vec{U}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Par définition, la notation $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ représente une matrice colonne à deux coefficients, appelée produit de la matrice colonne $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ par la matrice carrée $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Par définition, on a : $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}$.

Désignons respectivement par X et par U les matrices colonnes des vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{U}$ dans la base $\mathcal{B}$; nous écrivons alors l'égalité (1) sous la forme : $U = MX$.

THÉORÈME : Soient f une application linéaire de E_2 dans E_2, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2 et M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. La matrice colonne U du vecteur $\vec{U}$ dans la base $\mathcal{B}$, image par f d'un vecteur $\vec{X}$ de E_2, est égal au produit de la matrice colonne X du vecteur $\vec{X}$ dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice M.

---

29 **Exemple** : Soit f l'application linéaire de E_2 dans E_2 dont la matrice M dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Cherchons l'image par f du vecteur : $\vec{X} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

La matrice colonne de $\vec{X}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est : $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

La matrice colonne U du vecteur : $\vec{U} = f(\vec{X})$, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, est donc :
$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire : $U = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
L'image par f du vecteur $\vec{X}$ est donc le vecteur $-\vec{i}$.

30 **Remarque** : Pour effectuer le produit d'une matrice colonne X par une matrice carrée M, on effectue le "produit" de chaque ligne de M par la colonne de X.

Changement de base dans E_2.

31 Soient : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$, deux bases de E_2.

1. Supposons que l'on connaisse les coordonnées des vecteurs $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ dans la base $\mathcal{B}$: $\vec{i}' = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$; $\vec{j}' = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j}$.

Soit $\vec{X}$ un vecteur de E_2 de coordonnées (x', y') dans la base $\mathcal{B}'$. Nous nous proposons de calculer les coordonnées (x, y) de $\vec{X}$ dans la base $\mathcal{B}$.
Nous avons : $\vec{X} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$; nous en déduisons :
$\vec{X} = x'(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}) + y'(\gamma\vec{i} + \delta\vec{j}) = (\alpha x' + \gamma y')\vec{i} + (\beta x' + \delta y')\vec{j}$.
Nous avons donc les égalités :
(I) $\begin{cases} x = \alpha x' + \gamma y' \\ y = \beta x' + \delta y' \end{cases}$ ou encore : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

Remarquons que la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'application linéaire de E_2 dans E_2 qui transforme $\vec{i}$ en $\vec{i}'$ et $\vec{j}$ en $\vec{j}'$.

2. Supposons que l'on connaisse les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $\mathcal{B}'$: $\vec{i} = \alpha'\vec{i}' + \beta'\vec{j}'$; $\vec{j} = \gamma'\vec{i}' + \delta'\vec{j}'$.

Soit $\vec{X}$ un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B}$; nous nous proposons de calculer les coordonnées (x', y') de $\vec{X}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
Nous avons : $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j}$; nous en déduisons :
$\vec{X} = x(\alpha'\vec{i}' + \beta'\vec{j}') + y(\gamma'\vec{i}' + \delta'\vec{j}') = (\alpha' x + \gamma' y)\vec{i}' + (\beta' x + \delta' y)\vec{j}'$.
Nous avons donc les égalités :
(II) $\begin{cases} x' = \alpha' x + \gamma' y \\ y' = \beta' x + \delta' y \end{cases}$ ou encore : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Remarquons que la matrice $\begin{bmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{bmatrix}$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de l'application linéaire qui transforme $\vec{i}'$ en $\vec{i}$ et $\vec{j}'$ en $\vec{j}$.

32 Remarque : Considérons le système (I) :

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \gamma y', \\ y = \beta x' + \delta y'. \end{cases}$$

Si l'on connait les coordonnées de $\vec{X}$ dans la base $\mathcal{B}$, ce système permet de calculer les coordonnées de $\vec{X}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

En effet, $(\vec{i}', \vec{j}')$ est une base de E_2 ; le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ est donc non nul.
Pour (x, y) donné, le système (I) où les inconnues sont x' et y' est donc un système de Cramer ; il admet une solution unique qui est donnée par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} x - \dfrac{\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} y \\ y' = \dfrac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} x + \dfrac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} y \end{cases}$$

Utilisons les égalités (II) ; pour tout vecteur $\vec{X}$ de coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B}$, nous avons donc :

$$\alpha' x + \gamma' y = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} x - \frac{\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} y$$

$$\beta' x + \delta' y = \frac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} x + \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} y.$$

En prenant pour vecteur $\vec{X}$, le vecteur $\vec{i}$, puis le vecteur $\vec{j}$, nous obtenons :

$$\alpha' = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}; \qquad \beta' = \frac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}; \qquad \gamma' = \frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}; \qquad \delta' = \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

EXERCICES

1 Soient E_2 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et E_1 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 1. On désigne par $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2, par (x, y) les coordonnées d'un vecteur $\vec{X}$ de E_2 dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, par $\vec{U}$ un vecteur non nul de E_1.

Soient les vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ de E_1 définis par : $\vec{U}_1 = 2\vec{U}$, $\vec{U}_2 = -\vec{U}$.

On considère l'application linéaire unique h de E_2 dans E_1 déterminée par : $h(\vec{i}) = \vec{U}_1$, $h(\vec{j}) = \vec{U}_2$.

1° Déterminer, en fonction de x, y, $\vec{U}$, le vecteur $h(\vec{X})$.

2° Démontrer que le noyau de h est le sous-espace vectoriel de E_2 engendré par le vecteur : $\vec{i'} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

3° Démontrer que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{i'}$ forment une base de E_2.

Exprimer en fonction de x et y, les coordonnées (x_1, y_1) du vecteur $\vec{X}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{i'})$. Quelle est la coordonnée du vecteur $h(\vec{X})$ sur le vecteur $\vec{U}$?

2 Soit E_2 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On considère l'ensemble $\mathcal{L}(E_2, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E_2. On rappelle (voir excercice n° 1 p. 245) que $\mathcal{L}(E_2, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1° Construire une base de $\mathcal{L}(E_2, \mathbb{R})$. En déduire que $\mathcal{L}(E_2, \mathbb{R})$ est de dimension 2.

2° Construire un isomorphisme de $\mathcal{L}(E_2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$.

3 Soient E_2 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et E_3 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. On désigne par $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2, par (x, y) les coordonnées d'un vecteur X de E_2 dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, par $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ une base de E_3, par (x', y', z') les coordonnées d'un vecteur $\vec{X'}$ de E_3 dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$. Soit m un réel. On considère l'application f_m de E_2 dans E_3 qui au vecteur $\vec{X}$ de coordonnées (x, y) associe le vecteur $\vec{X'}$ de coordonnées (x', y', z') définies par :

$x' = x - 2y, \quad y' = -mx + 2y, \quad z' = (1 + m)x - 4y.$

1° Démontrer que f_m est une application linéaire.

2° Déterminer, suivant les valeurs de m, le noyau de f_m ; on construira dans chaque cas une base du noyau.

3° Déterminer, suivant les valeurs de m, l'image de f_m ; on construira dans chaque cas une base de l'image.

4° Vérifier que, pour tout réel m, on a l'égalité :

$\dim E_3 = \dim\left(N(f_m)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(f_m)\right)$.

4 Soit E_2 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et f une application linéaire de E_2 dans E_2. On suppose que le noyau de f est de dimension 1.

1° Soit $\vec{i}$ un vecteur non nul de $N(f)$. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{j}$ de E_2 tel que $(\vec{i}, \vec{j})$ soit une base de E_2.

2° Démontrer que $\left(\vec{i}, f(\vec{j})\right)$ est une base de E_2.

3° Démontrer l'égalité : $N(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{E_2}\}$.

EXERCICES

5 Soient E_2 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2, et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de E_2.
Soient f et g les applications linéaires dans E_2 pour lesquelles on a respectivement :

$f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}$, $f(\vec{j}) = \vec{j}$; et : $g(\vec{i}) = \vec{i}$, $g(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$.

1° Démontrer que f et g sont des isomorphismes de E_2 sur E_2.
2° Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$. En déduire que le groupe linéaire de E_2 n'est pas commutatif.
3° Déterminer l'ensemble A des vecteurs $\vec{X}$ de E_2 pour lesquels on a : $g \circ f(\vec{X}) = f \circ g(\vec{X})$.
En déduire que A est un sous-espace vectoriel de E_2 de dimension 1.

◆ On considère une base : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, de E_2 et une application linéaire f de E_2 dans E_2 déterminée par la donnée des images $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Écrire la matrice de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}$ dans chacun des cas suivants (n°s 6 à 11) :

6 $f(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}$, $f(\vec{j}) = \vec{i} - \vec{j}$.

7 $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $f(\vec{j}) = 3\vec{j} - 2\vec{i}$.

8 $f(\vec{i}) = \vec{i} - 3\vec{j}$, $f(j) = 5\vec{i} - \vec{j}$.

9 $f(\vec{i}) = 4\vec{j} - 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

10 $f(\vec{i}) = 2\vec{i} + 6\vec{j}$, $f(\vec{j}) = 6\vec{i} + 3\vec{j}$.

11 $f(\vec{i}) = 7\vec{i} + 5\vec{j}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{j} - 5\vec{i}$.

12 On considère un espace vectoriel E_2 sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et une base $\mathcal{B}$ de E_2. Soient m un réel et f_m l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M(f_m, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} m^3 - 1 & m^2 - 5m + 4 \\ m^2 + m - 2 & m - 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer suivant les valeurs de m la dimension du noyau de f_m et la dimension de l'image de f_m.

◆ Déterminer les matrices AB et BA dans chacun des cas suivants (n° 13 à 18) :

13 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$.

14 $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$.

15 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

16 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

17 $A = \begin{bmatrix} -5 & 11 \\ 2 & -22 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

18 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

19 Soient x, y, x', y' quatre réels. On considère les deux matrices :

$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{bmatrix}$.

1. Calculer les déterminants de A et de B.
2. Déterminer la matrice BA et calculer son déterminant.
3. En déduire que l'on a :

$\forall (a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4,\ (aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2 = (a^2 + b^2)\ (a'^2 + b'^2)$.

20 Déterminer les matrices : $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, où a, b, c, d sont quatre réels, qui vérifient l'égalité :

$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

M^2 désigne le produit de la matrice M par elle-même.

21 1° Déterminer les matrices $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ où a, b, c, d sont quatre réels qui vérifient l'égalité : $M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2° Soit f une application linéaire de E_2 dans E_2 et M sa matrice dans une base $\mathcal{B}$. On suppose que M vérifie l'égalité précédente. Déterminer le noyau de f et l'image de f.

22 Déterminer les matrices : $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, où a, b, c, d sont quatre réels, qui vérifient l'égalité :

$M^2 = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}$.

23 On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Déterminer les matrices A^2, A^3, A^4 et B^2, B^3, B^4.

24 On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices : $M_a = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}$, où a est un réel quelconque.

1° Démontrer que $\mathcal{A}$ est une partie stable de $\mathcal{M}_2$ pour la multiplication des matrices.

2° Démontrer que la loi induite est associative et admet un élément neutre.

3° Tout élément de $\mathcal{A}$ admet-il un symétrique pour la loi induite ?

EXERCICES

25 On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices : $M_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, où a est un réel quelconque.
Démontrer que $\mathcal{A}$ est une partie stable de $\mathcal{M}_2$ pour la multiplication des matrices, et que $\mathcal{A}$ muni de la loi induite est un groupe commutatif.

26 On considère la matrice : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
1° Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_2$ telles que : $AM = MA$.
2° Démontrer que, si M_1 et M_2 sont deux telles matrices, la matrice $M' = \alpha M_1 + M_2$, où α est un réel, vérifie l'égalité : $AM' = M'A$.

27 On considère la matrice : $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$.
1° Démontrer que, si β est différent de zéro, une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice : $M = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$ vérifie l'égalité : $AM = MA$ est qu'il existe un réel k tel que : $z = k\gamma$, $y = k\beta$, $x - t = k\,[\alpha - \delta]$.
2° Caractériser l'ensemble des matrices M telles que : $AM = MA$.

28 Soient β et γ deux réels, α un réel différent de zéro et les matrices :

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}, \quad N(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}, \quad P(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1° Soit : $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe deux réels β et γ et un réel α différent de zéro tel que :
$A = M(\alpha)\, N(\beta)\, P(\gamma)$.
2° Démontrer que, pour une matrice A donnée, les matrices $M(\alpha)$, $N(\beta)$, $P(\gamma)$ qui vérifient l'égalité précédente sont uniques.

29 Soient f et g deux fonctions de l'espace vectoriel P sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes et a un réel. On définit une applicatcn ψ de P dans $\mathcal{M}_2$ par :

$$\psi(f) = \begin{bmatrix} f(a) & 0 \\ f'(a) & f(a) \end{bmatrix}.$$

Démontrer l'égalité : $\psi(f)\,\psi(g) = \psi(f.g)$.

30 Soient deux applications linéaires f et g de E_2 dans E_2 dont les matrices sont respectivement, dans une base $\mathcal{B}$:

$$M(f, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M(g, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}.$$

1° Déterminer la matrice de l'application linéaire $f + g$ (voir exercice n° 1, p. 245) dans la base $\mathcal{B}$.
2° Soit λ un réel. Déterminer la matrice de l'application linéaire λf dans la base $\mathcal{B}$.

3° Dans l'ensemble $\mathcal{M}_2$ des matrices on définit la somme de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ et de la matrice $B = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$, notée $A + B$, par :

$$A + B = \begin{bmatrix} a + \alpha & c + \gamma \\ b + \beta & d + \delta \end{bmatrix}.$$

Démontrer que $(\mathcal{M}_2, +)$ est un groupe commutatif.

4° Dans l'ensemble $\mathcal{M}_2$ des matrices on définit le produit de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ par un réel k, notée $k.A$, par : $k.A = \begin{bmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{bmatrix}$.

Démontrer que $(\mathcal{M}_2, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

5° Soit ψ l'application de $\mathcal{L}(E_2)$ dans $\mathcal{M}_2$ définie par : $\psi(f) = M(f, \mathcal{B})$.
Démontrer que ψ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E_2)$ muni de la loi $+$, sur $\mathcal{M}_2$ muni de la loi $+$.

6° Démontrer que les quatre matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ forment une base de $(\mathcal{M}_2, +, .)$. En déduire que $(\mathcal{M}_2, +, .)$ est un espace vectoriel de dimension 4.

7° Construire une autre base de cet espace vectoriel.

◆ On utilisera, dans les exercices suivants (n°s 31 et 32), les définitions de la somme de deux matrices et du produit d'une matrice par un réel k (voir exercice n° 30).

31 On considère la matrice : $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, où a, b, c et d sont réels.

1° Calculer M^2. Démontrer qu'il existe deux réels λ et μ qu'on calculera en fonction de a, b, c, d tels que : $M^2 - \lambda M - \mu I_2 = 0_2$, où 0_2 est la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et I_2 la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Application numérique : $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2° Démontrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices : $A = \alpha M + \beta I_2$, où α et β sont des réels, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable pour la multiplication des matrices.

32 Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2$ qui vérifie l'égalité : $\alpha M^2 + \beta M + \gamma I_2 = 0_2$, où α, β, γ sont des réels.
Démontrer que si γ est différent de 0, M admet un inverse pour l'opération multiplication que l'on exprimera en fonction de M.

33 Soient f une application linéaire dans E_2 et M la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E_2 : $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Déterminer la matrice colonne du vecteur $f(\vec{x})$ dans la base $\mathcal{B}$ dans les trois cas suivants : $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

EXERCICES

◆ Même exercice que le n° 33 dans les cas suivants (n°s 34 à 36) :

34 $M = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

35 $M = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

36 $M = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

37 Soient f une application linéaire dans E_2 et M la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$: $M = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

1° Soit k un réel. Déterminer k pour qu'il existe au moins un vecteur $\vec{X}$ différent de $\vec{0}$ qui vérifie l'égalité : $f(\vec{X}) = k\vec{X}$.

2° Soient $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$ les vecteurs définis respectivement par :

$\vec{i'} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{j'} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Démontrer que : $\mathcal{B}' = (\vec{i'}, \vec{j'})$, est une base de E_2. Déterminer $M(f, \mathcal{B}')$.

38 On considère une base $\mathcal{B}$ de E_2 : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, et les deux vecteurs $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$ de E_2, définis par : $\vec{i'} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{j'} = -5\vec{i} + 3\vec{j}$.

1° Démontrer que $(\vec{i'}, \vec{j'})$ est une base de E_2.

2° Soient (x', y') les coordonnées d'un vecteur $\vec{X}$ dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'})$.

Exprimer en fonction de x' et y' les coordonnées (x, y) de $\vec{X}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

3° Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'})$.

4° Soient (x, y) les coordonnées d'un vecteur $\vec{X}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exprimer en fonction de x, y, les coordonnées (x', y') de $\vec{X}$ dans la base $(\vec{i'}, \vec{j'})$.

QUATRIÈME PARTIE

statistiques et probabilités

Les chapitres 20 et 21, de cette quatrième partie, ne figurent pas au programme de la section D.

18.
Statistique descriptive

Généralités.

Statistiques et probabilités.

1 Les **Statistiques** furent, à l'origine, une sorte de comptabilité des populations humaines et de données économiques : état des naissances et des morts, sexe d'un nouveau-né, recensement des emplois, des chômeurs dans une branche d'industrie, répartition de la population active d'un pays selon divers types de profession...
La **théorie des Probabilités** est une discipline mathématique qui tire son origine de l'étude des jeux de hasard : Pile ou Face, dés, jeux de cartes...
L'utilisation de la Théorie des Probabilités comme modèle mathématique pour interpréter les données statistiques a donné naissance à une nouvelle discipline : la **Statistique Mathématique.**
Actuellement, la statistique et la théorie des probabilités ont des applications dans des domaines variés : physique, chimie, biologie, médecine, psychologie...

La variabilité statistique.

2 Les phénomènes, expériences, opérations, pour l'étude desquels s'impose la méthode statistique sont caractérisés par une variabilité des résultats observés.

Exemples :

Phénomènes, expériences	Résultats observables
Jeu de Pile ou Face.	Le côté visible est Pile ou Face.
Jet d'un dé cubique.	Les points de la face supérieure sont : 1, ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6.
Sexe d'un nouveau-né.	Masculin ou Féminin.
Poids d'un nouveau-né.	Poids compris entre 2 kg et 5 kg environ.
Bombardement d'une cible par des particules α émises par une substance radio-active.	Le nombre des particules qui atteignent la cible pendant une durée déterminée.

Cette variabilité des résultats observés doit présenter une certaine forme de stabilité pour que l'on puisse utiliser valablement la méthode statistique. Nous allons illustrer cette stabilité par un exemple.

Jeu de "pile ou face".

3 On jette une pièce, on attend qu'elle s'immobilise et l'on observe le côté visible. Le résultat de chaque jet est noté P pour "pile" et F pour "face".

Une première série de 100 jets a donné les résultats suivants, dans l'ordre :

P P P P P P P F F F F P P P F P F F F P F F F P F F P F F P F F F
F P F P P F F F P F P P P F F P F P F P P F P F P F F P F P F P F
P P P P F F F P F P F F P F P F F P F F P P F P P P F F P F F P F P

Une deuxième série de 100 jets a donné les résultats suivants, dans l'ordre :

P F P P P F P P F P F F P P F F P P P P F F F F P P P P F F P F P
P P F P F P P P F P F F F F P F P P F P F P F P F F P F P P P F P
F F P F F P P F F P F P P F F P F P P P F F P F P F P P F P F P P

L'irrégularité des résultats est manifeste.

4 Introduisons la définition suivante :

DÉFINITION : Lorsque l'on effectue N **expériences d'un type précisé, si l'on observe** n **fois le résultat** R, **on appelle fréquence d'apparition du résultat** R, **le quotient :** $f = \frac{n}{N}$.

Considérons le résultat P ; pour les deux séries de 100 jets précédents, nous obtenons pour fréquences :

Série I : $f_1(P) = \frac{48}{100} = 0{,}48$; Série II : $f_2(P) = \frac{54}{100} = 0{,}54$.

Nous constatons que les deux fréquences sont peu différentes, et voisines toutes deux de 0,5. D'autres séries donneraient des résultats analogues.
Nous disons que **cette variabilité est du type statistique.**
Cette stabilité de la fréquence peut être exprimée sous la forme suivante :

Si l'on effectue plusieurs séries de $N_1, N_2, N_3, \ldots$, **expériences d'un type précisé, les fréquences d'apparition d'un résultat** R **qui correspondent à ces séries :** $f_1, f_2, f_3, \ldots$, **sont très voisines lorsque les nombres** $N_1, N_2, N_3, \ldots$, **sont suffisamment grands.**

Utilisation de la méthode statistique.

5 La première phase d'une étude statistique consiste à recueillir et à classer les données expérimentales. C'est l'objet de la **Statistique descriptive.**
L'étude critique des données permet de voir si l'on peut se référer, pour l'interprétation et la prévision, à un modèle probabiliste ; le choix du modèle, l'interprétation, la prévision, mettent en jeu les méthodes de la **Statistique mathématique.**
Dans la suite de ce chapitre, nous étudions la statistique descriptive.
La construction d'un modèle probabiliste sera faite au chapitre suivant.

Le vocabulaire statistique.

Les statisticiens utilisent un langage particulier, dû à l'origine historique des statistiques.
Nous allons présenter les termes usuels, en les éclairant d'exemples concrets, et en les rapprochant des termes utilisés actuellement par les mathématiciens.

Population. Individu.

6 Les termes **population et individu**, qui avaient à l'origine leur sens courant, ont actuellement un sens très général et correspondent aux termes **ensemble et élément**. Nous donnons ci-dessous quelques exemples.

Population	Individu
1 905 coquelicots d'une culture déterminée.	un coquelicot de cette culture.
200 rivets fabriqués à la suite par une machine déterminée.	un rivet fabriqué par cette machine.
tous les comprimés produits pendant un quart d'heure par une machine déterminée.	un comprimé pharmaceutique fabriqué par cette machine.
l'ensemble des quantités annuelles de pluie recueillies à Paris, Parc Saint-Maur pour les années 1874 à 1945.	la quantité de pluie, exprimée en millimètres, recueillie dans une année déterminée à Paris, Parc Saint-Maur.
l'ensemble des nombres de particules α émises par une substance radio-active qui atteignent une cible donnée pour 2 608 périodes de 7,5 secondes.	le nombre de particules α qui atteignent cette cible pendant 7,5 secondes.
tous les candidats admissibles à un concours donné.	un candidat admissible à ce concours
tous les enfants nés dans une maternité donnée, pendant une certaine période.	un enfant né dans cette maternité pendant la période considérée.

Lot. Échantillon.

7 Ces termes, d'origine plus récente, désignent usuellement une **partie** d'une population. Le **lot** ou l'**échantillon** des statisticiens correspond au **sous-ensemble** des mathématiciens.
Remarquons qu'une population donnée peut être considérée comme un échantillon d'une population plus étendue.
Par exemple, la population de 200 rivets fabriqués à la suite par une machine est un échantillon de la production journalière de cette machine.

Caractère statistique.

8 La propriété que l'on étudie ou que l'on observe sur les individus d'une population est un **caractère.** Un **caractère** est **statistique** s'il peut prendre plusieurs valeurs, présenter des qualités différentes, correspondre à différentes catégories chez les individus de la population étudiée.
Par exemple, la couleur des cheveux d'un être humain (noir, brun, blond, roux), le poids d'un enfant à la naissance, sont des caractères statistiques.
Un caractère statistique permet d'établir une relation d'équivalence dans l'ensemble population : deux individus de même caractère appartiennent à une même classe d'équivalence.
Un caractère statistique peut être **simple** ou **complexe ;** il peut être **qualitatif** ou **quantitatif.**

Caractère simple. Caractère complexe.

9 Nous disons qu'un caractère statistique est **simple** lorsque son étude requiert **une seule observation** sur chaque individu.
Par exemple, la taille d'un être humain est un caractère statistique simple.
Nous disons qu'un caractère est **complexe** lorsque son étude nécessite **plusieurs observations** sur chaque individu.
Par exemple, la taille et le poids d'un être humain déterminent un caractère statistique complexe qui nécessite deux observations sur chaque individu.
La taille, le poids et l'âge d'un être humain définissent un caractère statistique complexe qui nécessite trois observations sur chaque individu.
L'étude d'un caractère complexe équivaut à l'étude simultanée de plusieurs caractères simples.
Par la suite, nous désignerons un caractère statistique simple par le seul mot "**caractère**".

Caractère qualitatif. Caractère quantitatif.

10 Lorsque les différentes qualités que peut prendre un caractère statistique **ne sont pas exprimées par des nombres,** nous disons que le caractère est **qualitatif.**
Par exemple, la couleur des cheveux, la qualité d'une pièce usinée (convenable ou défectueuse), le résultat d'un examen pour un candidat (admis ou refusé) sont des caractères qualitatifs.

11 Lorsque les différentes qualités que peut prendre un caractère statistique **sont exprimées par des nombres,** nous disons que le caractère est **quantitatif.**
Par exemple, la taille d'un être humain, la masse d'un comprimé pharmaceutique, la note d'un candidat à une épreuve donnée d'oral sont des caractères quantitatifs.

Considérons une population $\mathcal{P}$. L'étude d'un caractère quantitatif sur cette population permet d'associer à chaque individu de $\mathcal{P}$ un nombre réel.
Un caractère quantitatif apparaît alors comme une application X de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$.
Un caractère quantitatif X est aussi appelé **variable statistique.**

12 **Remarque :** Il est indispensable de bien préciser la propriété que l'on étudie dans une population donnée. Si nous observons, par exemple, la population des candidats à un examen nous pouvons :
1. examiner si un candidat est admis ou refusé : caractère qualitatif ;
2. relever le total des notes obtenues par un candidat : caractère quantitatif.

Différents types de caractères quantitatifs.

13 Si l'ensemble des valeurs que peut prendre un caractère quantitatif, ou variable statistique, est fini nous disons que ce caractère est **un caractère discontinu ou discret,** ou que cette variable statistique est **une variable statistique discontinue ou discrète.**
Par exemple, le nombre de pétales d'une fleur, le nombre d'accidents de travail arrivés à un ouvrier déterminé au cours d'une année donnée, sont des variables statistiques discrètes.

Si l'ensemble des valeurs que peut prendre un caractère quantitatif, ou variable statistique, est un intervalle de $\mathbb{R}$, nous disons que ce caractère est **un caractère continu,** ou que cette variable statistique est **une variable continue.**
Par exemple, le poids d'un nouveau-né, la taille d'un être humain, la masse d'un comprimé pharmaceutique, le débit moyen annuel du Rhin à Bâle, sont des caractères statistiques continus.

Utilisation d'échantillons. Sondages.

14 Lorsque l'on étudie un caractère statistique sur une population dont le nombre des individus est très grand, le dépouillement et la mise en ordre des résultats peuvent être très longs. Afin d'obtenir rapidement une estimation des résultats globaux, on étudie le caractère statistique considéré sur un échantillon.
On procède aussi de cette façon chaque fois que le caractère statistique étudié conduit à la destruction de l'individu examiné, par exemple pour le contrôle de la résistance aux chocs d'un matériau.
Lorsque l'on étudie un caractère statistique sur une population à partir des résultats recueillis sur un échantillon de cette population, on dit que l'on effectue un **sondage.**

La qualité d'un sondage dépend essentiellement du choix de l'échantillon. Les exemples suivants mettent en évidence les deux procédés les plus employés pour le choix d'un échantillon :

1. Une machine produit un grand nombre de pièces d'un même type dont on veut contrôler la qualité. Chaque fois que la machine a produit, par exemple, 100 pièces, on extrait l'une quelconque de ces pièces et l'on contrôle sa qualité.
Dans ce cas, l'échantillon est déterminé par un **choix au hasard.**

2. Un institut de sondage cherche à prévoir les résultats d'une consultation électorale. Il étudie le comportement des électeurs lors de consultations analogues ; il analyse les différents facteurs qui peuvent influer sur le vote de tel ou tel grand groupe d'électeurs, par exemple : consigne d'abstention, accords de désistement, etc. Ces différentes considérations guident alors le choix de l'échantillon.
Dans ce cas, l'échantillon est déterminé par un **choix raisonné.**

Conclusion.

15 Dans toute étude statistique, nous devons préciser :

1. La **population** et les **individus** considérés.

2. Le **caractère** étudié et, en particulier, les différentes qualités, catégories ou valeurs que peut prendre ce caractère.

3. Les **classes** associées au caractère considéré.

Présentation des données statistiques.

Notion de distribution statistique.

16 Lorsque les N individus d'une population ont été observés, relativement au caractère étudié, les résultats obtenus sont présentés sous forme d'une **distribution statistique.**
La construction d'une distribution comporte trois opérations :

1. Établir la liste des qualités, des valeurs numériques que peut prendre le caractère étudié.

2. Déterminer les classes, c'est-à-dire les sous-ensembles de la population constitués par les individus pour lesquels le caractère étudié prend la même qualité ou la même valeur.

3. Déterminer l'effectif de chaque classe, c'est-à-dire dénombrer les individus qui appartiennent à chacune des classes ; chaque effectif est alors associé à la classe correspondante.

17 **Remarque :** La population est la réunion des classes associées au caractère étudié ; deux classes distinctes sont disjointes. Cependant, ces classes ne constituent une partition de la population qui si aucune d'elles n'est vide.

Distribution statistique à une dimension.

18 Lorsqu'on étudie un seul caractère sur les individus d'une population, on dit que la distribution statistique est à une dimension.
La présentation se fait alors sous forme d'un tableau à simple entrée, par exemple à deux colonnes.
Dans la première colonne, figurent les noms des classes; dans la deuxième colonne, figure, en regard de chaque classe, l'effectif correspondant.

19 **Exemple de présentation en colonne :**

Classes	Effectifs
A_1	n_1
A_2	n_2
A_3	n_3
A_4	n_4
Total	N

Distribution statistique à deux dimensions.

20 Lorsqu'on étudie simultanément deux caractères sur chaque individu d'une population, on dit que la distribution est à deux dimensions. Dans ce cas, on présente les résultats des observations dans un tableau à double entrée.
Voici, par exemple, la présentation des résultats observés lors de l'étude, sur une population de 736 individus, des deux caractères suivants :

1. "Être vacciné contre le choléra" ;
2. "Être atteint par le choléra".

	Nombre d'individus atteints par le choléra	Nombre d'individus non atteints	Totaux
Nombre d'individus vaccinés	5	431	436
Nombre d'individus non vaccinés	291	9	300
Totaux	296	440	736

Dans la suite, nous étudierons uniquement les distributions à une dimension.

Fréquence associée à une classe.

21 **DÉFINITION : Si la population comprend N individus et si l'effectif d'une classe A est n, la fréquence associée à la classe est : $f = \frac{n}{N}$.**

La fréquence associée à chacune des classes est souvent indiquée dans le tableau de distribution ; on ajoute alors une colonne.

Propriétés des fréquences.

22 Supposons que l'étude d'un caractère statistique sur une population conduise à une distribution statistique qui comporte k classes A_1, A_2, A_3, ..., A_k.
Soit N l'effectif total de la population et n_i l'effectif de la classe A_i. La fréquence associée à la classe A_i est : $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Nous avons l'égalité : $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = N$.
Il en résulte : $\forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $0 \leqslant n_i \leqslant N$.
Nous en déduisons : $0 \leqslant f_i \leqslant 1$.
D'autre part, nous avons :

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \ldots + \frac{n_k}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

THÉORÈME : La fréquence f_i associée à chacune des k classes A_i d'une distribution statistique vérifie les inégalités : $0 \leqslant f_i \leqslant 1$, et la somme des k fréquences f_i est égale à 1.

23 Remarques : 1. Pour écrire la somme des k nombres f_i, nous convenons d'employer la notation : $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k = \sum_{i=1}^{i=k} f_i$.

2. En pratique, on donne souvent une valeur décimale approchée de la fréquence de chaque classe ; la somme des valeurs approchées est alors très voisine de 1, mais elle n'est pas en général égale à 1.

24 Considérons alors deux classes distinctes A_1 et A_2 ; elles sont donc disjointes.
Réunissons ces deux classes, pour constituer une nouvelle classe : $A = A_1 \cup A_2$.
L'effectif de la classe A est : $n = n_1 + n_2$.

La fréquence associée à A est : $f = \frac{n}{N} = \frac{n_1 + n_2}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} = f_1 + f_2$.

THÉORÈME : La fréquence de la classe réunion de deux classes distinctes est égale à la somme des fréquences de ces deux classes.

Pour traduire cette propriété, nous disons que les fréquences sont **additives**.
L'additivité des fréquences peut s'étendre à la réunion d'un nombre fini de classes.

Exemples de distribution statistiques à une dimension.

Caractère qualitatif.

25 **Exemple 1** : Les observations portent sur la couleur des cheveux de 6 800 personnes. Les qualités distinguées sont : Noir, Brun, Blond, Roux.
La distribution est donnée par le tableau ci-contre.

Classes	Effectifs	Fréquences
Noir	1 223	0,179
Brun	2 632	0,387
Blond	2 829	0,416
Roux	116	0,017
Total	6 800	0,999

26 **Exemple 2** : On jette deux pièces indiscernables 100 fois de suite et l'on observe chaque fois les côtés visibles. Les qualités distinguées pour chaque jet sont :
2 "pile", 2 "face", 1 "pile" et 1 "face".
La distribution est donnée par le tableau ci-contre.
Nous remarquons, sur cet exemple, que la fréquence de chaque classe est la fréquence d'apparition du résultat correspondant pour 100 jets consécutifs. Ces 100 jets constituent la population étudiée, chaque jet est un individu.

Classes	Effectifs	Fréquences
2 "pile"	21	0,21
2 "face"	27	0,27
1 "pile" et 1 "face"	52	0,52
Total	100	1,00

Caractère quantitatif discontinu, ou variable discrète.

27 **Exemple 1** : Le nombre de loges contenues dans la capsule d'un coquelicot a été dénombré sur 1 905 coquelicots.
La distribution est donnée par le tableau ci-contre.

Classes (Nombre de loges)	Effectifs	Fréquences
6	3	0,0016
7	11	0,0058
8	38	0,020
9	106	0,056
10	152	0,080
11	238	0,125
12	305	0,160
13	315	0,165
14	302	0,159
15	234	0,123
16	128	0,067
17	50	0,026
18	19	0,010
19	3	0,0016
20	1	0,0005
Total	1 905	1,0005

28 **Exemple 2 :** Rutherford, Chadwick et Ellis ont étudié en 1920 le nombre de particules α émises par une substance radio-active. Les observations ont porté sur le nombre de particules qui ont atteint un compteur Geiger pendant une durée égale à 7,5 s ; l'expérience a porté sur 2 608 intervalles de 7,5 s.
La distribution est donnée par le tableau suivant :

Classes (Nombre de particules α)	Effectifs (Nombre d'intervalles de 7,5 s)	Fréquences
0	57	0,022
1	203	0,078
2	383	0,147
3	525	0,201
4	532	0,204
5	408	0,156
6	273	0,104
7	139	0,053
8	45	0,017
9	27	0,010
10 et plus de 10	16	0,006
Total	2 608	0,998

Caractère quantitatif continu, ou variable statistique continue.

29 Lorsque le caractère est mesuré ou repéré par un nombre et est susceptible de varier d'une manière continue, on ne peut pas envisager de faire une liste de toutes les valeurs possibles de ce caractère.
Les résultats d'observations se présentent toujours d'une manière discontinue, en rapport avec la précision de la mesure ou de l'évaluation.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS : Si X est une variable statistique continue sur une population, on appelle classe x_1-x_2 l'ensemble des individus pour lesquels la valeur x prise par X vérifient les inégalités :
$x_1 \leqslant x < x_2$.
Le centre c de la classe est défini par l'égalité : $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.
L'étendue h de la classe est définie par l'égalité : $h = x_2 - x_1$.
Les réels x_1 et x_2 sont les limites de la classe.

Par exemple, la détermination d'une masse effectuée avec une certaine balance permet d'évaluer les demi-centigrammes.
Le résultat : $x = 120$ cg correspond à : $119{,}5 < x < 120{,}5$.
Nous disons que ce résultat appartient à la classe : 119,5-120,5.
La lecture, 120, est le centre de la classe ; la différence 120,5 − 119,5 est l'étendue de la classe ; 119,5 et 120,5 sont les limites de la classe.

30 **Remarques** : 1. Nous avons défini chaque classe par une inégalité stricte et une inégalité afin d'éviter toute ambiguïté au sujet des mesures égales à une limite de classe.

2. Lorsque l'ensemble des observations est compris dans l'intervalle $[a, b]$, les classes correspondent aux intervalles successifs : $[a, x_1[$, $[x_1, x_2[$, ..., $[x_k, b]$.

31 **Exemple** : Les observations portent sur la masse de comprimés pharmaceutiques débités à forte cadence par une machine automatique ; 276 comprimés fabriqués à la suite ont été pesés au demi-centigramme près.
La distribution est donnée par le tableau suivant :

Classes	Centres de classes (masses observées)	Effectifs	Fréquences
115,5-116,5	116	1	0,004
116,5-117,5	117	0	0
117,5-118,5	118	1	0,004
118,5-119,5	119	4	0,015
119,5-120,5	120	16	0,058
120,5-121,5	121	23	0,083
121,5-122,5	122	21	0,076
122,5-123,5	123	43	0,156
123,5-124,5	124	48	0,174
124,5-125,5	125	41	0,148
125,5-126,5	126	41	0,148
126,5-127,5	127	21	0,076
127,5-128,5	128	10	0,035
128,5-129,5	129	1	0,004
129,5-130,5	130	4	0,015
130,5-131,5	131	0	0
131,5-132,5	132	1	0,004
	Total	276	1

Réduction du nombre des classes; groupage.

32 Si le nombre des classes obtenues par observation directe est grand, et si les fréquences qui correspondent à certaines classes voisines sont faibles, il y a souvent intérêt à réduire le nombre des classes en groupant des classes voisines.
Pour un caractère discontinu on réunit les classes qui correspondent à des valeurs voisines du caractère. Un tel groupage a été effectué dans le tableau du n° 28, p. 277 : classe 10 et plus de 10.
Pour un caractère continu, on divise l'intervalle qui contient toutes les observations en k intervalles d'étendues respectives $h_1, h_2, \ldots, h_k$, et l'on opère ensuite comme précédemment. Dans la pratique, on choisit souvent des classes de même étendue.

33 **Exemple** : Les poids de 811 nouveau-nés sont relevés dans une maternité ; ils sont exprimés en hectogrammes et mesurés à 50 grammes près.
Le poids le plus faible est : 20,50 hg ; le poids le plus élevé est : 49,50 hg.
L'écart entre les poids extrêmes est : 29 hg.
L'utilisation des résultats bruts conduit à 58 classes, ce qui est beaucoup. Il semble raisonnable de réduire le nombre de classes à une quinzaine. Cela nous conduit à grouper les observations en classes dont l'étendue commune est 2 hg.
Nous obtenons le tableau de distribution suivant :

Classes	Centres de classes (en hectogrammes)	Effectifs	Fréquences
20-22	21	2	0,002
22-24	23	4	0,005
24-26	25	15	0,018
26-28	27	43	0,053
28-30	29	96	0,118
30-32	31	136	0,168
32-34	33	180	0,222
34-36	35	124	0,153
36-38	37	86	0,106
38-40	39	69	0,085
40-42	41	35	0,043
42-44	43	7	0,009
44-46	45	4	0,005
46-48	47	3	0,004
48-50	49	2	0,002
	Total	811	0,993

Représentation graphique des distributions à une dimension.

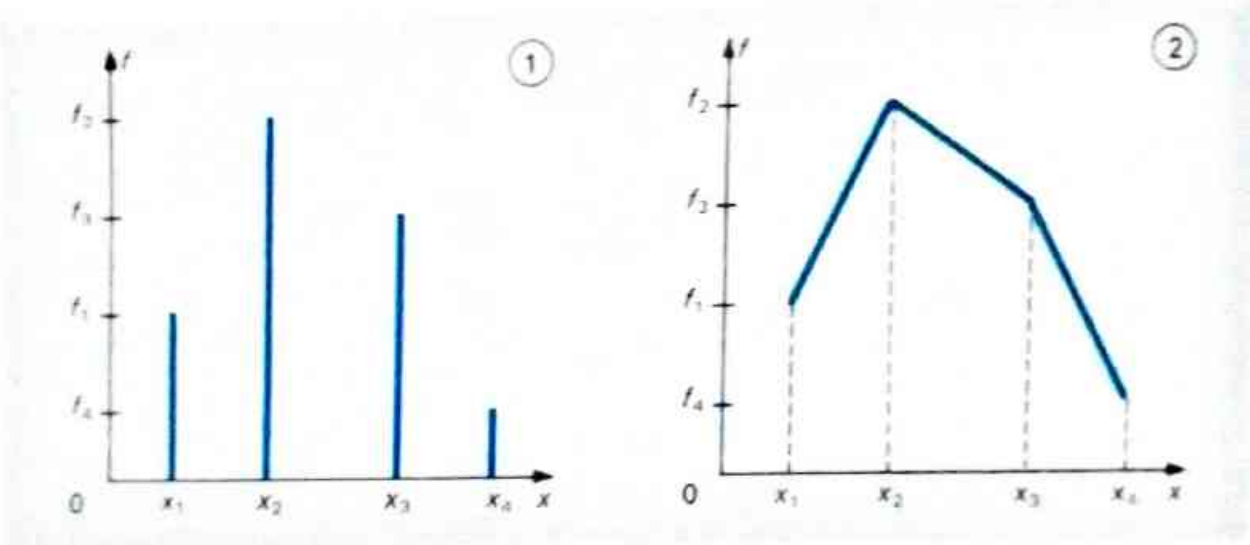
Dans le cas d'un caractère quantitatif, une représentation graphique de la distribution est, en général, plus parlante qu'un tableau de nombres. Nous allons examiner quelques représentations graphiques usuelles ; les axes de coordonnées ont toujours des supports perpendiculaires.

Cas d'une variable statistique discrète.

34 Lorsque la variable statistique est discrète, les valeurs prises par cette variable sont en nombre fini. Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ ces valeurs rangées dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k$.
Désignons par $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k$ les fréquences correspondantes.

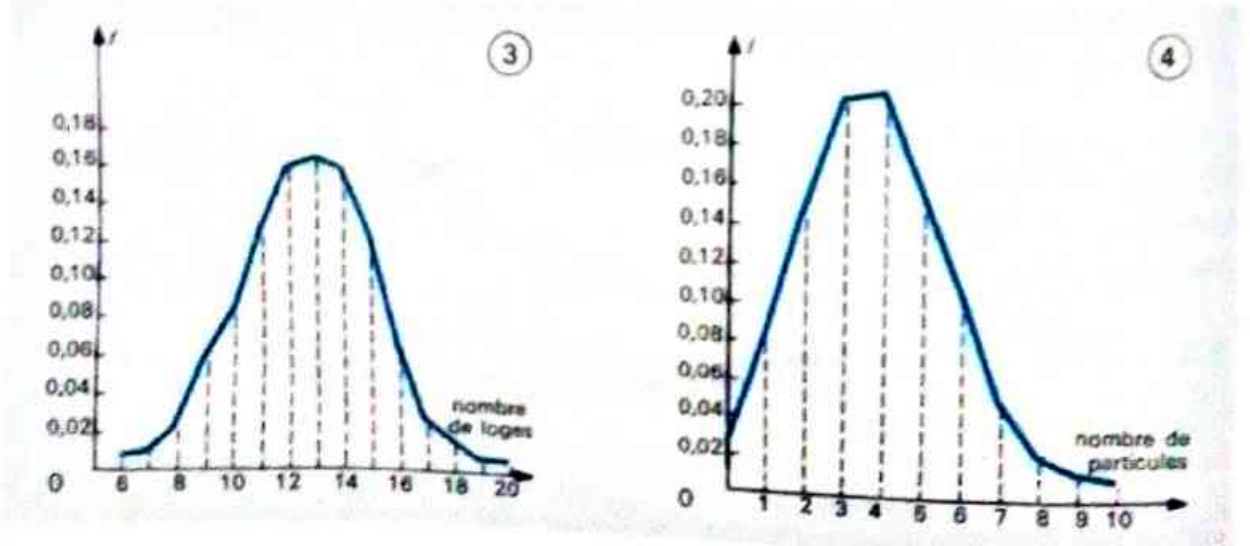
Diagramme en bâtons.

35 On porte en abscisses les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ et on porte en ordonnées les fréquences $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k$.
Les segments dont les extrémités sont les points de coordonnées $(x_i, 0)$ et (x_i, f_i) constituent le diagramme en bâtons de la distribution statistique (fig. 1).
Au lieu de porter en ordonnées les fréquences f_i, on peut porter les effectifs n_i. Cela revient à faire un changement d'échelle sur l'axe des ordonnées. L'avantage du diagramme des fréquences réside dans le fait que l'échelle des ordonnées est toujours graduée de 0 à 1 et permet ainsi la comparaison de plusieurs distributions.



Polygone de fréquence.

36 On obtient le polygone de fréquence d'une distribution statistique en traçant les segments dont les extrémités sont les points de coordonnées (x_i, f_i) et (x_{i+1}, f_{i+1}).
Cela revient à joindre les "sommets consécutifs" du diagramme en bâtons (fig. 2).
Les figures 3 et 4 donnent respectivement le polygone de fréquence pour le nombre de loges capsulaires d'un coquelicot (n° 27, p. 276) et pour le nombre de particules α émises par une substance radio-active (n° 28, p. 277).



Cas d'une variable statistique continue.

37 Lorsque la variable statistique est continue les valeurs observées sont groupées en classes. Soient $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$, ..., $x_k - x_{k+1}$ les classes successives et $f_1, f_2, \ldots, f_k$ les fréquences correspondantes.

Histogramme.

38 On subdivise l'échelle des abscisses en intervalles consécutifs $[x_i, x_{i+1}[$ qui correspondent aux classes $x_i - x_{i+1}$, puis l'on construit sur chaque intervalle un rectangle dont l'aire est proportionnelle à la fréquence de la classe correspondante. Les rectangles obtenus constituent l'histogramme de la distribution.

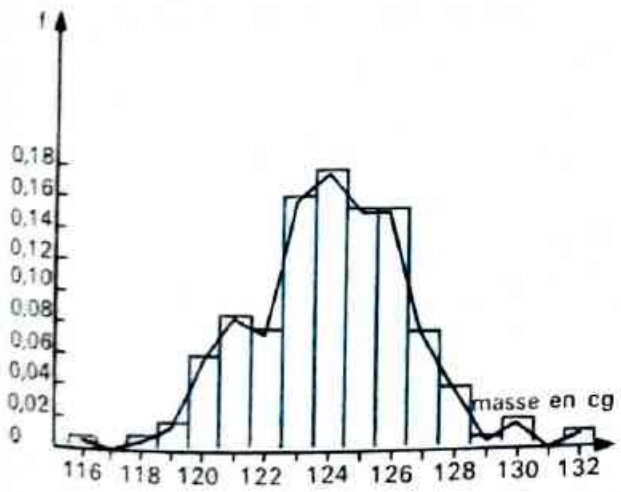
Cas particulier.

39 Lorsque toutes les classes ont la même étendue, on construit chaque rectangle en prenant une hauteur égale à la fréquence.

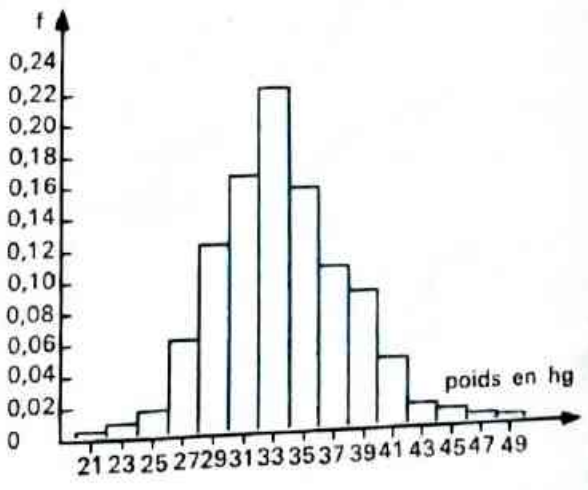
On rencontre ce cas très fréquemment, en particulier chaque fois que les classes correspondent à la précision des mesures.

Pour tracer le polygone de fréquence, il suffit alors de joindre les points dont l'abscisse est égale au centre de la classe, milieu de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, et dont l'ordonnée est égale à la fréquence de la classe, ordonnée du côté supérieur du rectangle.

Les figures 5 et 6 représentent respectivement l'histogramme de la distribution des masses de comprimés pharmaceutiques (n° 31, p. 278) et l'histogramme de la distribution des poids de nouveau-nés (n° 33, p. 279). Pour chacune de ces deux distributions, les classes ont la même étendue ; pour la première, nous avons aussi tracé le polygone de fréquence.



5



6

Fréquences cumulées. Fonction de répartition.

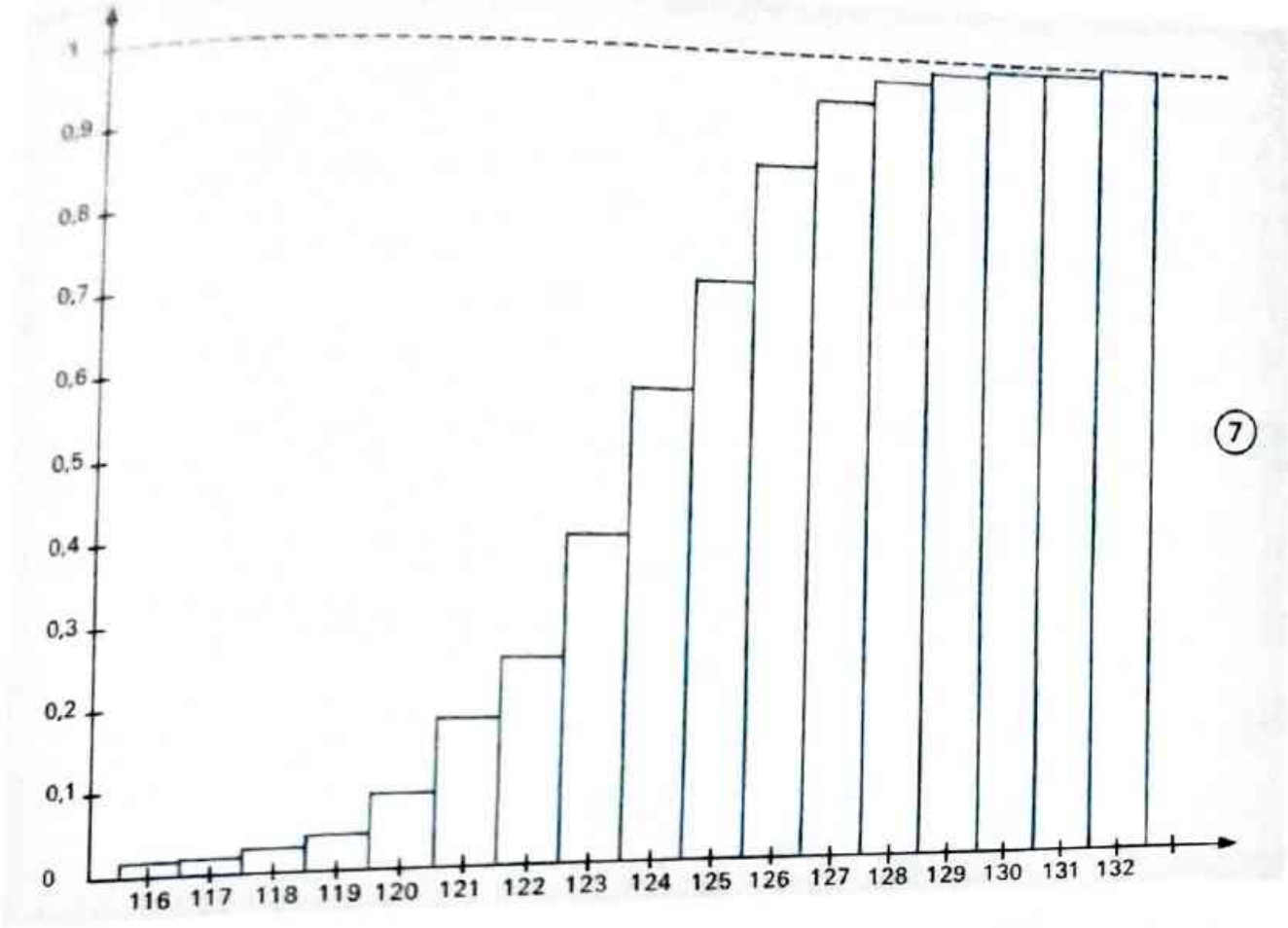
Fréquences cumulées.

40 Considérons une variable statistique, discrète ou continue.
Désignons les classes par :
$x_1, x_2, \ldots x_k$ si la variable est discrète,
$x_1\text{-}x_2, x_2\text{-}x_3, \ldots, x_k\text{-}x_{k+1}$ si la variable est continue.
Soient $f_1, f_2, \ldots, f_k$ les fréquences des classes.
On appelle **fréquence cumulée d'une classe,** x_i ou $x_i\text{-}x_{i+1}$, la somme $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_i$.

41 **Exemple :** Fréquence cumulée des masses de comprimés pharmaceutiques.

Classes	Fréquences	Fréquences cumulées
115,5-116,5	0,004	0,004
116,5-117,5	0	0,004
117,5-118,5	0,004	0,008
118,5-119,5	0,015	0,023
119,5-120,5	0,058	0,081
120,5-121,5	0,083	0,164
121,5-122,5	0,076	0,240
122,5-123,5	0,156	0,396
123,5-124,5	0,174	0,570
124,5-125,5	0,148	0,718
125,5-126,5	0,148	0,866
126,5-127,5	0,076	0,942
127,5-128,5	0,035	0,977
128,5-129,5	0,004	0,981
129,5-130,5	0,015	0,996
130,5-131,5	0	0,996
131,5-132,5	0,004	1

On utilise, pour les fréquences cumulées, des représentations graphiques analogues à celles utilisées pour les fréquences : diagramme en bâtons, polygone de fréquence cumulée et histogramme.
Par exemple, la figure 7 donne l'histogramme des fréquences cumulées pour la distribution des masses de comprimés pharmaceutiques.



(7)

Fonction de répartition.

42 DÉFINITION : On appelle fonction de répartition d'une variable statistique X, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui, à chaque réel λ, associe la fréquence $F(\lambda)$ des valeurs prises par X qui sont inférieures à λ.

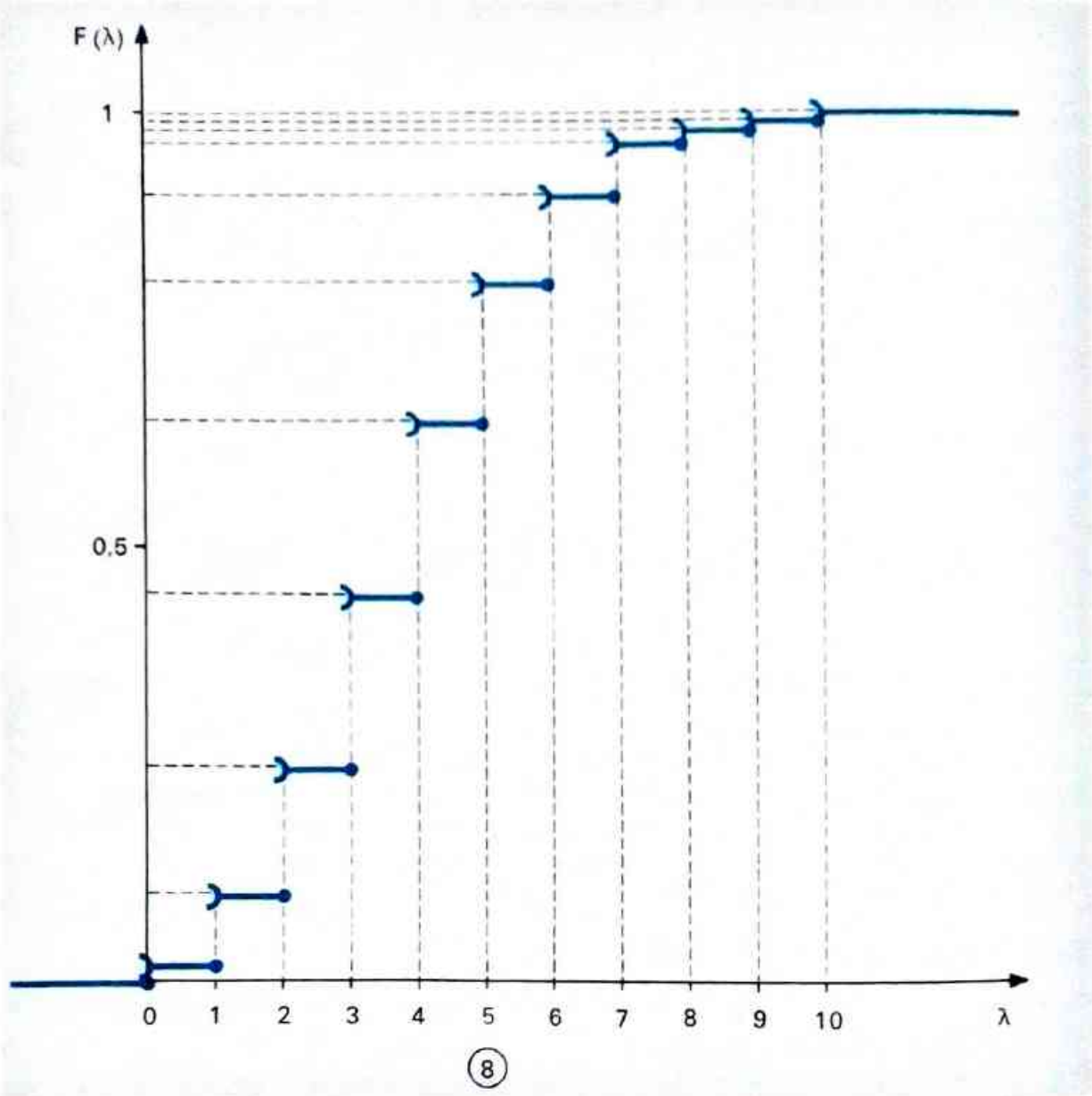
La fonction de répartition est donc une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

Cas d'une variable discrète.

43 Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ les valeurs, classées dans l'ordre croissant, prises par la variable discrète, et f_i la fréquence de la classe x_i.
Il résulte de la définition de la fonction de répartition F que :

si : $\lambda \leqslant x_1$, $F(\lambda) = 0$;
si : $x_1 < \lambda \leqslant x_2$, $F(\lambda) = f_1$;
si : $x_2 < \lambda \leqslant x_3$, $F(\lambda) = f_1 + f_2$;
si : $x_3 < \lambda \leqslant x_4$, $F(\lambda) = f_1 + f_2 + f_3$;
. . . . . .
si : $x_h < \lambda \leqslant x_{h+1}$, $F(\lambda) = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_h = \sum_{i=1}^{i=h} f_i$;
. . . . . .
si : $x_k < \lambda$, $F(\lambda) = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k = \sum_{i=1}^{i=k} f_i = 1$.

La fonction de répartition F est donc une fonction en escalier, croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en tout point λ_0 n'appartenant pas à $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$; elle est continue à gauche en chacun des points $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$.
La figure 8 donne une représentation graphique de la fonction de répartition pour la distribution du nombre de particules α (n° 28, p. 277).



(8)

Cas d'une variable continue.

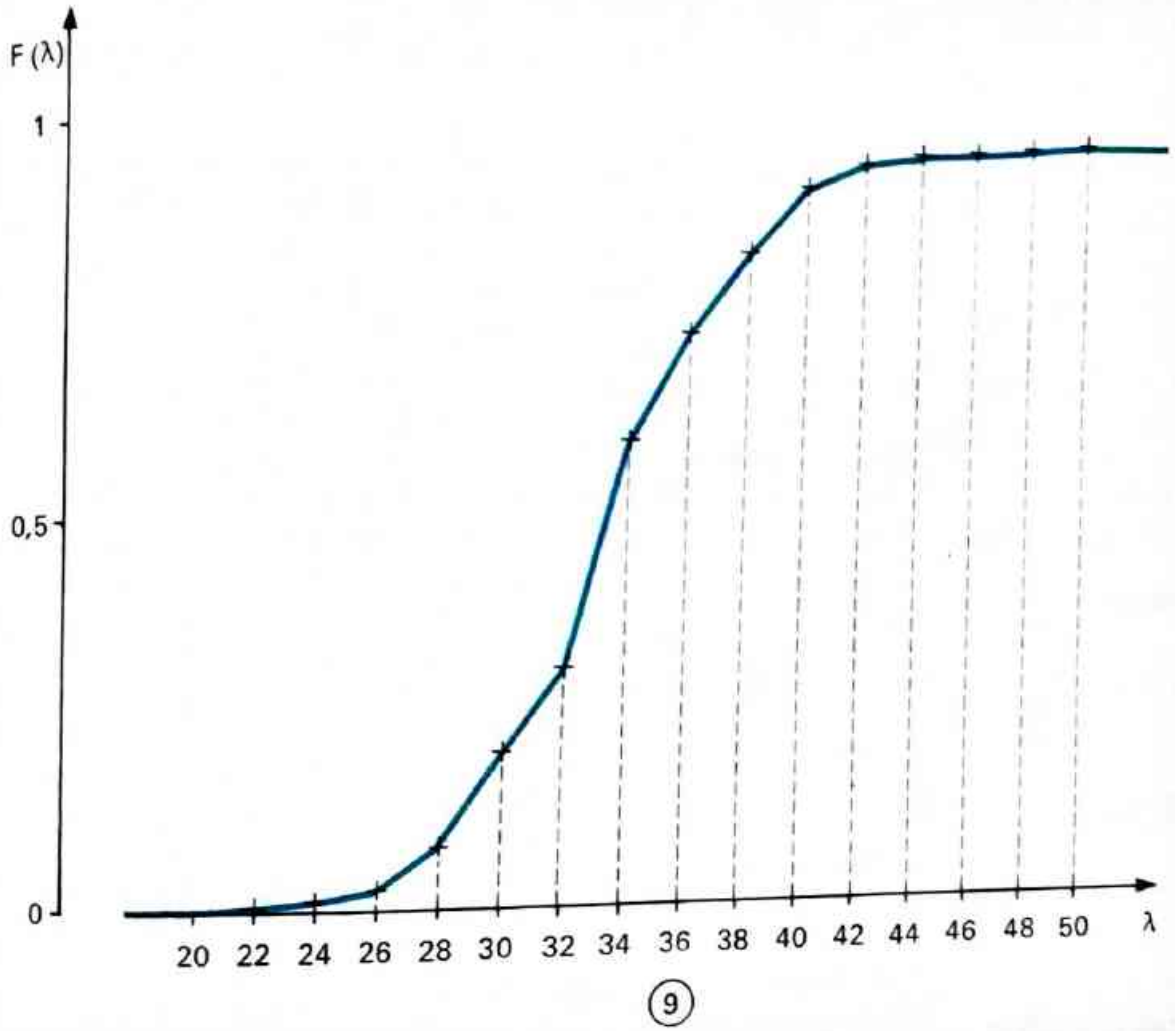
Soient x_1-x_2, x_2-x_3, ..., x_k-x_{k+1} les classes de la distribution et f_i la fréquence de la classe x_i - x_{i+1}.
Il résulte de la définition de la fonction de répartition F que :

si : $\lambda \leqslant x_1$, $\quad F(\lambda) = 0$;

si : $\lambda = x_{i+1}$, $\quad F(\lambda) = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_i = \sum_{i=1}^{j=i} f_j$;

si : $x_{k+1} \leqslant \lambda$, $\quad F(\lambda) = 1$.

La fonction F est croissante, il en résulte que si λ appartient à l'un des intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$, nous avons : $F(x_i) \leqslant F(\lambda) \leqslant F(x_{i+1})$.
Si l'on ne fait aucune autre hypothèse sur la variable statistique étudiée, on ne peut pas préciser davantage la valeur de $F(\lambda)$.
En pratique, lorsque l'étendue des classes n'est pas trop grande, il est souvent légitime d'admettre que la fonction F est affine sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$.
La figure 9 donne, dans ce cas, la représentation graphique de la fonction de répartition pour la distribution des poids de nouveau-nés (n° 33, p. 279).



(9)

EXERCICES

Mise en évidence des notions de variabilité statistique et de stabilité de la fréquence.

1 On considère l'expérience suivante : on jette une pièce de monnaie et l'on attend qu'elle s'immobilise ; on observe alors le côté visible de la pièce : "pile", noté P, ou "face", noté F.

1° Chaque élève jette une pièce cinq fois de suite, et consigne ses résultats :

Classes	Effectifs	Fréquences
F P	n_1 n_2	$f_1 = n_1/5$ $f_2 = n_2/5$
Total	5	1

2° Soit N le nombre des élèves de la classe. Les résultats obtenus par tous les élèves sont rassemblés et consignés sous la forme suivante :

Distribution (I)

Nombre x de faces obtenues par un élève	Fréquence $\frac{x}{5}$ de Faces	Nombre d'élèves ayant obtenu ce résultat	Fréquence des élèves
0	0	n_0	$f_0 = n_0/N$
1	0,2	n_1	$f_1 = n_1/N$
2	0,4	n_2	$f_2 = n_2/N$
3	0,6	n_3	$f_3 = n_3/N$
4	0,8	n_4	$f_4 = n_4/N$
5	1	n_5	$f_5 = n_5/N$
	Total	N	1

Cette distribution (I) correspond au schéma suivant :
Individu : une expérience (une série de cinq jets de pièces) effectuée par un élève.
Population : ensemble des expériences effectuées par les N élèves de la classe.

Caractère statistique : nombre (ou fréquence) de Faces obtenues par chaque élève ; c'est un caractère discontinu qui présente 6 valeurs (6 classes).

Le nombre total y de Faces, et la fréquence $\frac{y}{5\,N}$ sont calculés et notés.

3° Chaque élève fait une nouvelle série de cinq jets de pièces ; on procède comme précédemment : on obtient une distribution (II) analogue à la distribution (I).

Le nombre total de y' Faces, et la fréquence $\frac{y'}{5\,N}$ sont calculés et notés.

4° Chaque élève groupe les résultats obtenus dans les deux séries de cinq expériences :

Classes	Effectifs	Fréquences
F P	n_1 n_2	$f_1 = n_1/10$ $f_2 = n_2/10$
Total	10	1

Les résultats des N groupes de 10 expériences sont consignés sous la forme suivante :

Distribution (III)

Nombre de Faces obtenues par un élève en 10 expériences	Fréquence des Faces	Nombre d'élèves ayant obtenu ce résultat	Fréquence des élèves
0	0	n_0	$f_0 = n_0/N$
1	0,1	n_1	f_1
2	0,2	n_2	f_2
3	0,3	n_3	f_3
4	0,4	n_4	f_4
5	0,5	n_5	f_5
6	0,6	n_6	f_6
7	0,7	n_7	f_7
8	0,8	n_8	f_8
9	0,9	n_9	f_9
10	1	n_{10}	f_{10}
	Total	N	1

Le nombre total y'' de Faces, et la fréquence $\frac{y''}{10\ N}$ sont calculés et notés.

5° Comparer les fréquences de faces obtenues respectivement pour 5 épreuves, pour 10 épreuves, pour 5 N épreuves, pour 10 N épreuves. On verra apparaître les notions d'irrégularité, de variabilité et de stabilité de la fréquence expérimentale pour un grand nombre d'expériences.

2 Refaire des expériences analogues à celles de l'exercice 1 en jetant simultanément deux pièces et en enregistrant les résultats sous la forme :
les côtés visibles sont deux "pile" ou deux "face" ;
les côtés visibles sont un "pile" et une "face".

3 Refaire des expériences analogues à celles de l'exercice 1 en jetant un dé et en enregistrant les résultats sous la forme suivante :
" le point obtenu est 6 ", ou : "le point obtenu est différent de 6 ".

EXERCICES

4 Refaire des expériences analogues à celles de l'exercice 1 en jetant simultanément deux dés, et en enregistrant les résultats sous la forme : "Le total des points obtenus est supérieur ou égal à 10", ou "le total des points obtenus est inférieur à 10".

5 Le tableau suivant indique la répartition par âge des élèves des classes terminales A, B, C, D de l'enseignement public pour l'année scolaire 1967-68 :

Age (en années)	Terminale A	Terminale B	Terminale C	Terminale D
15	81	0	170	57
16	3 800	131	3 972	2 276
17	17 090	1 067	8 713	10 275
18	22 573	2 172	7 001	15 196
19	14 246	1 389	3 179	10 807
20	3 268	252	639	3 087
21	298	11	53	282

1° Pour chaque terminale, calculer les fréquences des différentes classes d'âge.
2° Construire, pour chaque terminale, un histogramme de fréquence et un histogramme de fréquence cumulée.
3° Construire, sur un même graphique, les polygones de fréquence qui correspondent à chacune des terminales.
4° Construire, pour chaque terminale, la fonction de répartition.

6 Le tableau suivant donne la distribution des notes d'oral en mathématiques de 145 candidats admissibles à l'Institut National Agronomique en 1966. On a attribué à chaque candidat une note sous forme d'un entier compris entre 0 et 20 :

Classes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs	0	1	1	1	2	2	2	3	4	2	4	13	18	16	23	12	12	16	8	5	0

1° Calculer la fréquence et la fréquence cumulée de chaque classe.
2° Donner le diagramme en bâtons pour les fréquences, puis pour les fréquences cumulées.
3° Dessiner le polygone de fréquence et le polygone de fréquence cumulée.
4° Construire et représenter graphiquement la fonction de répartition.

7 Le tableau suivant indique la répartition des salariés par tranche de salaire net annuel (toutes catégories socio-professionnelles exceptés les salariés agricoles et les salariés des administrations publiques) pour l'année 1966 :

Classes (tranches de salaire net annuel en francs)	Fréquences
moins de 4 000	0,072
4 000-5 000	0,052
5 000-6 000	0,077
6 000-8 000	0,186
8 000-10 000	0,188
10 000-15 000	0,258
15 000-20 000	0,082
20 000-50 000	0,076
50 000 et plus	0,011

1° Construire l'histogramme des fréquences.

2° Construire l'histogramme des fréquences cumulées.

8 Le tableau suivant indique les mesures des diamètres de 200 têtes de rivets, mesurés avec une précision de 0,01 mm, dans l'ordre de sortie de la machine :

13,39	13,43	13,54	13,64	13,40	13,55	13,40	13,26
13,42	13,50	13,32	13,31	13,28	13,52	13,46	13,63
13,38	13,44	13,52	13,53	13,37	13,33	13,24	13,13
13,53	13,53	13,39	13,57	13,51	13,34	13,39	13,47
13,51	13,48	13,62	13,58	13,57	13,33	13,51	13,40
13,30	13,48	13,40	13,57	13,51	13,40	13,52	13,56
13,40	13,34	13,23	13,37	13,48	13,48	13,62	13,35
13,40	13,36	13,45	13,48	13,29	13,58	13,44	13,56
13,28	13,59	13,47	13,46	13,62	13,54	13,20	13,38
13,43	13,35	13,56	13,51	13,47	13,40	13,29	13,20
13,46	13,44	13,42	13,29	13,41	13,39	13,50	13,48
13,53	13,34	13,45	13,42	13,29	13,38	13,45	13,50
13,55	13,33	13,32	13,69	13,46	13,32	13,32	13,48
13,29	13,25	13,44	13,60	13,43	13,51	13,43	13,38
13,24	13,28	13,58	13,31	13,31	13,45	13,43	13,44
13,34	13,49	13,50	13,38	13,48	13,43	13,37	13,29
13,54	13,33	13,36	13,46	13,23	13,44	13,38	13,27
13,66	13,26	13,40	13,52	13,59	13,48	13,46	13,40
13,43	13,26	13,50	13,38	13,43	13,34	13,41	13,24
13,42	13,55	13,37	13,41	13,38	13,14	13,42	13,52
13,38	13,54	13,30	13,18	13,32	13,46	13,39	13,35
13,34	13,37	13,50	13,61	13,42	13,32	13,35	13,40
13,57	13,31	13,40	13,36	13,28	13,58	13,58	13,38
13,26	13,37	13,28	13,39	13,32	13,20	13,43	13,34
13,33	13,33	13,31	13,45	13,39	13,45	13,41	13,45

EXERCICES

1° Mettre ces résultats en ordre : les grouper ensuite en classes de 0,05 mm (première classe : 13,10-13,15) et dresser le tableau de la distribution.
2° Construire l'histogramme des fréquences.
3° Construire l'histogramme des fréquences cumulées.
4° Donner une représentation graphique de la fonction de répartition.

9 Le tableau suivant indique les quantités de pluie, exprimées en millimètres, recueillies à Paris, Parc Saint-Maur, de 1874 à 1945 :

Année	mm	Année	mm	Année	mm
1874	482	1898	553	1922	757
1875	595	1899	418	1923	714
1876	557	1900	444	1924	681
1877	671	1901	465	1925	715
1878	752	1902	540	1926	688
1879	642	1903	536	1927	772
1880	488	1904	518	1928	738
1881	564	1905	638	1929	494
1882	660	1906	595	1930	831
1883	570	1907	546	1931	801
1884	442	1908	568	1932	551
1885	590	1909	666	1933	553
1886	681	1910	751	1934	596
1887	496	1911	481	1935	630
1888	542	1912	609	1936	748
1889	532	1913	645	1937	714
1890	510	1914	626	1938	551
1891	588	1915	655	1939	808
1892	587	1916	705	1940	604
1893	524	1917	573	1941	735
1894	493	1918	578	1942	813
1895	508	1919	648	1943	549
1896	654	1920	547	1944	694
1897	620	1921	279	1945	475

1° Mettre ces résultats en ordre ; les grouper ensuite en classes de 50 mm (première classe : 250-300) et dresser le tableau de la distribution.
2° Construire l'histogramme des fréquences et le polygone de fréquence.
3° Construire l'histogramme des fréquences cumulées et le polygone des fréquences cumulées.
4° Construire et représenter graphiquement la fonction de répartition.

19.
Espaces probabilisés finis

Introduction.

Notion de phénomène aléatoire.

1 Les phénomènes et les expériences que nous avons étudiés dans le chapitre précédent présentent les caractéristiques suivantes :

1. Une fois précisés l'ensemble des conditions qui définissent un type d'expérience, ou l'apparition d'un type de phénomène, ainsi que le mode d'observation des résultats, il est possible d'effectuer autant d'expériences du type précisé, qu'on le désire.

2. Le résultat observé lors de la réalisation de l'une de ces expériences ne peut pas être prévu a priori avant l'expérience, on peut simplement préciser l'**ensemble des résultats possibles** que l'on décide d'observer.

3. **Stabilité de la fréquence expérimentale** : quel que soit le résultat considéré R, si l'on effectue diverses séries de N_1, N_2, N_3 ... expériences du type précisé, les fréquences d'apparition du résultat R : f_1, f_2, f_3 ... observées pour chacune de ces séries sont très voisines lorsque les nombres N_1, N_2, N_3, ... sont suffisamment grands.

Nécessité d'une nouvelle théorie.

2 Les lois rencontrées en Physique s'énoncent souvent sous la forme : "une expérience réalisée dans des conditions précisées donne le résultat R".
Nous disons qu'une telle loi est de type **déterministe.**
Un énoncé de loi déterministe ne peut s'appliquer aux types de phénomènes précédents ; il est donc nécessaire de construire un nouveau modèle mathématique : la théorie des probabilités.
Ce modèle sera construit sur des axiomes et des définitions choisis en fonction de la nature des phénomènes à étudier.

Théorie des probabilités.

3 D'une manière générale, nous appelons :
phénomène aléatoire : tout type d'expérience qui vérifie les trois conditions énoncées au paragraphe 1 ;
complexe expérimental, noté $\mathcal{C}$: l'ensemble des conditions qui définissent le phénomène aléatoire étudié et le mode d'observation des résultats ;
épreuve dans les conditions $\mathcal{C}$: une expérience particulière du type envisagé.
Nous notons $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ une telle épreuve, ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté : $\mathcal{E}$.
Le modèle que nous allons construire ne sera intéressant du point de vue pratique que si les propriétés et les théorèmes déduits des axiomes de base permettent de rendre compte des phénomènes aléatoires et en particulier de la stabilité de la fréquence pour un grand nombre d'épreuves.
Dans la suite, nous allons construire un tel modèle en nous limitant au cas où l'ensemble Ω des résultats possibles pour une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ est un ensemble fini non vide.
Nous donnons d'abord quelques exemples qui permettent de mieux comprendre les mots de phénomène aléatoire, conditions $\mathcal{C}$, épreuve $\mathcal{E}$, ensemble Ω des résultats possibles.

Exemples de phénomènes aléatoires.

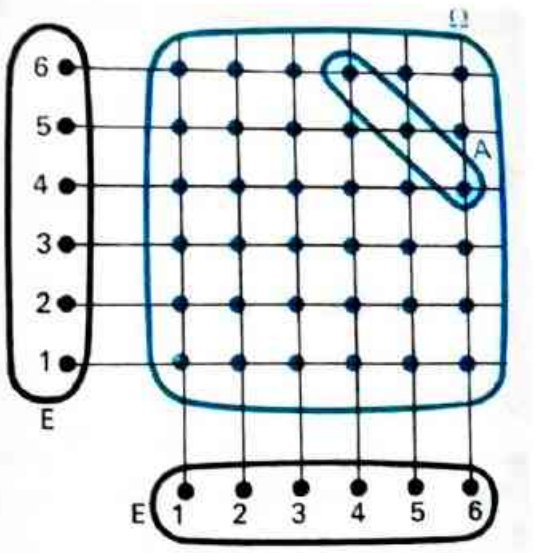
4 Dans le chapitre précédent, nous avons rencontré les exemples suivants :

Phénomène aléatoire	Conditions $\mathcal{C}$	Épreuve $\mathcal{E}$	Ensemble Ω
jeu de pile ou face	jeter une pièce en l'air ; attendre qu'elle retombe sur le sol ; examiner le côté visible	jet d'une pièce	{pile, face}
sexe d'un nouveau-né	enregistrement des naissances au cours d'une année dans une maternité ou un ensemble donné de maternités	naissance d'un enfant dans une de ces maternités	{féminin, masculin}
fabrication d'un type de comprimés pharmaceutiques	type de la machine ; cadence de production ; type du lot de matière première ; qualification de l'opérateur ; détermination de la masse des comprimés à un centigramme près	détermination de la masse d'un comprimé fabriqué dans les conditions indiquées	chaque masse étant exprimée en centigrammes : un ensemble fini d'entiers naturels

Ensemble des événements.

Événement lié à une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$.

5 Exemple : Considérons le phénomène aléatoire suivant :
jet de deux dés cubiques discernables D_1 et D_2, par exemple un dé rouge et un dé vert ; chacun des deux dés porte sur ses faces les points de 1 à 6.
Fixons avec précision le complexe expérimental $\mathcal{C}$:
jeter les deux dés sur une table plane, attendre qu'ils s'immobilisent et observer les points marqués sur les faces supérieures.
Nous noterons n_1 le nombre de points marqués sur la face supérieure de D_1, n_2 le nombre de points marqués sur la face supérieure de D_2.
Le résultat d'une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ est alors un couple (n_1, n_2) de deux entiers naturels tels que : $1 \leqslant n_1 \leqslant 6$ et $1 \leqslant n_2 \leqslant 6$.
Désignons par E l'ensemble : $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 6\}$.
L'ensemble Ω des résultats possibles pour les épreuves $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ est donc le produit cartésien $E \times E$. Il y a 36 résultats possibles ; l'ensemble Ω est donc fini.
L'ensemble Ω est représenté sur la figure 1.
Lorsque nous effectuons une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, nous pouvons vérifier si le résultat (n_1, n_2) de cette épreuve possède ou ne possède pas une propriété déterminée ; par exemple : "la somme $n_1 + n_2$ est égale à 10".
Nous disons que "$n_1 + n_2 = 10$" définit un événement lié à l'épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$.
La propriété "$n_1 + n_2 = 10$" caractérise un sous-ensemble de Ω : le sous-ensemble $A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$.
L'événement considéré apparaît donc comme un sous-ensemble de Ω.
Une fois l'épreuve effectuée, si le couple observé (n_1, n_2) vérifie la propriété : "$n_1 + n_2 = 10$", c'est-à-dire : $(n_1, n_2) \in A$, nous disons que l'événement A est réalisé.



①

6 D'une manière générale, nous donnons la définition suivante :

DÉFINITION : Soit un phénomène aléatoire défini par un complexe expérimental $\mathcal{C}$ et soit Ω l'ensemble des résultats possibles pour une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$. On appelle événement lié à $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, toute partie A de Ω.

Lorsqu'on effectue une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, on dit que l'événement A est réalisé si et seulement si le résultat de cette épreuve est un élément de A.
De la définition précédente, nous déduisons que l'ensemble des événements liés à une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω.
Si le cardinal de Ω est n, le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$ est 2^n.

Langage des ensembles et langage des événements.

7 Considérons une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$.
Désignons par A et par B des événements liés à cette épreuve, et par a le résultat de cette épreuve.

Événement certain.

8 Si A est égal à Ω, il résulte de la définition de Ω que, quel que soit le résultat a de l'épreuve, on a : $a \in \Omega$.
Ω est donc un événement toujours réalisé ; on dit que Ω est un événement certain.

Événement impossible.

9 Si A est égal à l'ensemble vide, le résultat a ne peut appartenir à A. $\varnothing$ est donc un événement qui n'est jamais réalisé ; on dit que $\varnothing$ est un événement impossible.

Événement $\overline{A}$.

10 Considérons l'événement : $\overline{A} = \Omega - A$. Nous avons les équivalences logiques :
($\overline{A}$ réalisé) $\Longleftrightarrow$ ($a \in \overline{A}$) ;
($a \in \overline{A}$) $\Longleftrightarrow$ ($a \notin A$) ;
($a \notin A$) $\Longleftrightarrow$ (A n'est pas réalisé).
Nous en déduisons que $\overline{A}$ est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.

Événement $A \cap B$.

11 Considérons l'événement : $C = A \cap B$. Nous avons les équivalences logiques :
(C réalisé) $\Longleftrightarrow$ ($a \in A \cap B$) ;
($a \in A \cap B$) $\Longleftrightarrow$ ($a \in A$ et $a \in B$) ;
($a \in A$ et $a \in B$) $\Longleftrightarrow$ (A et B réalisés).
Nous en déduisons que l'événement $A \cap B$ est réalisé si et seulement si les événements A et B sont réalisés.
En particulier, si on a : $A \cap B = \varnothing$, les événements A et B ne sont jamais réalisés simultanément. On dit qu'ils sont **incompatibles.**

Événement $A \cup B$.

12 Considérons l'événement : $D = A \cup B$. Nous avons les équivalences logiques :
(D réalisé) $\Longleftrightarrow$ ($a \in A \cup B$) ;
($a \in A \cup B$) $\Longleftrightarrow$ ($a \in A$ ou $a \in B$) ;
($a \in A$ ou $a \in B$) $\Longleftrightarrow$ (A réalisé ou B réalisé).
Nous en déduisons que l'événement $A \cup B$ est réalisé si et seulement si l'événement A ou l'événement B est réalisé.
En particulier, si on a : $A \cup B = \Omega$, l'un des événements A ou B est toujours réalisé.

Événements A et B pour lesquels A est inclus dans B.

13 Considérons deux événements A et B pour lesquels on a : $A \subset B$. Nous avons :
(A réalisé) $\Longleftrightarrow$ ($a \in A$) ;
($a \in A$) $\Longrightarrow$ ($a \in B$) ;
($a \in B$) $\Longleftrightarrow$ (B réalisé).
Nous en déduisons que, si A est inclus dans B, la réalisation de l'événement A implique la réalisation de l'événement B.

14 Système complet d'événements.

Considérons k événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tels que $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ soit une partition de Ω.
Si : $i \neq j$, on a : $A_i \cap A_j = \varnothing$. Deux événements distincts A_i et A_j sont donc incompatibles. Pour tout élément a de Ω, il existe un indice i et un seul pour lequel on a : $a \in A_i$. Un événement A_i et un seul est donc toujours réalisé. On dit que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ constituent un système complet d'événements.

Tableau récapitulatif.

15 Résumons dans un tableau les résultats que nous venons d'obtenir :

$\mathcal{T}(\Omega)$	Événements
$(A \subset \Omega) \Longleftrightarrow (A \in \mathcal{T}(\Omega))$	A est un événement
$A = \varnothing$	A est impossible (jamais réalisé)
$A = \Omega$	A est certain (toujours réalisé)
$\overline{A} = \Omega - A$ (complémentaire de A dans Ω)	$\overline{A}$ est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé ($\overline{A}$ se lit : non A)
$C = A \cap B$	C est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés (conjonction de A et de B)
$A \cap B = \varnothing$ (A et B sont disjoints)	A et B sont incompatibles (jamais réalisés simultanément)
$D = A \cup B$	D est réalisé si et seulement si A ou B est réalisé (disjonction de A et de B)
$A \cup B = \Omega$	l'un au moins des événements A ou B est réalisé
$A \subset B$ (inclusion)	la réalisation de A implique la réalisation de B (implication)
$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ est une partition de Ω : si : $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ et : $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \Omega$	$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ est un système complet d'événements : si : $i \neq j$, A_i et A_j sont incompatibles, l'un des A_i (et donc un seul) est réalisé lors d'une épreuve $\mathcal{E}$

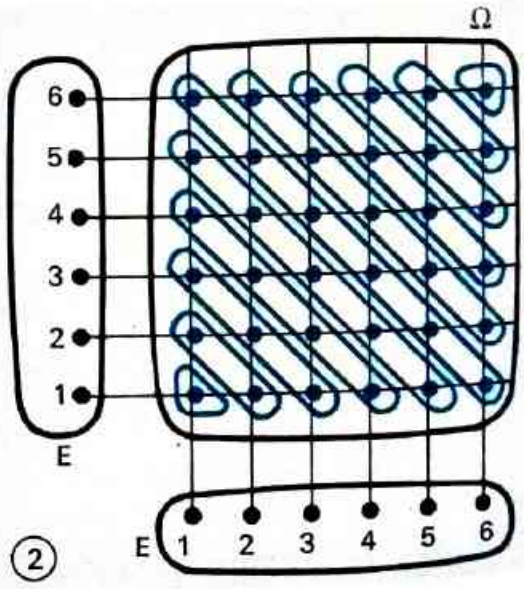
16 Utilisons l'exemple des deux dés D_1 et D_2 du n° 5, p. 293, pour donner quelques exemples :

$\mathcal{P}(\Omega)$	Événements
$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ $\overline{A} = \Omega - A$	A : obtenir $n_1 + n_2 \leqslant 3$ $\overline{A}$: obtenir $n_1 + n_2 > 4$
$A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ $B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$ $C = A \cap B$ $D = A \cup B$	A : obtenir $n_1 = 6$ B : obtenir $n_2 = 6$ C : obtenir un double six ($n_1 = n_2 = 6$) D : obtenir au moins un six ($n_1 = 6$ ou $n_2 = 6$)
$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ $B = \{(1, 2), (2, 1)\}$ $B \subset A$	A : obtenir $n_1 + n_2 \leqslant 3$ B : obtenir $n_1 + n_2 = 3$ la réalisation de B implique celle de A
$A_k = \{(i, j) \mid (i, j) \in \Omega$ et $i + j = k\}$ $\{A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{12}\}$ est une partition de Ω (fig. 2)	A_k : obtenir $n_1 + n_2 = k$ $\{A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{12}\}$ est un système complet d'événements

Événements élémentaires.

17 Parmi les événements liés à l'épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ certains sont "décomposables" et certains ne le sont pas.

Par exemple, l'événement "obtenir une somme de points égale à 10" peut s'exprimer ainsi : "obtenir le couple (4, 6) ou le couple (5, 5) ou le couple (6, 4)".
L'événement $A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$ est la réunion des trois événements :
$A_1 = \{(4, 6)\}$; $A_2 = \{(5, 5)\}$; $A_3 = \{(6, 4)\}$.



②

Par contre, l'événement : "obtenir le point 4 sur le dé D_1 et le point 6 sur le dé D_2 est un événement non décomposable : $A_1 = \{(4, 6)\}$; A_1 est un singleton de l'ensemble Ω; nous disons que c'est un événement élémentaire.

DÉFINITION : Si Ω est l'ensemble des résultats possibles pour une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, on appelle événement élémentaire tout singleton de Ω.

Propriétés des événements élémentaires.

18 Considérons une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ d'un phénomène aléatoire.
Soit n le nombre, strictement positif, d'éléments de l'ensemble Ω pour cette épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$; désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les éléments de Ω.
Les n événements élémentaires sont : $A_i = \{a_i\}$, pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Si i est différent de j, nous avons : $a_i \neq a_j$. Il en résulte : $A_i \cap A_j = \varnothing$.
D'autre part, nous avons : $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$.
L'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ des événements élémentaires est donc une partition de Ω ; c'est un système complet d'événements.

THÉORÈME : Les événements élémentaires liés à une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ constituent un système complet d'événements.

19 Considérons un événement A, par exemple : $A = \{a_4, a_2, a_7\}$.
Nous avons : $A = \{a_4\} \cup \{a_2\} \cup \{a_7\} = A_4 \cup A_2 \cup A_7$.
L'événement A peut donc s'exprimer comme une réunion d'événements élémentaires.
D'une manière générale, soit B un sous-ensemble à k éléments de Ω. On démontre que ce sous-ensemble est la réunion de k singletons de Ω.

THÉORÈME : Tout événement lié à une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ peut s'exprimer comme une réunion d'événements élémentaires liés à cette épreuve.

20 Remarque : Nous retrouvons ici sous forme mathématique la notion expérimentale d'événement décomposable et d'événement non décomposable.

21 En résumé :

les événements élémentaires sont deux à deux incompatibles;
au cours d'une épreuve un, et donc un seul, d'entre eux est réalisé;
tout événement peut s'exprimer comme une réunion d'événements élémentaires.

Remarque importante.

22 Lorsque l'on étudie un type de phénomène aléatoire, il est possible, en modifiant le complexe expérimental $\mathcal{C}$ et, en particulier, les conditions d'observations des résultats, d'associer à ce phénomène plusieurs ensembles Ω et par suite plusieurs ensembles d'événements $\mathcal{T}(\Omega)$ différents.

Exemple : Considérons le phénomène aléatoire défini par les conditions $\mathcal{C}$ suivantes : jeter deux pièces, attendre qu'elles retombent et examiner les côtés visibles.

1. Les deux pièces sont indiscernables.
Dans ces conditions, les résultats que l'on peut observer pour une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ sont : $a_1 = \{\text{pile, pile}\}$, $a_2 = \{\text{face, face}\}$, $a_3 = \{\text{pile, face}\}$.

En effet, les deux pièces étant indiscernables, on ne peut pas distinguer les résultats "pile-face" et "face-pile".
L'ensemble Ω a donc trois éléments et il y a trois événements élémentaires.

2. Décidons de faire une marque sur l'une des deux pièces de façon à les rendre discernables. On peut alors distinguer les résultats "pile-face" et "face-pile".
Dans ces conditions, les résultats possibles sont :
a'_1 = (pile, pile), a'_2 = (face, face), a'_3 = (face, pile), a'_4 = (pile, face).
L'ensemble Ω' a donc quatre éléments et il y a quatre événements élémentaires.
Nous verrons, dans la suite, comment l'introduction de la notion de probabilité nous guidera dans le choix de l'ensemble Ω.

Espaces probabilisés finis.

Construction élémentaire d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

23 L'introduction des ensembles Ω et $\mathcal{P}(\Omega)$ rend compte du fait que, pour une épreuve $\mathcal{E}$ d'un phénomène aléatoire, plusieurs résultats sont possibles. Il s'agit maintenant de traduire mathématiquement la propriété de stabilité des fréquences expérimentales.
Dans le langage courant, cette propriété s'exprime par des phrases telles que :
"il y a autant de chances d'obtenir tel résultat que tel autre" ou "il y a deux fois plus de chances d'obtenir tel résultat que tel autre".
On accorde donc à la réalisation de chaque résultat un certain degré de confiance.
Nous allons caractériser ce degré de confiance en associant à chaque élément de Ω un réel positif ou nul.

24 Soit : $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$.
Associons à chaque élément a_i de Ω un réel positif ou nul, noté $p(a_i)$ ou simplement p_i, appelé coefficient de a_i, ou masse de a_i.
Nous définissons ainsi une application p de Ω dans $\mathbb{R}_+$:
$p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad a_i \rightsquigarrow p(a_i) = p_i$.
Nous allons utiliser cette application p pour construire une **probabilité** sur l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des événements, c'est-à-dire une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ à laquelle nous imposerons certaines propriétés.
Nous allons définir l'application P en définissant l'image, ou probabilité, de chaque événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Probabilité d'un événement élémentaire.

25 Par définition, la probabilité de l'événement élémentaire : $A_i = \{a_i\}$ est : $P(A_i) = p_i$.

Probabilité d'un événement A non vide.

26 La propriété d'additivité des fréquences expérimentales, et l'intuition courante, nous suggèrent de définir la probabilité de A de la façon suivante :
par exemple, si A est l'événement $\{a_4, a_2, a_7\}$, on pose : $P(A) = p_4 + p_2 + p_7$.

D'une manière générale, soit A un événement à k éléments :
$A = \{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, \ldots, a_{\alpha_k}\}$, où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ désignent k indices distincts appartenant à $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
Par définition, la probabilité de l'événement A est :

$$P(A) = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + p_{\alpha_3} + \ldots + p_{\alpha_k} = \sum_{i=1}^{i=k} p_{\alpha_i}.$$

En particulier, $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$; nous avons donc :

$$P(\Omega) = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i.$$

Probabilité de l'événement certain.

27 Ω est un événement certain ; dans le langage courant, on dit : "il y a 100 % de chances pour que cet événement se produise". Par convention, et par habitude, nous imposerons donc : $P(\Omega) = 1$.
Cela revient à imposer à la fonction p de vérifier l'égalité :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1.$$

Probabilité de l'événement impossible.

28 Dans le langage courant, on dit "il n'y a aucune chance pour que cet événement se produise". Par définition, nous posons : $P(\varnothing) = 0$.

29 En résumé, nous avons ainsi construit une application P de $\mathfrak{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$; cette application est appelée **probabilité, ou loi de probabilité, sur** $\mathfrak{P}(\Omega)$.

Propriétés de la probabilité P définie à partir de p.

30 De la définition de l'application P, nous déduisons :
$\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega)$, $P(A) \geqslant 0$, et en particulier : $P(\Omega) = 1$.

Nous allons montrer que l'application P est additive, c'est-à-dire que, quels que soient les événements **incompatibles** A et B, on a l'égalité :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Si l'un des événements, B par exemple, est l'événement impossible, nous avons :
$A \cup B = A \cup \varnothing = A$; $P(B) = P(\varnothing) = 0$.
L'égalité : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ est donc vérifiée.

Supposons que les événements incompatibles A et B soient tous deux non vides.
Posons : $A = \{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, \ldots a_{\alpha_k}\}$; $B = \{a_{\beta_1}, a_{\beta_2}, a_{\beta_3}, \ldots a_{\beta_h}\}$.
Nous avons : $A \cap B = \varnothing$; les $k + h$ indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ sont tous distincts et appartiennent à $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Dans ces conditions, nous avons :
$A \cup B = \{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, \ldots, a_{\alpha_k}, a_{\beta_1}, a_{\beta_2}, a_{\beta_3}, \ldots, a_{\beta_h}\}$.
Par définition, nous avons :
$P(A) = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + p_{\alpha_3} + \ldots + p_{\alpha_k}$;
$P(B) = p_{\beta_1} + p_{\beta_2} + p_{\beta_3} + \ldots + p_{\beta_h}$;
$P(A \cup B) = (p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + p_{\alpha_3} + \ldots + p_{\alpha_k}) + (p_{\beta_1} + p_{\beta_2} + p_{\beta_3} + \ldots + p_{\beta_h})$.
Nous en déduisons : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Les propriétés que nous venons de mettre en évidence vont nous servir à donner une définition axiomatique d'une probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$.

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$.

31 DÉFINITION : Soit Ω un ensemble fini non vide dont les sous-ensembles, éléments de $\mathcal{T}(\Omega)$, sont appelés événements. On appelle probabilité, ou loi de probabilité, sur $\mathcal{T}(\Omega)$ toute application P de $\mathcal{T}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifient les deux propriétés :

1. $P(\Omega) = 1$;

2. $\forall A \in \mathcal{T}(\Omega),\ \forall B \in \mathcal{T}(\Omega),\ (A \cap B = \varnothing) \Longrightarrow (P(A \cup B) = P(A) + P(B))$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ est appelé **espace probabilisé fini.**

Propriétés d'une probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$.

Probabilité de l'événement non A.

32 Soient A un événement et $\overline{A}$ l'événement non A.
Nous avons : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $\overline{A} \cup A = \Omega$.
Nous avons donc : $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega)$.
Il en résulte l'égalité : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, c'est-à-dire : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

$$\forall A \in \mathcal{T}(\Omega), \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

En particulier, si : $A = \Omega$, nous en déduisons :

$$P(\varnothing) = 0$$

Croissance d'une probabilité.

33 Soient A et B deux événements tels que : $A \subset B$.
Nous avons : $A \cap (B - A) = \varnothing$ et $A \cup (B - A) = B$.
Il en résulte l'égalité : $P(B) = P(A) + P(B - A)$. Le réel $P(B - A)$ est positif ou nul; nous en déduisons :

$$\forall A \in \mathcal{T}(\Omega), \quad \forall B \in \mathcal{T}(\Omega), \quad (A \subset B) \Longrightarrow (P(A) \leqslant P(B))$$

Pour traduire cette propriété, nous disons que la probabilité P est une application croissante de $\mathcal{P}(\Omega)$ ordonné par inclusion, dans $\mathbb{R}_+$ ordonné par la relation $\leqslant$.

En particulier, pour tout A appartenant à $\mathcal{P}(\Omega)$, nous avons : $A \subset \Omega$. Il en résulte :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) \leqslant 1}$$

Probabilités de la conjonction et de la disjonction de deux événements.

34 Soient A et B deux événements.

Nous avons : $A \cap (B - A) = \varnothing$ et $A \cup (B - A) = A \cup B$.

Nous en déduisons : $P(A) + P(B - A) = P(A \cup B)$. (1)

Nous avons aussi : $(A \cap B) \cap (B - A) = \varnothing$ et $(A \cap B) \cup (B - A) = B$.

Nous en déduisons : $P(A \cap B) + P(B - A) = P(B)$. (2)

Des égalités (1) et (2), il résulte l'égalité :

$$\boxed{P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)}$$

35 **Remarques** : 1. Si A et B sont incompatibles, nous avons :
$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$.
Nous retrouvons dans ce cas la propriété d'additivité de la définition.

2. Quels que soient A et B, nous avons : $P(A \cap B) \geqslant 0$, il en résulte l'inégalité :
$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

Extension de l'additivité.

36 Soient A, B, C trois événements deux à deux incompatibles :
$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$.

Nous avons alors : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.
Il en résulte : $P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.

On démontre et nous admettons que cette propriété est encore vraie pour k événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ deux à deux incompatibles :
si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = \sum_{i=1}^{i=k} P(A_i).$$

En particulier, si $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k\}$ est un système complet d'événements, nous avons : $\sum_{i=1}^{i=k} P(A_i) = 1$.

Lien entre la construction élémentaire et la définition axiomatique. Distribution de probabilité.

37 Nous avons vu (n° 30, p. 299) que la donnée d'une application p de Ω dans $\mathbb{R}_+$ telle que : $\sum_{i=1}^{i=n} p(a_i) = 1$ permet de construire une application P de $\mathfrak{T}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes de la définition.

Réciproquement, montrons qu'à toute probabilité P sur $\mathfrak{T}(\Omega)$, il est possible d'associer une telle application p.

Il suffit pour cela de définir l'application p par : $a_i \rightsquigarrow p(a_i) = P(\{a_i\})$.

Nous avons : $P(\{a_i\}) \geqslant 0$; l'application p ainsi construite est donc une application de Ω dans $\mathbb{R}_+$.

D'autre part, les événements élémentaires $\{a_i\}$ constituent un système complet d'événements ; nous avons : $\sum_{i=1}^{i=n} P(\{a_i\}) = 1$, c'est-à-dire : $\sum_{i=1}^{i=n} p(a_i) = 1$.

38 En résumé, une probabilité P sur $\mathfrak{T}(\Omega)$ est entièrement déterminée par la donnée d'une application p de Ω dans $\mathbb{R}_+$ telle que : $\sum_{i=1}^{i=n} p(a_i) = 1$.

Posons alors la définition :

DÉFINITION : On appelle distribution de probabilité sur un ensemble fini non vide : $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ toute application p de Ω dans $\mathbb{R}_+$ telle que : $\sum_{i=1}^{i=n} p(a_i) = 1$.

La propriété précédente peut alors être énoncée :

THÉORÈME : Soit Ω un ensemble fini non vide. Une probabilité P définie sur $\mathfrak{T}(\Omega)$ est entièrement déterminée par la donnée d'une distribution de probabilité p définie sur Ω.

39 Remarques : 1. Soit P une probabilité sur $\mathfrak{T}(\Omega)$. Nous savons que : $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$. Cependant, il peut exister des événements A autres que $\varnothing$ et Ω tels que l'on ait : $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Par exemple, soit $\Omega = \{a_1, a_2\}$ et P la probabilité sur $\mathfrak{T}(\Omega)$ définie par la distribution de probabilité p : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $a_1 \rightsquigarrow 1$, $a_2 \rightsquigarrow 0$.

Du point de vue expérimental, si $\Omega = \{a_1, a_2\}$ est l'ensemble des résultats possibles pour une épreuve $(\mathcal{E}, \mathcal{C})$, la probabilité P ainsi construite n'est susceptible de représenter la réalité expérimentale que si l'événement $\{a_2\}$ est "physiquement" impossible, c'est-à-dire si $\{a_2\}$ n'est jamais réalisé au cours d'un grand nombre d'épreuves.

En d'autres termes, les conditions : $P(A) = 0$ ou : $P(A) = 1$ ne traduisent les notions d'événements impossibles ou certains du point de vue expérimental, que si l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ est un modèle acceptable pour le phénomène aléatoire étudié. Lors de l'étude de problème concrets, cette remarque nous guidera dans le choix de la probabilité P.

2. Si Ω a un seul élément : $\Omega = \{a\}$, la seule probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$ est définie par : $P(\varnothing) = 0$ et $P(\{a\}) = P(\Omega) = 1$. Quelle que soit l'épreuve $\mathcal{E}$, le résultat a est toujours réalisé. Dans ce cas, le phénomène étudié est du type déterministe.

Applications à des problèmes concrets.

Généralités.

40 Pour étudier un phénomène aléatoire, il faut :

1. Définir le complexe expérimental $\mathcal{C}$, y compris le mode d'observation des résultats, de façon à bien préciser l'épreuve $\mathcal{E}$ considérée.

2. Définir une loi de probabilité P sur $\mathcal{T}(\Omega)$ de façon que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ soit un modèle acceptable pour le phénomène étudié. Le plus souvent, la loi P est définie à partir de la distribution de probabilité p, ce qui revient à se donner les probabilités des événements élémentaires.

Lorsque des considérations de symétrie ou "d'indécision" font apparaître les n événements élémentaires $\{a_i\}$ comme "également probables", on prend, par définition la distribution constante définie par : $\forall a_i \in \Omega, \quad p(a_i) = P(\{a_i\}) = \frac{1}{n}$

Les événements élémentaires sont alors dits "équiprobables". Dans ces conditions, la probabilité d'un événement A est : $P(A) = \frac{\text{card A}}{n} = \frac{\text{card A}}{\text{card } \Omega}$

Pour traduire cette dernière égalité, on énonce :
"lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est égale au quotient du nombre de cas favorables à A par le nombre total de cas possibles".

On utilise, en particulier, l'équiprobabilité pour toutes les épreuves qui consistent à choisir au hasard un élément d'un ensemble ; par exemple : tirer au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes, tirer au hasard une boule dans une urne.

Si aucune constatation expérimentale ne permet a priori d'utiliser l'équiprobabilité, on définit généralement les $p(a_i)$ en se basant sur les fréquences expérimentales observées lors d'une série d'épreuves de nature analogue. Par exemple, des "tables de mortalité" sont utilisées pour établir les primes d'assurance-vie.

Le choix de la probabilité P résulte donc d'hypothèses faites sur le phénomène étudié, ou constitue une nouvelle hypothèse.
Nous allons maintenant étudier quelques exemples.

Jeu de pile ou face.

41 Soit $\mathcal{E}$ une épreuve effectuée dans les conditions $\mathcal{C}$ suivantes :
on jette une pièce en l'air, on attend qu'elle retombe, on observe alors le côté visible; on exclut a priori le cas où la pièce resterait en équilibre sur la tranche.
Dans ces conditions, nous avons : $\Omega = \{\text{pile, face}\}$.
Intuitivement, les deux événements $\{\text{pile}\}$ et $\{\text{face}\}$ paraissent équiprobables. Pour étudier ce jeu de pile ou face, nous choisissons donc la probabilité P définie par :

$$P(\{\text{pile}\}) = p(\text{pile}) = \frac{1}{2}; \qquad P(\{\text{face}\}) = p(\text{face}) = \frac{1}{2}.$$

Jet d'un dé.

42 Considérons une épreuve $\mathcal{E}$ effectuée dans les conditions $\mathcal{C}$ suivantes :
on jette un dé cubique sur une table, on attend qu'il s'immobilise et l'on observe le nombre de points marqués sur la face supérieure; on exclut le cas où le dé resterait en équilibre sur un sommet ou sur une arête.
Dans ces conditions, nous avons : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Si nous supposons que le dé n'est pas "pipé", c'est-à-dire alourdi sur certaines de ses faces, et que le joueur ne triche pas en le lançant d'une façon spéciale, les six événements élémentaires paraissent équiprobables. Nous choisissons donc de définir la probabilité P par : $\forall i \in \Omega, \quad p(i) = P(\{i\}) = \frac{1}{6}$.

Considérons l'événement A : "obtenir au moins 5" ; nous avons : $A = \{5, 6\}$.

La probabilité de A est donc : $P(A) = p(5) + p(6) = \frac{1}{3}$.

Si, après avoir fait un grand nombre de parties avec ce dé, nous observons que le 6 sort beaucoup plus souvent que le 1, il est vraisemblable que le dé est pipé. Dans ces conditions, nous définissons P en prenant pour valeur de chaque $p(i)$ les fréquences observées. Par exemple :
$p(1) = p(2) = p(3) = 0{,}1$; $p(4) = p(5) = 0{,}2$; $p(6) = 0{,}3$.
La probabilité d'obtenir au moins 5 est alors : $P(A) = p(5) + p(6) = 0{,}5$.

Jet de deux dés.

43 Nous reprenons l'épreuve $\mathcal{E}$ et les conditions $\mathcal{C}$ définies au n° 5, p. 293.
Nous savons que les éléments de Ω sont les 36 couples (i, j) où i et j sont deux entiers naturels tels que : $1 \leqslant i \leqslant 6$ et $1 \leqslant j \leqslant 6$.
Posons : $(i, j) = a_{ij}$.
Si les dés ne sont pas pipés, les 36 événements élémentaires $\{a_{ij}\}$ paraissent équiprobables. Nous définissons donc P en prenant :

$$P(\{a_{ij}\}) = p(a_{ij}) = \frac{1}{36}, \quad \text{pour : } 1 \leqslant i \leqslant 6 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant j \leqslant 6.$$

Considérons l'événement A défini par : "obtenir : $i + j = 6$" ;
nous avons : $A = \{a_{15}, a_{42}, a_{33}, a_{24}, a_{51}\}$. Nous en déduisons :

$$P(A) = p(a_{15}) + p(a_{42}) + p(a_{33}) + p(a_{24}) + p(a_{51}) = 5 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

De même, si B est l'événement "obtenir : $i + j \leqslant 3$" ; nous avons :
$B = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}\}$; nous en déduisons : $P(B) = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.

Tirage d'une boule dans une urne.

44 Considérons l'épreuve $\mathcal{E}$ définie par le complexe expérimental $\mathcal{C}$:
une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : trois boules blanches et deux boules noires ; on tire au hasard une boule.
Nous nous proposons de déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche et la probabilité d'obtenir une boule noire.
Les boules sont indiscernables au toucher ; il y a donc deux résultats possibles : la boule tirée est blanche ou la boule tirée est noire.

Nous avons donc : $\Omega = \{b, n\}$.

Les deux événements $\{b\}$ et $\{n\}$ de Ω ne paraissent pas équiprobables. Pour définir la probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$, nous allons modifier le complexe expérimental et en particulier les conditions d'observation. Décidons de numéroter les boules :

boules blanches : b_1, b_2, b_3 ; boules noires : n_1, n_2.

Pour la nouvelle épreuve $\mathcal{E}'$ ainsi définie, il a cinq résultats possibles :
$\Omega' = \{b_1, b_2, b_3, n_1, n_2\}$.
Si les boules ont été marquées de façon à ce qu'elles soient toujours indiscernables au toucher, les cinq événements élémentaires de Ω' paraissent équiprobables. Nous définissons donc la probabilité P' sur $\mathcal{P}(\Omega')$ par :

$$p'(b_1) = p'(b_2) = p'(b_3) = p'(n_1) = p'(n_2) = \frac{1}{5}.$$

Dans l'espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), P')$, l'événement B défini par "obtenir une boule blanche", c'est-à-dire : $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, a pour probabilité :

$$P'(B) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

De même, la probabilité de l'événement N : "obtenir une boule noire", c'est-à-dire :
$N = \{n_1, n_2\}$, est : $P'(N) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

Puisque les boules ont été marquées de façon à ce qu'elles restent indiscernables au toucher, nous avons en fait changé uniquement les conditions d'observation des résultats, une fois le tirage effectué. Il est donc naturel de construire la probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ en prenant :

$$P(\{b\}) = P'(B) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad P(\{n\}) = P'(N) = \frac{2}{5}.$$

Remarquons que le résultat obtenu est conforme à l'intuition courante.

EXERCICES

♦ Dans les exercices n^{os} 1 à 5, on considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ et on désigne par A, B, C, ..., des événements de $\mathcal{T}(\Omega)$.

1 Démontrer l'égalité :
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$$

2 On pose : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.
Calculer $P(A \Delta B)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

3 On pose : $C = A \cup \bar{B}$ et $D = \bar{A} \cup B$.
Calculer $P(C \cup D)$ et $P(C \cap D)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

4 Démontrer les égalités :
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$; $P(A - B) = P(A \cup B) - P(B)$.

5 On considère trois événements A, B, C.
1° Utiliser les notations du langage des ensembles pour exprimer les événements suivants :
D : des trois événements A, B, C, seul A est réalisé ;
E : des trois événements A, B, C, seul C n'est pas réalisé ;
F : l'un des trois événements A, B, C au moins est réalisé ;
G : deux au moins des trois événements A, B, C, sont réalisés ;
H : un seul des trois événements A, B, C est réalisé ;
J : deux et deux seulement des trois événements A, B, C sont réalisés ;
K : aucun des trois événements A, B, C n'est réalisé.
2° Calculer la probabilité de chacun des événements D, E, F, G, H, J, K en fonction des probabilités des événements A, B, C, $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$, $A \cap B \cap C$.

6 Soient P et P′ deux lois de probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$, et α et β deux réels positifs ou nuls. Montrer que $\alpha P + \beta P'$ est une loi de probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$ si et seulement si on a l'égalité : $\alpha + \beta = 1$.

7 Soient $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et Ω' une partie de Ω.
1° Montrer que l'application P′ de $\mathcal{T}(\Omega')$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :
$$\forall A \in \mathcal{T}(\Omega'), \quad A \longmapsto P'(A) = \frac{P(A \cap \Omega')}{P(\Omega')},$$
est une loi de probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega')$.
2° Montrer que P′ est la restriction de P à $\mathcal{T}(\Omega')$ si et seulement si on a l'égalité : $P(\Omega') = 1$.

8 Une urne contient cinq boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 5. On extrait, au hasard, une première boule, puis une seconde boule parmi les quatre boules qui restent. On observe alors le numéro i porté par la première boule et le numéro j porté par la seconde boule ; le résultat de cette observation est noté : (i, j).
1° Construire l'ensemble Ω et déterminer son cardinal.
2° Quelle distribution de probabilité p sur Ω est-il naturel de choisir pour probabiliser $\mathcal{T}(\Omega)$?

3° Calculer, dans ces conditions, la probabilité de chacun des événements suivants :

A : la première boule tirée porte le numéro 2 ;
B : la première boule tirée porte un numéro impair ;
C : la seconde boule tirée porte un numéro pair ;
D : les deux boules tirées portent un numéro pair ;
E : la somme $i + j$ est égale à 2.

9 Même exercice que le n° 8 pour une urne qui contient six boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 6.

10 Même exercice que le n° 8 pour une urne qui contient sept boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 7.

11 On jette deux dés cubiques discernables D_1 et D_2. Pour étudier cette épreuve, on utilise l'espace probabilisé construit au n° 42, p. 304.

1° Calculer la probabilité de chacun des événements :

A : obtenir au moins une face supérieure qui porte le point 1 ;
B : obtenir une somme de points impaire.

2° Définir les événements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$, puis calculer leurs probabilités respectives.

12 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : la carte tirée est l'as de trèfle ;
B : la carte tirée est un roi ;
C : la carte tirée est un pique ;
D : la carte tirée est un valet, une dame, un roi, ou un as ;
E : la carte tirée est un pique ou un trèfle.

13 Même exercice que le n° 12 pour un jeu de 52 cartes.

14 On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : les deux cartes tirées sont des rois ;
B : les deux cartes tirées sont des piques ;
C : les deux cartes tirées ont la même couleur ;
D : les deux cartes tirées sont deux valets de même couleur ;
E : les deux cartes tirées sont un roi et une dame.

15 Même exercice que le n° 14, pour un jeu de 52 cartes.

16 On tire au hasard et simultanément trois cartes d'un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : les trois cartes tirées sont des trèfles ;
B : les trois cartes tirées constituent une "tierce", c'est-à-dire trois trèfles, trois carreaux, trois cœurs ou trois piques qui se suivent.

17 On tire au hasard et simultanément quatre cartes d'un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité d'obtenir un carré.

EXERCICES

18 On considère trois billes numérotées 1, 2, 3 qui peuvent être mises dans trois trous a, b, c ; chaque trou peut contenir les trois billes.

1° On étudie l'épreuve qui consiste à mettre chaque bille dans l'un des trous. Déterminer le cardinal de l'ensemble Ω associé à cette épreuve. On pourra utiliser l'ensemble des applications de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{a, b, c\}$.

2° On admet que chaque bille est mise au hasard dans l'un des trous. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : l'un des trous contient au moins deux billes ;

B : chaque trou contient une bille ;

C : l'un des trous contient les trois billes.

19 On considère trois billes numérotées 1, 2, 3 qui peuvent être mises dans quatre trous a, b, c, d ; chaque trou peut contenir les trois billes.

1° On étudie l'épreuve qui consiste à mettre chaque bille dans l'un des trous. Déterminer le cardinal de l'ensemble Ω associé à cette épreuve.

2° On admet que chaque bille est mise au hasard dans l'un des trous. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : deux des trous au moins ne contiennent pas de bille ;

B : chaque trou contient au plus une bille ;

C : le trou a ne contient pas de bille ;

D : toutes les billes sont dans le même trou.

20 Un ascenseur dessert trois étages. Trois personnes prennent cet ascenseur au rez-de-chaussée. On admet que ces trois personnes descendent au hasard à l'un des trois étages. Calculer la probabilité pour que personne ne descende au deuxième étage, puis la probabilité pour qu'une personne descende à chacun des trois étages.

21 Huit équipes de football numérotées de 1 à 8, sont qualifiées pour les quarts de finale de la coupe de France. Les numéros des équipes qui doivent se rencontrer sont tirés au hasard dans une urne qui contient huit boules numérotées de 1 à 8. Pour cela, on effectue un premier tirage de deux boules qui déterminent les deux équipes qui disputent la première rencontre. On effectue ensuite un deuxième tirage de deux boules qui déterminent les deux équipes qui disputeront la deuxième rencontre. On effectue enfin un troisième tirage de deux boules dont les numéros déterminent les équipes qui disputeront la troisième rencontre. Les deux boules non tirées déterminent les équipes qui disputeront la quatrième rencontre.

1° Quelle est, lors du premier tirage, la probabilité pour que l'équipe 1 rencontre l'équipe 2 ?

2° Le premier tirage a donné le résultat : équipe 7 contre équipe 8. Quelle est, lors du deuxième tirage, la probabilité pour que l'équipe 1 rencontre l'équipe 2 ?

3° Le deuxième tirage a donné le résultat : équipe 5 contre équipe 6. Quelle est la probabilité, lors du troisième tirage, pour que l'équipe 1 rencontre l'équipe 2 ?

4° Le troisième tirage a donné le résultat : équipe 3 contre équipe 4. Quelle est alors la probabilité pour que l'équipe 1 rencontre l'équipe 2 ?

5° Comparer les quatre probabilités calculées aux questions 1°, 2°, 3°, 4°.

22 Une urne contient deux boules noires et une boule blanche indiscernables au toucher. On extrait au hasard et simultanément deux boules de l'urne et l'on observe la couleur des boules tirées.
1° Construire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qui permet d'étudier l'épreuve précédente.
2° Calculer la probabilité pour qu'une au moins des boules tirées soit noire.
3° Calculer la probabilité pour qu'une au moins des boules tirées soit blanche.

23 Même exercice que le n° 22 pour une urne qui contient quatre boules noires et trois boules blanches indiscernables au toucher.

24 Une urne contient deux boules noires, trois boules rouges et une boule blanche indiscernables au toucher. On extrait au hasard et simultanément deux boules de l'urne et l'on observe la couleur des boules tirées.
1° Construire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qui permet d'étudier l'épreuve précédente.
2° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : l'une, au moins, des boules tirées est noire ;
B : l'une, au moins, des boules tirées est rouge ;
C : l'une, au moins, des boules tirées est blanche.

25 Même exercice que le n° 24 pour une urne qui contient trois boules noires, quatre boules rouges et six boules blanches indiscernables au toucher.

26 Une urne contient cinq boules blanches, quatre boules rouges et trois boules vertes indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : "les trois boules tirées sont de couleurs différentes" ;
B : "les trois boules tirées sont blanches" ;
C : "deux des boules tirées au moins sont rouges".

27 On considère un dé cubique non pipé dont trois faces portent le numéro 3, deux faces le numéro 2 et une face le numéro 1.
1° Construire l'espace probabilisé qui permet d'étudier l'épreuve suivante : jeter ce dé, attendre qu'il s'immobilise et examiner le point marqué sur la face supérieure.
2° Construire l'espace probabilisé qui permet d'étudier l'épreuve suivante : jeter deux dés indiscernables du type précédent, attendre qu'ils s'immobilisent et examiner les points marqués sur les faces supérieures.
Calculer dans ce cas la probabilité de chacun des événements suivants :
A : les deux points obtenus sont pairs ;
B : les deux points obtenus sont impairs ;
C : la somme des points obtenus est paire.

EXERCICES

28 Problème posé par Montmort en 1708. n personnes laissent leurs chapeaux au vestiaire. Lorsqu'elles viennent les chercher chacune d'elles prend au hasard un chapeau.
Calculer, dans chacun des cas suivants, la probabilité pour qu'aucune des n personnes ne porte son chapeau :
a) $n = 2$; *b*) $n = 3$; *c*) $n = 4$; *d*) $n = 5$.

29 On considère dix paires différentes de chaussettes. On met les vingt chaussettes en vrac dans un tiroir.
1° On sort deux chaussettes au hasard ; quelle est la probabilité pour que l'on obtienne une paire de chaussettes semblables ?
2° On sort quatre chaussettes au hasard ; quelle est la probabilité pour que l'on obtienne au moins une paire de chaussettes semblables ?

30 Dans une loterie, on a vendu 200 billets et il y a 3 lots à attribuer. Les lots sont attribués par tirage au hasard parmi les 200 billets vendus. Une personne a acheté 5 billets.
1° Quelle est la probabilité pour qu'elle gagne un lot et un seulement ?
2° Quelle est la probabilité pour qu'elle gagne deux lots et deux seulement ?
3° Quelle est la probabilité pour qu'elle gagne les trois lots ?

31 On dispose au hasard les 32 cartes d'un jeu de belote de façon à constituer un tableau rectangulaire de quatre lignes et huit colonnes.
1° Calculer la probabilité pour que les quatre as se trouvent dans une même colonne.
2° Calculer la probabilité pour que les quatre as se trouvent dans une même ligne.
3° Calculer la probabilité pour que six colonnes ne contiennent aucun as et aucun roi.

20.
Variables aléatoires numériques

Notion de variable aléatoire.

1 **Premier exemple :** Reprenons l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à jeter deux dés cubiques discernables D_1 et D_2, et décidons d'observer les points marqués sur les faces supérieures. Nous avons construit l'ensemble Ω ; il est formé de 36 éléments a_{ij}.
L'événement élémentaire $\{a_{ij}\}$ est : "obtenir le point i sur le dé D_1 et le point j sur le dé D_2".
Nous avons aussi donné un diagramme de cet ensemble Ω (fig. 1, p. 293).
Portons notre attention sur la somme des points des deux dés; cette somme peut prendre toutes les valeurs entières de l'intervalle [2, 12].
A tout élément a_{ij} de l'ensemble Ω, associons la somme $i + j$ des points des faces supérieures des dés. Par exemple, à a_{23} associons l'entier naturel : $2 + 3 = 5$.
Nous définissons ainsi une application de Ω dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des valeurs est l'ensemble des entiers de l'intervalle [2, 12].
Désignons par X cette application de Ω dans $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \forall a_{ij} \in \Omega, \qquad a_{ij} \rightsquigarrow i + j.$$

La valeur prise par l'application X lorsqu'on effectue une épreuve $\mathcal{E}$ dépend donc de l'événement élémentaire qui est réalisé au cours de cette épreuve ; cette valeur de X ne peut être prévue a priori. Pour ces raisons, nous disons que X est une "variable aléatoire" définie sur Ω.
Par exemple, lorsque nous effectuons une épreuve $\mathcal{E}$, si l'événement $\{a_{ij}\}$ est réalisé, la variable aléatoire X prend la valeur : $X(a_{ij}) = i + j$.

2 **Deuxième exemple** : Considérons un dé cubique dont 4 faces sont peintes en rouge et 2 faces en vert. Jetons le dé sur une table plane, et attendons qu'il s'immobilise. Décidons d'observer la couleur de la face supérieure du dé.
L'ensemble Ω est : $\Omega = \{\text{rouge, vert}\}$.
A l'élément "rouge" de Ω associons le réel 0 ; à l'élément "vert", associons le réel 1.
Nous définissons ainsi la variable aléatoire X définie sur {rouge, vert} par :
rouge $\rightsquigarrow$ 0 ; vert $\rightsquigarrow$ 1.

3 D'une manière générale, nous donnons la définition suivante :

DÉFINITION : Soit : $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini non vide. On appelle variable* aléatoire X définie sur Ω, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$: $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_i \rightsquigarrow X(a_i)$.

Image de Ω par une variable aléatoire.

4 Soit I le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est l'image par X de l'ensemble Ω. L'ensemble Ω est fini et non vide ; l'ensemble I est donc aussi fini et non vide. Désignons par k le nombre d'éléments de I ; nous avons alors : $k \leqslant n$.
Dans la suite, nous noterons $x_1, x_2, \ldots, x_k$ les éléments de I et nous supposerons toujours que nous les avons numérotés dans l'ordre croissant :
$x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.

Considérons, par exemple, la variable aléatoire X définie au n° 1, p. 311 ; nous avons : $X(\Omega) = \mathrm{I} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
Pour cet exemple, nous avons : $n = 36$; $k = 11$; $x_h = h + 1$.

Partition de Ω associée à une variable aléatoire.

5 Reprenons l'exemple précédent, et désignons par h un entier naturel de l'intervalle $[2, 12]$.
Soit A_h l'ensemble des éléments a_{ij} de Ω pour lesquels on a : $i + j = h$.
Lorsque l'événement A_h est réalisé, la variable aléatoire X prend la valeur h.
Nous savons que X est une application ; les événements A_h sont donc disjoints.
Nous savons aussi que, à tout élément a_{ij} de Ω correspond une valeur de h ; la réunion des événements A_h est donc l'ensemble Ω.
Nous en concluons que les k ensembles A_h forment une partition de Ω, c'est-à-dire un système complet d'événements.
C'est un résultat que nous avons déjà mis en évidence au n° 16, p. 296.

* Il serait plus correct d'appeler X : fonction aléatoire. Par abus de langage, les probabilistes ont l'habitude de désigner par la même lettre l'application X de Ω dans $\mathbb{R}$ et l'image par X d'un élément de Ω.

6 D'une façon générale, soit X une variable aléatoire définie sur l'ensemble fini : $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et soit : $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ l'image de Ω par X.
Pour tout couple (h, m) d'entiers naturels de l'intervalle $[1, k]$, désignons respectivement par A_h et A_m les ensembles des éléments de Ω dont les images par X sont x_h et x_m : $A_h = \{a \mid a \in \Omega \text{ et } X(a) = x_h\}$; $A_m = \{a \mid a \in \Omega \text{ et } X(a) = x_m\}$.
Si : $h \neq m$, nous avons : $x_h \neq x_m$; les égalités : $X(a) = x_h$ et $X(a) = x_m$ ne peuvent avoir lieu simultanément. Il en résulte que, si h est différent de m, les sous-ensembles A_h et A_m sont disjoints.

D'autre part, d'après la définition de $\mathfrak{X}$, pour tout élément a de Ω, il existe un élément x_h de $\mathfrak{X}$ tel que $X(a)$ soit égal à x_h. Il en résulte que la réunion des k ensembles A_h est l'ensemble Ω.
En conclusion, les k ensembles A_h constituent une partition de Ω.

Événement lié à une variable aléatoire.

7 Lorsque l'on effectue une épreuve $\mathcal{E}$ d'un phénomène aléatoire, on peut chercher si la valeur prise par X au cours de cette épreuve vérifie ou ne vérifie pas telle ou telle propriété. Par exemple, si nous jetons deux dés discernables D_1 et D_2, nous pouvons vérifier si la somme des points marqués sur les faces supérieures, c'est-à-dire la valeur $X(a_{ij})$ de la variable aléatoire définie au n° 1, p. 311, est ou n'est pas inférieure à 4. La valeur prise par X est inférieure à 4 si et seulement si l'événement $A = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}\}$ est réalisé.
Nous disons que l'événement A est un événement lié à la variable aléatoire X.

8 D'une façon générale, il est intuitif de considérer qu'un événement de $\mathcal{T}(\Omega)$ est lié à une variable aléatoire X s'il est possible de caractériser ses éléments par une condition qui porte sur les valeurs de X, c'est-à-dire sur les éléments de $\mathfrak{X}$.
Toute condition sur les éléments de $\mathfrak{X}$ peut s'exprimer par l'appartenance à un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{X}$; nous sommes donc amenés à donner la définition suivante :

DÉFINITION : Soit X une variable aléatoire définie sur un ensemble fini non vide Ω et soit $\mathfrak{X}$ l'image de Ω par X. Un événement A de $\mathcal{T}(\Omega)$ est un événement lié à X si et seulement s'il existe un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{X}$ tel que A soit l'ensemble des éléments de Ω dont les images par X appartiennent à $\mathcal{A}$: $A = \{a \mid a \in \Omega \text{ et } X(a) \in \mathcal{A}\}$.

Événement $[X = x_h]$. Événement $[X < \lambda]$.

9 Les sous-ensembles A_h de Ω introduits au n° 6, sont des événements liés à X.
Posons, en effet : $\mathcal{A}_h = \{x_h\}$; nous avons : $A_h = \{a \mid a \in \Omega \text{ et } X(a) \in \mathcal{A}_h\}$.
Nous notons cet événement : $[X = x_h]$.
Il résulte de l'étude précédente que les événements : $[X = x_h]$ constituent un système complet d'événements liés à X.

10 Soit λ un réel. Désignons par $\mathcal{S}_\lambda$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{X}$ qui sont inférieurs à λ :
$\mathcal{S}_\lambda = \{x \mid x \in \mathcal{X} \text{ et } x < \lambda\} = \mathcal{X} \cap]-\infty, \lambda[$.
L'événement S_λ défini par :
$S_\lambda = \{a \mid a \in \Omega \text{ et } X(a) \in \mathcal{S}_\lambda\} = \{a \mid a \in \Omega \text{ et } X(a) < \lambda\}$
est un événement lié à X. Nous notons cet événement : $[X < \lambda]$.
Nous définissons d'une manière analogue les événements : $[X > \lambda]$; $[X \leqslant \lambda]$; $[X \geqslant \lambda]$.

11 **Exemples :** Considérons l'ensemble Ω et la variable aléatoire X définie lors de l'étude de l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à jeter deux dés discernables (n° 1 p. 311).
Nous avons : $\mathcal{X} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

1. Au sous-ensemble : $\mathcal{A} = \{2, 6\}$ de $\mathcal{X}$ correspond l'événement A lié à X :
$A = \{a_{11}, a_{15}, a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{51}\}$.
2. Au réel : $\lambda = 3{,}5$ correspond le sous-ensemble : $\mathcal{S}_\lambda = \{2, 3\}$.
L'événement S_λ lié à X est alors : $S_\lambda = [X < 3{,}5] = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}\}$.
3. Au réel : $\lambda = 13$ correspond le sous-ensemble : $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{X}$.
L'événement S_λ lié à X est alors : $S_\lambda = [X < 13] = \Omega$.
4. Au réel : $\lambda = 1, 8$ correspond le sous-ensemble : $\mathcal{S}_\lambda = \varnothing$.
L'événement S_λ lié à X est alors : $S_\lambda = [X < 1, 8] = \varnothing$.

Propriété des événements liés à X.

12 **Exemple :** Reprenons l'épreuve $\mathcal{E}$ décrite au n° 43, p. 304.
Considérons, par exemple, l'événement : $A = \{a_{11}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{66}\}$.
Posons : $\mathcal{A} = \{2, 4, 12\}$; nous avons l'égalité : $A = \{a_{ij} \mid a_{ij} \in \Omega \text{ et } X(a_{ij}) \in \mathcal{A}\}$.
L'événement A est donc lié à X ; nous constatons que A est la réunion des événements : $[X = 2]$, $[X = 4]$, $[X = 12]$.

13 D'une manière générale, on démontre (Ex. n° 8, p. 320) et nous admettons la propriété suivante :

THÉORÈME : Soient Ω un ensemble fini non vide, X une variable aléatoire définie sur Ω, $\{A_1, A_2, \ldots A_k\}$ la partition de Ω associée à X. Si A est un événement lié à X, alors A est une réunion de sous-ensembles A_h.

14 **Remarque :** Il peut exister des événements de $\mathcal{T}(\Omega)$ qui ne sont pas des événements liés à X. Reprenons l'épreuve $\mathcal{E}$ décrite au n° 43 p. 304, et considérons le sous-ensemble de Ω : $B = \{a_{11}, a_{42}\}$.
Cherchons s'il existe une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$ telle que B soit l'ensemble des éléments de Ω dont l'image par X appartient à $\mathcal{B}$. Si une telle partie $\mathcal{B}$ existe, nous avons nécessairement : $\mathcal{B} = \{2, 6\}$. Nous avons vu que l'événement lié à X correspondant est :
$A = \{a_{11}, a_{15}, a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{51}\}$.
L'événement B n'est donc pas un événement lié à X.

Distribution de probabilité d'une variable aléatoire.

15 Toutes les notions que nous avons introduites jusqu'ici ne font intervenir que les ensembles Ω et $\mathcal{T}(\Omega)$. Nous allons maintenant considérer une probabilité P sur $\mathcal{T}(\Omega)$ et montrer que le calcul de la probabilité d'un événement lié à X peut être simplifié dès que l'on connaît les probabilités des événements : $A_h = [X = x_h]$.

16 Soit $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω. Les notations utilisées sont celles des paragraphes précédents.
Considérons l'application p_x définie par :

$$p_x : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+, \qquad x_h \rightsquigarrow p_x(x_h) = P[X = x_h].$$

Cette application est une distribution de probabilité sur $\mathbb{X}$. En effet :

1. Par définition, nous avons : $\forall x_h \in \mathbb{X}, \quad p_x(x_h) \geqslant 0$;

2. L'ensemble des événements $[X = x_h]$ pour : $1 \leqslant h \leqslant k$, constituent un système complet d'événements; nous avons donc : $\sum_{h=1}^{h=k} P[X = x_h] = 1$.

Il en résulte : $\sum_{h=1}^{h=k} p_x(x_h) = 1$.

THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire définie sur Ω, $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$ l'image de Ω par X. L'application p_x de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$p_x : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+, \qquad x_h \rightsquigarrow p_x(x_h) = P[X = x_h].$$

est une distribution de probabilité sur $\mathbb{X}$ appelée distribution de probabilité de la variable aléatoire X.

Dans la suite, pour simplifier les notations, nous noterons souvent : $p_x(x_h) = p_h$.

17 **Exemples** : 1. Reprenons l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à extraire une boule d'une urne qui contient trois boules blanches et deux boules noires (n° 44, p. 305).

Nous avons : $\Omega = \{b, n\}$ et $P(\{b\}) = \frac{3}{5}$, $P(\{n\}) = \frac{2}{5}$.

Soit X la variable aléatoire définie sur Ω par : $X(b) = 1$ et $X(n) = 0$.

Nous avons alors : $\mathbb{X} = \{0, 1\}$, $P[X = 0] = \frac{2}{5}$, $P[X = 1] = \frac{3}{5}$.

La distribution de probabilité de X est l'application p_x définie par :

$$p_x : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+, \qquad 0 \rightsquigarrow p_x(0) = \frac{2}{5}, \qquad 1 \rightsquigarrow p_x(1) = \frac{3}{5}.$$

2. Reprenons l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à jeter des dés discernables et la variable aléatoire X définie au n° 1, p. 311.

La distribution de probabilité de X est définie par le tableau suivant :

$x_h = 1 + h$	$A_h = [X = x_h]$	$p_X(x_h) = p_h$
2	$\{a_{11}\}$	1/36
3	$\{a_{12}, a_{21}\}$	1/18
4	$\{a_{13}, a_{22}, a_{31}\}$	1/12
5	$\{a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}\}$	1/9
6	$\{a_{15}, a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{51}\}$	5/36
7	$\{a_{16}, a_{25}, a_{34}, a_{43}, a_{52}, a_{61}\}$	1/6
8	$\{a_{26}, a_{35}, a_{44}, a_{53}, a_{62}\}$	5/36
9	$\{a_{36}, a_{45}, a_{54}, a_{63}\}$	1/9
10	$\{a_{46}, a_{55}, a_{64}\}$	1/12
11	$\{a_{56}, a_{65}\}$	1/18
12	$\{a_{66}\}$	1/36

Probabilité d'un événement lié à une variable aléatoire.

18 Soit A un événement, lié à une variable aléatoire X, défini par :

$A = \{a \mid a \in \Omega \text{ et } X(a) \in \mathcal{A}\}$, avec : $\mathcal{A} = \{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots, x_{\alpha_q}\}$, où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_q$ désignent q indices distincts appartenant à $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Nous savons alors que (n° 13, p. 314) :

$A = A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \cup A_{\alpha_3} \cup \ldots \cup A_{\alpha_q}$.

Les événements A_h sont deux à deux incompatibles ; nous avons donc :

$P(A) = P(A_{\alpha_1}) + P(A_{\alpha_2}) + P(A_{\alpha_3}) + \ldots + P(A_{\alpha_q})$, c'est-à-dire :

$P(A) = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + p_{\alpha_3} + \ldots + p_{\alpha_q}$.

Nous en déduisons le théorème :

THÉORÈME : La probabilité d'un événement A lié à une variable aléatoire X, dont l'image par X est le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{X}$, est égale à la somme des coefficients p_h associés à tous les éléments de $\mathcal{A}$ par la distribution de probabilité p_X de X.

19 Exemple : Reprenons l'exemple des deux dés.
Soit l'événement lié à X : $A = [X < 6]$; nous avons : $\mathcal{A} = X(A) = \{2, 3, 4, 5\}$.

Il en résulte :

$$P(X < 6) = p_x(2) + p_x(3) + p_x(4) + p_x(5) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \neq 0{,}28.$$

De même, nous avons :

$$P(5 \leqslant X < 7) = p_x(5) + p_x(6) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

$$P(X > 12) = 0.$$

Nous remarquons sur ces exemples que, si un événement A lié à X est défini par des égalités ou des inégalités, sa probabilité se calcule à partir de la distribution p_x en additionnant les coefficients p_h associés aux éléments x_h de $\mathcal{X}$ qui vérifient ces égalités ou ces inégalités.

20 **Remarque** : Si A est un événement lié à X, pour déterminer P(A), il est inutile de revenir à l'ensemble Ω ; on se sert de la distribution de probabilité p_x définie sur $\mathcal{X}$.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire.

21 Nous avons vu que pour tout réel λ, l'événement $[X < \lambda]$ est un événement lié à X.

DÉFINITION : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad F(\lambda) = P[X < \lambda].$$

Soit : $\mathcal{X} = X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$ et soit : $p_h = p_x(x_h) = P[X = x_h]$.
$P[X < \lambda]$ est la somme des coefficients p_i associés aux réels x_i tels que : $x_i < \lambda$.

Il en résulte les propriétés suivantes :

$$(\lambda \leqslant x_1) \Longrightarrow (F(\lambda) = 0);$$
$$(x_1 < \lambda \leqslant x_2) \Longrightarrow (F(\lambda) = p_1);$$
$$(x_2 < \lambda \leqslant x_3) \Longrightarrow (F(\lambda) = p_1 + p_2);$$
$$(x_3 < \lambda \leqslant x_4) \Longrightarrow (F(\lambda) = p_1 + p_2 + p_3);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_h < \lambda \leqslant x_{h+1}) \Longrightarrow (F(\lambda) = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_h);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x_{k-1} < \lambda \leqslant x_k) \Longrightarrow (F(\lambda) = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{k-1});$$
$$(x_k < \lambda) \Longrightarrow (F(\lambda) = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = 1).$$

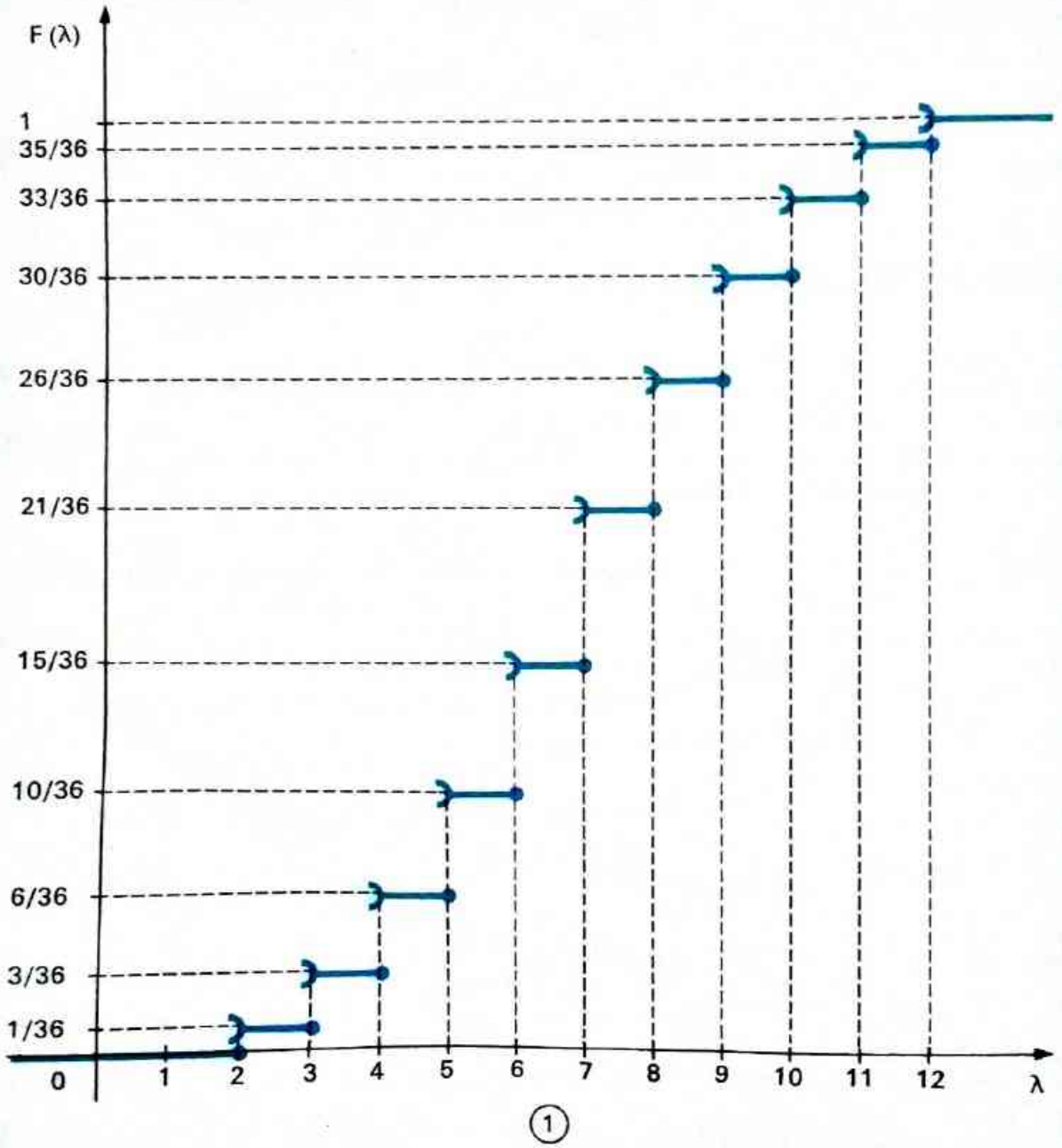
La fonction de répartition F est donc une fonction en escalier croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en tout point de $\mathbb{R} - \mathcal{X}$; elle est continue à gauche en chacun des points de $\mathcal{X}$.

22 Exemple : Reprenons la variable aléatoire X définie au n° 1, p. 311.

Pour la fonction de répartition F de X, nous avons :

$(\lambda \leqslant 2) \Longrightarrow (F(\lambda) = 0)$;
$(2 < \lambda \leqslant 3) \Longrightarrow (F(\lambda) = 1/36)$;
$(3 < \lambda \leqslant 4) \Longrightarrow (F(\lambda) = 3/36)$;
$(4 < \lambda \leqslant 5) \Longrightarrow (F(\lambda) = 6/36)$;
$(5 < \lambda \leqslant 6) \Longrightarrow (F(\lambda) = 10/36)$;
$(6 < \lambda \leqslant 7) \Longrightarrow (F(\lambda) = 15/36)$;
$(7 < \lambda \leqslant 8) \Longrightarrow (F(\lambda) = 21/36)$;
$(8 < \lambda \leqslant 9) \Longrightarrow (F(\lambda) = 26/36)$;
$(9 < \lambda \leqslant 10) \Longrightarrow (F(\lambda) = 30/36)$;
$(10 < \lambda \leqslant 11) \Longrightarrow (F(\lambda) = 33/36)$;
$(11 < \lambda \leqslant 12) \Longrightarrow (F(\lambda) = 35/36)$;
$(12 < \lambda) \Longrightarrow (F(\lambda) = 1)$.

La représentation graphique de F est donnée par la figure 1.



①

Exemples d'utilisation de la fonction de répartition.

23 Soit a un réel donné. Les événements $[X < a]$ et $[X \geqslant a]$ sont liés à X.
Nous avons : $[X < a] \cap [X \geqslant a] = \varnothing$ et $[X < a] \cup [X \geqslant a] = \Omega$.
Il en résulte : $P[X < a] + P[X \geqslant a] = P(\Omega) = 1$.

Nous avons donc : $\boxed{P[X \geqslant a] = 1 - F(a)}$

24 Soient a et b deux réels donnés : $a < b$.
Considérons les événements liés à X : $[a \leqslant X < b]$; $[X < a]$; $[X < b]$.

Nous avons :
$[X < a] \cap [a \leqslant X < b] = \varnothing$ et $[X < a] \cup [a \leqslant X < b] = [X < b]$.
Il en résulte : $P[X < a] + P[a \leqslant X < b] = P[X < b]$.

Nous avons donc : $\boxed{P[a \leqslant X < b] = F(b) - F(a)}$

Exemple : Reprenons la variable aléatoire X définie au n° 1, p. 311.
Nous avons défini sa fonction de répartition au paragraphe 22. Nous en déduisons :

$$P[4 \leqslant X < 7] = F(7) - F(4) = \frac{21}{36} - \frac{3}{36} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

EXERCICES

1 On considère un ensemble Ω fini non vide et une variable aléatoire X définie sur Ω. Soit $\mathcal{R}$ la relation dans Ω définie par :
$(a \mathcal{R} b) \iff \big(X(a) = X(b)\big)$.
1° Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans Ω.
2° Quelles sont les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$? Quel résultat du cours retrouve-t-on ainsi ?

2 On considère un ensemble Ω fini non vide et une variable aléatoire X définie sur Ω. Soient A et B deux événements liés à X.
1° L'événement $A \cup B$ est-il lié à X ?
2° L'événement $A \cap B$ est-il lié à X ?
3° L'événement $\overline{A}$ est-il lié à X ?

3 Soit X une variable aléatoire définie sur un ensemble fini non vide Ω et soit : $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$, l'image de Ω par X. On désigne par λ et par μ deux réels.
1° A quelle condition a-t-on : $[X = \lambda] = [X = \mu]$?
2° A quelle condition a-t-on : $[X = \lambda] = [X < \mu]$?
3° A quelle condition a-t-on : $[X < \lambda] = [X < \mu]$?
4° A quelle condition a-t-on : $[X \leqslant \lambda] = [X < \lambda]$?

EXERCICES

4 On considère l'ensemble : $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ et la variable aléatoire X définie sur Ω par : $X(a_1) = 0$, $X(a_2) = 1$, $X(a_3) = 0$, $X(a_4) = 2$, $X(a_5) = 0$, $X(a_6) = 2$, $X(a_7) = 1$.
Déterminer tous les événements de $\mathcal{T}(\Omega)$ qui sont liés à X.

5 Même exercice que le n° 4, pour l'ensemble : $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, et pour la variable aléatoire X définie par : $X(a_1) = 0$, $X(a_2) = 1$, $X(a_3) = 2$, $X(a_4) = 3$, $X(a_5) = 1$, $X(a_6) = 3$.

6 Soit : $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ et soit P la probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$ définie par la distribution p suivante : $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $p(a_i) = \frac{1}{7}$.

1° Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire X définie sur Ω par : $X(a_1) = X(a_2) = X(a_3) = 1$, $X(a_4) = 2$, $X(a_5) = X(a_6) = 3$, $X(a_7) = 4$.
2° Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire Y définie sur Ω par : $Y(a_1) = 0$, $Y(a_2) = Y(a_3) = 1$, $Y(a_4) = 2$, $Y(a_5) = Y(a_6) = 3$, $Y(a_7) = 4$.
3° Définir la fonction de répartition pour chacune des variables aléatoires X et Y et en donner une représentation graphique.

7 Soit $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Montrer que la donnée de la distribution de probabilité p_x de la variable aléatoire X permet de déterminer la probabilité P si et seulement si X est une injection.

8 Soit X une variable aléatoire définie sur un ensemble fini Ω et soit $\mathfrak{X} = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, l'image de Ω par X. Montrer qu'un événement A est lié à X si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
1° $A = \varnothing$;
2° $A = [X = x_k]$;
3° A est une réunion d'événements $[X = x_k]$.

9 On jette deux dés discernables non pipés et l'on observe les points marqués sur les faces supérieures. L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ qui permet d'étudier cette épreuve a été construit dans le cours (n° 43, p. 304).
Soient X et Y les variables aléatoires définies sur Ω respectivement par :
$X(a_{ij}) = 0$ si $i + j$ est pair et : $X(a_{ij}) = 1$ si $i + j$ est impair ;
$\forall a_{ij} \in \Omega$, $Y(a_{ij}) = |i - j|$.
1° Déterminer la distribution de probabilité de chacune des variables aléatoires X et Y et construire pour chacune d'elles un diagramme en bâtons.
2° Déterminer la fonction de répartition de chacune des variables aléatoires X et Y et en donner une représentation graphique.
3° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
$[X < 1]$; $[X \geqslant 1]$; $[X < 0]$; $[1 < X < 1]$; $[X \leqslant 0]$;
$[Y < 2]$; $[Y \geqslant 4]$; $[Y > 4]$; $[2 \leqslant Y < 5]$; $[Y \geqslant 6]$.

10 On jette trois pièces discernables A_1, A_2, A_3 et l'on observe les côtés visibles. Par exemple si le côté visible de A_1 est : face, celui de A_2 : pile, celui de A_3 : face, le résultat observé est noté : (F, P, F).

1° Construire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ qui permet d'étudier l'épreuve précédente.

2° A chaque triplet de Ω, on associe le nombre de coordonnées égales à F ; ce nombre est 0, 1, 2, ou 3.

Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire X ainsi définie.

3° Déterminer la fonction de répartition de X.

4° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : un côté visible au moins est : face ;

B : deux côtés visibles au moins sont : face ;

C : un côté visible au moins est face et un côté visible au moins est pile ;

D : un côté visible au moins est : pile.

11 On extrait 8 cartes au hasard, c'est-à-dire une main, d'un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire qui à chaque main associe le nombre d'as contenus dans cette main.

1° Déterminer la distribution de probabilité de X.

2° Déterminer la fonction de répartition de X.

3° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

$[X \geqslant 2]$; $[X \geqslant 3]$; $[1 \leqslant X \leqslant 3]$; $[2 \leqslant X < 4]$.

12 Même exercice que le n° 11, pour une main de 13 cartes tirées au hasard dans un jeu de 52 cartes.

13 On considère deux urnes U_1 et U_2 qui contiennent respectivement chacune dix boules numérotées de 0 à 9. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans chaque urne. Si la boule tirée de U_1 porte le numéro a_1 et si la boule tirée de U_2 porte le numéro a_2, on note le résultat observé sous forme d'un entier de deux chiffres : $z = \overline{a_1\, a_2}$. (Si $a_1 = 0$, on considère que la notation $\overline{0a_2}$ représente l'entier a_2).

1° Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire X définie par : $X(\overline{a_1\, a_2}) = 0$ si $a_1 \neq a_2$,

et : $X(\overline{a_1\, a_2}) = 1$ si $a_1 = a_2$.

2° Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire Y définie par :

$Y(\overline{a_1\, a_2}) = 0$ si $a_1 = a_2 = 0$,

$Y(\overline{a_1\, a_2}) = 1$ si $1 \leqslant \overline{a_1\, a_2} \leqslant 9$,

$Y(\overline{a_1\, a_2}) = 2$ si $10 \leqslant \overline{a_1\, a_2} \leqslant 99$.

3° Déterminer les fonctions de répartition des variables aléatoires X et Y et construire leur représentation graphique.

EXERCICES

14 On considère trois clefs et trois serrures. Chaque clef permet d'ouvrir une serrure et une seule. On place au hasard chaque clef dans l'une des serrures et l'on essaie d'ouvrir les serrures.
1° Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire X qui prend la valeur k si l'on réussit à ouvrir k serrures.
2° Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

15 Même exercice que le n° 14, pour quatre clefs et quatre serrures.

16 Même exercice que le n° 14, pour cinq clefs et cinq serrures.

17 Même exercice que le n° 14, pour quatre clefs et cinq serrures.

18 Même exercice que le n° 14, pour quatre clefs et six serrures.

19 Un concours consiste à classer n qualités d'un produit par ordre de préférence. La liste de chaque concurrent est comparée à une liste type établie par un jury. Un concurrent classe au hasard les n qualités.
1° Quelle est la probabilité pour que la liste ainsi établie soit la liste type ?
2° Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur k si les k premières qualités de la liste établie au hasard coïncident avec les k premières qualités de la liste type. Déterminer la distribution de probabilité et la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
3° On donne $n = 5$. Calculer la probabilité de chacun des événements : $[X = 3]$; $[X = 4]$; $[X = 5]$.

20 On considère n personnes qui se mettent en rang au hasard. On désigne par A et par B deux de ces personnes. Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire X qui prend la valeur k s'il y a k personnes entre A et B.

21 Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On extrait au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on a tiré k boules rouges et soit Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on a tiré k boules blanches.
1° Déterminer la distribution de probabilité de chacune des variables aléatoires X et Y.
2° Déterminer la fonction de répartition de X et la fonction de répartition de Y.

22 Même exercice que le n° 21 pour une urne qui contient r boules rouges et b boules blanches, lorsque l'on extrait au hasard et simultanément n boules ($n \leqslant b + r$).

21.

Indépendance en probabilité Distribution binomiale

Probabilité conditionnelle.

Étude d'un exemple.

Considérons l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à jeter un dé, non pipé, et à observer les points marqués sur la face supérieure. Pour cette épreuve $\mathcal{E}$, nous avons : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Au n° 42, p. 304, nous avons défini une probabilité P sur $\mathcal{T}(\Omega)$ en supposant que les événements élémentaires de Ω sont équiprobables.

Pour tout élément i de Ω, nous avons posé : $p(i) = \mathrm{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$.

Considérons l'événement A défini par : "obtenir au moins 3". Nous avons : $\mathrm{A} = \{3, 4, 5, 6\}$; la probabilité de A est donc :

$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \frac{2}{3}$.

Décidons alors de ne considérer que les épreuves $\mathcal{E}$ pour lesquelles le nombre des points marqués sur la face supérieure est au moins égal à 3 ; nous définissons ainsi un nouveau type d'épreuves notées $\mathcal{E}'$.
Pour une épreuve $\mathcal{E}'$, nous avons : $\Omega' = \{3, 4, 5, 6\} = \mathrm{A}$.

Pour probabiliser $\mathcal{T}(\Omega')$, il est naturel de considérer que les événements élémentaires de Ω' sont encore équiprobables. Soit donc P' la probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega')$ définie par :

$p'(k) = \mathrm{P}'(\{k\}) = \frac{1}{4}$, pour : $k \in \Omega'$.

Soit B un événement lié à $\mathcal{E}$, par exemple : "obtenir au plus 4".
Soit B' l'événement lié à $\mathcal{E}'$ défini par la même propriété : "obtenir au plus 4".
Nous avons : $\mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathrm{B}' = \{3, 4\}$.
Nous constatons l'égalité : $\mathrm{B}' = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$.

Dans l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), \mathrm{P})$, nous avons : $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

B' est à la fois un sous-ensemble de Ω et un sous-ensemble de Ω'. Nous pouvons considérer B' soit comme un événement lié à $\mathcal{E}$ soit comme un événement lié à $\mathcal{E}'$.

Dans l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$, nous avons : $P(B') = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

dans l'espace probabilisé fini $(\Omega', \mathcal{T}(\Omega'), P')$, nous avons : $P'(B') = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$P(B') = P(B \cap A)$ représente la probabilité pour que A et B soient réalisés simultanément, alors que $P'(B')$ représente la probabilité pour que B soit réalisé une fois que l'on a **imposé** à A d'être réalisé.

On dit que $P'(B')$ est la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé.

Considérons l'application P_A de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que : $P_A(B) = P'(B')$.

Nous remarquons que : $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

De même, soit C l'événement lié à $\mathcal{E}$: "obtenir au plus 2", et soit C' l'événement lié à $\mathcal{E}'$: "obtenir au plus 2"; nous avons : $C = \{1, 2\}$ et $C' = \varnothing$.

Nous constatons l'égalité : $C' = C \cap A = \varnothing$.

Dans l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$, nous avons : $P(C') = P(C \cap A) = 0$.

Dans l'espace probabilisé fini $(\Omega', \mathcal{T}(\Omega'), P')$, nous avons : $P'(C') = 0$.

Les événements C et A sont incompatibles; la probabilité conditionnelle de C sachant que A est réalisé est nulle.

Nous remarquons encore que : $P_A(C) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)}$.

A chaque événement D lié à $\mathcal{E}$, nous avons donc associé un réel positif ou nul $P_A(D)$ défini par : $P_A(D) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)}$, appelé probabilité conditionnelle de D sachant que A est réalisé.

Probabilité conditionnelle.

2 THÉORÈME : Soit $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soit A un événement tel que : $P(A) \neq 0$. L'application P_A définie par :

$$P_A : \mathcal{T}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad B \rightsquigarrow P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)},$$

est une probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$.

1. La propriété : $(\forall B \in \mathcal{T}(\Omega), P_A(B) \geqslant 0)$ est évidente d'après la définition de P_A.

2. Nous avons : $P_A(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$.

3. Soient B et C deux événements tels que : $B \cap C = \varnothing$.

Nous avons : $(B \cap A) \cap (C \cap A) = (B \cap C) \cap A = \varnothing$.

et : $(B \cap A) \cup (C \cap A) = (B \cup C) \cap A$.

Nous avons donc : $P((B \cup C) \cap A) = P(B \cap A) + P(C \cap A)$.

Il en résulte que :

$$P_A(B \cup C) = \frac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A) + P(C \cap A)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C).$$

En résumé, nous avons l'implication :

$$\forall B \in \mathcal{T}(\Omega), \quad \forall C \in \mathcal{T}(\Omega), \quad (B \cap C = \varnothing) \Longrightarrow (P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C)).$$

Le théorème précédent nous permet de donner la définition :

3 DÉFINITION : Soit $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soit A un événement tel que : $P(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle relative à A la loi de probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$ définie par :

$$P_A : \mathcal{T}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad B \rightsquigarrow P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Le réel $P_A(B)$, que l'on note parfois $P(B/A)$, est la probabilité de B sachant que A est réalisé ou probabilité conditionnelle de B relative à A.

4 Soient A et B deux événements tels que : $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
Nous pouvons alors définir la probabilité conditionnelle relative à A et la probabilité conditionnelle relative à B ; nous avons :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Il en résulte les égalités : $P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A) = P_B(A) \cdot P(B)$.

Distribution de probabilité d'une probabilité conditionnelle.

5 Soit P_A une probabilité conditionnelle relative à un événement A tel que $P(A) \neq 0$.
Soit p_A la distribution de probabilité associée à P_A. Posons : $A_i = \{a_i\}$.
Par définition, nous avons :

$$p_A(a_i) = P_A(\{a_i\}) = \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)}.$$

A_i est un singleton ; si $a_i \in A$, on a : $A_i \cap A = A_i$
si $a_i \notin A$, on a : $A_i \cap A = \varnothing$.

Il en résulte que : si $a_i \in A$, $p_A(a_i) = \dfrac{P(A_i)}{P(A)} = \dfrac{p_i}{P(A)}$

si $a_i \notin A$, $p_A(a_i) = 0$.

La distribution p_A peut donc être construite à partir de la distribution p :

si $a_i \notin A$, on lui associe le coefficient 0 ;
si $a_i \in A$, on lui associe le coefficient p_i divisé par la probabilité de A, c'est-à-dire par la somme des coefficients p_i associés aux éléments de A.

Événements indépendants.

Étude d'un exemple.

6 Considérons l'épreuve $\mathcal{E}$ suivante : un enquêteur choisit une personne au hasard dans un ensemble Ω de n électeurs ($n \neq 0$). Si le choix a effectivement lieu "au hasard", il est naturel de considérer que les événements élémentaires sont équiprobables.

Soit donc P la probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ définie par : $\forall a \in \Omega, \quad p(a) = P(\{a\}) = \frac{1}{n}$.

Soit A l'événement "la personne choisie est une femme" et soit B l'événement "la personne choisie s'est abstenue de voter aux dernières élections".

Posons : card A $= n_1$ et card B $= n_2$; nous supposons : $n_1 \neq 0$.

Nous avons : $P(A) = \frac{n_1}{n}$ et $P(B) = \frac{n_2}{n}$.

P(A) est non nul ; nous pouvons définir la probabilité conditionnelle P_A relative à A.

Le réel : $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ représente la probabilité pour que la personne choisie soit un abstentionniste sachant que c'est une femme, c'est-à-dire la probabilité de choisir un abstentionniste si l'enquêteur effectue son choix parmi les éléments de A.

Posons : card $(A \cap B) = n_2'$; nous avons : $P_A(B) = \frac{n_2'}{n_1}$.

Faisons l'hypothèse qu'il n'existe aucun lien causal entre le sexe d'un électeur et le fait d'être ou non abstentionniste.
Intuitivement, cela revient à admettre que la proportion d'abstentionnistes dans l'ensemble Ω des n électeurs est égale à la proportion d'abstentionnistes dans l'ensemble A des n_1 femmes, c'est-à-dire : $\frac{n_2}{n} = \frac{n_2'}{n_1}$.

S'il en est ainsi, nous avons : $P_A(B) = P(B)$; il en résulte l'égalité : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Cette dernière égalité traduit l'hypothèse de l'absence de tout lien causal entre les événements A et B. On dit que les événements A et B sont indépendants en probabilité, ou encore stochastiquement indépendants.

Événements indépendants.

7 L'exemple précédent nous conduit à donner la définition suivante :

DÉFINITION : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. On dit que deux événements A et B sont indépendants dans cet espace si et seulement si on a l'égalité : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

8 **Exemples :** 1. $\forall A \in \mathcal{T}(\Omega)$, $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(\Omega)$.
L'événement certain Ω et un événement quelconque A sont toujours indépendants.

2. $\forall A \in \mathcal{T}(\Omega)$, $P(A \cap \varnothing) = P(\varnothing) = 0 = P(A) \cdot 0 = P(A) \cdot P(\varnothing)$.
L'événement impossible $\varnothing$ et un événement quelconque A sont toujours indépendants.

3. Considérons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ construit pour étudier l'épreuve $\mathcal{E}$: jeter deux dés discernables D_1 et D_2 (n° 43, p. 304). La probabilité P a été définie par :

$$p(a_{ij}) = P(\{a_{ij}\}) = \frac{1}{36}, \quad \text{pour : } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6.$$

Soient les trois événements :

A : "obtenir $n_1 + n_2 = 6$", $A = \{a_{15}, a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{51}\}$;
B : "obtenir $n_1 = 2$", $B = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}\}$;
C : "obtenir $n_2 = 6$", $C = \{a_{16}, a_{26}, a_{36}, a_{46}, a_{56}, a_{66}\}$.

Nous avons : $A \cap B = \{a_{24}\}$; $B \cap C = \{a_{26}\}$; $A \cap C = \varnothing$; et :

$$P(A) = \frac{5}{36}; \quad P(B) = P(C) = \frac{1}{6};$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = \frac{1}{36}; \quad P(A \cap C) = 0.$$

Nous en déduisons :
$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$;
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$;
$P(A \cap C) \neq P(A) \cdot P(C)$.

Les événements A et B ne sont pas indépendants ; les événements B et C sont indépendants ; les événements A et C ne sont pas indépendants.

Événements indépendants et probabilité conditionnelle.

9 Soient $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, A un événement tel que : $P(A) \neq 0$, et B un événement indépendant de A.
L'égalité : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ est alors équivalente à l'égalité :

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; \quad \text{c'est-à-dire : } P(B) = P_A(B).$$

Nous avons donc le théorème :

THÉORÈME : Dans un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$, un événement A tel que : $P(A) \neq 0$, est indépendant d'un événement B si et seulement si : $P_A(B) = P(B)$.

10 **Remarque :** Si nous avons : $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, l'indépendance de A et B s'exprime par l'une des trois conditions équivalentes :
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; $P_A(B) = P(B)$; $P_B(A) = P(A)$.

Produit d'espaces probabilisés finis. Épreuves indépendantes.

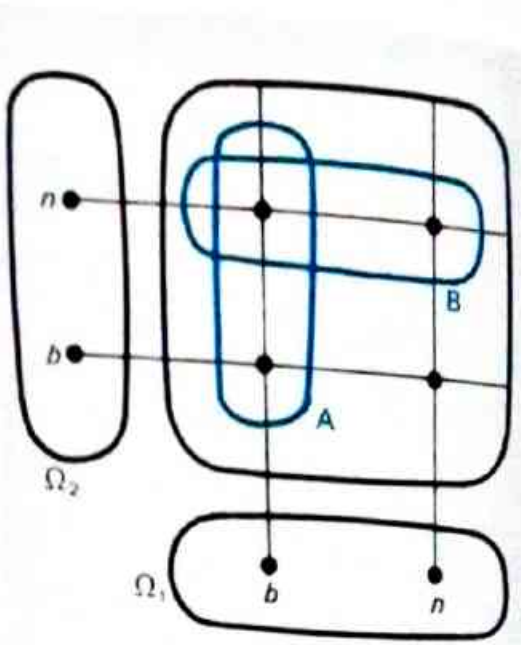
Étude d'un exemple.

11 Soit l'épreuve $\mathcal{E}_1$: tirer une boule d'une urne $\mathcal{U}_1$ qui contient une boule blanche et une boule noire. A cette épreuve est associé l'ensemble : $\Omega_1 = \{b, n\}$. Les événements élémentaires paraissent équiprobables ; construisons donc une loi de probabilité P_1 sur $\mathcal{T}(\Omega_1)$ par :

$$P_1(\{b\}) = P_1(\{n\}) = \frac{1}{2}.$$

Soit l'épreuve $\mathcal{E}_2$: tirer une boule d'une urne $\mathcal{U}_2$ qui contient trois boules blanches et deux boules noires. Au n° 44, p. 305, nous avons associé à cette épreuve l'ensemble : $\Omega_2 = \{b, n\}$ et la probabilité P_2 sur $\mathcal{T}(\Omega_2)$ définie par :

$$P_2(\{b\}) = \frac{3}{5}; \qquad P_2(\{n\}) = \frac{2}{5}.$$



①

Considérons alors l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à tirer une boule de $\mathcal{U}_1$, puis une boule de $\mathcal{U}_2$. A cette épreuve $\mathcal{E}$, associons l'ensemble :
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(b, b), (b, n), (n, b), (n, n)\}$.

Intuitivement, le résultat du tirage dans l'une des urnes n'a pas d'influence sur le résultat du tirage dans l'autre urne. Les épreuves $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont "indépendantes". Nous nous proposons de construire une loi de probabilité P sur $\mathcal{T}(\Omega)$ qui traduise cette notion intuitive.

Nous allons construire P à partir de sa distribution de probabilité p.

Nous devons donc définir : $p(b, b)$, $p(b, n)$, $p(n, b)$, $p(n, n)$.

Considérons, par exemple : $p(b, n) = P(\{(b, n)\})$.

L'événement élémentaire $\{(b, n)\}$ de $\mathcal{T}(\Omega)$, peut être considéré comme l'intersection des deux événements liés à $\mathcal{E}$ suivants (fig. 1) :

A : "la boule tirée dans $\mathcal{U}_1$ est blanche", $A = \{(b, b), (b, n)\}$;

B : "la boule tirée dans $\mathcal{U}_2$ est noire", $B = \{(b, n), (n, n)\}$.

Nous avons : $\{(b, n)\} = A \cap B$.

Pour traduire la notion intuitive d'indépendance de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, nous construisons P de façon que les événements A et B soient indépendants pour P.

Nous imposons donc : $p(b, n) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Nous avons : $A = \{b\} \times \Omega_2$ et $B = \Omega_1 \times \{n\}$.

Il est naturel de considérer que la probabilité de A, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir une boule blanche au tirage dans $\mathcal{U}_1$ et un résultat quelconque au tirage dans $\mathcal{U}_2$, est égale à la probabilité de $\{b\}$ lorsque l'on considère l'épreuve $\mathcal{E}_1$ seule.

Nous prenons donc : $P(A) = P_1(\{b\}) = \frac{1}{2}$.

De même, nous prenons : $P(B) = P_2(\{n\}) = \frac{2}{5}$.

Il en résulte : $p(b, n) = P_1(\{b\}) \cdot P_2(\{n\}) = p_1(b) \cdot p_2(n) = \frac{1}{5}$.

Par des considérations analogues, nous obtenons :

$p(b, b) = p_1(b) \cdot p_2(b) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$;

$p(n, b) = p_1(n) \cdot p_2(b) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$;

$p(n, n) = p_1(n) \cdot p_2(n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

Nous vérifions que : $p(b, b) + p(b, n) + p(n, b) + p(n, n) = 1$.

L'application p de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ dans $\mathbb{R}_+$ est donc une distribution de probabilité.

Produit de deux espaces probabilisés finis.

12 D'une manière générale, considérons deux espaces probabilisés finis : $(\Omega_1, \mathcal{T}(\Omega_1), P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}(\Omega_2), P_2)$ respectivement associés à deux épreuves $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

Posons : $\Omega_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ et $\Omega_2 = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m\}$, et désignons respectivement par p_1 et par p_2 les distributions de probabilité associées à P_1 et à P_2.

On démontre et nous admettons (voir exercice n° 20, p. 336) que l'application p de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $(a_i, b_j) \rightsquigarrow p(a_i, b_j) = p_1(a_i) \cdot p_2(b_j)$ est une distribution de probabilité sur Ω.

13 THÉORÈME ET DÉFINITION : Soient $(\Omega_1, \mathcal{T}(\Omega_1), P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}(\Omega_2), P_2)$ deux espaces probabilisés finis. L'application p de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $\forall a_i \in \Omega_1, \ \forall b_j \in \Omega_2, \ p(a_i, b_j) = p_1(a_i) \cdot p_2(b_j) = P_1(\{a_i\}) \cdot P_2(\{b_j\})$ est une distribution de probabilité sur Ω. L'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$, où P désigne la probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$ associée à p, est appelé espace produit des deux espaces probabilisés $(\Omega_1, \mathcal{T}(\Omega_1), P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{T}(\Omega_2), P_2)$.

On dit que l'espace probabilisé ainsi construit traduit **l'indépendance des épreuves** $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

Épreuves successives.

14 Considérons une épreuve $\mathcal{E}$ à laquelle on a associé un espace probabilisé fini : $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$, par exemple l'épreuve qui consiste à tirer une boule d'une urne $\mathcal{U}$ qui contient trois boules blanches et deux boules noires. Répétons l'épreuve $\mathcal{E}$; pour cela, remettons la boule tirée dans l'urne, et effectuons un nouveau tirage.
A cette deuxième épreuve est associé le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$.
Le résultat du premier tirage n'a pas d'influence sur le résultat du deuxième tirage.
Il est donc logique, pour étudier l'épreuve $\mathcal{E}'$ qui consiste à effectuer deux épreuves du type $\mathcal{E}$ successives d'utiliser l'espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{T}(\Omega'), P')$ produit de $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ par lui-même. Nous avons donc :
$\Omega' = \Omega \times \Omega$, et : $\forall a_i \in \Omega$ et $\forall a_j \in \Omega$, $\quad p'(a_i, a_j) = p(a_i) \cdot p(a_j)$.
Cette égalité traduit l'indépendance des deux épreuves successives.

15 D'une manière générale, pour étudier l'épreuve $\mathcal{E}'$ qui consiste à répéter successivement dans les mêmes conditions N épreuves du type $\mathcal{E}$, nous utiliserons l'espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{T}(\Omega'), P')$ défini par : $\Omega' = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega}_{\text{N facteurs}}$, et :

$\forall (a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_N}) \in \Omega, \quad p'(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_N}) = p(a_{\alpha_1}) \cdot p(a_{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot p(a_{\alpha_N})$, où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ désignent N indices, distincts ou non, appartenant à $\{1, 2, \ldots, N\}$.
Cette égalité traduit l'indépendance des N épreuves successives considérées.

Lorsque l'on effectue une telle suite d'épreuves répétées indépendantes, on dit que l'on effectue des **tirages avec remise**, ou **tirages non exhaustifs.**

Suite d'épreuves de Bernoulli. Distribution binomiale.

Schéma de Bernoulli.

16 Considérons une épreuve $\mathcal{E}$ pour laquelle l'ensemble Ω est une paire.
Désignons par S ("succès") et E ("échec") les éléments de Ω : $\Omega = \{S, E\}$.
Une probabilité sur $\mathcal{T}(\Omega)$ est déterminée par la donnée de :
$p(S) = P(\{S\}) = u$ et $p(E) = P(\{E\}) = v$, avec : $u > 0$, $v > 0$, $u + v = 1$.
Soit alors $\mathcal{E}'$ l'épreuve qui consiste à répéter N épreuves $\mathcal{E}$; nous considérons que ces N épreuves $\mathcal{E}$ sont **indépendantes.**
Pour étudier l'épreuve $\mathcal{E}'$, nous utiliserons donc l'espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{T}(\Omega'), P')$ défini de la façon suivante :
1. $\Omega' = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega}_{\text{N facteurs}}$;
un élément de Ω' est un N-uplet $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N)$, où r_i est égal à S ou à E.
2. La probabilité P' sur $\mathcal{T}(\Omega')$ est définie à partir de sa distribution de probabilité p' :
$p'(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N) = p(r_1) \cdot p(r_2) \cdot p(r_3) \cdot \ldots \cdot p(r_N)$.

Si k coordonnées du N-uplet $(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N)$ sont des "succès" S, les $N - k$ autres sont des "échecs" E ; nous avons alors : $p'(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N) = u^k \cdot v^{N-k}$.

En particulier la probabilité d'un événement élémentaire $\{(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N)\}$ ne dépend que du nombre k de "succès" S et non du rang de ces k "succès".
Deux événements élémentaires fournis par k succès et $N - k$ échecs sont distincts si les rangs de ces k succès sont différents, mais ils ont la même probabilité.

L'épreuve $\mathcal{E}'$ décrite ci-dessus est appelée **schéma de Bernoulli**, ou **suite d'épreuves de Bernoulli.**

17 **Exemples :** 1. Prenons le jeu de "pile ou face". avec les notations ci-dessus nous avons : $\Omega = \{S, E\}$; posons, par exemple :

S = pile, E = face ; et : $u = v = \frac{1}{2}$.

Il en résulte : $p'(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^N$.

2. Considérons le tirage avec remise d'une boule dans une urne qui contient trois boules blanches et deux boules noires (n° 44, p. 305).
Nous avons : $\Omega = \{S, E\}$
avec : S : la boule tirée est blanche, E : la boule tirée est noire.

Nous avons : $u = \frac{3}{5}$ et $v = \frac{2}{5}$.

Il en résulte, par exemple, pour $N = 7$:

$$p'(S, E, E, E, S, S, S) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3^4 \times 2^3}{5^7} \# 0{,}205;$$

$$p'(E, S, S, S, E, S, S) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3^5 \times 2^2}{5^7} \# 0{,}307.$$

18 **Remarque :** A tout phénomène aléatoire, il est possible d'associer le schéma de Bernoulli. Il suffit de considérer un événement A et son complémentaire $\overline{A}$.
On définit alors $\Omega = \{S, E\}$ par :
S : l'événement A est réalisé ;
E : l'événement A n'est pas réalisé, c'est-à-dire $\overline{A}$ est réalisé.
On prend alors : $u = P(A)$ et $v = P(\overline{A}) = 1 - u$.

Variable de Bernoulli. Distribution binomiale.

19 Considérons l'espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'), P')$ introduit au paragraphe précédent. Désignons par k le nombre de "succès", c'est-à-dire le nombre de coordonnées de $(r_1, r_2, \ldots, r_N)$ qui sont égales à S.
Soit X la variable aléatoire définie par :

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$; $(r_1, r_2, \ldots, r_N) \rightsquigarrow X(r_1, r_2, \ldots, r_N) = k$.

Cette variable aléatoire est appelée **variable de Bernoulli.**

L'image $\mathfrak{I}$ de Ω' par la variable aléatoire X est donc : $\mathfrak{I} = \{0, 1, 2, \ldots N\}$.
Pour définir la distribution de probabilité de la variable aléatoire X, nous devons déterminer les probabilités $P'[X = k]$, des événements $[X = k]$ liés à X.
L'événement $[X = k]$, pour k fixé, est le sous-ensemble A_k de Ω' constitué par les N-uplets $(r_1, r_2, \ldots r_N)$ dont k coordonnées sont égales à S.

Posons : $s_k = \text{Card } A_k$.

Nous avons alors : $P'[X = k] = s_k u^k v^{N-k}$.

Numérotons les N épreuves $\mathcal{E}$ dans l'ordre où nous les effectuons : $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots \mathcal{E}_N$.
Le résultat de cette suite d'épreuves est un N-uplet dont k coordonnées sont égales à S, si et seulement si k épreuves, parmi $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots \mathcal{E}_N$, donnent le résultat S.
Le nombre s_k est donc égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à N éléments. Nous avons donc : $s_k = C_N^k = \dfrac{N!}{k!\,(N-k)!}$.

20 La distribution de probabilité p_x de la variable de Bernoulli X est donc définie par :

$p_x : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad k \leadsto p_x(k) = C_N^k u^k v^{N-k}$.

Posons : $p_k = p_x(k)$, pour : $k \in \mathfrak{I} = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$.

Nous remarquons que les coefficients p_k sont les termes du développement de $(u + v)^N$; nous avons en effet (voir exercice n° 22, p. 86) :

$$(u+v)^N = v^N + C_N^1 u v^{N-1} + \ldots + C_N^k u^k v^{N-k} + \ldots + C_N^{N-1} u^{N-1} v + u^N$$
$$= p_0 + p_1 + \ldots\ldots\ldots + p_k + \ldots\ldots\ldots + p_{N-1} + p_N.$$

Pour cette raison, la distribution de probabilité p_x de la variable de Bernoulli X est appelée **distribution binomiale.**

21 **Remarque :** L'égalité : $\sum_{k=0}^{k=N} p_k = (u+v)^N$, permet de retrouver l'égalité : $\sum_{k=0}^{k=N} p_k = 1$.

Propriétés des coefficients p_k.

22 On suppose que N, u, v sont donnés.

Nous nous proposons de comparer p_k et p_{k-1}, pour $1 < k \leqslant N$. Nous avons :

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{C_N^k u^k v^{N-k}}{C_N^{k-1} u^{k-1} v^{N-k+1}} = \frac{(N-k+1)\,u}{kv} = \frac{(N+1)\,u - k(1-v)}{kv}$$
$$= 1 + \frac{(N+1)\,u - k}{kv}.$$

Nous en déduisons : $\dfrac{p_k}{p_{k-1}} - 1 = \dfrac{(N+1)\,u - k}{kv}$,

c'est-à-dire : $\dfrac{p_k - p_{k-1}}{p_{k-1}} = \dfrac{(N+1)\,u - k}{kv}$.

Les réels p_{k-1} et kv sont strictement positifs ; nous avons donc :

$(p_k = p_{k-1}) \iff (k = (N+1)u)$,

$(p_k > p_{k-1}) \iff (k < (N+1)u)$,

$(p_k < p_{k-1}) \iff (k > (N+1)u)$.

Distinguons deux cas :

23 **Premier cas :** $(N+1)u \in \mathbb{N}$.

Posons : $k_0 = (N+1)u$; nous avons supposé : $u \neq 0$ et $v \neq 0$; nous avons donc : $0 < u < 1$.

Il en résulte les inégalités : $0 < k_0 < N+1$, c'est-à-dire : $1 \leqslant k_0 \leqslant N$.

Nous avons alors :

$p_k = p_{k-1}$, si $k = k_0$,

$p_k > p_{k-1}$, si $k < k_0$,

$p_k < p_{k-1}$, si $k > k_0$.

En résumé, nous avons :

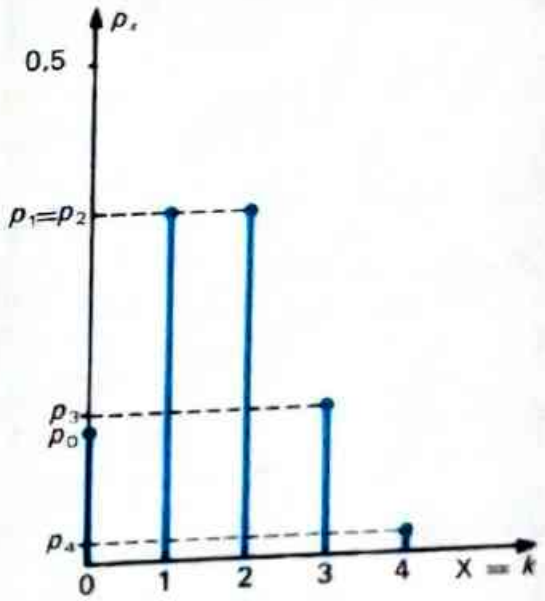
$p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_{k_0-1}$;

$p_{k_0-1} = p_{k_0}$;

$p_{k_0} > p_{k_0+1} > p_{k_0+2} > \ldots > p_N$.

La figure 2 donne le diagramme en bâtons de la distribution binomiale pour :

$N = 4$; $u = \frac{2}{5}$; $v = \frac{3}{5}$.



(2)

24 **Deuxième cas :** $(N+1)u \notin \mathbb{N}$.

Soit k_0 la partie entière de $(N+1)u$; nous avons : $k_0 < (N+1)u < k_0 + 1$.

Il en résulte les inégalités : $0 \leqslant k_0 < N+1$.

Nous avons alors :

$p_k > p_{k-1}$, si $k \leqslant k_0$,

$p_k < p_{k-1}$, si $k > k_0$.

En résumé, nous avons :

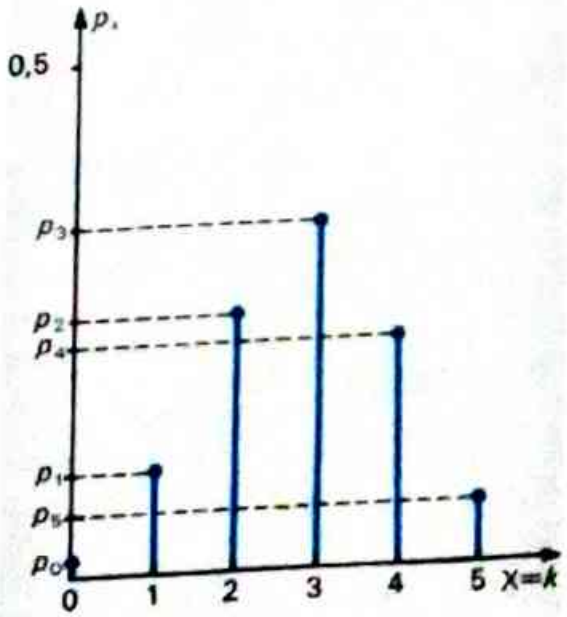
$p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_{k_0}$;

$p_{k_0} > p_{k_0+1} > p_{k_0+2} > \ldots > p_N$.

Le coefficient p_{k_0} qui est la plus grande valeur prise par la variable de Bernoulli est appelé **terme central** de la distribution p_x.

La figure 3 donne le diagramme en bâtons de la distribution binomiale pour :

$N = 5$; $u = \frac{4}{7}$; $v = \frac{3}{7}$.



(3)

EXERCICES

Probabilité conditionnelle

1 Soit $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
1° Déterminer la probabilité conditionnelle relative à Ω.
2° Soit a un élément de Ω tel que : $P(\{a\}) \neq 0$.
Déterminer la probabilité conditionnelle relative à $\{a\}$.

2 Soit $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
1° Montrer que, si A et B sont deux événements incompatibles tels que :
$P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, on a :
$\forall X \in \mathcal{T}(\Omega)$, $P_{A \cup B}(X) \leqslant P_A(X) + P_B(X)$.
2° Montrer que si A et B sont deux événements tels que :
$A \subset B$, $0 < P(A) < P(B)$, on a :
$\forall X \in \mathcal{T}(\Omega)$, $P_B(X) \leqslant P_A(X) + P_{B-A}(X)$.

3 On jette deux dés cubiques non pipés et l'on observe les points marqués sur les faces supérieures.
1° Calculer la probabilité d'obtenir deux fois le point 1 et la probabilité d'obtenir une somme de points égale à 5.
2° Soit A l'événement : "l'un au moins des points obtenus est égal à 1". Calculer la probabilité de chacun des événements définis au 1° sachant que A est réalisé.

4 On jette deux dés cubiques non pipés et l'on observe les points marqués sur les faces supérieures. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur k si la somme des points marqués est k.
1° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
$[X = 3]$; $[X = 4]$; $[X \geqslant 10]$; $[4 < X \leqslant 7]$.
2° Soit A l'événement : "l'un au moins des points obtenus est pair". Calculer la probabilité relative à A de chacun des événements définis au 1°.
3° Soit B l'événement : "les deux points obtenus sont pairs". Calculer la probabilité relative à B de chacun des événements définis au 1°.

5 On jette trois dés cubiques non pipés et l'on observe les points marqués sur les faces supérieures.
1° Calculer la probabilité d'obtenir une somme de points égale à 6 sachant que les points marqués sont deux à deux distincts.
2° Calculer la probabilité d'obtenir une somme de points égale à 12 sachant que deux des points marqués, au moins, sont les mêmes.

6 Une urne contient cinq boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de cette urne.
1° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : "obtenir au moins une boule blanche";
B : "obtenir au moins deux boules noires";
C : "obtenir au moins une boule blanche et une boule noire".
2° Calculer : $P_A(B)$, $P_A(C)$, $P_B(A)$, $P_B(C)$, $P_C(A)$, $P_C(B)$.

7 On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.
1° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : "obtenir l'as de cœur et l'as de trèfle" ;
B : "obtenir deux cartes de couleurs différentes".
2° Calculer $P_B(A)$.

8 On tire au hasard et simultanément quatre cartes d'un jeu de 32 cartes.
1° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : "obtenir un carré d'as" ;
B : "obtenir un carré d'as, de rois, de dames ou de valets".
2° Calculer la probabilité de chacun des événements A et B sachant que l'une des cartes tirées est un as.
3° Calculer la probabilité de chacun des événements A et B sachant que l'une des cartes tirées est un roi.

9 Même exercice que le n° 8, pour un jeu de 52 cartes.

10 Douze chevaux sont au départ de la course du tiercé. Un joueur joue au hasard une combinaison de 5 chevaux.
1° Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne le tiercé dans le désordre ?
2° L'un des chevaux que le joueur a tiré au hasard ne participe pas à la course. Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne le tiercé dans le désordre ?
3° Même question lorsque deux des chevaux tirés au hasard ne participent pas à la course.

Evénements indépendants.

11 Soit $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soient A et B deux événements indépendants pour P.
1° Montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants.
2° Montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

12 Soit $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
1° A quelles conditions un événement A est-il indépendant de lui-même ?
2° A quelles conditions un événement A est-il indépendant de l'événement complémentaire $\overline{A}$?

13 Soit $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient A, B, C trois événements de $\mathcal{T}(\Omega)$. Montrer que si A est indépendant de B, de C et de $B \cap C$, alors A est indépendant de $B \cup C$.

14 On jette un dé cubique non pipé et l'on observe les points marqués sur la face supérieure. Soient A, B, C les événements suivants :
A : "obtenir au plus 2" ;
B : "obtenir un point pair" ;
C : "obtenir au plus 3".
1° Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2° Les événements B et C sont-ils indépendants ?

15 Même exercice que le n° 14, pour un dé sur lequel le point 6 a été remplacé par 2.

EXERCICES

16 On jette deux dés D_1 et D_2 cubiques discernables et non pipés. On observe les points n_1 et n_2 respectivement marqués sur les faces supérieures des deux dés.
On considère les événements suivants :
A : "obtenir $n_1 \neq n_2$, $n_1 \leqslant 4$, $n_2 \leqslant 4$";
B : "obtenir $n_1 + n_2 = 7$";
C : "obtenir $n_1 + n_2 = 6$".
1° Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C.
2° Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3° Les événements A et C sont-ils indépendants ?

17 Même exercice que le n° 16, pour les événements suivants :
A : "obtenir $|n_1 - n_2| \leqslant 2$";
B : "obtenir $n_1 + n_2 = 7$";
C : "obtenir $n_1 = 2$ ou $n_1 = 5$".

18 Même exercice que le n° 16, pour les événements suivants :
A : "obtenir $n_1 \times n_2$ pair";
B : "obtenir au moins un point inférieur ou égal à 2";
C : "obtenir au moins un point inférieur ou égal à 3".

19 On considère une urne qui contient cinq boules blanches et quatre boules noires. On extrait simultanément et au hasard quatre boules de l'urne.
1° Calculer les probabilités de chacun des événements suivants :
A : "obtenir au plus une boule blanche";
B : "obtenir quatre boules d'une même couleur";
C : "obtenir au moins une boule blanche et une boule noire".
2° Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3° Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Produit d'espaces probabilisés finis. Epreuves indépendantes.

20 Soient $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), P_2)$ deux espaces probabilisés finis et soient p_1 et p_2 les distributions de probabilité respectivement associées à P_1 et à P_2.
Démontrer que l'application p de $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :
$\forall (a, b) \in \Omega,\ p(a, b) = p_1(a) \cdot p_2(b)$
est une distribution de probabilité sur Ω.

21 On extrait d'un jeu de cartes l'ensemble R des quatre rois et l'ensemble D des quatre dames. Soit $\mathcal{E}$ l'épreuve qui consiste à tirer au hasard une carte de R et une carte de D.
1° Construire l'espace probabilisé qui permet d'étudier l'épreuve $\mathcal{E}$.
2° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : "obtenir le roi de carreau et la dame de carreau";
B : "obtenir un roi et une dame de même couleur";
C : "obtenir un roi rouge et une dame noire".

22 On considère un dé D_1 non pipé dont les faces portent les points de 1 à 6 et un dé non pipé D_2 dont trois faces portent le point 1, deux faces le point 2 et une face le point 3.

1° Construire l'espace probabilisé qui permet d'étudier l'épreuve suivante : "jeter les deux dés D_1 et D_2 et observer les points marqués sur les faces supérieures".

2° Calculer les probabilités de chacun des événements suivants :

A : "obtenir $n_1 = n_2$";

B : "obtenir au moins une fois le point 1";

C : "obtenir $n_1 + n_2$ pair";

D : "obtenir $n_1 + n_2 \leqslant 6$";

E : "obtenir $n_1 - n_2 \leqslant 2$".

23 On considère une urne U_1 qui contient cinq boules blanches et trois boules noires, et une urne U_2 qui contient trois boules blanches et cinq boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1° Construire l'espace probabilisé qui permet d'étudier l'épreuve : tirer au hasard une boule dans chaque urne et observer la couleur des boules tirées.

2° Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

24 Même exercice que le n° 23, pour une urne qui contient six boules blanches et trois boules noires.

25 On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à tirer au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes et une carte d'un jeu de 52 cartes.

1° Construire l'espace probabilisé qui permet d'étudier l'épreuve $\mathcal{E}$.

2° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : "obtenir deux trèfles";

B : "obtenir deux cartes de même couleur";

C : "obtenir deux cartes de même force";

D : "obtenir deux fois la même carte".

3° Calculer la probabilité d'obtenir un as au moins, puis la probabilité d'obtenir deux as, sachant que l'une des deux cartes tirées est un as.

26 Dans un restaurant, chaque consommateur a le choix, pour constituer son repas, entre quatre entrées e_1, e_2, e_3, e_4, trois plats p_1, p_2, p_3 et deux desserts d_1, d_2.

On appelle menu un triplet (e_i, p_j, d_k).

Deux personnes constituent leur menu au hasard.

1° Quelle est la probabilité pour que ces deux personnes choisissent la même entrée ?

2° Quelle est la probabilité pour que ces deux personnes choisissent la même entrée et le même plat ?

3° Quelle est la probabilité pour que ces deux personnes choisissent le même menu ?

EXERCICES

27 Une urne contient trois boules blanches numérotées 1, 2, 3 et deux boules blanches numérotées 1 et 2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
1° On extrait au hasard une boule de l'urne, on l'examine et on la remet dans l'urne ; on extrait alors une deuxième boule au hasard.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : "obtenir deux boules blanches" ;
B : "obtenir deux boules de même couleur" ;
C : "obtenir deux boules dont la somme des points est égale à k", où k est un entier appartenant à $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.
2° On extrait au hasard une première boule, puis une deuxième sans avoir remis la première. Calculer dans ces conditions la probabilité de chacun des événements A, B, C.

28 On considère un dé cubique non pipé et les deux épreuves successives suivantes :
$\mathcal{E}_1$: jeter le dé et observer le point n_1 marqué sur la face supérieure ;
$\mathcal{E}_2$: si le point n_1 obtenu à l'épreuve $\mathcal{E}_1$ est inférieur ou égal à 3, on jette une deuxième fois le dé et l'on observe le point n_2 marqué sur la face supérieure, si le point n_1 obtenu à l'épreuve $\mathcal{E}_1$ est supérieur à 3 on ne rejette pas le dé, on a alors : $n_2 = 0$.
1° Construire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}(\Omega), P)$ qui permet d'étudier les deux épreuves successives $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.
2° Calculer la probabilité d'obtenir une somme $n_1 + n_2$ égale à 6.

Schéma de Bernoulli. Loi binomiale.

29 On jette cinq fois de suite une pièce de monnaie et l'on observe chaque fois le côté visible : pile ou face. Pour chacune des valeurs de k appartenant à $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, calculer la probabilité pour que l'on obtienne k résultats "face" au cours de ces cinq jets.

30 On jette N fois de suite un dé cubique non pipé.
1° Calculer la probabilité pour que l'on obtienne au moins une fois le point 6.
2° Calculer cette probabilité pour : $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$.

31 Une urne contient quatre boules blanches et six boules noires indiscernables au toucher.
On effectue au hasard quatre tirages successifs dans cette urne en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.
1° Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche et la probabilité d'obtenir au moins une boule noire.
2° Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

32 Une urne contient quatre boules blanches et cinq boules noires indiscernables au toucher. On effectue au hasard quatre tirages successifs dans cette urne en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.
1° Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire X qui prend la valeur k si l'on a tiré k boules blanches.
2° Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire Y qui prend la valeur h si l'on a tiré h boules noires.

◆ Dans chacun des exercices suivants, n^{os} 33 à 35, on fait l'hypothèse suivante : à chaque naissance, la probabilité d'obtenir une fille et la probabilité d'obtenir un garçon sont égales.

33 Quelle est la probabilité pour qu'une famille de trois enfants comprenne au moins deux filles ?

34 Quelle est la probabilité pour qu'une famille de sept enfants comprenne un seul garçon ?

35 Une famille comprend quatre enfants.
1° Quelle est la probabilité pour que cette famille comprenne deux filles et deux garçons ?
2° Quelle est la probabilité pour que cette famille comprenne deux filles et deux garçons sachant que l'un des enfants est un garçon ?

36 On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à extraire au hasard une main de 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. On effectue successivement trois épreuves $\mathcal{E}$ en remettant chaque fois les cartes tirées dans le jeu.
1° Calculer la probabilité pour qu'aucune des trois mains ne contienne un as.
2° Calculer la probabilité pour qu'aucune des trois mains ne contienne un carré d'as.

37 Même exercice que le n° 36, pour l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à extraire au hasard une main de huit cartes d'un jeu de 32 cartes.

38 Deux personnes jettent chacune une pièce n fois.
Calculer la probabilité pour qu'elles obtiennent le même nombre de résultats "face". Effectuer le calcul pour : $n = 3$, puis pour : $n = 4$.

39 Trois personnes jettent chacune une pièce 3 fois. Calculer la probabilité pour que deux au moins de ces personnes obtiennent le même nombre de résultats "face".

PROBLÈMES

1 On considère, dans un plan P, un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout réel k, on définit l'application f_k de P dans P qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M′ de coordonnées (x', y') telles que :
$2x' = (1 + k)x + (1 - k)y$ et $2y' = (1 - k)x + (1 + k)y$.

1° Pour quelles valeurs de k, l'application f_k est-elle une bijection ? Lorsque f_k est une bijection, déterminer la bijection réciproque f_k^{-1}. Comparer dans ce cas, les applications f_k^{-1} et $f_{1/k}$.

2° Pour chaque valeur de k, déterminer l'ensemble des points M pour lesquels on a : $f_k(M) = M$.

3° Soient k et k' deux réels ; déterminer l'application $f_k \circ f_{k'}$.

4° On désigne par E l'ensemble des applications f_k qui sont bijectives. Montrer que E est stable pour la composition des applications.
Montrer que E muni de la loi induite est un groupe commutatif isomorphe au groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

2 On considère les trois fonctions polynômes f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_1 : x \mapsto 2(x-1)$; $f_2 : x \mapsto \dfrac{(x-1)(x+3)}{2}$; $f_3 : x \mapsto \dfrac{(x-1)(x^2+4x+7)}{6}$.

1° Construire, dans un repère cartésien orthonormé, les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3. Déterminer, en particulier les points communs à ces courbes et les tangentes en ces points.

2° On désigne par E l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à trois (y compris la fonction nulle) qui s'annulent au point 1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes.

3° Démontrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E.

4° Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$. On suppose que f est un élément de E. Calculer, en fonction de a, b, c, les coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de f dans la base (f_1, f_2, f_3).
En déduire que f est un élément de E si et seulement s'il existe une fonction polynôme φ de degré inférieur ou égal à deux pour laquelle on a :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)\varphi(x)$.

5° Si f est une fonction polynôme, on désigne par f' la fonction dérivée de f, par f'' la fonction dérivée de f' et par f''' la fonction dérivée de f''. Pour tout réel h, démontrer les égalités :
$f_1(1 + h) = hf_1'(1)$;

$f_2(1+h) = hf_2'(1) + \frac{h^2}{2} f_2''(1)$;

$f_3(1+h) = hf_3'(1) + \frac{h^2}{2} f_3''(1) + \frac{h^3}{6} f_3'''(1)$.

Calculer, en fonction de h, les valeurs absolues :
$|f_1(1+h) - f_2(1+h)|$, $|f_2(1+h) - f_3(1+h)|$, $|f_3(1+h) - f_1(1+h)|$.
Trouver les valeurs de h pour lesquelles deux de ces valeurs absolues sont égales.
A quelle propriété des courbes représentatives de f_1, f_2, f_3, ce résultat correspond-il ?

3 Soient $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le sous-ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

1° Démontrer que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une partie stable de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour la loi :
$(f, g) \rightsquigarrow f.g$.

2° On désigne par **0** la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, différente de la fonction **0**, est un "diviseur de zéro" dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement s'il existe une fonction g de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, différente de la fonction **0**, telle que l'on ait : $f.g = \mathbf{0}$.
On définit d'une façon analogue les diviseurs de zéro dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Montrer que, si Ω_f désigne l'ensemble des réels pour lesquels la fonction f s'annule, on a l'équivalence logique :
(f diviseur de zéro dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) $\iff$ ($\Omega_f \neq \varnothing$ et $\Omega_f \neq \mathbb{R}$).
Construire un exemple simple de diviseurs de zéro.

3° Soient a et b deux réels. On désigne par $sup(a, b)$ le réel défini par :
si $a \geqslant b$: $sup(a, b) = a$
si $a \leqslant b$: $sup(a, b) = b$.

Démontrer l'égalité : $sup(a, b) = \frac{1}{2}(|a - b| + a + b)$.

4° *a*) Démontrer que, quels que soient les réels a et b, la fonction g définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow sup(0, a - |x - b|)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Donner une représentation graphique de cette fonction.

b) Soient α et β deux réels distincts. Démontrer que si f est une fonction de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, différente de la fonction **0**, nulle sur $]\alpha, \beta[$, alors f est un diviseur de zéro dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pourra poser : $a = \frac{\beta - \alpha}{2}$ et : $b = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

5° On dit qu'un réel x_0 est un zéro isolé pour une fonction f si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
1. $f(x_0) = 0$,

2. $\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in]x_0 - \alpha,\ x_0[\cup]x_0,\ x_0 + \alpha[,\ f(x) \neq 0$.
Montrer que si une fonction f de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'a que des zéros isolés, cette fonction n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
En déduire que l'ensemble des diviseurs de zéro dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une partie propre de l'ensemble des diviseurs de zéro dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4 On considère l'espace vectoriel P sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes et le sous-espace vectoriel $\mathcal{T}$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à deux.

1° Montrer que, si α, β, γ sont trois réels deux à deux distincts, les trois fonctions polynômes A, B, C respectivement définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\quad B(x) = \frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)},\quad C(x) = \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

constituent une base de $\mathcal{T}$.

2° Déterminer les coordonnées dans la base (A, B, C) des trois fonctions polynômes définies par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = 1;\ f_2(x) = x;\ f_3(x) = x^2$.

3° Soit $\mathcal{R}$ la relation définie dans P par :
$(f \mathcal{R} g) \iff (\exists \varphi \in P,\ [f-g](x) = \varphi(x)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma))$.
a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) Soit f une fonction polynôme; on désigne par F la classe de f pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Montrer qu'il existe dans F une fonction polynôme de $\mathcal{T}$ unique, notée $\bar{f}$. Déterminer les coordonnées de f dans la base (A, B, C).

4° On considère l'application u de $\mathcal{T}$ dans lui-même définie par :

$\forall f \in \mathcal{T},\ f \rightsquigarrow u(f) = \overline{f.f_1}$.
Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{T}$. Est-ce une isomorphisme de $\mathcal{T}$ sur lui-même?

5 On considère, dans un plan P, un repère cartésien orthonormé.

1° Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction numérique f définie par :
$x \rightsquigarrow -x^3 + 3x + 4$.

2° Pour tout réel m, on désigne par $\mathcal{C}_m$ la courbe d'équation :
$y = mx^2 - (m-6)x + 4$.
Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.

3° Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points communs à la courbe $\mathcal{C}$ et à la courbe $\mathcal{C}_m$.

4° S'il existe un point M commun à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}_m$, tel que les tangentes à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}_m$ au point M soient confondues, on dit que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_m$ sont tangentes au point M. M est appelé point de contact. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_m$ sont tangentes. Déterminer les coordonnées des points de contact et les équations des tangentes en ces points.

6 On considère dans un plan P un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par m un réel de l'intervalle : $E = [-1, 1]$, et par $\mathcal{C}_m$ la courbe d'équation : $y = 4x^2 - 12mx - 5(1 - 2m^2)$.

1° Démontrer que, pour tout réel m de E, la courbe $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe $\overrightarrow{x'Ox}$ en deux points A et B d'abscisses respectives x' et x''.
Démontrer l'égalité : $10(x' + x'')^2 - 36\,x'x'' - 45 = 0$.

2° Calculer, en fonction de m, la longueur L du segment [A, B].
Pour quelles valeurs de m la longueur L est-elle minimum ? Construire les courbes $\mathcal{C}_m$ correspondantes.

3° Pour quelles valeurs de m, le point O appartient-il à la courbe $\mathcal{C}_m$? Construire les courbes $\mathcal{C}_m$ correspondantes.

4° Déterminer les coordonnées du sommet S de la courbe $\mathcal{C}_m$. Quel est l'ensemble des points S lorsque m décrit E ?

7 On considère, dans un plan P, un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = -x^2$.

2° Soient α et β deux réels, et H le point dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont (α, β). On considère l'équation : $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$. (1)
a) Montrer que l'équation (1) admet une racine unique dans $\mathbb{R}$ si et seulement si le point H appartient à la courbe $\mathcal{C}$.
b) On suppose que H n'appartient pas à $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe deux tangentes D_1 et D_2 à la courbe $\mathcal{C}$ qui passent par le point H si et seulement si l'équation (1) admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$.

3° On suppose que l'équation (1) admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$. Quelles sont, dans ce cas, les abscisses des points de contact M_1 et M_2 des tangentes D_1 et D_2 avec la courbe $\mathcal{C}$.
a) Calculer α et β en fonction de x_1 et de x_2.
b) Déterminer l'ensemble des points H pour lesquels les tangentes D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

c) Déterminer, en fonction de α et de β, l'équation de la droite qui passe par les points M_1 et M_2.

4° Soient p et q deux réels, et D la droite d'équation : $y = px + q$.

a) Déterminer l'ensemble D' des points H de la droite D par lesquels il passe deux tangentes distinctes D_1 et D_2 à la courbe $\mathcal{C}$.

b) Lorsque H décrit D', montrer que la droite qui passe par les points M_1 et M_2 passe par un point fixe A dont on calculera les coordonnées en fonction de p et de q.

5° Soit k un réel, et Δ la droite d'équation : $x = k$.

a) Déterminer l'ensemble Δ' des points H de la droite Δ par lesquels il passe deux tangentes distinctes D_1 et D_2 à la courbe $\mathcal{C}$.

b) Lorsque H décrit Δ', montrer que la droite qui passe par les points M_1 et M_2 a une direction fixe que l'on déterminera.

8 On considère, dans un plan P, un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout point F, du plan P, de coordonnées (a, b), on associe la fonction f définie par :

$\forall x \in D_f,\ x \longmapsto \dfrac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$.

1° Déterminer l'ensemble des points F du plan P pour lesquels la fonction f a un ensemble de définition D_f égal à $\mathbb{R}$.

2° Déterminer l'ensemble des points F du plan P pour lesquels la fonction f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

3° Déterminer l'ensemble des points F du plan P pour lesquels la fonction f garde un signe constant sur D_f.

4° Étudier le comportement de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

5° *a*) Déterminer l'ensemble E des points F du plan P pour lesquels la fonction f admet, au moins, un maximum local strict ou un minimum local strict.

b) Étudier, suivant la position du point F dans E, le nombre d'extréma de f.

9 On considère, dans un plan P, un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

1° Construire :

la droite D d'équation : $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$;

la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{9}{x}\right)$;

la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation : $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{9}{x}\right)$.

2° Soit t un réel non nul, et soient M et M′ les points d'abscisse t situés respectivement sur $\mathcal{C}$ et sur $\mathcal{C}'$. On désigne par T la tangente à $\mathcal{C}$ en M et par T′ la tangente à $\mathcal{C}'$ en M′.

a) Écrire les équations des tangentes T et T′.

b) Montrer que les droites T et T′ se coupent en un point S. Quelles sont les coordonnées du point S ? Quel est l'ensemble des points S lorsque t décrit $\mathbb{R}^*$?

c) Les droites T et T′ coupent respectivement l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$ en U et en U′. Déterminer les milieux des segments [S, U], [S, U′], [U, U′].
Calculer l'aire du triangle SUU′ ; calculer l'aire du triangle défini par une tangente à $\mathcal{C}$ et ses deux asymptotes, puis l'aire du triangle défini par une tangente à $\mathcal{C}'$ et ses deux asymptotes. Que remarque-t-on ?

3° Soit D′ une droite strictement parallèle à la droite D. Cette droite coupe $\mathcal{C}$ en un point N et $\mathcal{C}'$ en un point N′. La tangente Δ à $\mathcal{C}$ en N coupe la droite D en un point V et la tangente Δ' à $\mathcal{C}'$ en N′ coupe la droite D en un point V′.

a) Montrer que Δ et Δ' se coupent en un point R de l'axe $\overrightarrow{y'Oy}$.

b) Déterminer les milieux des segments [R, V], [R, V′], [V, V′] et calculer les aires des triangles ROV et ROV′. Que remarque-t-on ?

4° La tangente T à $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse t coupe $\mathcal{C}'$ en deux points H et H′.

a) Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}'$ en H et en H′ se coupent en un point K.

b) Déterminer l'ensemble des points K lorsque t décrit $\mathbb{R}^*$.

10 1° Soit m un réel strictement positif et f et g les deux fonctions polynômes respectivement définies par :
$f : x \rightsquigarrow x^2 + mx - 2$; $g : x \rightsquigarrow mx - 1$.

Déterminer pour quelle valeur de m le système : $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

2° On suppose dans toute la suite que m est un réel strictement positif différent de 1. On désigne par h_m la fonction $\frac{f}{g}$, et par $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de cette fonction dans un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de h_m.

b) Déterminer la fonction dérivée $(h_m)'$.

c) Pour quelles valeurs de m la fonction h_m possède-t-elle un maximum ?

d) Construire les courbes qui correspondent à : $m = 2$, et à : $m = \frac{1}{2}$.

e) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par trois points fixes.

3° Soit D_k la droite d'équation : $y = kx$. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de D_k ; on déterminera, en particulier, à quelle condition on a : $\forall k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_m \cap D_k \neq \varnothing$.

4° Soit M_1 un point de coordonnées (x_1, y_1), distinct du point O. On désigne par Δ la droite qui passe par les points O et M_1, et par M un point de Δ.

a) Démontrer l'équivalence logique :

$$(M \in \Delta) \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \frac{x_1}{1+\lambda} \text{ et } y = \frac{y_1}{1+\lambda}\right).$$

b) Montrer que M appartient à $\mathcal{C}_m$ si et seulement si la valeur correspondante de λ est solution, dans $\mathbb{R}$, d'une équation du second degré que l'on déterminera.

c) A quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$, m doit-il appartenir pour qu'un et un seul des points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de Δ appartienne au segement $[O, M_1]$?

5° On suppose que m appartient à $]0, 1[$ et on désigne par a un réel.

Déterminer l'ensemble Δ_m des points M_1 pour lesquels la droite Δ coupe $\mathcal{C}_m$ en deux points M′ et M″ tels que : $\frac{\overline{M'M_1}}{\overline{M'O}} + \frac{\overline{M''M_1}}{\overline{M''O}} = a$.

Démontrer que, quel que soit m, la droite Δ_m passe par un point fixe.

11 Une urne contient douze jetons, indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 12. On tire au hasard et simultanément deux jetons de l'urne et l'on désigne par i et par j les numéros qu'ils portent $(i < j)$.

1° Construire l'espace probabilisé fini qui permet d'étudier l'épreuve précédente.

2° Calculer la probabilité d'obtenir au moins un numéro pair, puis la probabilité d'obtenir deux numéros impairs.

3° Soit X la variable aléatoire qui à chaque couple (i, j) associe la somme $i + j$.

a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{X}$ des valeurs de X.

b) Pour chaque élément k de $\mathcal{X}$, déterminer l'événement $[X = k]$.

c) Construire la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

d) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

$[X \leqslant 6]$; $[X > 10]$; $[12 < X < 14]$; $[2 \leqslant X < 7]$.

4° Déterminer la probabilité d'obtenir une somme $i + j$ inférieure ou égale à 6, sachant que les deux numéros tirés sont impairs.

5° Donner la représentation graphique de la fonction F : $\lambda \rightsquigarrow F(\lambda)$.

6° On désigne par M_k le point de coordonnées $(k, F(k))$.

a) Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que, pour tout entier pair k de l'intervalle [4, 14], les points M_k appartiennent à la courbe représentative de la fonction : $\lambda \rightsquigarrow \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$.

b) Montrer qu'il existe trois réels α', β', γ' tels que, pour tout entier impair k de l'intervalle [3, 13], les points M_k appartiennent à la courbe représentative de la fonction : $\lambda \rightsquigarrow \alpha'\lambda^2 + \beta'\lambda + \gamma'$.

12 1° Une urne U_1 contient deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard dans l'urne U_1 et l'on observe la couleur de la boule tirée. Construire l'espace probabilisé fini qui permet d'étudier l'épreuve $\mathcal{E}_1$ précédente.

2° Une urne U_2 contient trois boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard dans l'urne U_2, et l'on observe la couleur de la boule tirée. Construire l'espace probabilisé fini qui permet d'étudier l'épreuve $\mathcal{E}_2$ précédente.

3° On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ qui consiste à tirer au hasard et simultanément une boule de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2. Construire l'espace probabilisé fini qui permet d'étudier l'épreuve $\mathcal{E}$.
Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

4° On verse le contenu de chacune des urnes U_1 et U_2 dans une urne U_3. Soit $\mathcal{E}_3$ l'épreuve qui consiste à tirer au hasard et simultanément deux boules de l'urne U_3. Construire l'espace probabilisé fini qui permet d'étudier l'épreuve $\mathcal{E}_3$. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu au 3°.

5° On considère à nouveau l'urne U_1 du 1°. On effectue cinq tirages successifs, avec remise, dans l'urne U_1. Déterminer la distribution binomiale qui correspond à cette épreuve et donner son diagramme en bâtons.

6° Même question que le 5°, pour l'urne U_2, puis pour l'urne U_3.

index

A

addition (des fonctions), 94
antisymétrie (d'une relation), 22
application linéaire, 239
arrangement, 81
associativité, 34
asymptote, 154

B

base (d'un espace vectoriel), 222
bijection, 54
bijection réciproque, 55

C

caractère statistique, 271
cardinal d'un ensemble fini, 77
classe d'équivalence, 24
combinaison, 84
combinaison linéaire, 211
commutativité, 33
complexe expérimental, 292
composition (de deux applications), 17
continuité (en un point), 101
continuité (sur un intervalle fermé), 104
continuité (sur un intervalle ouvert), 104
continuité à droite (en un point), 103
continuité à gauche (en un point), 104
coordonnées (d'un vecteur), 225

D

déterminant (d'une matrice), 254
diagramme en bâtons, 280
différence (de deux ensembles), 70
différence symétrique, 73
dimension (d'un espace vectoriel), 223
distribution binomiale, 332
distribution de probabilité, 302
distribution de probabilité
d'une probabilité conditionnelle, 325
distribution de probabilité
d'une variable aléatoire, 315
distribution statistique, 273
distributivité, 35
division (des fonctions), 96

E

élément neutre, 35
élément régulier, 37
éléments commutables, 34
éléments comparables, 28
ensemble de définition, 88
ensemble fini, 76
ensemble quotient, 26
ensembles équipotents, 75
épreuve, 292
épreuves indépendantes, 329
épreuves successives, 330
équation à plusieurs inconnues, 185
équation à une inconnue, 168
équivalence (relation d'...), 24
espace probabilisé fini, 300
espace vectoriel de dimension finie, 220
espaces vectoriels isomorphes, 244
espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, 202
événement élémentaire, 296
événement lié à une épreuve, 293
événement lié à une variable aléatoire, 313
événements équiprobables, 303
événements indépendants, 326
extremum (d'une fonction), 139

F

factorielle : $n!$, 81
fonction de répartition
d'une variable aléatoire, 317
fonction de répartition
d'une variable statistique, 283
fonction dérivable (en un point), 117
fonction dérivable
(sur un intervalle ouvert), 124
fonction dérivable à droite
(en un point), 122
fonction dérivable à gauche
(en un point), 123
fonction dérivée, 124
fonction dérivée seconde, 130
fonction impaire, 137
fonction linéaire tangente, 119
fonction paire, 138
fonction partie entière, 90
fonction polynôme, 96
fonction racine carrée, 94
forme linéaire, 243
formule du binôme de Newton, 86
fréquence cumulée, 282
fréquence (d'une classe), 275

G

graphe (d'une relation), 10
groupe, 40
groupe linéaire, 251

H

histogramme, 281
homomorphisme, 58, 239

I

image (d'un élément), 13
image (d'une partie), 14
individu, 270
inéquation à une inconnue, 172
inéquation à plusieurs inconnues, 185
injection, 51
intervalle, 89
isomorphisme, 58, 243

L

langage (des événements), 294
limite (d'une droite), 121
limite (d'une fonction), 105
limite à droite (d'une fonction), 106
limite à gauche (d'une fonction), 107
loi de composition externe, 44
loi de probabilité, 300
loi induite, 38
loi quotient, 39

M

matrice, 253
maximum (d'une fonction), 139
minimum (d'une fonction), 139
multiplication (des fonctions), 95

N

nombre dérivé, 117
noyau (d'une application linéaire), 240

O

opération intersection, 63
opération réunion, 64
ordre (relation d'...), 27
ordre partiel, 28
ordre total, 28

P

paire, 7
partie stable, 37, 45
partition (d'un ensemble), 25
permutation, 56
phénomène aléatoire, 291
polygone de fréquence, 280
population, 270
probabilité conditionnelle, 324
probabilité d'un événement, 298, 316
produit cartésien (de deux ensembles), 9
produit de deux espaces probabilisés finis, 329
produit de deux matrices, 256.
prolongement (d'une application), 16
p-uplet, 9

R

racine carrée, 93
réflexivité (d'une relation), 21
relation, 10
représentation d'une relation, 11
représentation graphique, 91
restriction (d'une application), 16

S

schéma de Bernoulli, 330
sens de variations, 92-130
singleton, 7
sous-espace vectoriel, 208
sous-groupe, 42
soustraction (des fonctions), 95
surjection, 52
symétrie (d'une relation), 21
symétrique d'un élément, 36
système complet d'événements, 295
système d'équations, 186
système d'inéquations, 189
système fini de vecteurs, 213
système générateur, 219
système libre, 215
système lié, 213

T

tableau des fonctions dérivées, 129
tangente (à une courbe), 121
transitivité (d'une relation), 21

V

variable aléatoire, 312
variable de Bernoulli, 331
variable statistique, 272
vecteurs linéairement dépendants, 213
vecteurs linéairement indépendants, 215