



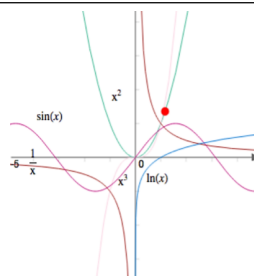
RÉPUBLIQUE DU BENIN



Ministère des Enseignements Secondaire, Technique
et de la Formation Professionnelle



Enseignement Secondaire Général



SUPPORT DE COURS DU PROFESSEUR



À propos de ce document :

Domaine : Sciences de l'éducation et de la formation

Mention : Sciences exactes

Discipline : Mathématiques

Classes : 1^{ère}C-D

Conçu, revu et amélioré par :

ASSOGBA A. Élisée Ghislain

Professeur de mathématiques de lycées et collèges du Bénin

Contacts : (+229) 96 32 85 95 / 94 69 11 75

Email : eliseeghiscool540@gmail.com

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

TOME 1

Année de parution : 2020 (1^{ère} édition)

Avant-propos

Salut à vous ! chers utilisateurs de ce document.

Ce support de cours s'adresse aux enseignants de mathématiques et plus précisément ceux d'entre-eux qui interviennent en 1^{ère} scientifique. L'idée de cet ouvrage est de fournir non seulement des activités et consignes élaborées sur la base des exigences de l'APC, mais aussi les définitions, propriétés et remarques qui en découlent. Cet ouvrage comporte donc les trois situations d'apprentissages en vigueur dans les premières scientifiques du Bénin. Étant bien conscient que le contenu du programme de mathématiques de la 1^{ère}C dépasse celui de la 1^{ère}D, nous avons pris soin de mentionner au niveau de chaque contenu notionnel la série concernée. Ainsi, avec ce document, vous pouvez vous assurer que vous avez déjà la bonne partie du cours des premières scientifiques. Veuillez donc chercher le TOME 2 de ce document pour avoir la suite des notions car ceci n'est que le TOME 1 qui comporte une partie du cours. Mais nous ne saurons prétendre avoir conçu le meilleur document ! car ceci n'est qu'une contribution à un acte pédagogique dans notre système éducatif. Par conséquent, vos apports, remarques, critiques, suggestions et recommandations dans le but d'améliorer notre travail sont les bienvenues. Aussi, nous espérons que ce humble travail servira aux enseignants de maths du Bénin.

L'auteur

Remerciements

Mes remerciements sincères sont adressés à tous les collègues qui de loin ou de proche ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'amélioration de ce travail. Je m'adresse particulièrement à M. Charles OKE; M. Jonas WANKPETIN et M. Paul Moïse GANGBADJA. Merci à vous !

CONTENU DU PROGRAMME D'ETUDE

I SAn°1 : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE	6
FICHE PEDAGOGIQUE	7
1 Orthogonalité dans l'espace (1^{ère}C&D)	9
1.1 Droites orthogonales	9
1.2 Droites et plans orthogonaux	11
1.3 Plans perpendiculaires	14
1.4 Projection orthogonale sur un plan	16
1.5 Projection orthogonale sur une droite	18
2 Vecteurs de l'espace (1^{ère}C&D)	21
2.1 Définitions et opération sur les vecteurs	21
2.2 Combinaison linéaire	23
2.3 Vecteurs coplanaires	24
2.4 Bases et repères	28
2.5 Produit scalaire (Uniquement pour la 1 ^{ère} C)	31
3 Géométrie analytique dans l'espace : Droites et plans (Uniquement pour la 1^{ère}C)	35
3.1 Équation cartésienne et représentation paramétrique de plans	35
3.2 Représentation paramétrique et système d'équations cartésiennes de droites . . .	38
3.3 Système d'équations linéaires	40
3.4 Distance d'un point à un plan	42
3.5 Étude analytique des positions relatives de droites et plans	43
II SAn°2 : ORGANISATION DES DONNES	46
FICHE PEDAGOGIQUE	47
4 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ - Systèmes linéaires (1^{ère}C&D)	50
4.1 Équations du second degré dans $\mathbb{R}$	50
4.2 Étude de signe des solutions d'une équation du second degré	54
4.3 Inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$	56
4.4 Équations et inéquations irrationnelles	57
4.5 Position d'un réel par rapport aux racines d'un polynôme du second degré . . .	59
4.6 Problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou inéquation du 2 nd degré	60

4.7	Systèmes linéaires (Uniquement pour la 1 ^{ère} D)	60
4.8	Programmation linéaire	62
5	Statistiques (Pour la 1^{ère}C)	63
5.1	Rappels sur la série statistique à une variable	63
5.1.1	Vocabulaire	63
5.1.2	Quelques caractéristiques	64
5.2	Série statistique à deux variables	64
6	Statistiques (Pour la 1^{ère}D)	69
6.1	Série statistique des centres	69
6.2	Caractéristiques de position	71
6.3	Caractéristiques de dispersion	73
7	Dénombrement (1^{ère}C&D)	75
7.1	Vocabulaire des ensembles	75
7.2	Produit cartésien et dénombrement de listes	78
7.3	Dénombrement d'arrangements et de permutations	80
7.4	Notion d'anagramme	82
7.5	Dénombrement de combinaisons	83
8	Fonctions numériques d'une variable réelle (1^{ère}C&D)	88
8.1	Généralité sur les fonctions	88
8.2	Opérations sur les fonctions	92
8.3	Applications	94

Première partie

**SAn°1 : CONFIGURATIONS DE
L'ESPACE**

FICHE PÉDAGOGIQUE

I- ÉLÉMENTS DE PLANIFICATION

1.1 Contenus de formation

1.1.1 Compétences

a) Les compétences disciplinaires :

- Résoudre un problème ou une situation-problème en utilisant les concepts et procédures du langage et du raisonnement mathématique.
- Appréhender la mathématique dans ses aspects numériques par l'appropriation des outils, techniques et procédés conventionnels ainsi que par le traitement des données.
- Appréhender la mathématique dans ses aspects géométriques par l'appropriation d'outils et de démarches propres à la géométrie.

b) Compétence transdisciplinaire :

- Se préparer à intégrer la vie professionnelle dans une perspective de réalisation de soi et d'insertion dans la société.

c) Les compétences transversales :

- Exploiter l'information disponible ;
- Résoudre une situation-problème ;
- Communiquer de façon précise et appropriée ;
- Exercer sa pensée critique ;
- Travailler en coopération.

1.1.2 Connaissances et techniques

Orthogonalité dans l'espace : Droites orthogonales ; droite et plan orthogonaux ; plans perpendiculaires ; projection orthogonale sur un plan - projection orthogonale sur une droite.

Vecteurs de l'espace : Définition d'un vecteur ; opérations sur les vecteurs ; caractérisation vectorielle de droites et de plans de l'espace ; bases et repères.

Produit scalaire : Définition du produit scalaire par projection orthogonale ; bases orthogonales, bases orthonormées ; expressions analytique et trigonométrique du produit scalaire.

Géométrie analytique de l'espace , droites et plans : Représentations paramétriques de droites et plans de l'espace ; équations cartésiennes ; vecteur normal à un plan ; distance d'un point à un plan ; étude analytique du parallélisme de droites et de plans ; étude analytique de l'orthogonalité de droites et de plans.

1.1.3 Stratégie objet d'apprentissage :

Résolution de problèmes

1.2 Durée :

21 heures

1.3 Stratégies d'enseignement / apprentissage :

Brainstorming, travail individuel, travail en groupe et travail collectif.

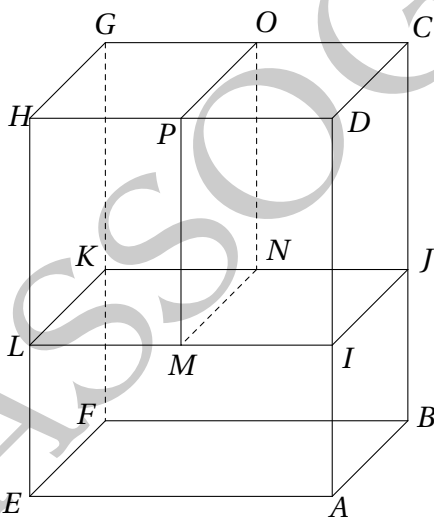
1.4 Matériels

- ❖ Craie
- ❖ Chiffon
- ❖ Règle, équerre, compas
- ❖ Les activités conçues
- ❖ CIAM 1^{ère}SM et SE
- ❖ Guides pédagogiques 1^{ère}C et D

II- DÉROULEMENT

Situation de départ : Une discussion autour du dessin d'une armoire

Coffi est un élève de la classe de 1^{ère}. Son tuteur Fako lui demande d'aller retirer auprès du menuisier l'armoire qu'il a commandée, pour y ranger ses habits. Il dessine le plan de l'armoire sur une feuille de papier qu'il remet à Coffi pour faciliter l'identification chez le menuisier. Voici le plan de cette armoire :



point S de l'espace ; il suffit de connaître la distance AS ». Non rétorque un autre « la distance AS seule ne suffit pas ; il faut connaître aussi le sens de A vers S sur la droite (AS) ». Un autre élève apporte une nuance en déclarant : « Encore, faut-il que S soit distinct de A ». Jean qui, jusque là n'est pas intervenu pose la question suivante à ses camarades « S'agit-il des coordonnées géographiques d'un point ? »

Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras, tout au long de la S.A à :

- ☞ Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- ☞ Analyser chacun des problèmes ;
- ☞ Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- ☞ Améliorer au besoin ta production.

Des camarades de Coffi ont vu ce dessin. L'un d'eux affirme qu'on peut y trouver des traces de droites dont les parallèles sont perpendiculaires dans un même plan. Un autre affirme : « Le point A permet de repérer n'importe quel

Orthogonalité dans l'espace (1^{ère} C&D)

Sommaire

1.1 Droites orthogonales	9
1.2 Droites et plans orthogonaux	11
1.3 Plans perpendiculaires	14
1.4 Projection orthogonale sur un plan	16
1.5 Projection orthogonale sur une droite	18

1.1 Droites orthogonales

Activité 1 : Droites orthogonales

Consigne 1 : Découverte

La partie $ABFEIJKL$ de l'armoire est un pavé droit.

1. Identifie en considérant cette partie, deux droites respectivement parallèles aux droites (AB) et (LE) et passant par un même point.
2. Précise la position relative des droites identifiées.

Stratégie de travail : $TI : 5mns$; $TG : 3mns$; $TC : 5mns$

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats :

On dit que les droites (AB) et (LE) sont orthogonales.

Définition (Droites orthogonales)

Deux droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ de l'espace sont orthogonales lorsque les parallèles à ces droites passant par un point donné sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent.

On note $(\mathcal{D}_1) \perp (\mathcal{D}_2)$

Remarques

- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales.
- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires.
- Deux droites orthogonales et sécantes sont perpendiculaires.

Consigne 2 : Propriété

$(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont deux droites orthogonales. (Δ) est une droite parallèle à $(\mathcal{D}_1)$.
Démontre que (Δ) est orthogonale à $(\mathcal{D}_2)$.

Stratégie de travail : *TI : 5mns ; TG : 3mns ; TC : 5mns*

Résultats attendus : (à faire)

** Propriété**

Si deux droites de l'espace sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Consigne 3 : Propriété

$(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont deux droites parallèles. (Δ) est une droite orthogonale à $(\mathcal{D}_1)$.
Démontre que (Δ) est orthogonale à $(\mathcal{D}_2)$.

Stratégie de travail : *TI : 5mns ; TG : 3mns ; TC : 5mns*

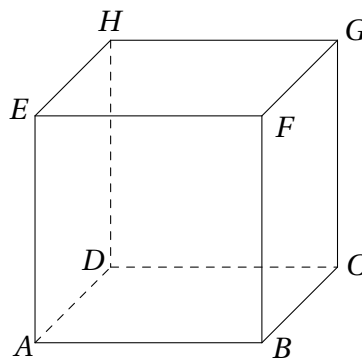
Résultats attendus : (à faire)

** Propriété**

Si deux droites de l'espace sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Consigne 4 : Consolidation

$ABCDEFGH$ est un cube comme l'indique la figure ci-dessous :



1. Démontre que les droites (DH) et (BC) sont orthogonales.
2. Démontre que les droites (DE) et (BG) sont orthogonales.

Stratégie de travail : *TI : 7mns ; TG : 5mns ; TC : 5mns*

Résultats attendus : (à faire)

1.2 Droites et plans orthogonaux

Activité 2 : Droites et plans orthogonaux

Cédric, un camarade de classe de Coffi sait depuis la classe de 4^{ème} que : "Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan". Ce résultat lui a été enseigné sous forme de définition. Il se demande si une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Consigne 5 :

$(\mathcal{P})$ est un plan ; $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont deux droites sécantes de $(\mathcal{P})$. (Δ) est une droite orthogonale à $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

1. Démontre que (Δ) est sécante à $(\mathcal{P})$.
2. Démontre que (Δ) est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.
3. Recopie et complète alors pointillés :

« Si une droite est à deux droites d'un plan, alors elle est à ce plan »

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 7mns ; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Indications

1. Supposer que (Δ) n'est pas sécante à $(\mathcal{P})$ ie $(\Delta) \parallel (\mathcal{P})$ puis distinguer les cas : $(\Delta) \subset (\mathcal{P})$ et $(\Delta) \cap (\mathcal{P}) = \emptyset$.
2. Poser $(\Delta) \cap (\mathcal{P}) = \{I\}$ puis considérer les parallèles $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ respectives à $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ passant par I . Utiliser ensuite la définition de la classe de 4^{ème} pour achever la démonstration.

Consigne 6 :

$(\mathcal{P})$ est un plan ; (Δ) est une droite perpendiculaire à $(\mathcal{P})$. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites sécantes de $(\mathcal{P})$.

1. Démontre que : $(\Delta) \perp (\mathcal{D})$ et $(\Delta) \perp (\mathcal{D}')$.
2. Recopie et complète alors pointillés :

« Si une droite est à un plan, alors elle est à deux droites de ce plan. »

Stratégie de travail : TI : 5mns ; TG : 5mns ; TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)

Indications

Poser $(\Delta) \cap (\mathcal{P}) = \{A\}$ puis considérer d'une part la parallèle $(\mathcal{D}_1)$ à $(\mathcal{D})$ passant par A ; perpendiculaire à (Δ) et d'autre part la parallèle $(\mathcal{D}_2)$ à $(\mathcal{D}')$ passant par A ; perpendiculaire à (Δ) . La suite est évidente.

De ces deux consignes, on retient ce qui suit :

Résumé

Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. On dit que la droite est orthogonale au plan.

Définition (Droite orthogonale à un plan)

Une droite est orthogonale ou perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Consigne 7 : Propriété

Tu considères le dessin de l'armoire. Combien y-a-t-il de droites passant par le point F et perpendiculaire au plan (ABC) ?

Stratégie de travail : $TI : 2mns ; TC : 3mns$

Résultats attendus : (à faire)

Propriétés

-  Par un point A de l'espace, il passe une droite unique de l'espace perpendiculaire à un plan donné de l'espace.
-  Par un point de l'espace, il passe un unique plan de l'espace orthogonal à une droite donnée de l'espace.

Consigne 8 : Propriété

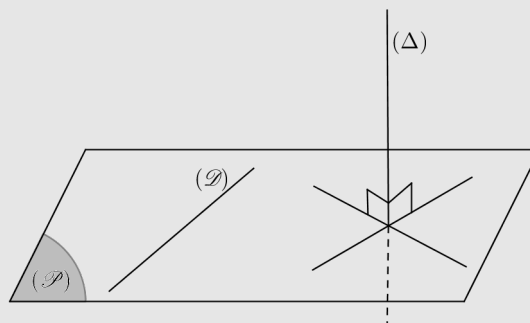
(Δ) est une droite orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$ de l'espace $\mathcal{E}$. $(\mathcal{D})$ est une droite de $(\mathcal{P})$.
Démontre que la droite (Δ) est orthogonale à $(\mathcal{D})$.

Stratégie de travail : $TI : 5mns ; TG : 5mns ; TC : 5mns$

Résultats attendus : (s'inspirer de la consigne 6 pour le faire)

Propriétés

-  Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.



$(\Delta) \perp (\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D}) \subset (\mathcal{P})$, alors $(\Delta) \perp (\mathcal{D})$.

- ☛ Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- ☛ Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- ☛ Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- ☛ Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.
- ☛ Si une droite $(\mathcal{D})$ est perpendiculaire à un plan $(\mathcal{P})$, alors toute droite orthogonale à $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$.

Consigne 9 : Consolidation

On considère un cube $ABCDIJKL$.

1. Démontre que $(JC) \perp (LK)$.
2. (a) Démontre que $(JC) \perp (AKL)$.
(b) Déduis-en que $(JC) \perp (AK)$ et $(JC) \perp (BL)$.

Stratégie de travail : $TI : 10\text{mns}$; $TG : 7\text{mns}$ $TC : 10\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 10 : Distance d'un point à un plan (Uniquement pour la 1^{ère}C)

On considère le dessin de l'armoire.

1. Justifie que la droite (ON) est perpendiculaire au plan (ABE) .
2. Construis sur le dessin le point d'intersection Q de la droite (ON) avec le plan (ABE) .
3. On donne : $HL = \frac{2}{5}HE$ et $HE = 1,6 \text{ m}$.
Calcule la distance NQ .

Stratégie de travail : $TI : 10\text{mns}$; $TG : 7\text{mns}$ $TC : 10\text{mns}$

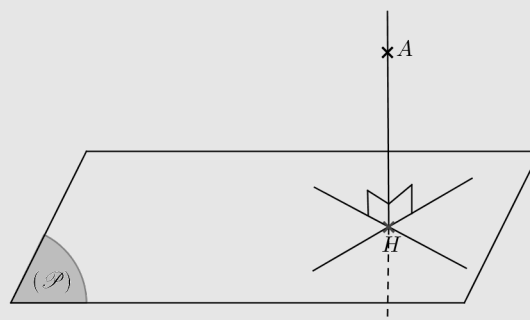
Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats :

La distance NQ est la distance du point N au plan (ABE) .

☛ Définition (Distance d'un point à un plan)

$(\mathcal{P})$ est un plan et A est un point de l'espace. On appelle distance du point A au plan $(\mathcal{P})$ notée $d(A;(\mathcal{P}))$, la distance AH où H est le point d'intersection de $(\mathcal{P})$ avec la droite passant par A et perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.



$$\text{On a : } \begin{cases} (AH) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{P}) \cap (AH) = \{H\} \end{cases} \Rightarrow d(A; (\mathcal{P})) = AH$$

Consigne 11 : Distance d'un point à une droite (**Uniquement pour la 1^{ère}C**)

On considère le dessin de l'armoire.

1. (a) Quel est le plan qui passe par L et orthogonal à la droite (BC) ?
 (b) Quel est l'intersection de ce plan avec la droite (BC) ?
2. On donne : $AB = 0,4 \text{ m}$ et $AE = 0,6 \text{ m}$.
 Calcule la distance LJ .

Stratégie de travail : $TI : 5\text{mns}$; $TG : 5\text{mn}$; $TC : 5\text{mns}$

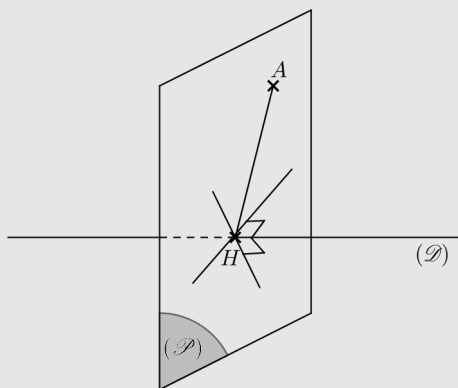
Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats :

La distance LJ est la distance du point L à la droite (BC) .

 **Définition** (Distance d'un point à une droite)

$(\mathcal{D})$ est une droite et A est un point de l'espace. On appelle distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$ notée $d(A; (\mathcal{D}))$, la distance AH où H est le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ avec le plan $(\mathcal{P})$ passant par A et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$.



$$\text{On a : } \begin{cases} A \in (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{P}) \perp (\mathcal{D}) \\ (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D}) = \{H\} \end{cases} \Rightarrow d(A; (\mathcal{D})) = AH$$

1.3 Plans perpendiculaires

Activité 3 : Plans perpendiculaires

En examinant le dessin de l'armoire, Natacha, une fille de 1^{ère} scientifique reconnaît deux plans perpendiculaires. Sa camarade Linda déclare en avoir oublié la définition.

Consigne 12 : Définition

1. Démontre que la droite (BC) est orthogonale au plan (ABE) .
2. Dédus-en que les plans (BCF) et (ABE) perpendiculaires.

Stratégie de travail : $TI : 5mns$; $TG : 5mns$ $TC : 5mns$

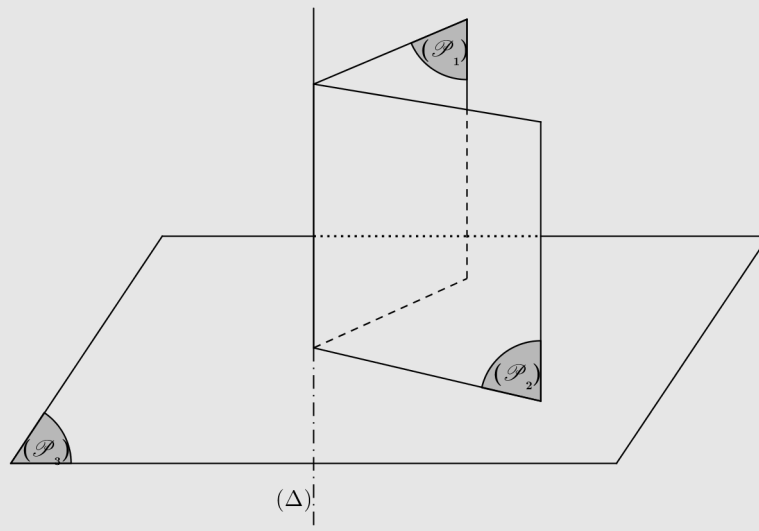
Résultats attendus : (à faire)

 Définition (Plans perpendiculaires)

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

 Propriétés (Uniquement pour la 1^{ère}C)

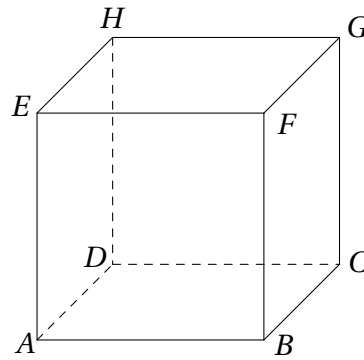
- ☐ Si une droite est parallèle à un plan et perpendiculaire à un second plan, alors ces deux plans sont perpendiculaires.
- ☐ Si une droite $(\mathcal{D})$ et un plan $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires à un plan $(\mathcal{P}')$, alors $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$.
- ☐ Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
- ☐ Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si il est perpendiculaire à leur droite d'intersection.



$$\begin{cases} (\mathcal{P}_3) \perp (\mathcal{P}_1) \\ (\mathcal{P}_3) \perp (\mathcal{P}_2) \end{cases} \iff (\mathcal{P}_3) \perp (\Delta) \text{ avec } (\Delta) = (\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2).$$

Consigne 13 : Consolidation

$ABCDEFGH$ est un cube comme l'indique la figure ci-dessous :



1. Démontre que $(AHG) \perp (FBC)$.

2. Démontre que $(ABG) \perp (EFC)$.

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

1.4 Projection orthogonale sur un plan

Activité 4 : Projection orthogonale sur un plan

Donald, un élève de cette classe de 1^{ère} s'intéresse au procédé qui, à chaque point X de l'espace associe le point d'intersection X' du plan (ABF) avec la droite passant par X et perpendiculaire au plan (ABF) . Joël affirme que ce procédé est une application de l'espace dans lui-même. Colombe, une élève de la classe déclare qu'il existe des points X tels que X et X' soient confondus.

Consigne 14 : Définition

- (a) Quelle est la droite qui passe par le point H et perpendiculaire au plan (ABF) ?
(b) Quelle est l'intersection de cette droite avec le plan (ABF) ?
- Le procédé tel que présenté dans l'activité est-il une application de l'espace dans lui-même ?

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns

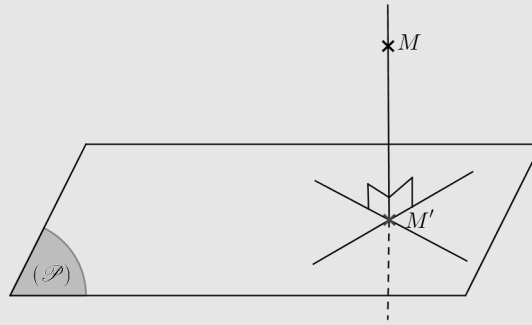
Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats :

On dit que le projeté orthogonal du point H sur le plan (ABF) est le point E .

Définition (Projection orthogonale sur un plan)

La projection orthogonale sur un plan $(\mathcal{P})$ est l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' , intersection de $(\mathcal{P})$ avec la droite passant par M et orthogonale à $(\mathcal{P})$. Si p désigne cette projection, on note $p(M) = M'$.

**Consigne 15 : Propriété**

$(\mathcal{P})$ est un plan, p une projection orthogonale sur $(\mathcal{P})$ et M un point quelconque de l'espace. Si $p(M) = M$, alors on dit que M est un point invariant par p .

1. Justifie que :

- (a) tout point du plan $(\mathcal{P})$ est invariant par p .
- (b) tout point invariant par p appartient à $(\mathcal{P})$.

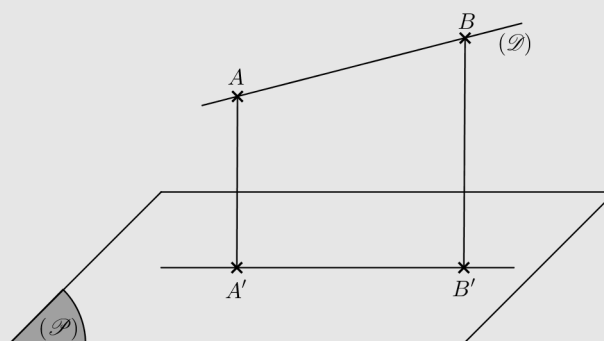
2. Quel est alors l'ensemble des points invariants par p ?

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

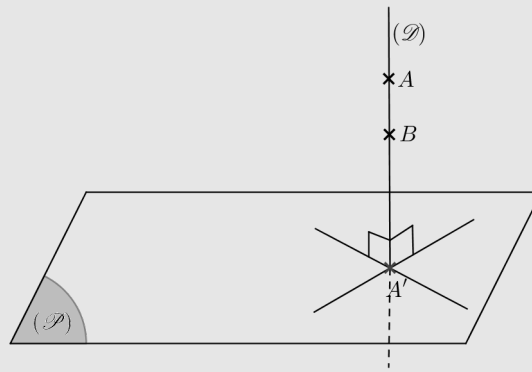
Propriétés

- ☞ L'ensemble des points invariants par une projection orthogonale sur un plan est ce plan lui-même.
- ☞ Soit p la projection orthogonale sur un plan $(\mathcal{P})$. L'image d'une droite $(\mathcal{D})$ par p est :
 - ✓ une droite si $(\mathcal{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathcal{P})$;



On a : $(\mathcal{D})$ non orthogonale à $(\mathcal{P})$; $p(A) = A'$ et $p(B) = B'$. Alors, $A' \neq B'$ et
 $p((\mathcal{D})) = (A'B')$

- ✓ un singleton si $(\mathcal{D})$ est orthogonale à $(\mathcal{P})$.



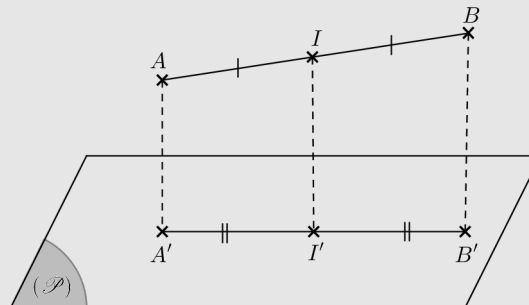
On a : $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P})$; $p(A) = A'$ et $p(B) = B'$. Alors $p((\mathcal{D})) = \{A'\}$

☞ Si A et B sont deux points d'images respectives A' et B' par p , le segment $[AB]$ a pour image par p :

- ✓ $[A'B']$ si (AB) n'est pas orthogonale à $(\mathcal{P})$ et on a :

$$\begin{cases} A'B' = AB, & \text{si } (AB) \parallel (\mathcal{P}) \\ A'B' < AB, & \text{si } (AB) \text{ et } (\mathcal{P}) \text{ sont non parallèles} \end{cases}$$
- ✓ $\{A'\}$ si (AB) est perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.

☞ L'image, par une projection orthogonale p , du milieu d'un segment dont le support est non orthogonal à $(\mathcal{P})$, est le milieu du segment image.



$$\text{On a : } \begin{cases} p(A) = A' \\ p(B) = B' \\ I \text{ milieu de } [AB] \\ I' \text{ milieu de } [A'B'] \end{cases} \Rightarrow p(I) = I'.$$

1.5 Projection orthogonale sur une droite

Activité 5 : Projection orthogonale sur une droite

Donald, un élève de cette classe de 1^{ère} s'intéresse au procédé qui, à chaque point X de l'espace associe le point d'intersection X' de la droite (AE) avec le plan passant par X et perpendiculaire à la droite (AE) . Joël affirme que ce procédé est une application de l'espace dans lui-même. Colombe, une élève de la classe déclare qu'il existe des points X tels que X et X' soient confondus.

Consigne 16 : Définition

1. (a) Quel est le plan qui passe par le point G et perpendiculaire à la droite (AE) ?
 (b) Quelle est l'intersection de ce plan avec la droite (AE) ?
2. Le procédé tel que présenté dans l'activité est-il une application de l'espace dans lui-même ?

Stratégie de travail : $TI : 10\text{mns}$; $TG : 10\text{mns}$ $TC : 10\text{mns}$

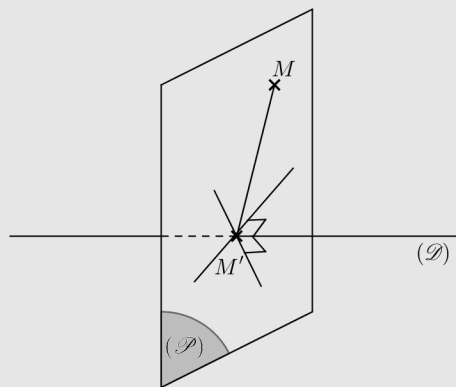
Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats :

On dit que le projeté orthogonal du point G sur la droite (AE) est le point E .

 Définition (Projection orthogonale sur une droite)

La projection orthogonale sur une droite $(\mathcal{D})$ est l'application qui à tout point M de l'espace associe le point M' , intersection de $(\mathcal{D})$ avec le plan passant par M et orthogonale à $(\mathcal{D})$. Si q désigne cette projection, on note $q(M) = M'$.



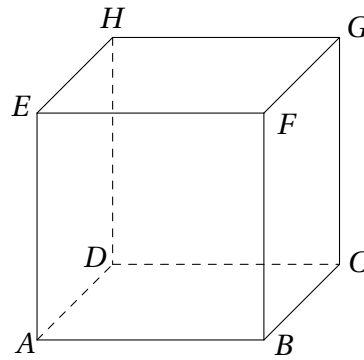
 Propriétés

Soit p la projection orthogonale sur une droite $(\mathcal{D})$.

- ☐ L'ensemble des points invariants par p est la droite $(\mathcal{D})$.
- ☐ L'image par p d'une droite orthogonale à $(\mathcal{D})$ est un singleton.
- ☐ L'image par p d'une droite non orthogonale à $(\mathcal{D})$ est la droite $(\mathcal{D})$.
- ☐ L'image par p du milieu d'un segment dont le support n'est pas orthogonal à $(\mathcal{D})$ est le milieu de l'image de ce segment.

Consigne 17 : Consolidation

$ABCDEFGH$ est un cube comme l'indique la figure ci-dessous :



Soit I le centre du carré $BCGF$. On désigne par p la projection orthogonale sur le plan (GFC) et par q la projection orthogonale sur la droite (DH) .

1. Détermine $p(A)$, $p(B)$, $p(I)$, $p(D)$, $p([AD])$, $p([BH])$, et $p([DC])$.
2. Détermine $q(G)$, $q(F)$, $q([AE])$, $q([AC])$ et $q([BH])$.

Stratégie de travail : $TI : 15\text{mns}$; $TG : 10\text{mns}$ $TC : 10\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

Vecteurs de l'espace (1^{ère}C&D)

Sommaire

2.1 Définitions et opération sur les vecteurs	21
2.2 Combinaison linéaire	23
2.3 Vecteurs coplanaires	24
2.4 Bases et repères	28
2.5 Produit scalaire (Uniquement pour la 1 ^{ère} C)	31

2.1 Définitions et opération sur les vecteurs

Activité 6 : Définitions et opération sur les vecteurs

Halim, un élève de cette classe de 1^{ère} D, se souvient de la notion de vecteur et affirme : « Le vecteur $\overrightarrow{LN}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ tandis que $\overrightarrow{AL}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ». Certains de ses camarades s'interrogent sur la notion de combinaison linéaire et affirment n'avoir rien compris à sa déclaration.

Consigne 18 : Définition et caractéristiques d'un vecteur de l'espace

Un vecteur de l'espace se définit de la même manière qu'un vecteur du plan. On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Détermine :

1. les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. les caractéristiques d'un vecteur quelconque de l'espace.

Stratégie de travail : TI : 5mns ; TG : 5mns TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)

Définition (Vecteur de l'espace)

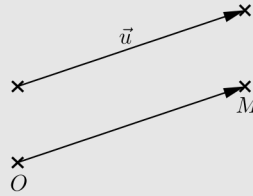
Tout couple (A, B) de points distincts de l'espace détermine l'objet mathématique $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par :

-  **sa direction** : celle de la droite (AB) ;
-  **son sens** : de A vers B ;
-  **sa norme** : la longueur du segment $[AB]$.

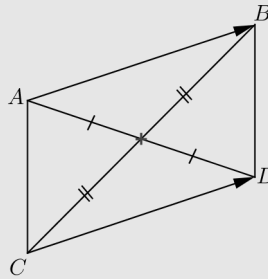
Pour tout point A de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est noté $\vec{0}$. Ce vecteur n'a ni direction, ni sens, mais a une norme qui vaut 0.

Propriétés

- ✦ Pour tout point O et pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un point M de l'espace unique tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



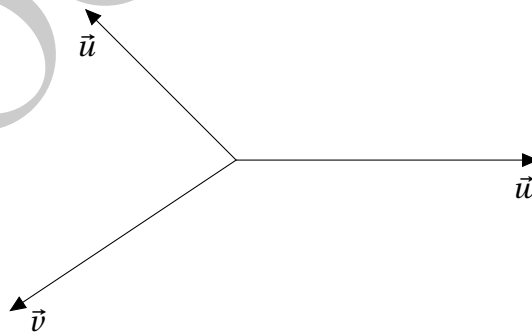
- ✦ Pour tous points A, B et C de l'espace, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles)
- ✦ Pour tous points A, B, C et D de l'espace, on a :
 - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
 - $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}) \Leftrightarrow [AD] \text{ et } [BC] \text{ ont le même milieu}$



Consigne 19 : Somme de deux vecteurs - Produit d'un vecteur par un réel

On définit la somme de deux vecteurs de $\mathcal{W}$ ainsi que le produit d'un vecteur par un nombre réel de la même manière que dans le plan.

Reprends le dessin ci-après et construis les vecteurs suivants : $\vec{U} = \vec{v} + \vec{w} + \vec{u}$ et $\vec{V} = 2\vec{u} - \vec{v}$



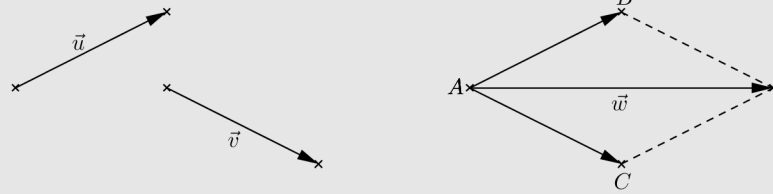
Stratégie de travail : $TI : 10mns$; $TG : 5mns$ $TC : 7mns$

Résultats attendus : (à faire)

Définition (Somme de deux vecteurs - Produit d'un vecteur par un réel)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$; A, B et C trois points de l'espace tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- ✦ On appelle somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



- ❖ On appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par un réel α , le vecteur noté $\alpha\vec{u}$.
 - ★ $\alpha\vec{u}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$, si $\alpha \neq 0$.
 - ★ $\alpha\vec{u}$ a même sens que le vecteur $\vec{u}$, si $\alpha > 0$.
 - ★ $\alpha\vec{u}$ a un sens contraire à celui du vecteur $\vec{u}$, si $\alpha < 0$.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ et pour tous réels α et β , on a :

- ❖ $(\alpha\vec{u} = \vec{0}) \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$.
- ❖ $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- ❖ $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- ❖ $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- ❖ $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

Définition (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dits colinéaires lorsque l'un d'eux est le vecteur nul ou bien lorsque les deux ont la même direction ; c'est-à-dire s'il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

2.2 Combinaison linéaire

Définition (Combinaison linéaire)

Soit $\vec{u}_1 ; \vec{u}_2 ; \dots ; \vec{u}_n$, n vecteurs de l'espace.

On dit qu'un vecteur $\vec{v}$ de l'espace est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1 ; \vec{u}_2 ; \dots ; \vec{u}_n$, s'il existe n nombres réels $\alpha_1 ; \alpha_2 ; \dots ; \alpha_n$ tels que : $\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \dots + \alpha_n\vec{u}_n$.

$$\text{On note aussi : } \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i$$

2.3 Vecteurs coplanaires

Définition (Vecteurs coplanaires)

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ sont dits coplanaires si et seulement si les points A ; B ; C et D sont dans un même plan de l'espace.

Propriétés

- ☆ Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si l'un au moins est une combinaison linéaire des deux autres.
- ☆ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et $\vec{w}$ un vecteur de l'espace, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarques

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant trois vecteurs de l'espace, si deux au moins de ces trois vecteurs sont colinéaires, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Consigne 20 : Propriété (Uniquement pour la 1^{ère}D)

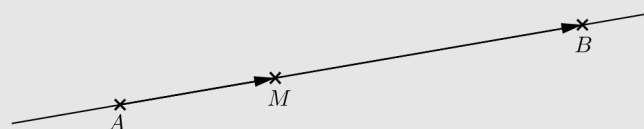
A et B sont deux points distincts de $\mathcal{E}$ et M est un point appartenant à la droite (AB) . Justifie qu'il existe un nombre réel α tel que : $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$.

Stratégie de travail : TI : 5mns; TG : 5mns TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)

Propriété

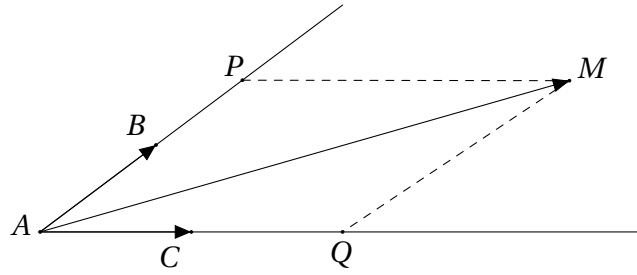
A et B étant deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$, pour tout point M de l'espace, M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un nombre réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB}$.



$$M \in (AB) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB}$$

Consigne 21 : Propriété (Uniquement pour la 1^{ère}D)

A , B , C sont trois points distincts de l'espace $\mathcal{E}$ et M est un point appartenant au plan (ABC) tel que le quadrilatère $APMQ$ soit un parallélogramme.



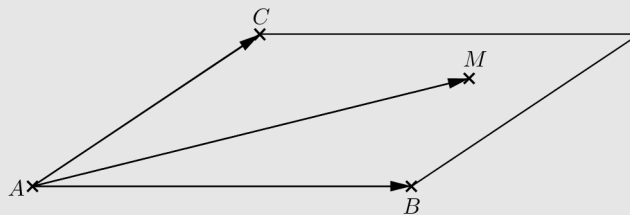
1. Justifie qu'il existe un nombre réel α tel que : $\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AB}$.
2. Justifie qu'il existe un nombre réel β tel que : $\overrightarrow{AQ} = \beta \overrightarrow{AC}$.
3. Dédus-en que : $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$

Stratégie de travail : TI : 7mns; TG : 7mns TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

Propriété

A, B et C étant deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$, pour tout point M de l'espace, M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe deux nombres réels x et y tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.



$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \exists (x; y) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

Consigne 22 : Consolidation

Observe le dessin de l'armoire. Dans chacun des cas suivants, justifie si les vecteurs indiqués sont coplanaires :

1. $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AF}$.
2. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{LE}$.
3. $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$.

Stratégie de travail : TI : 7mns; TG : 5mns TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 23 : Propriété (Uniquement pour la 1^{ère}C)

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace.

1. Démontre que s'il existe des réels α , β , γ non tous nuls tels que : $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.
2. Démontre que si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires, alors il existe des nombres réels α , β , γ non tous nuls tels que : $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$.

Stratégie de travail : *TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns*

Résultats attendus : (à faire)

🕒 Indications

1. Supposer qu'il existe des nombres réels α, β, γ non tous nuls tels que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ et exprimer $\vec{w}$ par exemple en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (avec $\gamma \neq 0$). La suite est triviale.
2. Supposer que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires puis distinguer les cas : " $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires" puis " $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires".

📖 Propriété

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont coplanaires si et seulement si il existe au moins un triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ de nombres réels **non tous nuls** tels que : $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$.

Consigne 24 : *Propriété (Uniquement pour la 1^{ère}C)*

Démontre que trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont non coplanaires si et seulement si, le seul triplet (α, β, γ) de nombres réels tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ est $(0, 0, 0)$.

Stratégie de travail : *TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns*

Résultats attendus : (à faire)

🕒 Indications

- ⇒ Supposer que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont non coplanaires et traduire cela en utilisant la propriété précédente puis remarquer que $0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$.
- ⇐ Supposer que le seul triplet (α, β, γ) de nombres réels tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ est $(0, 0, 0)$. La conclusion est immédiate d'après la propriété précédente.

📖 Propriété

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont non coplanaires si et seulement si, le seul triplet (α, β, γ) de nombres réels tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ est $(0, 0, 0)$.

📖 Remarques

Cette propriété est la **contraposée** de la propriété précédente.

Consigne 25 : *Caractérisation vectorielle d'une droite et d'un plan (Uniquement pour la 1^{ère}C)*

On considère le dessin de l'armoire.

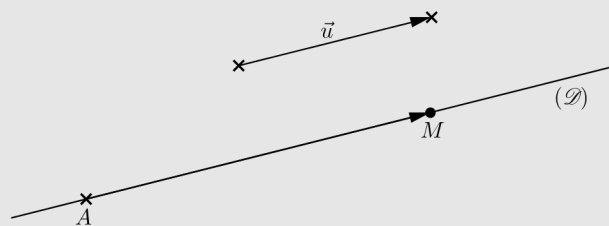
1. Détermine l'ensemble (Γ_1) des points R de $\mathcal{E}$ tels que : $\vec{ER} = \alpha\vec{EB}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Détermine l'ensemble (Γ_2) des points S de $\mathcal{E}$ tels que : $\vec{IS} = \alpha\vec{IJ} + \beta\vec{IL}$; $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Stratégie de travail : *TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns*

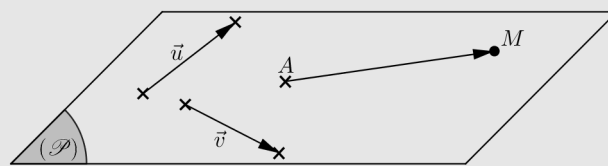
Résultats attendus : (à faire)

Propriétés (Caractérisation vectorielle d'une droite et d'un plan)

- Soit A un point de $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$. La droite $(\mathcal{D})$ de repère $(A; \vec{u})$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.



- Soit A un point de $\mathcal{E}$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires** de $\mathcal{W}$. Le plan $(\mathcal{P})$ de repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$; $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.



Remarques

Dire qu'une droite $(\mathcal{D})$ a pour repère $(A; \vec{u})$, c'est dire que $(\mathcal{D})$ passe par le point A et est dirigée par le vecteur $\vec{u}$. On dit ainsi que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $(\mathcal{D})$.

Consigne 26 : Vecteur normal à un plan (Uniquement pour la 1^{ère}C)

En considérant le dessin de l'armoire, donne avec justification un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan (ABE) .

Stratégie de travail : $TI : 3mns$; $TC : 3mns$

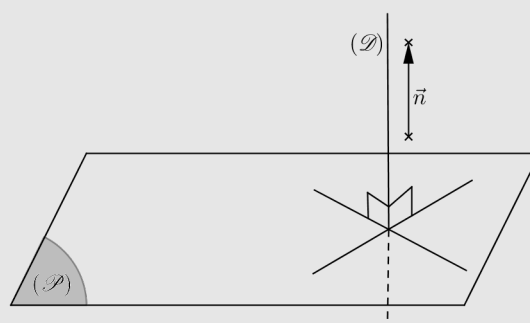
Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats :

On dit que le vecteur identifié est un vecteur normal au plan (ABE) .

Définition (Vecteur normal à un plan)

On appelle vecteur normal à un plan, tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à ce plan.



$\vec{n}$ est un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P})$. Alors $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Consigne 27 : Somme de trois vecteurs non coplanaires (**Uniquement pour la 1^{ère}C**)

Sur le dessin de l'armoire, représente le vecteur $\vec{AB} + \vec{KN} + \vec{EK}$ après avoir justifié que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{KN}$ et $\vec{EK}$ sont non coplanaires.

(Tu prendras le point E comme origine de cette représentation).

Quelle est la configuration géométrique obtenue ?

Stratégie de travail : TI : 7mns; TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

Propriété

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

2.4 Bases et repères

Activité 7 : Bases et repères

Consigne 28 : Base de $\mathcal{W}$ et coordonnées d'un vecteur dans une base

Sur le dessin de l'armoire, on donne : $\vec{HL} = \frac{3}{5}\vec{HE}$.

1. Justifie que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{HP}$ et $\vec{EH}$ sont non coplanaires.
2. Détermine le triplet (x, y, z) de nombres réels tels que : $\vec{HN} = x\vec{AB} + y\vec{HP} + z\vec{EH}$.

Stratégie de travail : TI : 7mns; TG : 7mns TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats :

Les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{HP}$ et $\vec{EH}$ sont non coplanaires. On dit que le triplet $(\vec{AB}, \vec{HP}, \vec{EH})$ est une base de $\mathcal{W}$. De plus, $\vec{HN} = \vec{AB} + \vec{HP} - \frac{3}{5}\vec{EH}$; on dit que le triplet $(1; 1; -\frac{3}{5})$ est le triplet de coordonnées du vecteur $\vec{HN}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{HP}, \vec{EH})$.

 **Définition** (Base de $\mathcal{W}$ et coordonnées d'un vecteur dans une base)

* Un triplet de vecteurs **non coplanaires** est appelé une base de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace.

* Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$ $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$.

Le triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est appelé triplet de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $\vec{u}(x; y; z)$.

Consigne 29 : Propriété (Uniquement pour la 1^{ère}C)

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'ensemble $\mathcal{W}$ tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. Soit λ un réel.

1. Démontre que : $(\vec{u} = \vec{v}) \Leftrightarrow (x = x'; y = y'; z = z')$.
2. Détermine les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ et de $\lambda\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Stratégie de travail : TI : 7mns; TG : 7mns TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

 Indications

1. Établir que $(\vec{u} = \vec{v}) \Leftrightarrow (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$; et exploiter le fait que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit une base de $\mathcal{W}$ pour déduire que $x - x' = 0$; $y - y' = 0$; $z - z' = 0$ puis conclure.
2. Évident

 Propriétés

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs dans une même base de $\mathcal{W}$; λ un nombre réel.

- ☐ $(\vec{u} = \vec{v}) \Leftrightarrow (x = x'; y = y'; z = z')$
- ☐ $\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y'; z + z')$
- ☐ $\lambda\vec{u}(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$

Consigne 30 : Repère $\mathcal{E}$ et coordonnées d'un point dans un repère

On sait d'après la consigne 28 que le triplet $(\vec{AB}, \vec{HP}, \vec{EH})$ est une base de $\mathcal{W}$. On dit que le quadruplet $(C; \vec{AB}, \vec{HP}, \vec{EH})$ par exemple est un repère de l'espace $\mathcal{E}$.

Détermine les coordonnées du vecteur $\vec{CN}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{HP}, \vec{EH})$.

Stratégie de travail : TI : 7mns; TG : 7mns TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats :

On a $\vec{CN}(0; -1; -\frac{3}{5})$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{HP}, \vec{EH})$.

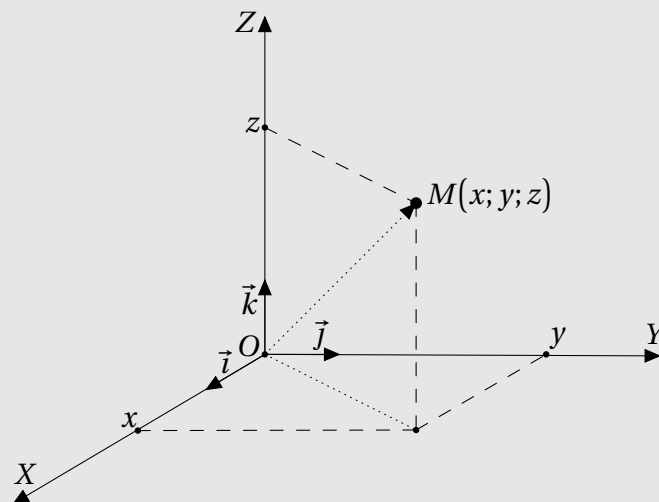
On dit que $N(0; -1; -\frac{3}{5})$ dans le repère $(C; \vec{AB}, \vec{HP}, \vec{EH})$.

 Définition (Repère de $\mathcal{E}$ et coordonnées d'un point dans un repère)

✱ On appelle repère de l'espace $\mathcal{E}$:

- tout quadruplet (O, I, J, K) de points **non coplanaires**. Dans ce cas, le repère est affine.
- tout quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point de l'espace et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une **base**. Dans ce cas, le repère est cartésien.

✱ Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$ et M un point quelconque de $\mathcal{E}$. Il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ce triplet est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $M(x; y; z)$.



- O est l'origine du repère.
- l'axe $(O; \vec{i})$ est appelé axe des abscisses.
- l'axe $(O; \vec{j})$ est appelé axe des ordonnées.
- l'axe $(O; \vec{k})$ est appelé axe des côtes.

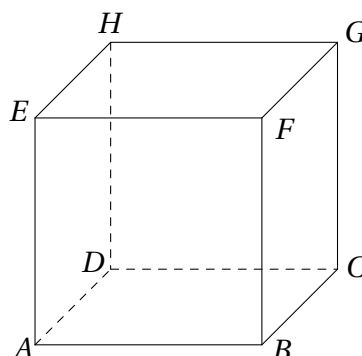
Si le point M a pour coordonnées (x, y, z) alors x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z la côte de M .

Remarques

O, I, J et K étant quatre points non coplanaires de l'espace, le repère (O, I, J, K) se note aussi $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$. Ainsi, pour tout point M de l'espace, l'unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère (O, I, J, K) ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.

Consigne 31 : Consolidation

$ABCDEFGH$ est un cube. Soit I le centre du carré $EFGH$; J et K les milieux respectifs des segments $[BF]$ et $[GH]$.



1. Démontre que le quadruplet $(E; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{DH})$ est un repère de l'espace.
2. Détermine dans ce repère les coordonnées de tous les points du cube.
3. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ dans la base $(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Stratégie de travail : TI : 15mns ; TG : 10mns TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

2.5 Produit scalaire (Uniquement pour la 1^{ère}C)

Activité 8 : Produit scalaire

Joël affirme que si l'on connaît les longueurs JN , LN et la mesure de l'angle $\widehat{KLM}$, on pourra calculer $\overrightarrow{LN} \cdot \overrightarrow{NJ}$.

Consigne 32 : Définition par projection orthogonale

On définit le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace comme dans le plan. On donne : $KN = NJ = a$ avec a un réel strictement positif.

Calcule $\overrightarrow{LN} \cdot \overrightarrow{NJ}$.

Stratégie de travail : TI : 7mns ; TG : 7mns TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)

🕒 Indications

Déterminer d'abord le projeté orthogonal du point L sur la droite (NJ) . Il s'agit du point K . La suite est évidente.

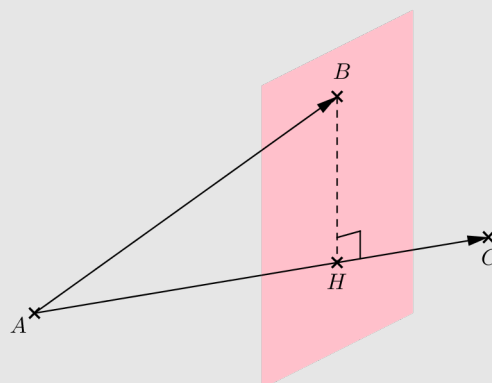
📖 Définition (par projection orthogonale du produit scalaire de deux vecteurs)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$. A , B et C des points de $\mathcal{E}$ tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (lire " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ") défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
-

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}, \text{ avec } H \text{ le projeté orthogonal de } B \text{ sur } (AC) \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls.} \end{aligned}$$



 Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ et pour tout réel α , on a :

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

 Définition (Carré scalaire et norme d'un vecteur)

☆ On appelle carré scalaire du vecteur $\vec{u}$, le nombre réel noté $\vec{u}^2$ tel que $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

☆ On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$, le nombre réel positif noté $\|\vec{u}\|$ (lire "norme de $\vec{u}$ ") tel que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

 Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$, on a :

$$\blacklozenge (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\blacklozenge (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$\blacklozenge (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

 Définition (Vecteur unitaire)

On appelle vecteur unitaire de $\mathcal{W}$, tout vecteur de $\mathcal{W}$ dont la norme est égale à 1.

 Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

$$\boxplus (\|\vec{u}\| = 0) \Leftrightarrow (\vec{u} = \vec{0})$$

$$\boxplus \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$$

$$\boxplus \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \text{ (inégalité triangulaire)}$$

Consigne 33 : Consolidation

$ABCD$ est un carré direct de côté a , de centre O et I le milieu du segment $[AB]$.

Calcule en fonction de a les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 34 : Orthogonalité de deux vecteurs à partir du produit scalaire

En utilisant le dessin de l'armoire,

1. Calcule $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MI}$.

2. Détermine l'ensemble (Γ) des points T de $\mathcal{E}$ tels que : $\overrightarrow{LT} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Stratégie de travail : TI : 7mns ; TG : 7mns TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

 **Définition** (Orthogonalité de deux vecteurs à partir du produit scalaire)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$$

 **Caractérisation d'un plan à l'aide de l'un de ses vecteurs normaux**

$\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan $(\mathcal{P})$ et A est un point de $(\mathcal{P})$.

Pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a :

$$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Consigne 35 : Base orthogonale

En considérant le dessin de l'armoire, justifie que le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de $\mathcal{W}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont deux à deux orthogonaux.

Stratégie de travail : TI : 7mns ; TG : 7mns TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

 **Définition** (Base orthogonale-orthonormée, repère orthogonal-orthonormé)

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathcal{W}$ et O un point de $\mathcal{E}$.

* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale si et seulement si : $\vec{u} \perp \vec{v}$; $\vec{u} \perp \vec{w}$ et $\vec{v} \perp \vec{w}$.

Si de plus, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$, alors la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est dite orthonormée.

* $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère orthogonal si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale.

* $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère orthonormé si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée.

Consigne 36 : Expression analytique du produit scalaire et de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathcal{W}$. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

1. Exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de x, y, z, x', y', z' .
2. Déduis-en l'expression de $\|\vec{u}\|$ en fonction de x, y, z .

Stratégie de travail : *TI : 7mns; TG : 7mns TC : 7mns*

Résultats attendus : (à faire)

 **Propriétés** (Expression analytique du produit scalaire et de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée)

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une **base orthonormée** de $\mathcal{W}$. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. On a :

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Consigne 37 : Expression trigonométrique du produit scalaire

En utilisant le dessin de l'armoire, exprime $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$ à l'aide de l'angle $\widehat{FAB}$ et des distances AB et AF .

Stratégie de travail : *TI : 7mns; TG : 7mns TC : 7mns*

Résultats attendus : (à faire)

 **Définition** (Expression trigonométrique du produit scalaire)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Géométrie analytique dans l'espace : Droites et plans

(Uniquement pour la 1^{ère}C)

Sommaire

3.1 Équation cartésienne et représentation paramétrique de plans	35
3.2 Représentation paramétrique et système d'équations cartésiennes de droites	38
3.3 Système d'équations linéaires	40
3.4 Distance d'un point à un plan	42
3.5 Étude analytique des positions relatives de droites et plans	43
FICHE PEDAGOGIQUE	47

3.1 Équation cartésienne et représentation paramétrique de plans

Activité 9 : Équation cartésienne et représentation paramétrique d'un plan de l'espace

Clarisse une élève de cette classe de 1^{ère} C sait qu'à partir d'un repère d'un plan, on peut déterminer une représentation paramétrique ou une équation cartésienne d'une droite de ce plan. Elle se demande s'il est possible de déterminer une représentation paramétrique ou une équation cartésienne d'un plan ou d'une droite connaissant un repère de l'espace.

Consigne 38 : Équation cartésienne d'un plan de l'espace

Les dimensions réelles de l'armoire sont : $EA = 80$ cm, $EF = 40$ cm et $EH = 120$ cm. On choisit 20 cm comme unité de longueur et on considère les points A_0 ; B_0 et C_0 tels que : $A_0 \in [EA]$; $B_0 \in [EF]$; $C_0 \in [EH]$ et $EA_0 = EB_0 = EC_0 = 1$.

1. Justifie que $(E; \overrightarrow{EA_0}, \overrightarrow{EB_0}, \overrightarrow{EC_0})$ est un repère orthonormé de l'espace $\mathcal{E}$.
2. Soit T un point de coordonnées $(x; y; z)$ dans ce repère et $(\mathcal{P})$ le plan passant par D et de vecteur normal $\overrightarrow{HK}$.

Détermine une condition nécessaire et suffisante portant sur x , y et z pour que T appartienne à $(\mathcal{P})$.

On rappelle que $\overrightarrow{HL} = \frac{3}{5} \overrightarrow{HE}$.

Stratégie de travail : $TI : 10\text{mns}$; $TG : 10\text{mns}$ $TC : 10\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

Indications

1. Évident
2. Utiliser la caractérisation d'un plan à l'aide de l'un de ses vecteurs vecteurs normaux. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HK}$ dans la base $(\overrightarrow{EA_0}, \overrightarrow{EB_0}, \overrightarrow{EC_0})$ en utilisant $\overrightarrow{HL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{HE}$ et les coordonnées du point D dans le repère $(E; \overrightarrow{EA_0}, \overrightarrow{EB_0}, \overrightarrow{EC_0})$ puis revenir à la caractérisation du plan $(\mathcal{P})$.

Exploitation des résultats :

La relation : $10y - 18z + 108 = 0$ est une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$.

Propriétés

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un **repère orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit a, b et c des nombres réels **non tous nuls** c'est à dire $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

- ☐ Tout plan $(\mathcal{P})$ de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation cartésienne de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ où d est une constante réelle.
- ☐ a, b et c étant des nombres réels **non tous nul**, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ où d est une constante réelle, est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Remarque

Dans n'importe quel repère, même non orthonormé, tout plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et toute équation de cette forme est l'équation cartésienne d'un plan lorsque a, b et c sont **non tous nuls**. Lorsque le repère n'est pas orthonormé, le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ n'est généralement pas un vecteur normal au plan.

Consigne 39 : Consolidation

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1; 1; 3)$; $B(2; -1; 1)$ et $C(0; -2; 3)$.

1. Détermine une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ contenant le point C et perpendiculaire à la droite (AB) .
2. Le point $D(3; 1; 0)$ appartient-il au plan $(\mathcal{P})$?

Stratégie de travail : $TI : 7mns$; $TG : 7mns$ $TC : 7mns$

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 40 : Représentation paramétrique d'un plan

Les hypothèses de la consigne 38 sont maintenues. On désigne par $(\mathcal{R})$ le plan défini par les points O, I et F . Soit T un point quelconque de coordonnées $(x; y; z)$ dans le repère $(E; \overrightarrow{EA_0}, \overrightarrow{EB_0}, \overrightarrow{EC_0})$.

1. Justifie que : $T \in (\mathcal{R}) \Leftrightarrow \exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{OT} = \alpha \overrightarrow{OI} + \beta \overrightarrow{OF}$.

2. Dédus-en que les coordonnées x, y et z de T vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta + 2 \\ y = -2\alpha + 2 \\ z = -\frac{18}{5}\alpha - 6\beta + 6 \end{cases}$$

Stratégie de travail : $TI : 7mns$; $TG : 7mns$ $TC : 7mns$

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats :

Le système $\begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta + 2 \\ y = -2\alpha + 2 \\ z = -\frac{18}{5}\alpha - 6\beta + 6 \end{cases}$ est une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$.

 **Définition** (Représentation paramétrique d'un plan)

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un **repère orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteurs directeurs **non colinéaires** $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$.

□ Le système $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases} ; (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$, est une représentation paramétrique de $(\mathcal{P})$.

□ Réciproquement, l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases} ; (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

est le plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$. À chaque couple $(\alpha; \beta)$ correspond un point de $(\mathcal{P})$. $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère cartésien de $(\mathcal{P})$.

Consigne 41 : Consolidation

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifie que les points A, B et C déterminent un plan $(\mathcal{P})$ et un seul.

2. Détermine une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$.

Stratégie de travail : $TI : 10mns$; $TG : 10mns$ $TC : 10mns$

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 42 : Consolidation

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2t + t' - 1 \\ y = t - t' + 2 \\ z = -t + 3t' + 4 \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2;$$

et $(\mathcal{P}')$ le plan d'équation cartésienne : $x - 2y + z - 3 = 0$.

1. Détermine une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$.
2. Détermine une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P}')$.

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

3.2 Représentation paramétrique et système d'équations cartésiennes de droites

Activité 10 : Équation cartésienne et représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Consigne 43 : Équation cartésienne d'une droite de l'espace

Les hypothèses de la consigne 38 sont maintenues. Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par K et de vecteur directeur $\vec{AG}$; T un point quelconque de coordonnées $(x; y; z)$ dans le repère $(E; \vec{EA}_0, \vec{EB}_0, \vec{EC}_0)$. Détermine une condition nécessaire et suffisante portant sur x, y, z pour que T appartienne à $(\mathcal{D})$.

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Indications

Utiliser la caractérisation d'une droite à l'aide de l'un de ses vecteurs directeurs. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AG}$ dans la base $(\vec{EA}_0, \vec{EB}_0, \vec{EC}_0)$ et les coordonnées du point K dans le repère $(E; \vec{EA}_0, \vec{EB}_0, \vec{EC}_0)$ puis revenir à la caractérisation de la droite $(\mathcal{D})$.

Exploitation des résultats :

Le système
$$\begin{cases} x = -4\alpha \\ y = 2\alpha + 2 \\ z = 6\alpha + \frac{12}{5} \end{cases}$$
 est une représentation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$.

Définition (Représentation paramétrique d'une droite)

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $(\mathcal{D})$ la droite passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.

□ Le système
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R}),$$
 est une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$.

□ Réciproquement, l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{E}$ vérifiant
$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases} ; (\alpha \in \mathbb{R})$$

est la droite $(\mathcal{D})$ passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$. À chaque valeur de α correspond un point de $(\mathcal{D})$. $(A; \vec{u})$ est un repère cartésien de $(\mathcal{D})$.

Consigne 44 : Système d'équations cartésiennes d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $(\mathcal{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}).$$

1. Justifie que si $a \neq 0$; $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors on a : $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$.

2. Justifie que si $a = 0$; $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors on a : $\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$

3. Justifie que si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, alors on a : $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

 **Définition** (Système d'équations cartésiennes d'une droite)

Dans le système
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; (t \in \mathbb{R}),$$
 t est appelé le paramètre réel.

☆ Si $a \neq 0$; $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors on a : $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$.

Cette relation est appelé système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathcal{D})$ passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.

De même, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ est la droite $(\mathcal{D})$ passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.

☆ Si $a = 0$; $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors le système d'équations cartésiennes de $(\mathcal{D})$ est : $\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$

☆ Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, alors le système d'équations cartésiennes de $(\mathcal{D})$ est :
$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

Remarques

Une droite donnée peut être considérée comme l'intersection de deux plans non parallèles la contenant. Le système formé par les équations de ces plans constitue un système d'équations cartésiennes de la droite. Une droite ne peut donc pas être définie par une seule équation cartésienne.

Si $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont les équations cartésiennes respectives de deux plans sécants, alors le système
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$
 est un système d'équations cartésiennes de la droite d'intersection de ces deux plans.

Consigne 45 : Intersection de trois plans

L'espace $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_3)$ d'équations respectives : $x + y - z + 3 = 0$; $2x - y + z + 1 = 0$; $-x + 2y - z + 2 = 0$.

Détermine l'intersection de ces trois plans.

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Indications

Il ne s'agira pas ici de résoudre un système par la méthode de pivot de Gauss puisqu'elle n'est pas encore vue. On considèrera ici les équations cartésiennes des plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'une part pour avoir la valeur de x par la méthode de combinaison. La suite est évidente.

3.3 Système d'équations linéaires

Activité 11 : Système d'équations linéaires

 **Définition** (Équations linéaires et système d'équations linéaires à trois inconnues)

- ✿ On appelle équation linéaire à trois inconnues x, y, z , toute équation pouvant s'écrire sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c et d des constantes réelles.
- ✿ On appelle solution d'une équation linéaire $ax + by + cz + d = 0$, tout triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ de nombres réels vérifiant cette équation.
- ✿ On appelle système d'équations linéaires à trois inconnues, tout système de n équations linéaires à trois inconnues ($n \geq 2$).

Exemples :

$$(S) : \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases} ; (S') : \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 3x - 2y - z = 2 \\ -x + 7y - 5z = 7 \end{cases}$$

Définition (Systèmes équivalents)

Deux systèmes linéaires sont dits équivalents si et seulement si ils ont le même ensemble de validité et le même ensemble de solution.

Définition (Opérations élémentaires)

Soit un système donné (S) de n équations linéaires ($n \geq 2$) à trois inconnues.

$$(S) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (L_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (L_2) \\ \dots & \dots \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n = 0 & (L_n) \end{cases}$$

- ✓ Si on remplace une équation notée L_i par l'équation αL_i ; ($\alpha \in \mathbb{R}^*$), on obtient un nouveau système (S_1) . Les deux systèmes (S) et (S_1) sont dits équivalents. On écrit $L_i \leftarrow \alpha L_i$ et on lit : " L_i est remplacée par αL_i ".
- ✓ Si on remplace une équation L_i par l'équation $\alpha L_i + \beta L_j$; ($\alpha; \beta \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$), on obtient un nouveau système équivalent au système (S). On écrit $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ et on lit : " L_i est remplacée par $\alpha L_i + \beta L_j$ ".
- ✓ Si on permute deux équations L_i et L_j , on obtient un nouveau système équivalent au système (S). On écrit $L_i \longleftrightarrow L_j$.

Retenons (Méthode de pivot de Gauss)

La méthode de pivot de Gauss consiste à choisir une ligne ou équation pour laquelle le coefficient d'une inconnue donnée est non nul puis utiliser cette équation pour éliminer cette inconnue choisie au niveau des autres équations linéaires du système à l'aide des opérations élémentaires. On répète ce processus en conservant à chaque fois la ligne utilisée pour avoir le nouveau système équivalent au système initial jusqu'à l'obtention d'une dernière équation possédant le minimum possible d'inconnues.

Consigne 46 : Consolidation

1. Résous dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant d'inconnue $(x; y; z)$:

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 8 = 0 \\ -x + 2y + z + 2 = 0 \end{cases}.$$

2. Déduis-en l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système suivant d'inconnue $(x; y; z)$:

$$(S_2) : \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y-2} + z + 1 = 0 \\ 2x^2 - \frac{1}{y-2} + 3z + 8 = 0 \\ -x^2 + \frac{2}{y-2} + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Stratégie de travail : *TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns*

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 47 : Approfondissement

Résous dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants en utilisant la méthode de pivot de Gauss :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ x - y + 2z = 4 \\ -x + 3y + 2z = 7 \end{cases} ; \quad (S_2) : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 5y - z = -4 \end{cases} ; \quad (S_3) : \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 7 \end{cases}$$

Stratégie de travail : *TI : 15mns ; TG : 15mns TC : 15mns*

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 48 : Approfondissement

L'espace $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives : $2x - y + z + 1 = 0$; $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

Détermine l'intersection de ces deux plans.

Stratégie de travail : *TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns*

Résultats attendus : (à faire)

3.4 Distance d'un point à un plan

Consigne 49 : Distance d'un point à un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan $(\mathcal{P})$ dont un vecteur normal est $\vec{n}$. Soit un point A de l'espace n'appartenant pas à $(\mathcal{P})$ et H son projeté orthogonal sur $(\mathcal{P})$. On note $d(A; (\mathcal{P}))$ la distance du point A au plan $(\mathcal{P})$.

1. Justifie que : $|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$.

2. Déduis-en que : $d(A; (\mathcal{P})) = \frac{|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

3. On suppose que $(\mathcal{P}): ax + by + cz + d = 0$; $A(x_A; y_A; z_A)$ et $H(x_H; y_H; z_H)$.

Prouve que : $d(A; (\mathcal{P})) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ul$ où ul est l'unité de longueur

Stratégie de travail : *TI : 10mns ; TG : 10mns TC : 10mns*

Résultats attendus : (à faire)

🕒 Indications

1. Utiliser la définition trigonométrique du produit scalaire puis remarquer que $\cos(\overrightarrow{AH}; \vec{n}) = \pm 1$ car les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.
2. Remarque que $d(A; (\mathcal{P})) = AH$ et utiliser la question 1).
3. Utiliser la question 2) et remarquer que $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$ car $H \in (\mathcal{P})$

📖 Propriété (Distance d'un point à un plan)

L'espace $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère orthonormé, soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de $\mathcal{E}$ et $(\mathcal{P})$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ où $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

La distance du point A au plan $(\mathcal{P})$ est le nombre réel positif $d(A; (\mathcal{P}))$ tel que :

$$d(A; (\mathcal{P})) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} ul \text{ où } ul \text{ est l'unité de longueur}$$

3.5 Étude analytique des positions relatives de droites et plans

Activité 12 : Étude analytique des positions relatives de droites et plans

Consigne 50 : Parallélisme et orthogonalité de deux droites

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère une droite $(\mathcal{D})$ de repère $(A; \vec{u})$ et une droite $(\mathcal{D}')$ de repère $(B; \vec{v})$. Étudie le parallélisme et l'orthogonalité de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Stratégie de travail : *TI : 5mns ; TG : 5mns TC : 5mns*

Résultats attendus : (à faire)

📖 Retenons (Position relative de deux droites de l'espace)

Soit $(\mathcal{D})$ la droite de repère $(A; \vec{u})$ et $(\mathcal{D}')$ la droite de repère $(B; \vec{v})$. On a :

- ❖ $((\mathcal{D}) // (\mathcal{D}')) \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires})$
- ❖ $((\mathcal{D}) \text{ est strictement parallèle à } (\mathcal{D}')) \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires et } A \notin (\mathcal{D}'))$
- ❖ $((\mathcal{D}) \text{ et } (\mathcal{D}') \text{ sont sécantes}) \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non colinéaires et } \overrightarrow{AB}; \vec{u}; \vec{v} \text{ coplanaires})$
- ❖ $((\mathcal{D}) \text{ et } (\mathcal{D}') \text{ sont coplanaires}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}; \vec{u}; \vec{v} \text{ sont coplanaires})$
- ❖ $((\mathcal{D}) \text{ et } (\mathcal{D}') \text{ sont orthogonales}) \Leftrightarrow (\vec{u} \perp \vec{v})$
- ❖ $((\mathcal{D}) \text{ et } (\mathcal{D}') \text{ sont perpendiculaires}) \Leftrightarrow [(\vec{u} \perp \vec{v}) \text{ et } (\mathcal{D}) \text{ sécante } (\mathcal{D}')]$

Consigne 51 : Parallélisme et orthogonalité d'une droite et d'un plan

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère une droite $(\mathcal{D})$ de repère $(A; \vec{u})$ et un plan $(\mathcal{P})$ passant par le point B et de vecteur normal $\vec{n}$.

Étudie le parallélisme et l'orthogonalité de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$.

Stratégie de travail : TI : 5mns; TG : 5mns TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)

 Retenons (Position relative d'une droite et d'un plan)

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère une droite $(\mathcal{D})$ de repère $(A; \vec{u})$ et un plan $(\mathcal{P})$ passant par le point B et de vecteur normal $\vec{n}$.

- ★ Si $\vec{u} \perp \vec{n}$, alors $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$ et si de plus $A \in (\mathcal{P})$, alors $(\mathcal{D}) \subset (\mathcal{P})$.
- ★ Si $\vec{u} \perp \vec{n}$, alors $(\mathcal{D}) \parallel (\mathcal{P})$ et si de plus $A \notin (\mathcal{P})$, alors $(\mathcal{D})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$.
- ★ Si $\vec{u}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$, alors $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathcal{P})$ c'est-à-dire $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.
- ★ Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, alors $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P})$.

Consigne 52 : Parallélisme et orthogonalité d'une droite et d'un plan

Dans l'espace $\mathcal{E}$, soit une droite $(\mathcal{D})$ de repère $(A; \vec{u})$ et un plan $(\mathcal{P})$ de repère $(B; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Étudie le parallélisme et l'orthogonalité de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$.

Stratégie de travail : TI : 5mns; TG : 5mns TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)

 Retenons (Position relative d'une droite et d'un plan)

Dans l'espace $\mathcal{E}$, soit une droite $(\mathcal{D})$ de repère $(A; \vec{u})$ et un plan $(\mathcal{P})$ de repère $(B; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

- ★ Si $\vec{u}; \vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont coplanaires et $A \in (\mathcal{P})$, alors $(\mathcal{D}) \subset (\mathcal{P})$.
- ★ Si $\vec{u}; \vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont coplanaires et $A \notin (\mathcal{P})$, alors $(\mathcal{D})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$.
- ★ Si $\vec{u}; \vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont non coplanaires, alors $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à $(\mathcal{P})$ c'est-à-dire $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont sécants.
- ★ Si $\vec{u} \perp \vec{u}_1$ et $\vec{u} \perp \vec{u}_2$, alors $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P})$.

Consigne 53 : Parallélisme et orthogonalité de deux plans

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère le plan $(\mathcal{P})$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$; le plan $(\mathcal{P}')$ passant par B et de vecteur normal $\vec{n}'$.

Étudie le parallélisme et l'orthogonalité de $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Stratégie de travail : TI : 5mns; TG : 5mns TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)

🔑 Retenons (Position relative de deux plans)

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère le plan $(\mathcal{P})$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$; le plan $(\mathcal{P}')$ passant par B et de vecteur normal $\vec{n}'$.

- ✧ Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires, alors $(\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}')$; et si de plus $A \in (\mathcal{P}')$, alors $(\mathcal{P}) = (\mathcal{P}')$.
- ✧ Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires et si $A \notin (\mathcal{P}')$, alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont strictement parallèles.
- ✧ Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, alors $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont sécants.
- ✧ Si $\vec{n} \perp \vec{n}'$, alors $(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{P}')$.

Consigne 54 : Consolidation

Dans l'espace rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ d'équations respectives : $x+y+3z+5=0$ et $x+2y-z+4=0$; la droite $(\mathcal{D})$ de système d'équation cartésienne :

$$x+1 = \frac{y-2}{2} = -z$$

1. Détermine une représentation paramétrique de la $(\mathcal{D})$ passant par $A(-1; -1; 2)$ et perpendiculaire à $(\mathcal{P})$.
2. Détermine une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ et précise un repère de $(\mathcal{D})$.
3. Démontre que la droite $(\mathcal{D})$ est strictement parallèle à $(\mathcal{P})$ et que $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}')$.
4. Détermine $d(A; (\mathcal{P}))$.
5. Détermine les coordonnées du point d'intersection H de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$.

Stratégie de travail : TI : 15mns ; TG : 15mns TC : 15mns

Résultats attendus : (à faire)

Deuxième partie

SAn°2 : ORGANISATION DES DONNES

FICHE PÉDAGOGIQUE

I- ÉLÉMENTS DE PLANIFICATION

1.1 Contenus de formation

1.1.1 Compétences

a) Les compétences disciplinaires :

- Résoudre un problème ou une situation-problème en utilisant les concepts et procédures du langage et du raisonnement mathématique.
- Appréhender la mathématique dans ses aspects numériques par l'appropriation des outils, techniques et procédés conventionnels ainsi que par le traitement des données.
- Appréhender la mathématique dans ses aspects géométriques par l'appropriation d'outils et de démarches propres à la géométrie.

b) Compétence transdisciplinaire :

- Se préparer à intégrer la vie professionnelle dans une perspective de réalisation de soi et d'insertion dans la société.

c) Les compétences transversales :

- Exploiter l'information disponible ;
- Résoudre une situation-problème ;
- Communiquer de façon précise et appropriée ;
- Exercer sa pensée critique ;
- Travailler en coopération.

1.1.2 Connaissances et techniques

Equations et inéquations dans $\mathbb{R}$, système linéaire : Équation du second degré à une inconnue ; inéquation du second degré à une inconnue ; équation se ramenant à une équation du second degré à une inconnue ; inéquation se ramenant à une inéquation du second degré à une inconnue ; étude de problèmes se ramenant à la résolution d'une équation du second degré à une inconnue ou d'une inéquation du second degré à une inconnue ; système d'équations linéaires à trois inconnues.

Statistiques (1^{ère}D) : Regroupement en classes de séries statistiques ; représentations graphiques ; effectifs et fréquences cumulées ; caractéristiques de position : classe modale, mode, moyenne, médiane, densité d'une classe ; caractéristiques de dispersion : variance, écart-type.

Statistiques (1^{ère}C) : Séries statistiques à deux caractères (organisation des données, nuage de points, covariance, ajustement linéaire).

Dénombrement : Dénombrement de parties d'ensemble fini ; dénombrement de listes ; dénombrement d'arrangements, dénombrement de permutations, dénombrement de combinaisons ; triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.

Fonctions numériques d'une variable réelle : [applications : applications particulières (injection, surjection, bijection) ; composition d'applications ; restriction-prolongement ; image directe ; image réciproque], majoration et minoration d'une fonction numérique ; opérations sur les fonctions numériques ; limite d'une fonction en un point ; limite d'une fonction en un point ; limite d'une fonction à gauche en un point ; limite d'une fonction à droite en un point ; Continuité d'une fonction en un point ; continuité d'une fonction sur un intervalle ; limite infinie ; limite à l'infinie ; calcul de limites ; dérivation en un point a ; détermination de la dérivée ; dérivée et sens de variation.

Primitives de fonctions usuelles

Suites numériques : Généralités (définition, représentation graphique des termes d'une suite numérique) ; étude d'une suite numérique (suite majorée, suite minorée, suite bornée, sens de variation d'une suite numérique, convergence) ; suite arithmétique ; suite géométrique ; suites définies par une formule de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$.

1.1.3 Stratégie objet d'apprentissage :

Résolution de problèmes

1.2 Durée :

75 heures

1.3 Stratégies d'enseignement / apprentissage :

Brainstorming, travail individuel, travail en groupe et travail collectif.

1.4 Matériels

- ❖ Craie
- ❖ Chiffon
- ❖ Règle, équerre, compas
- ❖ Les activités conçues
- ❖ CIAM 1^{ère}SM et SE
- ❖ Guides pédagogiques 1^{ère}C et D

II- DÉROULEMENT

Situation de départ : Le meilleur tireur

Une société de surveillance organise de façon périodique pour ses agents une séance d'entraînement au tir. Chaque agent est soumis à un test à l'aide d'un dispositif spécial construit à partir d'un carré de 6 dm de côté. Ce dispositif génère de façon successive plusieurs carrés concentriques tels que chaque sommet du carré à construire soit sur un côté du carré précédemment construit et à une distance x de l'une des extrémités de ce côté. A chaque agent, le dispositif construit selon sa taille et son poids a un nombre N donné de carrés dont il doit atteindre au tir un certain nombre N' ($N' < N$). Melon n'est ni gros, ni grand, mais trapu et veut se qualifier meilleur agent tireur de la société. Il consacre plus de 12 heures à son travail et à l'entraînement. Il se demande comment choisir la durée de chacune de ces deux activités

de façon que, en s'entraînant trois fois plus que d'habitude, il travaille plus qu'il ne s'entraîne. Il se propose aussi d'étudier les principes mathématiques de ce test. Pour cela il relève dans les bases de données de la société les poids et les tailles de certain de ses coéquipiers. Il dresse le tableau suivant :

Poids x en kg	65	68	62	62	68	68	59	71	74	68	68	74	71	65	65
Taille y en cm	165	177	174	168	165	171	165	177	174	171	165	174	174	174	174

62	65	68	71	65	74	74	71	65	77	74	62	77	68	71
174	174	168	171	174	168	177	174	165	180	177	168	180	171	174

Tâche : Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématiques. Pour cela, tu auras, tout au long de la S.A à :

- ☞ Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- ☞ Analyser chacun des problèmes ;
- ☞ Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- ☞ Améliorer au besoin ta production.

Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ - Systèmes linéaires (1^{ère} C&D)

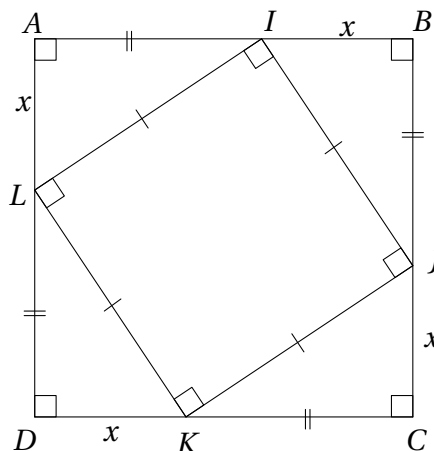
Sommaire

4.1	Équations du second degré dans $\mathbb{R}$	50
4.2	Étude de signe des solutions d'une équation du second degré	54
4.3	Inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$	56
4.4	Équations et inéquations irrationnelles	57
4.5	Position d'un réel par rapport aux racines d'un polynôme du second degré	59
4.6	Problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou inéquation du 2 nd degré	60
4.7	Systèmes linéaires (Uniquement pour la 1 ^{ère} D)	60
4.8	Programmation linéaire	62

4.1 Équations du second degré dans $\mathbb{R}$

Activité 13 : Équations du second degré dans $\mathbb{R}$

Dans le but de réaliser son dispositif d'entraînement, Melon désire connaître la valeur de x afin de construire le second carré $IJKL$ pour qu'il ait 20 dm^2 d'aire. Pour cela, il fait le dessin suivant du dispositif :



Consigne 55 : Définition

- (a) Calcule en fonction de x l'aire du second carré $IJKL$.

(b) Justifie que x vérifie l'égalité suivante : $x^2 - 6x + 8 = 0$.

2. Comment appelle-t-on une telle égalité ?

Stratégie de travail : $TI : 7\text{mns}$; $TG : 7\text{mns}$; $TC : 7\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)



Définition (Polynôme du second degré et équation du second degré)

- ☐ On appelle polynôme du second degré, tout polynôme $P(x)$ pouvant s'écrire sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$; $(b; c) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ On appelle équation du second degré à une inconnue, toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$; $(b; c) \in \mathbb{R}^2$.

Consigne 56 : Consolidation

Donne le degré de chacune des équations suivantes :

$(E_1) : 4x - 2 + 3x^2 = 0$;

$(E_2) : 2 + 3x - x^2\sqrt{3} = 1 - x(1 + x\sqrt{3})$

$(E_m) : (m - 2)x^2 - 2x + m - 4 = 0$; où m est un paramètre réel.

Stratégie de travail : $TI : 7\text{mns}$; $TG : 7\text{mns}$; $TC : 7\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 57 : Résolution d'une équation du second degré

On considère le polynôme P défini pour tout réel x par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des nombres réels et $a \neq 0$.

1. Mets $P(x)$ sous forme canonique.

2. On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$

(a) Écris $P(x)$ en fonction de Δ .

(b) Justifie que : $P(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

3. Résous l'équation $P(x) = 0$ dans chacun des cas suivants :

- $\Delta < 0$
- $\Delta = 0$
- $\Delta > 0$

Stratégie de travail : $TI : 10\text{mns}$; $TG : 10\text{mns}$; $TC : 10\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats :

Le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.


Retenons (Résolution d'une équation du second degré)

Pour résoudre une équation du second degré $(E) : ax^2 + bx + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$; $(b; c) \in \mathbb{R}^2$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

❑ Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution réelle. On déduit donc que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.

❑ Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution double x_0 telle que $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Dans ce cas, la forme factorisée du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$$P(x) = a(x - x_0)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

❑ Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dans ce cas, la forme factorisée du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Consigne 58 : Consolidation

1. Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

(a) $x^2 - 3x - 4 = 0$

(b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

(c) $-3x^2 - 2x - 3 = 0$

2. Factorise chacune des expressions suivantes :

(a) $P(x) = 3x^2 - x + 1$

(b) $Q(x) = 4x^2 - 4x + 1$

(c) $R(x) = -3x^2 - 2x - 3$

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 59 : Équation du second degré avec paramètre

On considère l'équation (E_m) définie par $(E_m) : (m - 2)x^2 + 2(m - 1)x + m + 1 = 0$ où m est un paramètre réel.

1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) .

2. Détermine la valeur de m pour que le réel -2 soit solution de (E_m) .

3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_m) . (Tu discuteras suivant les valeurs de m)

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

**Retenons** (Résolution d'une équation du second degré avec paramètre)

Pour résoudre une équation $(E) : ax^2 + bx + c = 0$ où a ; b et c dépendent d'un paramètre réel, on peut procéder comme suit :

- On étudie éventuellement le cas où l'équation (E) n'est pas du second degré ($a = 0$).
- Dans le cas où l'équation (E) est du second degré ($a \neq 0$),
 - ▮ on calcule le discriminant Δ de l'équation (E) ;
 - ▮ on étudie le signe de Δ suivant les valeurs du paramètre;
 - ▮ on détermine dans chaque cas le nombre de solutions et on calcule ces solutions.

Consigne 60 : Somme et produit des solutions d'une équation du second degré

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$; $(b; c) \in \mathbb{R}^2$ admettant deux solutions distinctes x_1 et x_2 . On désigne par S la somme de ces racines et par P leur produit.

1. Rappelle l'expression de chacune des solutions x_1 et x_2 en fonction de a , b et Δ .
2. Calcule S et P .

Stratégie de travail : TI : 5mns; TG : 5mns; TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)

**Propriété**

Si x_1 et x_2 sont les solutions d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Consigne 61 : Consolidation

1. On donne l'équation suivante : $3x^2 - 2x - 1 = 0$. Sachant que le réel 1 est une solution de cette équation, détermine l'autre solution sans calculer Δ .
2. Soit dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 - 3x - 8 = 0$. On désigne par x_1 et x_2 ses deux solutions. Sans déterminer x_1 et x_2 , calcule $x_1^2 + x_2^2$.

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 62 : Détermination de deux réels connaissant leur somme et leur produit

On se propose de déterminer deux nombres réels a et b tels que : $a + b = S$ et $ab = P$. Soit l'équation $(E) : x^2 - Sx + P = 0$.

1. Calcule la somme A et le produit B des solutions de (E) .
2. Vérifie que a et b sont solution de (E) .

3. Déduis-en que les nombres réels recherchés sont les solutions de (E).

Stratégie de travail : *TI : 5mns; TG : 5mns; TC : 5mns*

Résultats attendus : (à faire)



Retenons (Détermination de deux réels connaissant leur somme et leur produit)

Pour déterminer deux nombres réels connaissant leur somme S et leur produit P , on peut résoudre l'équation $x^2 - Sx + P = 0$. Les solutions de cette équation lorsqu'elles existent sont les deux nombres réels recherchés.

Consigne 63 : Consolidation

1. Détermine deux nombres réels dont la somme est -5 et le produit est -126 .
2. Détermine les dimensions d'un rectangle de périmètre 12 m et d'aire 1 m^2 .
3. Un rectangle peut-il avoir pour périmètre 6 m et pour aire 4 m^2 ?

Stratégie de travail : *TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns*

Résultats attendus : (à faire)

4.2 Étude de signe des solutions d'une équation du second degré

Activité 14 : Étude de signe des solutions d'une équation du second degré

Soit l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). On suppose que $\Delta > 0$ et l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 . Soit S leur somme et P leur produit. On se propose d'étudier le signe de x_1 et x_2 sans les calculer. On suppose que $x_1 < x_2$.

Consigne 64 :

Reproduis et complète le tableau suivant en utilisant le signe de S et de P :

Signe de P	Signes des solutions	Signe de S	Conclusion
$P > 0$		$S > 0$	
		$S < 0$	
$P = 0$		$S < 0$	
		$S > 0$	
$P < 0$		$S < 0$	
		$S > 0$	

Stratégie de travail : *TI : 7mns; TG : 7mns; TC : 7mns*

Résultats attendus : (à faire)


Retenons (Étude de signe des solutions d'une équation du second degré)

Soit l'équation $(E) : ax^2 + bx + c = 0$; $a \in \mathbb{R}^*$; $(b; c) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\Delta > 0$ et l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 . Soit S leur somme et P leur produit. On suppose que $x_1 < x_2$

- ❖ Si $P < 0$, alors x_1 et x_2 sont de signes contraires et on a : $x_1 < 0 < x_2$.
- ❖ Si $P = 0$ et :
 - ↪ $S < 0$, alors $x_1 < 0$ et $x_2 = 0$.
 - ↪ $S > 0$, alors $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$.
- ❖ Si $P > 0$, alors x_1 et x_2 sont de même signe et de plus :
 - ↪ si $S < 0$, alors $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$.
 - ↪ si $S > 0$, alors $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

Consigne 65 : Consolidation

1. Détermine le signe des racines des polynômes suivants sans les calculer :

(a) $P(x) = 2x^2 + x - 3$

(b) $Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$

2. Soit l'équation $(E_m) : (m-2)x^2 + 2(m+2)x + m-3 = 0$ où m est un paramètre réel.

(a) Discute suivant les valeurs de m l'existence et le signe des solutions de (E_m) .

(b) Soit x_1 et x_2 les solutions de (E_m) lorsqu'elles existent. Exprime en fonction de m les expressions suivantes :

$$A = x_1 + x_2 - 2x_1x_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

(c) Établis entre x_1 et x_2 une relation indépendante du paramètre réel m .

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 66 :Résolution d'une équation en utilisant une inconnue auxiliaire

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : x^4 - 2x^2 - 15 = 0$.

1. Pose $X = x^2$ avec $X > 0$ et donne la nouvelle équation d'inconnue X obtenue.
2. Résous dans $\mathbb{R}$ la nouvelle équation obtenue.
3. Déduis-en les solutions de (E) .

Stratégie de travail : TI : 7mns; TG : 7mns; TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 67 : Consolidation

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

$(E_1) : x^2 - 2|x| - 15 = 0$

$(E_2) : x - 2\sqrt{x} - 15 = 0$

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns : TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

4.3 Inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$

Activité 15 : Inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$

Pierre, ayant vu le dispositif d'entraînement de Melon se demande comment choisir x pour que l'aire du carré $IJKL$ soit égale au moins à deux fois celle du carré $ABCD$.

Consigne 68 : Définition

1. Rappelle l'aire de chacun des carrés $ABCD$ et $IJKL$.
2. Justifie à partir des informations de l'activité que x vérifie l'inégalité suivante :
 $2x^2 - 12x - 36 \geq 0$.
3. Comment appelle-t-on une telle inégalité ?

Stratégie de travail : **TI : 5mns ; TG : 5mns ; TC : 5mns**

Résultats attendus : (à faire)

Définition (Inéquation du second degré)

On appelle inéquation du second degré à une inconnue, toute inéquation de la forme :
 $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$; $(b; c) \in \mathbb{R}^2$.

Consigne 69 : Étude de signe d'un polynôme du second degré

On considère le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

1. Donne la forme factorisée de $P(x)$ suivant le signe de Δ .
2. Étudie le signe de $P(x)$ dans chaque cas.

Stratégie de travail : **TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns**

Résultats attendus : (à faire)

Retenons (Étude de signe d'un polynôme du second degré)

On considère le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Pour étudier le signe de $P(x)$, on peut calculer le discriminant et utiliser l'un des tableaux ci-dessous :

- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme P n'a pas de racine.

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme P admet une racine double x_0 .

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de a

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme P admet deux racines distinctes x_1 et x_2 . (On suppose que $x_1 < x_2$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a



Retenons (Méthode de résolution d'une inéquation du second degré)

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation du second degré $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$; $(b; c) \in \mathbb{R}^2$, on se ramène d'abord à l'étude de signe du polynôme définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Consigne 70 : Consolidation

1. Étudie le signe de chacun des polynômes définis ci-dessous :

(a) $P(x) = 3x^2 - 5x + 7$

(b) $Q(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

(c) $R(x) = x^2 - 2x - 15$

2. Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

(a) $x^2 - 5x + 6 < 0$

(b) $2x^2 + 5x + 7 \geq 0$

(c) $x^2 + 2x + 1 < 0$

(d) $x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} \leq 0$

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

4.4 Équations et inéquations irrationnelles

Activité 16 : Équations et inéquations irrationnelles

Pierre s'intéresse ensuite à la longueur L du côté du carré IJKL. Il désire dans un premier temps choisir x pour que L soit égale à 6 dm et dans un second temps, choisir x pour que cette longueur soit égale à $(\sqrt{2x+24})$ dm.

Consigne 71 : Définition

1. Justifie que $L = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$.

2. Justifie que x vérifie les équations suivantes :

(E₁) : $\sqrt{2x^2 - 12x + 36} = 6$

(E₂) : $\sqrt{2x^2 - 12x + 36} = \sqrt{2x + 24}$

Stratégie de travail : TI : 5mns; TG : 5mns; TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)

**Retenons** (*Équations et inéquations irrationnelles*)

On appelle équation(resp. inéquation) irrationnelle, toute équation (resp. inéquation) dont l'inconnue figure sous un radical.

**Méthode de résolution d'une équation irrationnelle**

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ des expressions algébriques.

✚ Équations de la forme $\sqrt{P(x)} = \sqrt{Q(x)}$

$$\sqrt{P(x)} = \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) = Q(x) \end{cases}$$

$$\text{On a aussi : } \sqrt{P(x)} = \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = Q(x) \end{cases}$$

✚ Équations de la forme $\sqrt{P(x)} = Q(x)$

$$\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = [Q(x)]^2 \end{cases}$$

✚ Équations de la forme $\sqrt{P(x)} = k; (k \in \mathbb{R})$

☞ si $k < 0$, alors l'équation n'admet pas de solutions.

$$\text{☞ si } k > 0, \text{ alors on a : } \sqrt{P(x)} = k \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) = k^2 \end{cases}$$

$$\text{☞ si } k = 0, \text{ alors on a : } \sqrt{P(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$$

**Méthode de résolution d'une inéquation irrationnelle**

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ des expressions algébriques.

✚ Inéquations de la forme $\sqrt{P(x)} \leq \sqrt{Q(x)}$

$$\sqrt{P(x)} \leq \sqrt{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) \leq Q(x) \end{cases}$$

✚ Inéquations de la forme $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$

$$\sqrt{P(x)} \leq Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) \leq [Q(x)]^2 \end{cases}$$

✚ Inéquations de la forme $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$

$$\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \leq 0 \\ P(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) \geq [Q(x)]^2 \end{cases}$$

✚ Inéquations de la forme $\sqrt{P(x)} \geq k; (k \in \mathbb{R})$

$$\text{☞ si } k < 0, \text{ alors on a : } \sqrt{P(x)} \geq k \Leftrightarrow P(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{si } k > 0, \text{ alors on a : } \sqrt{P(x)} \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ P(x) \geq k^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{si } k = 0, \text{ alors on a : } \sqrt{P(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0$$

Consigne 72 : Consolidation

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : \sqrt{-7x-5} = -2x+3$$

$$(E_2) : \sqrt{2x^2-x+6} < \sqrt{x-2}$$

$$(E_3) : \sqrt{x^2-3x-4} - x \leq -1$$

$$(E_4) : \sqrt{2x^2-16x+64} \geq 9-x$$

Stratégie de travail : *TI : 15mns ; TG : 15mns ; TC : 15mns*

Résultats attendus : (à faire)

4.5 Position d'un réel par rapport aux racines d'un polynôme du second degré

Activité 17 : Position d'un réel par rapport aux racines d'un polynôme du second degré

Soit α un nombre réel. On donne le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels avec ($a \neq 0$). On suppose que $\Delta > 0$ et que les racines de $P(x)$ sont x_1 et x_2 avec ($x_1 < x_2$). Soit $S = x_1 + x_2$.

On se propose d'étudier la position du réel α par rapport aux racines x_1 et x_2 .

Consigne 73 : Consolidation

- (a) Étudie le signe de $P(x)$ et celui de $aP(x)$.
(b) Déduis-en le signe de $aP(\alpha)$.
(c) Donne la position de α par rapport aux racines de P lorsque $aP(\alpha) < 0$.
- En utilisant le signe de $\alpha - \frac{S}{2}$, donne la position de α par rapport aux racines de P dans les cas suivants : $aP(\alpha) > 0$ et $aP(\alpha) = 0$.

Stratégie de travail : *TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns*

Résultats attendus : (à faire)

**Retenons** (Étude de position d'un réel par rapport aux racines d'un polynôme du 2nd degré)

Soit le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels avec ($a \neq 0$) et α un nombre réel.

Pour étudier la position de α par rapport aux racines de P , on procède comme suit :

- 1^{er} cas : $\Delta < 0$
Le polynôme P n'admet pas de racines donc pas de comparaison.
- 2^{ème} cas : $\Delta = 0$
Le polynôme P admet une racine double et la comparaison est évidente.
- 3^{ème} cas : $\Delta > 0$

Le polynôme P admet deux racines distinctes x_1 et x_2 . Supposons que $x_1 < x_2$.

On calcule $aP(\alpha)$:

- ❖ si $aP(\alpha) < 0$, alors $x_1 < \alpha < x_2$.
- ❖ si $aP(\alpha) = 0$, alors l'une des racines est α et la comparaison est évidente.
- ❖ si $aP(\alpha) > 0$, on calcule $\alpha - \frac{S}{2}$ avec $S = x_1 + x_2$:
 - ☆ si $\alpha - \frac{S}{2} < 0$, alors $\alpha < x_1 < x_2$.
 - ☆ si $\alpha - \frac{S}{2} > 0$, alors $x_1 < x_2 < \alpha$.

Consigne 74 : Consolidation

1. On donne le polynôme $Q(x) = 4x^2 - 13x - 11$.

Donne la position de chacun des réels 2 et 5 par rapport aux racines de Q sans les déterminer.

2. Soit $(E_m) : (6 - m)x^2 + (3m + 1)x - 3 - 9m = 0$ avec m un paramètre réel.

Discute suivant les valeurs de m , la position du réel 1 par rapport aux solutions de l'équation (E_m) .

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

4.6 Problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou inéquation du 2nd degré

Activité 18 : Problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou inéquation du 2nd degré

A travers cette activité, il s'agira de résoudre des problèmes conduisant à la résolution d'une équation ou d'une inéquation du second degré.

Consigne 75 :

La somme des carrés de trois nombres entiers naturels consécutifs est 110.

Détermine ces entiers naturels.

Consigne 76 :

"Aich-Lingerie" est une société qui fabrique des sous vêtements S et des draps D . La production journalière de l'usine est donnée par l'inégalité : $S^2 + 4S + 8D \leq 2496$.

Détermine le nombre maximum de sous vêtements que cette usine peut produire en une journée de travail si elle ne produit pas de draps.

4.7 Systèmes linéaires (Uniquement pour la 1^{ère}D)

Activité 19 : Systèmes linéaires

Trois agents de la société de surveillance : Melon, Jean et Jacques décident de construire trois carrés distincts.

- Jean veut que la somme de la longueur d'un côté des trois carrés soit égale à 12.
- Melon veut que la somme de la longueur d'un côté de son carré et du double de celle d'un côté du carré de Jean diminuée de celle d'un côté du carré de Jacques soit égale à 6.
- Jacques quant à lui, veut que le double de la longueur d'un côté du carré de Melon augmenté de celle d'un côté du carré de Jean soit égale au triple de celle d'un côté de son carré diminué de 5.

Ces trois agents se demandent donc la valeur à attribuer à la longueur d'un côté de chaque carré pour satisfaire toutes ces conditions.

Consigne 77 : Résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues

1. En désignant respectivement par x , y et z la longueur du côté du carré de Melon, Jean et Jacques :

(a) Traduis chacune des informations ci-dessus par une équation à trois inconnues : x , y et z .

(b) Déduis-en un système d'équations (S) vérifié par x , y et z .

2. On donne le système (S_1) suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z = 12 & (L_1) \\ x + 2y - z = 6 & (L_2) \\ 2x + y - 3z = -5 & (L_3) \end{cases}$$

(a) En remplaçant respectivement L_2 et L_3 par les opérations $L_1 - L_2$ et $L_3 - 2L_1$, donne un système (S_2) équivalent au système (S_1) .

(b) Justifie que (S_2) est équivalent au système (S_3) suivant :

$$(S_3) : \begin{cases} x + y + z = 12 \\ -y + 2z = 6 \\ 7z = 35 \end{cases}$$

3. Résous le système (S_3) et déduis-en l'ensemble des solutions du système (S_1) .

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

(Aller à la page 40-41 pour les définitions d'équations linéaires ; système d'équations linéaires ; systèmes équivalents ; opérations élémentaires puis la méthode de pivot de Gauss)

Consigne 78 : Consolidation

1. Résous dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} -2x + y - 3z = 8 \\ x + y + z = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

2. Déduis-en au moyen d'un changement d'inconnue, l'ensemble solution des systèmes suivants :

$$(S') : \begin{cases} -\frac{2}{x} + \frac{1}{y-2} - \frac{6}{3z+1} = 8 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y-2} + \frac{2}{3z+1} = -1 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y-2} - \frac{2}{3z+1} = 2 \end{cases} \quad ; \quad (S'') : \begin{cases} -2x^2 + \frac{1}{y-3} - 3z = 8 \\ x^2 + \frac{1}{y-3} + z = -1 \\ x^2 - \frac{2}{y-3} - z = 2 \end{cases}$$

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

4.8 Programmation linéaire

Activité 20 : Programmation linéaire

Consigne 79 Une entreprise fabrique des fauteuils et des chaises à l'aide de trois machines M_1 , M_2 et M_3 .

- Pour fabriquer les fauteuils, il faut utiliser les machines M_1 et M_2 en 1 heure de temps et la machine M_3 en 3 heures.
- Pour fabriquer les chaises, il faut utiliser les machines M_1 et M_3 en 1 heure de temps et la machine M_2 en 2 heures.

La machine M_1 n'est disponible que pour 60 heures, la machine M_2 pour 90 heures et la machine M_3 pour 150 heures.

Un fauteuil vendu procure 10.000 F de bénéfice et une chaise vendue procure 5.000 F de bénéfice.

On désigne respectivement par x et y le nombre de fauteuil fabriqué et le nombre de chaise fabriquée.

1. Traduis par un système de contraintes le problème.
2. Résous graphiquement ce système.
3. (a) Détermine en fonction de x et y le bénéfice B de l'entreprise pour la vente de x fauteuil(s) et de y chaise(s).
- (b) Détermine le nombre de fauteuil et de chaise à fabriquer pour avoir le bénéfice maximal.
- (c) Détermine ce bénéfice maximal.

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Statistiques (Pour la 1^{ère}C)

Sommaire

5.1 Rappels sur la série statistique à une variable	63
5.1.1 Vocabulaire	63
5.1.2 Quelques caractéristiques	64
5.2 Série statistique à deux variables	64

5.1 Rappels sur la série statistique à une variable

Activité 21 : *Rappels sur la série statistique à une variable*

5.1.1 Vocabulaire

Étudier une série statistique à une variable consiste à étudier un aspect particulier des éléments d'un ensemble donné. Cet ensemble est appelé population.

- Une partie de la population s'appelle échantillon.
- Un élément de la population s'appelle individu ou unité statistique.
- L'aspect étudié s'appelle la variable ou le caractère. On distingue :
 - ☞ les caractères quantitatifs qui prennent des valeurs numériques (taille, poids, âge, nombre d'enfants, etc ...);
 - ☞ les caractères qualitatifs qui prennent des valeurs non numériques (sexe, profession, nationalité etc ...);
- Les valeurs prises par un caractère d'une population sont appelées modalités.
- Si le caractère (ou la variable) peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fixé, il est dit continue (ou à modalités regroupées en classe). S'il ne peut prendre qu'un certain nombre de valeurs isolées, il est dit discret.
- Le nombre d'individus pour lesquels la variable prend une valeur donnée s'appelle l'effectif de cette valeur.
- Lorsqu'on associe les modalités ou classes à leurs effectifs, on obtient une série statistique.
- Dans un ensemble à p éléments, on convient de noter x_i la modalité et par n_i son effectif avec $1 \leq i \leq p$. L'ensemble des couples $(x_i; n_i)$ est une série statistique.
- Si N désigne l'effectif total d'une série statistique $(x_i; n_i)$, alors la fréquence de la modalité x_i est donnée par $f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$ (en %).

5.1.2 Quelques caractéristiques

Soit $(x_i; n_i)$ une série statistique avec $1 \leq i \leq p$.

- Moyenne

La moyenne est le nombre réel noté $\bar{x}$ et défini par :
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i n_i}{\sum_{i=1}^p n_i} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_p n_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

- Variance et écart-type

La variance est le nombre réel V défini par :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum_{i=1}^p n_i} \quad \text{ou} \quad V = \frac{\sum_{i=1}^p x_i^2 n_i}{\sum_{i=1}^p n_i} - \bar{x}^2$$

où $\bar{x}$ est la moyenne de la série statistique $(x_i; n_i)$.

L'écart-type est le nombre réel positif noté σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$.

Consigne 80 : Consolidation

Les résultats au dernier devoir de maths des élèves d'une classe de terminale sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Notes (x_i)	3	4	5	9	7	9	10	11	12
Effectifs (n_i)	3	1	4	2	1	3	1	2	3

1. Précise la population puis le caractère étudié et sa nature.
2. Quelle est la fréquence de la modalité 5 ?
3. Calcule la moyenne et l'écart-type de cette série .

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

5.2 Série statistique à deux variables

Activité 22 : série statistique à deux variables

Melon veut se qualifier meilleur agent tireur de la société. Il se propose donc d'étudier les principes mathématiques de ce test. Pour cela il relève dans les bases de données de la société les poids et les tailles de certains de ses coéquipiers. Il dresse le tableau statistique de la situation de départ. (voir S.D)

Consigne 81 : Séries marginales

On considère donc le tableau statistique de la situation de départ.

1. Soit A l'ensemble des modalités du caractère poids et B l'ensemble des modalités du caractère taille. Détermine A et B .

2. Présente par deux tableaux, les séries statistiques à une variable $(x_i; n_i)$ et $(y_j; n_j)$ qui permettent de définir ces données.
3. En considérant le tableau de la situation de départ, combien d'agents ont un poids de 68 kg et une taille de 171 cm ?
4. Calcule la fréquence du couple de modalité (68;171).

Stratégie de travail : *TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns*

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats

Le tableau de la consigne précédente est appelé tableau linéaire à deux variables. À chaque couple $(x_i; y_j)$ de l'ensemble $A \times B$, on associe le nombre d'élèves ayant le poids x_i et la taille y_j . Ce nombre est noté n_{ij} et est appelé effectif de la modalité $(x_i; y_j)$. On définit ainsi une série statistique à deux variables (ou caractères). On la note $(x_i; y_j; n_{ij})$. Les séries statistiques $(x_i; n_i)$ et $(y_j; n_j)$ sont appelées séries marginales de la série double $(x_i; y_j; n_{ij})$. La série $(x_i; y_j; n_{ij})$ peut être présentée par le tableau suivant appelé tableau à double entrée :

$x_i \backslash y_j$	59	62	65	68	71	74	77	Total
165	1	0	2	2	0	0	0	5
168	0	2	0	1	0	1	0	4
171	0	0	0	3	1	0	0	4
174	0	2	4	0	3	2	0	11
177	0	0	0	1	1	2	0	4
180	0	0	0	0	0	0	2	2
Total	1	4	6	7	5	5	2	30

Si N désigne l'effectif total de la série double $(x_i; y_j; n_{ij})$, alors $N = \sum_{i,j} n_{ij}$.

La fréquence du couple de modalités $(x_i; y_j)$ est définie par $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N} \times 100$ (en %).

Consigne 82 : Nuage de points et point moyen

On considère le tableau à deux variables de la S.D et les informations de la consigne précédente.

1. Dans un repère orthogonal d'origine $A(58;164)$, représente l'ensemble des points $M_{ij}(x_i; y_j)$.
2. Calcule la moyenne $\bar{x}$ du caractère poids et la moyenne $\bar{y}$ du caractère taille.

Stratégie de travail : *TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns*

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats

Le graphique ainsi construit est appelé le nuage de points associé à cette série statistique double. Le point $G(68,3;172,1)$ est appelé le point moyen du nuage de points.

Définition (Nuage de points associé à une série double)

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux caractères quantitatifs. L'ensemble des points M_{ij} de coordonnées $(x_i; y_j)$ est appelé nuage de points associé à cette série double. Dans le cas où les effectifs des modalités $(x_i; y_j)$ ne sont pas tous égaux, on représente ce nuage de points de deux façons :

Représentation par points pondérés : on indique à côté de chaque point M_{ij} l'effectif n_{ij} .

Représentation par taches : chaque point M_{ij} est remplacé par un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif n_{ij} .

Définition (Point moyen d'un nuage)

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux caractères quantitatifs.

On appelle point moyen du nuage de points représentant cette série, le point G de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales $(x_i; n_i)$ et $(y_j; n_j)$.

Consigne 83 : Droite de Mayer

On considère la série double définie dans la SD.

1. Repartis les observateurs en deux groupes E et F de même nombre d'individus.
 E est l'ensemble des quinze premiers observateurs et F celui des quinze derniers.
2. Détermine les points moyens G et G' respectifs des groupes E et F .
3. Détermine une équation cartésienne de la droite (GG') .

Stratégie de travail : $TI : 10\text{mns}$; $TG : 10\text{mns}$; $TC : 10\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats

La droite (GG') d'équation $y = 0,75x + 120,8$ est celle de Mayer ajustant le nuage de points de la série statistique double ainsi étudiée.

Définition (Ajustement linéaire)

Ajuster un nuage de points consiste à déterminer une courbe simple et régulière passant le plus près possible de tous les points du nuage. Si la courbe recherchée est une droite, l'ajustement est dit linéaire ou affine. Il existe trois méthodes pour réaliser un ajustement linéaire :

● Méthode graphique

Elle consiste à tracer la courbe que l'observateur estime la plus proche possible de

tous les points du nuage.

● Méthode de Mayer

Elle consiste à répartir l'ensemble des points à ajuster en deux groupes de même effectifs ou d'effectifs voisins dans l'ordre où les points se présentent. On détermine ensuite le point moyen de chacun des deux groupes. La droite de Mayer est celle passant par ces deux points.

● Méthode des moindres carrées

Elle consiste à déterminer une équation de la droite de régression de y en x ou de x en y après avoir calculer la covariance de la série.



Définition (Covariance d'une série statistique)

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux variables x et y , d'effectif total N .

La covariance de cette série statistique est le nombre réel noté $cov(x, y)$ et défini par :

$$cov(x, y) = \frac{1}{N} \left[\sum_{i,j} n_{ij} (x_i - \bar{x}) (y_j - \bar{y}) \right].$$

Dans la pratique, le calcul de la covariance se fait à l'aide de la formule suivante :

$$cov(x, y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i,j} n_{ij} x_i y_j \right) - \bar{x} \cdot \bar{y}$$



Remarque

Si les n_{ij} sont tous égaux à 1, alors on a : $cov(x, y) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i,j} x_i y_j \right) - \bar{x} \cdot \bar{y}$



Propriété (Droite de régression de y en x)

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux variables x et y , d'effectif total N et de moyennes respectives $\bar{x}$ et $\bar{y}$ telle que $V(x) \neq 0$. La droite de régression de y en x est la droite passant par le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ du nuage associé à cette série et dont une équation est de la

forme : $y = ax + b$ avec $a = \frac{cov(x, y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$ où $V(x)$ désigne la variance de x . Une équation de cette droite peut aussi s'écrire : $y - \bar{y} = \frac{cov(x, y)}{V(x)} (x - \bar{x})$.



Propriété (Droite de régression de x en y)

Soit $(x_i; y_j; n_{ij})$ une série statistique à deux variables x et y , d'effectif total N et de moyennes respectives $\bar{x}$ et $\bar{y}$ telle que $V(y) \neq 0$. La droite de régression de x en y est la droite passant par le point moyen $G(\bar{x}; \bar{y})$ du nuage associé à cette série et dont une équation est de la

forme : $x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{cov(x, y)}{V(y)}$ et $b' = \bar{x} - a'\bar{y}$ où $V(y)$ désigne la variance de y . Une équation de cette droite peut aussi s'écrire : $x - \bar{x} = \frac{cov(x, y)}{V(y)} (y - \bar{y})$.

Consigne 84 : Coefficient de corrélation linéaire

On considère la série double définie dans la S.D

1. Détermine une équation de la droite de régression de y en x et une équation de la droite de régression de x en y .
2. Calcule le réel : $r = \frac{\text{cov}(x; y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}}$.

Stratégie de travail : $TI : 10\text{mns}$; $TG : 10\text{mns}$; $TC : 10\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats

Le nombre réel $r = 0,71$ est le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique étudiée.

**Définition** (Corrélation linéaire et coefficient de corrélation linéaire)

- ✓ Deux variables x et y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de y en x et celle de régression de x en y sont des droites.
- ✓ On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique à double caractère $(x; y)$ telle que $V(x) \neq 0$ et $V(y) \neq 0$, le nombre réel r défini par : $r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{V(x) \times V(y)}}$.

Remarques

- ❑ Le coefficient de corrélation linéaire r est un nombre réel de même signe que $\text{cov}(x, y)$.
- ❑ Soit $(D) : y = ax + b$ la droite de régression de y en x et $(D') : x = a'y + b'$ celle de régression de x en y .
On a : $a \times a' = r^2$ et donc $|r| = \sqrt{a \times a'}$
- ❑ On admet que $|r| \leq 1$.

**Retenons** (Interprétation du coefficient r)

- * Si $|r| = 1$, alors tous les points du nuage sont alignés. L'ajustement linéaire est dit parfait. Les résultats obtenus sont fiables.
- * Si $0,87 \leq |r| < 1$, alors on dit qu'il y a une forte corrélation entre les variables. Les résultats obtenus sont encore fiables.
- * Si $|r| < 0,87$, alors on dit que la liaison entre les variables est lâche. Les résultats obtenus ne sont pas fiables.
- * Si $|r|$ est voisin de 0, on dit qu'il y a indépendance linéaire statistique.

Statistiques (Pour la 1^{ère}D)

Sommaire

6.1 Série statistique des centres	69
6.2 Caractéristiques de position	71
6.3 Caractéristiques de dispersion	73

6.1 Série statistique des centres

Activité 23 : Série statistique des centres

Dans les bases de données de cette société de surveillance, les tailles en cm de certains coéquipiers de Melon se présentent comme suit :

174; 174; 168; 171; 174; 168; 177; 174; 165; 180; 177; 168; 180; 171; 174; 165; 177; 174; 168; 165; 171; 165; 177; 174; 171; 165; 174; 174; 174; 174.

Ainsi, la société vient de définir une série statistique dont elle veut mesurer la dispersion des valeurs autour de la moyenne.

Consigne 85 : Regroupement par classe et vocabulaire

Reproduis et complète le tableau suivant :

Classe $[a; b[$	$[165; 170[$	$[170; 175[$	$[175; 180[$	$[180; 185[$	Total
Effectif n_i					
Fréquence f_i					
Densité : $d = \frac{\text{Effectif}}{\text{Amplitude}}$					-
Centre : $c_i = \frac{a+b}{2}$					-

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Vocabulaire

- ✱ L'effectif d'une classe $[a; b[$ est le nombre d'individus de la population étudiée, dont les modalités appartiennent à l'intervalle $[a; b[$.
- ✱ La fréquence d'une classe est le quotient de son effectif par l'effectif total.
- ✱ Le centre d'une classe $[a; b[$ est le nombre $c = \frac{a+b}{2}$.
- ✱ L'amplitude d'une classe $[a; b[$ est le nombre $b - a$.

✱ La densité d'une classe est le quotient de son effectif par son amplitude.

Définition (Série statistique des centres)

La série statistique des centres est la série statistique discrète dont les modalités sont les centres d'une série regroupée en classes. On la note (c_i, n_i) .

Consigne 86 : Histogramme et polygone des effectifs

On considère le tableau obtenu dans la consigne précédente.

1. Construis l'histogramme des effectifs de cette série.
2. Construis sur le même graphique le polygone des effectifs de cette série.

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Retenons (Histogramme des effectifs d'une série statistique groupée)

Une série statistique groupée est représentée par un diagramme, appelé histogramme des effectifs. C'est un diagramme constitué de rectangles juxtaposés dont :

- ☛ les largeurs sont proportionnelles aux amplitudes des classes ;
- ☛ les hauteurs sont proportionnelles aux densités des classes.

Ainsi, chaque rectangle a une aire proportionnelle à l'effectif de la classe qu'il représente.

L'histogramme des fréquences se définit de manière analogue.

Remarque

Lors de la construction de l'histogramme des effectifs (resp. des fréquences), si les classes ont la même amplitude, les hauteurs des rectangles sont évidemment proportionnelles aux effectifs (resp. aux fréquences) des classes.

Retenons (Polygone des effectifs d'une série statistique groupée)

Le polygone des effectifs d'une série statistique groupée s'obtient en traçant le polygone des effectifs de la série des centres associés.

Consigne 87 : Effectifs et fréquences cumulés

On considère le tableau statistique ci-dessous :

Classe	[0; 5[	[5; 10[	[10; 15[	[15; 20[	Total
Effectif	35	25	30	10	

1. Reproduis et complète le tableau ci-dessus par :
 - (a) les effectifs cumulés croissants et décroissants.

(b) les fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

2. Construis sur un même graphique le diagramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)



Définition (Effectifs et fréquences cumulés)

r étant un nombre réel, on appelle :

- ✦ effectif cumulé croissant de r l'effectif de l'intervalle $] -\infty; r]$;
- ✦ effectif cumulé décroissant de r l'effectif de l'intervalle $[r; +\infty[$;
- ✦ fréquence cumulée croissante de r , le quotient de son effectif cumulé croissant par l'effectif total ;
- ✦ fréquence cumulée décroissante de r , le quotient de son effectif cumulé décroissant par l'effectif total.

6.2 Caractéristiques de position

Activité 24 : Caractéristiques de position

En considérant l'activité précédente, on veut déterminer la classe modale, le mode, la moyenne et la médiane de la série statistique des centres étudiée.

Consigne 88 : Classe modale, mode et moyenne d'une série statistique groupée

1. Reproduis et complète le tableau suivant :

Classe $[a; b[$	$[165; 170[$	$[170; 175[$	$[175; 180[$	$[180; 185[$	Total
Effectif n_i					
Densité d					-
Centre c_i					-

2. Quelle est la classe ayant le plus grand effectif ?

3. Quelle est le centre de la classe ayant la plus grande densité ?

4. Calcule la moyenne $\bar{x}$ de cette série en utilisant la formule : $\bar{x} = \frac{\sum c_i n_i}{\sum n_i}$.

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)



Exploitation des résultats

- La classe $[170; 175[$ est la classe modale de la série.
- La valeur 172,5 est le mode de la série.


Définition (Classe modale, mode et moyenne d'une série statistique groupée)

- ⇒ Pour une série statistique groupée, on appelle généralement :
- ✦ classe modale, toute classe présentant un effectif (ou une fréquence) maximal ;
 - ✦ mode, le centre de toute classe de densité maximale.
- ⇒ On appelle moyenne d'une série statistique groupée, la moyenne de la série (c_i, n_i) des centres de classes associée.
- N désignant l'effectif total de la série ; p désignant le nombre de classe ; n_i et f_i désignant respectivement l'effectif et la fréquence de la classe de centre c_i , la moyenne de la série (c_i, n_i) est donc le nombre noté $\bar{x}$ tel que :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p c_i n_i}{N} = \frac{c_1 n_1 + c_2 n_2 + \dots + c_p n_p}{N} = \sum_{i=1}^p c_i f_i$$

 Remarque

Lorsque les classes ont la même amplitude, le mode est évidemment le centre de toute classe ayant le plus grand effectif (ou fréquence).

Consigne 89 : Médiane d'une série statistique

1. En utilisant le diagramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants construits dans l'une des consignes précédentes, donne l'abscisse du point d'intersection de ces deux diagrammes.
2. Retrouve cette valeur par calcul

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

 Indications

1. Projeter orthogonalement le point d'intersection de ces deux diagrammes sur l'axe des abscisses et lire la valeur.
2. Il s'agira ici de procéder par interpolation linéaire.


Exploitation des résultats

- La valeur 8 représente la médiane de la série statistique étudiée.
- La démarche utilisée pour retrouver la médiane par calcul est la méthode d'interpolation linéaire.


Définition (Médiane d'une série statistique groupée)

On appelle médiane d'une série statistique groupée, tout nombre M_e tel que :

- ☆ la moitié au moins des individus ont une modalité inférieure ou égale à M_e
- ☆ la moitié au moins des individus ont une modalité supérieure ou égale à M_e .

M_e est donc tel que sa fréquence cumulée croissante est supérieure ou égale à 50% et sa fréquence cumulée décroissante est aussi supérieure ou égale à 50%.

6.3 Caractéristiques de dispersion

Activité 25 : Caractéristiques de dispersion

La société veut mesurer à présent la dispersion des valeurs qu'elle a recueillies autour de la moyenne.

Consigne 90 : Variance et écart-type.

1. Reproduis et complète le tableau statistique suivant :

Classe	$[0;3[$	$[3;6[$	$[6;9[$	$[9;12[$	Total
Effectif n_i	8	11	15	10	
Centre c_i					...
$c_i n_i$					
$c_i - \bar{x}$					
$(c_i - \bar{x})^2 n_i$					
$c_i^2 n_i$					

2. (a) Calcule les réels a et b suivants et compare-les :

$$a = \frac{\sum (c_i - \bar{x})^2 n_i}{\sum n_i} \text{ et } b = \frac{\sum c_i^2 n_i}{\sum n_i} - \bar{x}^2$$

(b) Calcule $\sqrt{a}$.

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)


Exploitation des résultats

- La valeur 9,5 représente la variance de la série statistique étudiée.
- La valeur 3,08 représente l'écart-type de la série statistique étudiée.


Définition (Variance et écart-type d'une série statistique groupée)

- ☆ On appelle variance d'une série statistique groupée, la variance de la série (c_i, n_i) des centres de classes associée.

N désignant l'effectif total de la série ; p désignant le nombre de classe ; n_i et f_i désignant respectivement l'effectif et la fréquence de la classe de centre c_i , $\bar{x}$ désignant la moyenne de la série ; la variance V de la série (c_i, n_i) est donc le nombre noté V tel que :

$$V = \frac{\sum_{i=1}^p (c_i - \bar{x})^2 n_i}{N} = \frac{(c_1 - \bar{x})^2 n_1 + (c_2 - \bar{x})^2 n_2 + \dots + (c_p - \bar{x})^2 n_p}{N} = \sum_{i=1}^p (c_i - \bar{x})^2 f_i$$

De façon plus simple, la variance se calcule avec la formule : $V = \frac{\sum_{i=1}^p c_i^2 n_i}{N} - \bar{x}^2$.

☆ La variance d'une série statistique étant V , on appelle écart-type de cette série le nombre noté σ et défini par : $\sigma = \sqrt{V}$.

Consigne 91 : Consolidation

On donne le tableau statistique ci-dessous où les notes des élèves en maths d'une promotion ont été réparties par classe d'amplitudes différentes :

Classe	[0;8[	[8;10[	[10;12[	[12;15[	[15;20[	Total
Effectif	32	19	32	22	15	

1. Précise le mode de série statistique.
2. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
3. Construis sur un même graphique le diagramme des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants.
4. Détermine la médiane de cette série.
5. Calcule la moyenne et l'écart-type de cette série.
6. Combien d'élèves ont une note :
 - (a) inférieure à 12 ?
 - (b) supérieure à 14 ?
 - (c) comprise entre 7 et 15 ?

Stratégie de travail : TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Dénombrement (1^{ère} C&D)

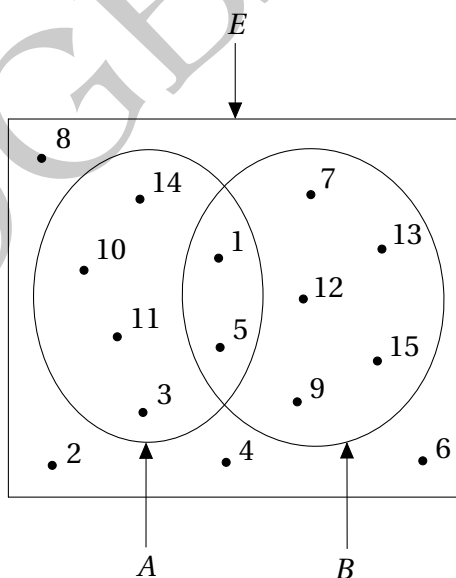
Sommaire

7.1 Vocabulaire des ensembles	75
7.2 Produit cartésien et dénombrement de listes	78
7.3 Dénombrement d'arrangements et de permutations	80
7.4 Notion d'anagramme	82
7.5 Dénombrement de combinaisons	83

7.1 Vocabulaire des ensembles

Activité 26 : Vocabulaire des ensembles

Pour évaluer sa chance de réussite à quelques jours de la compétition, Melon décide de regrouper et d'analyser les différents résultats de ses tirs pour les deux dernières séances d'entraînement. Il obtient la représentation suivante :



Consigne 92 :

- Dresse la liste des éléments de chacun des ensembles A, B et E.
 - Donne le nombre d'éléments de chacun des ensembles A, B et E.
- Dresse la liste des éléments de E appartenant à A et pas à B.
 - Dresse la liste des éléments de E appartenant à B et pas à A.

3. (a) Quels sont les éléments de E appartenant à la fois à A et à B ?

(b) Quels sont les éléments de E appartenant à l'un au moins des ensembles A et B ?

Stratégie de travail : $TI : 5\text{mns}$; $TG : 5\text{mns}$; $TC : 5\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats

- L'ensemble A a 6 éléments. On dit que le cardinal de l'ensemble A est 6 et on note : $\text{card}A = 6$.
- L'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B se note $A - B$ et se lit « A moins B ». On a donc $A - B = \{10; 14; 11; 3\}$.
- L'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B se note $A \cap B$ et se lit « A inter B ». On a donc $A \cap B = \{1; 5\}$.
- L'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles A et B se note $A \cup B$ et se lit « A union B ». On a donc $A \cup B = \{14; 10; 11; 3; 5; 1; 7; 12; 9; 15; 13\}$.
- Les ensembles $\{10; 14\}$; $\{11; 3\}$ et $\{1; 5\}$ constituent une partition de l'ensemble A car ils sont deux à deux disjoints et on a : $\{10; 14\} \cup \{11; 3\} \cup \{1; 5\} = A$.

Définition (Cardinal d'un ensemble fini)

Un ensemble est dit fini lorsqu'il est vide ou lorsqu'on peut compter tous ses éléments. Le nombre d'élément que contient un ensemble fini A est le cardinal de A et est noté $\text{card}A$. Par convention, le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Autres définitions

Soit A et B deux ensembles finis non vides.

- ✍ La différence $A - B$ est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B .
- ✍ La réunion des différences $A - B$ et $B - A$ est appelé la différence symétrique de A et B et est notée $A \Delta B$. On a donc $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.
- ✍ Un sous-ensemble de A est tout ensemble constitué d'éléments de A .
- ✍ A et B sont dits disjoints lorsque leur intersection est vide c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.
- ✍ D étant une partie de A c'est-à-dire $D \subset A$, on appelle complémentaire de D dans A noté C_A^D , l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à D .
- ✍ Soit $A_1; A_2; A_3; \dots; A_n$; n sous-ensembles non vides de A .
On dit que $A_1; A_2; A_3; \dots; A_n$ constituent une partition de A lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A$.
- ✍ $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

Consigne 93 : Cardinal de la réunion de deux parties

1. (a) En considérant la représentation de l'activité, donne le cardinal de chacun des ensembles : A , B , $A \cap B$ et $A \cup B$.

(b) Calcule $\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ puis compare-le à $\text{card}(A \cup B)$.

2. Soient E et F deux ensembles finis.

Démontre que : $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$

Stratégie de travail : TI : 7mns; TG : 7mns; TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

 Indications

1. Triviale

2. Écrire que $E \cup F = (E - F) \cup (E \cap F) \cup (F - E)$. La suite est évidente.

**Propriétés**

Soit A et B deux ensembles finis.

- ✦ Tout sous-ensemble d'un ensemble fini est un ensemble fini.
- ✦ Si $A \subset B$, alors $\text{card} A \leq \text{card} B$ et si de plus $\text{card} A = \text{card} B$, alors $A = B$.
- ✦ La réunion finie d'ensembles finis est un ensemble fini.
- ✦ $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B - \text{card}(A \cap B)$

**Remarques**

Soit A ; B et C trois ensembles finis.

- Si A et B sont disjoints, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Si $B \subset A$ et $C \subset A$, alors on a : $C_A^{B \cup C} = C_A^B \cap C_A^C$.

Consigne 94 : Consolidation

Sur 83 agents de cette société de surveillance, 62 s'entraînent au tir, 64 s'entraînent au grimpé et 48 font les deux sports d'entraînement.

1. Détermine le nombre d'agents qui font au moins un des deux sports d'entraînement.

2. Détermine le nombre d'agents qui :

- (a) s'entraînent uniquement au tir.
- (b) s'entraînent uniquement au grimpé.
- (c) font un seul sport d'entraînement.
- (d) ne font aucun sport d'entraînement.

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

7.2 Produit cartésien et dénombrement de listes

Activité 27 : Produit cartésien et dénombrement des listes

Pour accéder au test d'entraînement au tir, chaque agent doit procéder au lancer à la fois de deux dés de couleurs différentes : un rouge et un noir. Le dé rouge a six faces numérotées de 1 à 6 et le dé noir a quatre faces respectivement marquées avec les lettres a ; b ; c et d . Le résultat d'un lancer est le couple formé par le nombre et la lettre inscrits sur la face cachée de chaque dé. L'agent qui obtient un couple formé d'un nombre impair et d'une voyelle accède directement au test. On désigne par A l'ensemble des nombres se trouvant sur les faces du dé rouge et par B celui des lettres se trouvant sur les faces du dé noir.

Consigne 95 : Produit cartésien de deux ensembles finis

1. Écris tous les couples $(x; y)$ de résultats possibles; x étant un élément de l'ensemble A et y un élément de l'ensemble B .
2. L'ensemble de ces couples se note : $A \times B$.
 - (a) Donne $\text{card}A$, $\text{card}B$ et $\text{card}(A \times B)$.
 - (b) Calcule $(\text{card}A) \times (\text{card}B)$. Que constates-tu ?

Stratégie de travail : $TI : 7\text{mns}$; $TG : 7\text{mns}$; $TC : 7\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)



Définition (Produit cartésien de deux ensembles finis)

A et B étant deux ensembles finis non vides, on appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples dont le premier terme est élément de A et le second terme est élément de B . On le note $A \times B$ et on lit « A croix B ».



Remarque

Soit A et B deux ensembles finis non vides.

Lorsque $A \neq B$, on a : $A \times B \neq B \times A$.



Propriétés

- ☐ Soit A et B deux ensembles finis non vides.
 $\text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B$
- ☐ Soit $A_1; A_2; A_3; \dots; A_n$, n ensembles finis non vides.
 $\text{card}(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n) = \text{card}A_1 \times \text{card}A_2 \times \text{card}A_3 \times \dots \times \text{card}A_n$
- ☐ Soit E un ensemble non vide de cardinal n et p un entier naturel non nul.
 Le produit cartésien $E \times E \times E \times \dots \times E$ (p ensembles égaux à E) est noté E^p et on a :
 $\text{card}(E^p) = (\text{card}E)^p = n^p$

Consigne 96 : Dénombrement de listes

On considère l'ensemble A de la consigne précédente.

1. Donne quatre triplets constitués d'éléments de A deux à deux distincts ou non.
2. Combien de triplets peut-on avoir au total ?

Stratégie de travail : $TI : 5\text{mns}$; $TG : 5\text{mns}$; $TC : 5\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

 Indications

1. Triviale
2. Remarquer qu'un triplet d'éléments de A est un élément du produit cartésien A^3 . La suite se déduit facilement.

 Exploitation des résultats

Les triplets ci-dessus cités sont constitués de trois éléments deux à deux distincts ou non de l'ensemble A . On dit que ces triplets sont des 3-listes de l'ensemble A .

**Définition (p -liste)**

Soit E un ensemble non vide et p un entier naturel non nul.

On appelle p -liste (ou p -uplet) d'éléments de E , toute suite $(a_1; a_2; \dots; a_p)$ de p éléments de E **deux à deux distincts ou non**.

**Exemples**

Soit l'ensemble $E = \{0; 1; 2; 5; 7; 9\}$

- $(0; 1; 2)$; $(0; 0; 5)$; $(1; 1; 1)$ sont des 3-listes de E .
- $(2; 2; 9; 7; 0)$ est une 5-liste de E .
- $(0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 2)$ est une 8-liste de E .

**Propriétés**

Soit E un ensemble non vide de cardinal n et p un entier naturel.

Le nombre total de p -listes d'éléments de E est n^p .



Le nombre d'application d'un ensemble A de p éléments dans un ensemble E de n éléments est égal à n^p .

 Remarques

- Un tirage **successif avec remise** de p objets est une p -liste.
- Dans un tirage successif avec remise, les objets ont un **ordre** d'arrivée.
- Faire un tirage successif avec remise de p objets revient à remplir p casiers sachant qu'un même objet **peut être répété**.

Consigne 97 : Consolidation

1. Détermine le nombre de numéros à huit chiffres qu'on peut former sur un cadran de téléphone.
2. Combien de numéros à huit chiffres commençant par 94 peut-on former sur un cadran de téléphone ?

Stratégie de travail : $TI : 7\text{mns}$; $TG : 7\text{mns}$; $TC : 7\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

7.3 Dénombrement d'arrangements et de permutations

Activité 28 : Dénombrement d'arrangements et de permutations

Pour diriger la société, 3 postes doivent être occupés par des agents. Suite à l'annonce, 5 volontaires se sont présentés pour ces 3 postes. Par ailleurs, les règles imposent qu'un agent choisi doit gérer un et un seul poste. Melon veut trouver alors le nombre de bureaux possibles de 3 membres qu'on peut former avec ces 5 volontaires.

Consigne 98 : Dénombrement d'arrangements

1. Détermine le nombre de possibilités qu'il y a pour choisir le premier, le deuxième et le troisième membre.
2. Détermine alors le nombre de bureaux qu'on peut former.

Stratégie de travail : $TI : 7\text{mns}$; $TG : 7\text{mns}$; $TC : 7\text{mns}$

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats

- Un bureau est constitué de 3 membres deux à deux distincts choisi parmi les 5 volontaires. On dit alors qu'un bureau est un arrangement de 3 membres (ou un 3-arrangement) de l'ensemble des 5 volontaires.
- Le nombre de bureaux possibles représentant le nombre de 3-arrangement possibles des 5 volontaires est : $5 \times 4 \times 3 = 60$. Ce nombre est noté A_5^3 et se lit « arrangement de 3 dans 5 » ou tout simplement « A, 5, 3 ».



Définition (Arrangement)

Soit E un ensemble non vide de n éléments et p un entier naturel tel que $p \leq n$.

On appelle arrangement de p éléments de E (ou p -arrangement d'éléments de E), toute suite $(a_1; a_2; \dots; a_p)$ de p éléments de E **deux à deux distincts**.

Exemples

Soit l'ensemble $E = \{0; 1; 2; 5; 7; 9\}$

- $(0; 1; 2)$; $(5; 9; 7)$; $(1; 7; 9)$ sont des 3-arrangements de E .
- $(2; 2; 9; 7; 0)$ n'est un 5-arrangement de E .



Propriétés

- ❑ Soit n et p des nombres entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$; E un ensemble de n éléments.

Le nombre total de p -arrangement d'éléments de E est noté A_n^p et lu « A, n, p ».

On a : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$

- ❑ n et p étant des nombres entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$, le nombre d'injections d'un ensemble A de p éléments dans un ensemble E de n éléments est égal à A_n^p .



Remarques

- Un tirage **successif sans remise** de p objets est un p -arrangement.
- Dans un arrangement, les éléments sont **ordonnés** et sont **deux à deux distincts**.
- Le produit de p entiers naturels consécutifs dont le plus grand est n est égal à A_n^p .

Consigne 99 : Consolidation

1. Soit le mot : "RACINE". Combien de mots de 4 lettres ayant un sens ou non peut-on écrire avec les lettres de ce mot si :
 - (a) les lettres ne doivent pas être répétées ?
 - (b) on peut répéter les lettres ?
2. Détermine le nombre de rangements possibles de 3 cahiers dans 5 tiroirs sachant qu'un tiroir ne peut contenir qu'un seul cahier.
3. Combien peut-on former de nombres de sept chiffres à l'aide des chiffres suivants : 0, 1, 2, 3, 4 ?

Stratégie de travail : TI : 10mns; TG : 10mns; TC : 10mns

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 100 : Dénombrement de permutations

En considérant la situation de l'activité, détermine le nombre de bureaux qu'on peut former s'ils doivent comporter 5 membres.

Stratégie de travail : TI : 5mns; TG : 5mns; TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)



Exploitation des résultats

- Un bureau est constitué cette fois-ci de 5 membres deux à deux distincts choisi parmi les 5 volontaires. On dit alors qu'un bureau est une permutation de l'ensemble des 5 volontaires.
- Le nombre de bureaux possibles dans ce cas représentant le nombre de permutations possibles des 5 volontaires est : $A_5^5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

**Définition** (*Permutation d'éléments*)

Soit E un ensemble non vide de n éléments.

On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E .

Le nombre total de permutations de n éléments est $A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Ce nombre est noté $n!$ et est lu « factorielle n ».

Ainsi, $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$.

Par convention, $0! = 1$.

**Propriétés**

Soit n et p des nombres entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

☐ $n! = n \times (n-1)!$

☐ $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

☐ Le nombre de bijections d'un ensemble A de n éléments dans un ensemble B de même cardinal est égal à $n!$.

7.4 Notion d'anagramme

Activité 29 : Notion d'anagramme

Consigne 101 : Définition

1. Trouve tous les mots ayant un sens ou non qu'on peut former avec toutes les lettres de : « MOI ». Combien sont-ils ?
2. Trouve tous les mots ayant un sens ou non qu'on peut former avec toutes les lettres de : « PAPA ». Combien sont-ils ?

Stratégie de travail : $TI : 5mns$; $TG : 5mns$; $TC : 5mns$

Résultats attendus : (à faire)

**Exploitation des résultats**

- Les mots : MOI ; MIO ; OMI ; OIM ; IOM et IMO obtenus par permutation des lettres sont les anagrammes du mot « MOI ».
- Le mot « MOI » a 3 lettres distinctes et le nombre de permutation qu'on peut avoir avec ces lettres est $3! = 6$. Ceci explique pourquoi le nombre d'anagramme du mot « MOI » vaut 6.
- Le mot « PAPA » a 4 lettres parmi lesquelles les lettres P et A sont présentes 2 fois chacune. Dans ce cas, une permutation entre les deux « P » ou les deux « A » renvoi un même mot. Ainsi, pour enlever ces répétitions, le nombre d'anagramme fait $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$.


Définition (*Anagramme et nombre d'anagramme d'un mot*)

Un anagramme d'un mot est toute transposition dans un ordre différent des lettres qui composent le mot et disposées de telle sorte qu'elles forment un autre mot ayant un sens ou non. Le nombre d'anagramme d'un mot est alors le nombre de mots différents ayant un sens ou non qu'on peut former avec toutes les lettres de ce mot.

Si le mot est composé de n lettres deux à deux distinctes, le nombre d'anagramme est $n!$. Mais si parmi ces n lettres, on a n_1 lettres identiques; n_2 autres lettres identiques; $\dots$; n_p autres lettres identiques, alors le nombre d'anagramme est :
$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_p!}.$$

Remarques

- Le nombre de permutation de n objets parmi lesquels n_1 sont identiques; n_2 autres sont identiques; $\dots$; n_p autres sont identiques, est :
$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_p!}.$$
- Dans un tirage successif avec ou sans remise d'objets, le nombre d'ordre d'arrivée des objets est le nombre de permutations de ces objets.

Consigne 102 : Consolidation

1. Détermine le nombre d'anagramme de chacun des mots suivants :
TRIANGLE; RECTANGLE; CALCULATRICE.
2. De combien de façons différentes peut-on aligner trois garçons et quatre filles :
 - (a) si on veut distinguer les filles entre-elles d'une part et les garçons entre-eux d'autre part?
 - (b) sans distinguer les filles entre-elles d'une part et les garçons entre-eux d'autre part?

Stratégie de travail : TI : 7mns; TG : 7mns; TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

7.5 Dénombrement de combinaisons

Activité 30 : Dénombrement de combinaisons

Soit l'ensemble $E = \{a; b; c; d; e\}$. On veut trouver une formule permettant d'avoir le nombre de sous-ensemble à 4 éléments de E qu'on peut former.

Consigne 103 : Définition

1. (a) Dresse la liste de tous les sous-ensembles à 4 éléments de E qu'on peut avoir.
(b) Combien sont-ils?
(c) Pour chacun de ces sous-ensembles, combien de permutation peut-on avoir?
2. Combien de 4-arrangements de E peut-on avoir?

3. Calcule $\frac{A_5^4}{4!}$ et dis ce que tu constates d'après la question 1.b).

Stratégie de travail : TI : 7mns ; TG : 7mns ; TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats

- Les sous-ensembles de E à 4 éléments formés sont des combinaisons à 4 éléments (ou des 4-combinaisons) de E .
- Le nombre de 4-combinaisons possibles de E est : $\frac{A_5^4}{4!}$. Ce nombre est noté C_5^4 et se lit « combinaison de 4 dans 5 » ou tout simplement « C, 5, 4 ».

Définition (Combinaison)

Soit E un ensemble non vide de n éléments et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$.

On appelle combinaison de p éléments de E (ou p -combinaison d'éléments de E), tout sous-ensemble de E contenant p éléments.

Le nombre total de p -combinaisons d'éléments de E est $\frac{A_n^p}{p!}$. Ce nombre est noté C_n^p et lu « C ; n ; p ». On a alors : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Remarques

- Un tirage **simultané** de p objets est une p -combinaison.
- Dans une combinaison, les éléments **ne sont pas ordonnés** et sont **deux à deux distincts**.

Consigne 104 : Propriétés

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n-1$. Démontre que :

1. $C_n^n = 1$ et $C_n^0 = 1$
2. $C_n^1 = n$ et $C_n^{n-1} = n$
3. $C_n^{n-p} = C_n^p$
4. $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Stratégie de travail : TI : 8mns ; TG : 8mns ; TC : 8mns

Propriétés

Soit n et p des entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n-1$.

- ☐ $C_n^n = 1$ et $C_n^0 = 1$
- ☐ $C_n^1 = n$ et $C_n^{n-1} = n$
- ☐ $C_n^{n-p} = C_n^p$ et $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

Consigne 105 : Consolidation

Dans une classe de 50 élèves dont 31 garçons, on veut former un comité de cinq membres.

1. Combien de comités possibles peut-on former ?
2. Quel est le nombre de comité comportant :
 - (a) exactement 3 filles ?
 - (b) au plus 2 filles ?
 - (c) au moins 3 garçons ?

Stratégie de travail : *TI : 8mns ; TG : 8mns ; TC : 8mns*

Résultats attendus : (à faire)

**Propriétés (Triangle de Pascal)**

n									
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

**Propriétés (Binôme de Newton)**

Pour tous nombres réels a et b et pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \\
 &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n
 \end{aligned}$$

**Exemple**

$$\begin{aligned}
 (a+b)^3 &= \sum_{k=0}^n C_3^k a^{3-k} b^k \\
 &= C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 \\
 &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

Consigne 106 : Consolidation

1. Développe $(x+2)^6$.
2. Calcule $(\sqrt{2}-1)^4$.

Stratégie de travail : *TI : 8mns ; TG : 8mns ; TC : 8mns*

Modélisation	Ordre des p éléments	Possibilité de répétition des éléments	Outil	Nombre de tirages
Tirage successif avec remise	oui	oui	p -liste	n^p
Tirage successif sans remise	oui	non	p -arrangement	A_n^p
Tirage simultané	non	non	p -combinaison	C_n^p

Consigne 107 : Réinvestissement

Dans une caisse, on a 5 boules noires ; 7 boules vertes et 3 boules rouges, toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard 4 boules de cette caisse.

1^{er} Cas : on suppose que les tirages s'effectuent successivement sans remise

1. Détermine le nombre de tirages possibles.
2. Détermine le nombre de tirages comportant :
 - (a) 2 boules noires et 2 boules rouges.
 - (b) exactement 3 boules vertes.
 - (c) une boule verte et 2 boules rouges.
 - (d) des boules de la même couleur.
 - (e) au moins 2 boules noires.
 - (f) au plus une 3 boules vertes.
 - (g) 2 boules noires et 2 boules rouges dans cet ordre.

2^{ème} Cas : on suppose que les tirages s'effectuent successivement avec remise

Reprends les mêmes questions précédentes.

3^{ème} Cas : on suppose que les tirages s'effectuent simultanément

Reprends les mêmes questions précédentes.

Stratégie de travail : TI : 15mns; TG : 15mns; TC : 15mns



Propriété (*Nombre de parties d'un ensemble*)

Le nombre de parties d'un ensemble fini non vide de n éléments est 2^n .

Fonctions numériques d'une variable réelle (1^{ère} C&D)

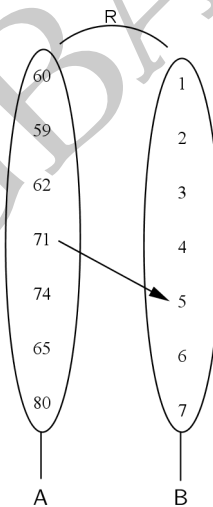
Sommaire

8.1 Généralité sur les fonctions	88
8.2 Opérations sur les fonctions	92
8.3 Applications	94

8.1 Généralité sur les fonctions

Activité 31 : Généralité sur les fonctions

A l'aide des informations qu'il a relevées dans les bases de données de la société, Melon cherche à établir une relation entre certains poids et le nombre de fois qu'apparaît chacun d'eux. Ainsi, il obtient une représentation dont voici un extrait :



Consigne 108 : Fonction et domaine de définition d'une fonction

1. Complète la représentation ci-dessus.
2. Justifie que la correspondance R est une fonction.
3. Donne l'ensemble de définition de cette fonction.

Stratégie de travail : $TI : 5mns$; $TG : 5mns$; $TC : 5mns$

Résultats attendus : (à faire)


Définition (Fonction et ensemble de définition d'une fonction)

- ☆ On appelle fonction, toute correspondance f définie d'un ensemble non vide A vers un ensemble non vide B qui, à chaque élément de A associe au plus un élément de l'ensemble B . On note :

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

A est l'ensemble de départ et B est l'ensemble d'arrivée.

- ☆ f étant une fonction définie de A vers B , on appelle ensemble de définition de f , généralement noté D_f , l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f dans B .

$$D_f = \{x \in A / f(x) \text{ existe dans } B\}$$

Consigne 109 : Consolidation

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies ci-dessous :

$$\begin{array}{llll} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} & h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & k: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ x \longmapsto \frac{x+1}{x^2-3x-4} & x \longmapsto \frac{\sqrt{x+4}}{x^2-1} & x \longmapsto \sqrt{x^2-3x-4} & x \longmapsto \frac{2x-3}{x-2} \end{array}$$

Stratégie de travail : *TI : 10mns ; TG : 10mns ; TC : 10mns*

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 110 : Restriction et prolongement

On considère les fonctions f et g définies par :

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g:]-\infty; 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2-1}{|x-1|} & x \longmapsto -x-1 \end{array}$$

1. Détermine l'ensemble de définition de f et g .
2. Écris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
3. Compare $f(x)$ et $g(x)$ pour tout réel x de $]-\infty; 1[$.

Stratégie de travail : *TI : 7mns ; TG : 7mns ; TC : 7mns*

Résultats attendus : (à faire)


Exploitation des résultats

- ⚡ Pour tout x de $]-\infty; 1[$, $g(x) = f(x)$. On dit que la fonction g est la restriction de f sur $]-\infty; 1[$ et f est le prolongement de g sur $\mathbb{R}$.


Définition (Restriction et prolongement)

Soit f une fonction de A vers B ; E une partie non vide de l'ensemble de définition de la fonction f .

On appelle restriction à E de la fonction f , l'application g de E dans B définie par $g(x) = f(x)$. On note :

$$g: E \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto g(x) = f(x)$$

f est appelé prolongement de g sur E .

Consigne 111 : Consolidation

On considère la fonction f définie ci-dessous :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto |1 - x| - |x + 3|$$

Définis la restriction g de f à l'intervalle $[-3; 1]$.

Stratégie de travail : $TI : 5mns$; $TG : 5mns$; $TC : 5mns$

Résultats attendus : (à faire)

Consigne 112 : Comparaison de deux fonctions (Uniquement pour la 1^{ère}D)

Soient les fonctions f et g définies par :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2 + x - 2 \quad x \longmapsto -2x^2 + 3x - 1$$

1. Calcule $f(x) - g(x)$ pour tout réel x .
2. Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dédus-en la comparaison de f et g sur $\mathbb{R}$.

Stratégie de travail : $TI : 7mns$; $TG : 7mns$; $TC : 7mns$

Résultats attendus : (à faire)



Définition (Comparaison de deux fonctions)

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies sur un ensemble E .

- 👁 On dit que sur E , f est supérieure ou égale à g lorsque pour tout x élément de E , $f(x) \geq g(x)$.

On note : sur E , $f \geq g$.

- 👁 On dit que sur E , f est inférieure ou égale à g lorsque pour tout x élément de E , $f(x) \leq g(x)$.

On note : sur E , $f \leq g$.

- 👁 On dit que sur E , f est strictement supérieure à g lorsque pour tout x élément de E , $f(x) > g(x)$.

On note : sur E , $f > g$.

- 👁 On dit que sur E , f est strictement inférieure à g lorsque pour tout x élément de E , $f(x) < g(x)$.

On note : sur E , $f < g$.

Consigne 113 : Minoration et majoration d'une fonction (Uniquement pour la 1^{ère}D)

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

1. Vérifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3 - \frac{1}{x^2 + 1}$.
2. (a) Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 3$.
(b) Justifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2$.
3. Précise un minorant et un majorant de f et donne si possible le minimum et le maximum de f .
4. Peut-on dire que f est bornée ?

Stratégie de travail : TI : 7mns ; TG : 7mns ; TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

**Définition** (Minorant, majorant d'une fonction)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un ensemble E ; α et β des nombres réels.

☞ On dit que le nombre réel α est un minorant de f sur E lorsque α est un minorant de l'ensemble $f(E)$. On dit alors que f est minorée par α sur E .

On a donc : $\forall x \in E, f(x) \geq \alpha$.

☞ On dit que le nombre réel β est un majorant de f sur E lorsque β est un majorant de l'ensemble $f(E)$. On dit alors que f est majorée par β sur E .

On a donc : $\forall x \in E, f(x) \leq \beta$.

**Définition** (Fonction minorée, majorée, bornée)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur un ensemble E .

⊠ On dit que la fonction f est minorée sur E s'il existe un minorant de f sur E .

⊠ On dit que la fonction f est majorée sur E s'il existe un majorant de f sur E .

⊠ On dit que la fonction f est bornée sur E lorsque f est à la fois minorée et majorée sur E .

**Définition** (Minimum, maximum relatifs d'une fonction)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f et a un élément de D_f .

✓ On dit que f admet un minimum relatif en a s'il existe un intervalle ouvert K contenant a tel que $f(a)$ soit le minimum de f sur $K \cap D_f$.

✓ On dit que f admet un maximum relatif en a s'il existe un intervalle ouvert K contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de f sur $K \cap D_f$.

✓ On dit que f admet un extrémum relatif en a lorsque f admet un minimum relatif ou un maximum relatif en a .

8.2 Opérations sur les fonctions

Activité 32 : Opérations sur les fonctions

Consigne 114 ; Somme, produit, quotient de fonctions (Uniquement pour la 1^{ère}D)



Définition (Somme, produit, quotient de fonction)

Soit f et g des fonctions numériques d'ensemble de définition respectif D_f et D_g .

- ✓ On appelle somme de f et g la fonction numérique : $x \mapsto f(x) + g(x)$. On la note $(f + g)$.

Son ensemble de définition D_{f+g} est tel que : $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.

- ✓ On appelle produit de f et g la fonction numérique : $x \mapsto f(x) \times g(x)$. On la note fg .

Son ensemble de définition D_{fg} est tel que : $D_{fg} = D_f \cap D_g$.

- ✓ On appelle quotient de f et g la fonction numérique : $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$. On la note $\frac{f}{g}$.

Son ensemble de définition $D_{\frac{f}{g}}$ est tel que : $x \in D_{\frac{f}{g}} \iff (x \in D_f; x \in D_g \text{ et } g(x) \neq 0)$.

Consigne 115 : Composée de deux fonctions

Melon désire effectuer certaines opérations sur les fonctions numériques à variable réelle. Pour cela, il considère les fonctions suivantes :

$$f(x) = x + 1, g(x) = 2x^2 \text{ et } h(x) = 2(x + 1)^2.$$

1. Complète les représentations ci-dessous : ($\alpha \in \mathbb{R}$).

f		g		h	
-1		$f(-1)$		-1	
1		$f(1)$		1	
2		$f(2)$		2	
α		$f(\alpha)$		α	

2. Compare :

(a) $g[f(2)]$ et $h(2)$

(b) $g[f(-1)]$ et $h(-1)$

(c) $g[f(\alpha)]$ et $h(\alpha)$

Stratégie de travail : TI : 5mns ; TG : 5mns ; TC : 5mns

Résultats attendus : (à faire)

Exploitation des résultats

On dit que h est la composée de f suivie de g .

On note : $h = g \circ f$



Définition (Composée de deux fonctions)

Soit A , B et C des parties non vides de $\mathbb{R}$; f une fonction de A vers B et g une fonction de B vers C .

On appelle composée de f suivie de g , la fonction de A vers C notée $g \circ f$ et définie par :

$$x \mapsto g[f(x)].$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Consigne 116 : Ensemble de définition de la composée de deux fonction

On donne les fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

On se propose de trouver l'ensemble de définition de la fonction $f \circ g$.

- Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g .
- Calcule $(f \circ g)(5)$.
- Peut-on calculer $(f \circ g)(3)$? Justifie ta réponse.
- (a) Calcule $g(2)$.
(b) Peut-on calculer $(f \circ g)(2)$? Justifie ta réponse.
- Soit a un nombre réel. À quelle(s) condition(s) peut-on calculer $(f \circ g)(a)$?
- Trouve alors le domaine de définition de la fonction $f \circ g$.

Stratégie de travail : TI : 7mns; TG : 7mns; TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)



Retenons (Ensemble de définition de la composée de deux fonctions)

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et g une fonction d'ensemble de définition D_g . L'ensemble de définition $D_{g \circ f}$ de la fonction $g \circ f$ est : $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$.

Consigne 117 : Consolidation

Soit les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{3x-1}$ et $g(x) = \frac{x+1}{x}$.

- Détermine les domaines de définition D et D' respectifs des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$.
- (a) Pour tout x de D , explicite $(f \circ g)(x)$.
(b) Pour tout x de D' , explicite $(g \circ f)(x)$.
- À t-on $f \circ g = g \circ f$?

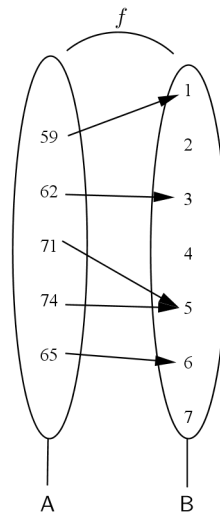
Stratégie de travail : TI : 7mns; TG : 7mns; TC : 7mns

Résultats attendus : (à faire)

8.3 Applications

Activité 33 : Applications

Au cours de l'établissement de la correspondance entre les poids des agents et le nombre de fois qu'apparaît chacun d'eux, Melon veut étudier les caractéristiques de la correspondance suivante :



Consigne 118 : Définition

Justifie que f est une application.

Stratégie de travail : $TI : 3mns$; $TG : 3mns$; $TC : 3mns$

Résultats attendus : (à faire)



Définition (Application)

- ☐ Une fonction est une application lorsque à chaque élément de l'ensemble de départ associe un élément de l'ensemble d'arrivée.
- ☐ Une fonction est une application lorsque son ensemble de définition est égal à son ensemble de départ.

Consigne 119 : Associativité de la composition d'applications

Soit les applications f , g et h définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = x + 1$.

1. Détermine $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$.
2. Que constates-tu ?

Stratégie de travail : $TI : 5mns$; $TG : 5mns$; $TC : 5mns$

Résultats attendus : (à faire)

**Propriété**

Soit f une application de A dans B , g une application de B dans C et h une application de C dans D .

Les applications $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ de A dans D sont égales.

On note : $h \circ (g \circ h) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$.

On dit que la composition des applications est **associative**.

**Définition** (Application injective, surjective, bijective)

Soit f une application de E vers F .

⇒ On dit que f est injective (ou une injection), lorsque tout élément de F a au plus un antécédent par f .

$$(f \text{ est injective}) \iff \left(\forall (x_1, x_2) \in E^2, \text{ on a : } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right)$$

$$(f \text{ est injective}) \iff \left(\forall (x_1, x_2) \in E^2, \text{ on a : } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$$

⇒ On dit que f est surjective (ou une surjection), lorsque tout élément de F a au moins un antécédent par f .

$$(f \text{ est surjective}) \iff \left(\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y \right)$$

⇒ On dit que f est bijective (ou une bijection), si f est à la fois injective et surjective.

**Propriété**

Soit f une application de A vers B .

f est bijective si et seulement si pour tout élément y de B , l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans A .

$$(f \text{ est bijective}) \iff \left(\forall y \in B, \exists ! x \in A / f(x) = y \right)$$

**Remarques**

Soit f une bijection de E sur F .

- Si f^{-1} est la bijection réciproque de f , alors f est la bijection réciproque de f^{-1} .
- Pour tout x élément de E et pour tout y élément de F , on a : $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$.

Consigne 120 : Application identique

On considère la fonction $f: \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\}$

$$x \longmapsto \frac{3x-1}{x-2}$$

1. Justifie que f est une application.
2. Démontre que f est bijective puis définis sa bijection réciproque f^{-1} .
3. (a) Explicite $(f \circ f^{-1})(x)$ pour tout x élément d'un ensemble D à préciser.

(b) Explicite $(f^{-1} \circ f)(x)$ pour tout x élément d'un ensemble D' à préciser.

Stratégie de travail : $TI : 7mns$; $TG : 7mns$; $TC : 7mns$

Résultats attendus : (à faire)



Définition (Application identique)

E étant un ensemble non vide, on appelle application identique de E , l'application $x \mapsto x$. On la note Id_E .

$$\begin{aligned} Id_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Consigne 121 : Propriétés

Soit f une bijection de A vers B .

1. Démontre que $f^{-1} \circ f = Id_A$.
2. Démontre que $f \circ f^{-1} = Id_B$.

Stratégie de travail : $TI : 5mns$; $TG : 5mns$; $TC : 5mns$

Résultats attendus : (à faire)



Propriété

Si f est une bijection d'un ensemble A sur un ensemble B et f^{-1} sa réciproque, alors $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de A et $f \circ f^{-1}$ est l'application identique de B .

$$f^{-1} \circ f = Id_A \text{ et } f \circ f^{-1} = Id_B$$

Remarques



Soit f une bijection de E vers F et g une application de F vers E .

- Si $f \circ g = Id_F$ ou $g \circ f = Id_E$, alors $g = f^{-1}$ (g est la bijection réciproque de f).
- On a : $f \circ Id_E = Id_F \circ f = f$.

Consigne 122 : Propriétés

Soit f une application de E vers F et g une application de F vers G .

1. Démontre que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Démontre que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Déduis-en que $g \circ f$ est bijective et montre que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Stratégie de travail : $TI : 7mns$; $TG : 7mns$; $TC : 7mns$

Résultats attendus : (à faire)

🕒 Indications

1. Utiliser la définition d'une injection.
2. Utiliser la définition d'une surjection.
3. Dédution : triviale

S'appuyer sur la première remarque précédente pour montrer donc que $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = Id_G$.

📖 Propriétés

- ☐ La composée de deux injections est une injection.
- ☐ La composée de deux surjections est une surjection.
- ☐ La composée $f \circ g$ de deux bijections f et g est une bijection et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
- ☐ Si f est une bijection d'un ensemble A sur un ensemble B et g une bijection de l'ensemble B sur l'ensemble C , alors $g \circ f$ est une bijection de l'ensemble A sur l'ensemble C .

Consigne 123 : Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Soit f une bijection de E vers F ; E et F étant des parties de $\mathbb{R}$ et (Δ) la droite d'équation $y = x$. On désigne par $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les représentations graphiques respectives de f et f^{-1} . Soit les points $A(a : b)$ et $A'(b : a)$.

1. Démontre que A et A' sont symétriques par rapport à la droite (Δ) .
2. Démontre que A appartient à $(\mathcal{C})$ si et seulement si A' appartient à $(\mathcal{C}')$.
3. Que peut-on dire alors de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ par rapport à (Δ) ?

Stratégie de travail : TI : 7mns ; TG : 7mns ; TC : 7mns

🕒 Indications

1. Si $a = b$, A et A' sont confondus et appartiennent donc à (Δ) .
Si $a \neq b$, A et A' sont distincts. $M(x, y)$ étant un point quelconque du plan, montrer que $MA = MB$ si et seulement si M appartient à (Δ) puis conclure que (Δ) est la médiatrice du segment $[AA']$. La déduction est immédiate.
2. Traduire l'appartenance de A à $(\mathcal{C})$ puis utiliser : $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
3. Évident.

📖 Propriété

Soit f une bijection de E vers F ; E et F étant des parties de $\mathbb{R}$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les représentations graphiques $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ respectives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La droite d'équation $y = x$ est appelée la première bissectrice.

Consigne 124 : Consolidation

Soit l'application $f: [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto \sqrt{2x-4}$$

1. Construis la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Dédus-en la construction sur le même graphique de la courbe représentative ($\mathcal{C}'$) de la bijection réciproque f^{-1} de f .

Stratégie de travail : **TI : 7mns ; TG : 7mns ; TC : 7mns**

Consigne 125 : Image directe - image réciproque

Soit l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 5$ et l'ensemble $A =]3; 6]$.

1. Démontre que : $x \in A \iff f(x) \in [-7; -1[$.
2. Démontre que : $f(x) \in A \iff x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right[$.

Stratégie de travail : **TI : 5mns ; TG : 5mns ; TC : 5mns**

Exploitation des résultats

- On dit que l'image directe de $]3; 6]$ par f est $[-7; -1[$ et on note : $f(]3; 6]) = [-7; -1[$.
- On dit que l'image réciproque de $]3; 6]$ par f est $\left[-\frac{1}{2}; 1\right[$ et on note : $f^{-1}(]3; 6]) = \left[-\frac{1}{2}; 1\right[$.

Résultats attendus : (à faire)



Définition (Image directe - image réciproque)

Soit f une application de E vers F ; A et B deux ensembles tels que $A \subset E$ et $B \subset F$.

- ✚ On appelle **image directe** de A par f noté $f(A)$, l'ensemble de toutes les images des éléments de A par f .

$$f(A) = \{f(x) \in F; x \in A\}$$

- ✚ On appelle **image réciproque** de B par f noté $f^{-1}(B)$, le sous-ensemble des éléments x de E tels que $f(x) \in B$.

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$

Remarque

La définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application ne nécessite pas forcément la bijection de cette application.

**Propriété**

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F .

f est **surjective** si et seulement si $f(E) = F$.

Consigne 126 : Consolidation

Soit l'application f définie de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2$.

1. Détermine l'image directe de $[1;3]$ par f .
2. Détermine l'image réciproque de $[2;6[$ par f .

Stratégie de travail : $TI : 5\text{mns}$; $TG : 5\text{mns}$; $TC : 5\text{mns}$

Suite en TOME 2 ...



just do it.