SOMMAIRE

N°	Chapitres	Page
1	FONCTIONS	5
2	EQUATIONS, INEQUATIONS, SYSTEMES LINEAIRES	29
3	LIMITES ET CONTINUITE	55
4	DERIVATION	84
5	ETUDE DE FONCTIONS	115
6	SUITES NUMERIQUES	154
7	DENOMBREMENT	186
8	STATISTIQUES	200
9	TRIGONOMETRIE	224
10	BARYCENTRE	259
11	TRANSFORMATIONS DU PLAN	289
12	GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN	313

AVANT PROPOS

La collection **TOP Chrono** a été conçue pour répondre au besoin, maintes fois, exprimé par les élèves de disposer d'un outil pratique et performant à moindre coût, pour préparer efficacement leurs devoirs surveillés et autres évaluations durant toute l'année scolaire.

TOP Chrono Mathématiques Premières C&D contient **un rappel des principaux résultats de chaque chapitre** du cours, **un grand nombre d'exercices types corrigés** pour aider à la préparation des devoirs, ainsi que **de nombreux exercices de perfectionnement** permettant à l'élève de s'assurer l'acquisition des savoirs et savoir-faire.

TOP Chrono Mathématiques Premières C&D édition 2016 **est conforme au programme officiel en vigueur en Côte d'Ivoire.**

Nous espérons avoir rendu cet ouvrage assez attrayant pour qu'il soit un précieux auxiliaire de votre travail personnel tout au long de l'année.

Nous osons croire que ce livre aidera les élèves des classes de premières C&D à réussir aisément leur année scolaire.

Les auteurs remercient d'avance toutes les bonnes volontés pour leurs remarques et suggestions qui permettront d'améliorer à l'avenir le contenu de ce document et en faire un outil de travail incontournable.

Nous adressons un profond remerciement à la communauté des enseignants de Mathématiques pour leurs encouragements, leurs conseils, leur soutien et leurs contributions.

Les auteurs

FONCTIONS



Le mathématicien suisse, ***Leonhard EULER***, est né en 1707 près de Bâle en Suisse.
Il entre à l'Université de Bâle à 13 ans pour y étudier la philosophie et le droit.
Il obtient son diplôme de philosophie à 16 ans.
Il s'installe ensuite en 1727 à Saint-Pétersbourg en Russie où il épouse la fille d'un artiste russe avec laquelle il aura 13 enfants.
EULER raconte avoir fait ses plus belles découvertes avec un bébé dans ses bras et ses enfants jouant à ses pieds.
A 33 ans, il perd un œil et bientôt il ne peut distinguer que de grands caractères tracés à la craie sur une ardoise. Son activité restera cependant constante jusqu'à la fin de sa vie en dépit de son handicap.
Emmené par sa passion et son acharnement au travail, **EULER** laisse une œuvre gigantesque de 886 livres et articles qui abordent presque tous les domaines des mathématiques et des sciences en général.
EULER meurt à Saint-Pétersbourg en 1783 alors âgé de 76 ans.
EULER établit la célèbre constante, notée γ (gamma), qui porte aujourd'hui son nom : $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln n = 0.57721566490153286060\ldots$

On ne sait toujours pas s'il s'agit d'un nombre rationnel ou irrationnel.

Sur les nombres, il propose le célèbre π pour le **nombre Pi**, la lettre **i pour la racine carrée de -1** et le fameux **e** base des logarithmes néperiens.
Il établit à ce sujet, une formule liant ces trois nombres : $e^{i\pi} + 1 = 0$ et une seconde mettant en relation la trigonométrie et l'analyse complexe :
$e^{ix} = \cos x + i.\sin x$.
EULER fonde ce qu'on appelle aujourd'hui l'analyse fonctionnelle en donnant une définition précise de la notion de fonction.
Nous lui devons la notation f(x) pour désigner l'image d'un nombre x par une fonction f.
Il introduit l'utilisation de la lettre grecque Σ comme symbole de sommation.
Ainsi, 1 + 2 + 3 + ... + 1000 trop long à écrire se note $\sum_{k=1}^{1000} k$

EULER met en place ***le calcul des variations par la recherche des extrema*** sur les courbes.
EULER écrit aussi des ouvrages de physique (1765).
Il y définit ***le centre d'inertie, les moments d'inertie et les axes principaux d'inertie*** et traite sur la mécanique du point matériel.
***EULER* s'occupe également de philosophie dans « *Lettres à une princesse d'Allemagne* » écrites à partir de 1760.**

FICHE DE COURS

Ensemble de définition

Soit D une partie de l'ensemble $\mathbb{R}$.

On définit une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, en associant à chaque élément de D, un et un seul élément de $\mathbb{R}$ noté $y = f(x)$ et que l'on appelle l'image de x par f.

La fonction est notée $f : D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

L'ensemble D est appelé ensemble de définition de la fonction f.

On appelle (C_f) représentation graphique de f, ou courbe représentative de f. l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D$.

Egalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont égales lorsqu'elles ont même ensemble de définition D et lorsque pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$.

Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble D.

$f + g$ est la fonction définie sur D par : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$f \times g$ est la fonction définie sur D par : $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

kf est la fonction définie sur D par : $(kf)(x) = kf(x)$, k étant un nombre réel.

$\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur D par : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, si g ne s'annule pas sur D.

Composition de fonctions

Soit g une fonction définie sur D et prenant ses valeurs sur D'.

Soit f une fonction définie sur D'.

La fonction qui à tout réel x de D fait correspondre $f(g(x))$ est appelée composée de g suivie de f.

On a ainsi : $D \to D' \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

Cette fonction est notée : $f \circ g : D \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$$

Fonctions PAIRES, Fonctions IMPAIRES

f est paire équivaut à $(\forall x \in I),\ -x \in I,\ f(-x) = f(x)$

f est impaire équivaut à $(\forall x \in I),\ -x \in I,\ f(-x) = -f(x)$

Axes de symétrie, Centre de symétrie

On considère une fonction f définie sur un ensemble D.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

1- Axe de Symétrie

Pour montrer que la droite (Δ) : x = a est un axe de symétrie de (C_f), on peut proceder comme suit :

1ère Méthode

On montre que la fonction g: x→ $f(x+a)$ est PAIRE.

2ème Méthode

On montre que : *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $(a-x) \in D$ équivaut à $(a+x) \in D$ et on vérifie que : *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(a+x) = f(a-x)$

2- Centre de Symétrie

Pour montrer que le point Ω (a, b) est un centre de symétrie de (C_f), on peut procéder comme suit :

1ère Méthode

On montre que la fonction g: x→ $f(a+x)-b$ est IMPAIRE.

2ème Méthode

On montre que : *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $(a-x) \in D$ équivaut à $(a+x) \in D$

et on vérifie que : *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(a+x)+f(a-x)}{2} = b$

[redacted]

RESTRICTION, PROLONGEMENT D'UNE FONCTION

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants, les deux fonctions considérées sont-elles égales ?

Justifier votre réponse.

a) $f :]-2;1;4[\to \mathbb{R}$ $\quad g :]-2;1;4[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$; $\quad x \mapsto \dfrac{3x}{x+2}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x+1$; $\quad x \mapsto \dfrac{x(x+1)}{x}$

c) $f : \{0;1;-2\} \to \mathbb{R}$ $\quad g : \{0;1;-2\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{2}{x}$; $\quad x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\ldots}$

EXERCICE 2

1) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto |2x-1| + |1-x|$

a) Exprimer f sans les signes de valeurs absolue.

b) Trouver une fonction g, différente de f, qui coïncide avec f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

2) Soit les fonctions

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$ $\quad x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$

a) Exprimer f sans le signe de valeur absolue.

b) Trouver un ensemble A sur lequel f et g coïncident et un ensemble B sur lequel f= g.

EXERCICE 3

Soit les fonctions f et g définies sur [0 ;+∞[telles que: $f(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$; $g(x) = \dfrac{1}{2+x}$

a) Calculer f(x) - g(x).

b) Etudier le signe de f(x) -g(x) sur [0 ;+∞[puis comparer f(x) et g(x).

LES FONCTIONS PARTICULIERES

EXERCICE 4

Soit la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$$

a) Pour chaque nombre réel y, résoudre l'équation $\frac{1+x^2}{2} = y$

b) Utiliser la question a) pour montrer que g est injective et pour déterminer l'ensemble image $g(\mathbb{R}_+)$ de g.

c) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_+ \to g(\mathbb{R}_+)$ est bijective

$$x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$$

d) Préciser ce qu'est l'application réciproque f^{-1} de f.

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

a. Représenter graphiquement la bijection $f : \mathbb{R}_+ \to \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$$

b. Utiliser le résultat ci-dessus pour représenter graphiquement l'application réciproque f^{-1}.

OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

EXERCICE 6

Soit les fonctions f et g $f : \mathbb{R} - \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ $g : \mathbb{R} - \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{2x}{x+1}$

Calculer les fonctions $f+g$ $2f-g$ $(2f-g)^2$ $f \cdot g$ et $\frac{f}{g}$.

Dans chacun cas, on précisera l'ensemble de définition.

EXERCICE 7

Soit f, g et h les fonctions de définies par :

$f(x) = 2x-1$; $g(x) = x^2 - 3$ et $h(x) = \frac{1}{x-3}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $h \circ g$ puis calculer $h \circ g(x)$
2. Déterminer l'ensemble de définition de $h \circ g \circ f$ puis calculer $h \circ g \circ f(x)$.

EXERCICE 8

Soit f, g et h trois fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que les fonctions $(f+g)\circ h$ et $(f\circ h)+(g\circ h)$ sont égales.

2. On suppose que f, g et h sont définies par :

$f(x)=x$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$; $h(x)=x^2$.

Déterminer les fonctions $h\circ(f+g)$ et $(h\circ f)+(h\circ g)$.

Ces fonctions sont-elles égales ?

EXERCICE 9

1. Montrer que la fonction $f(x)=\dfrac{1}{2+x^4}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant l'inégalité $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, montrer que la fonction $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin x}$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

FONCTIONS ASSOCIEES

EXERCICE 10

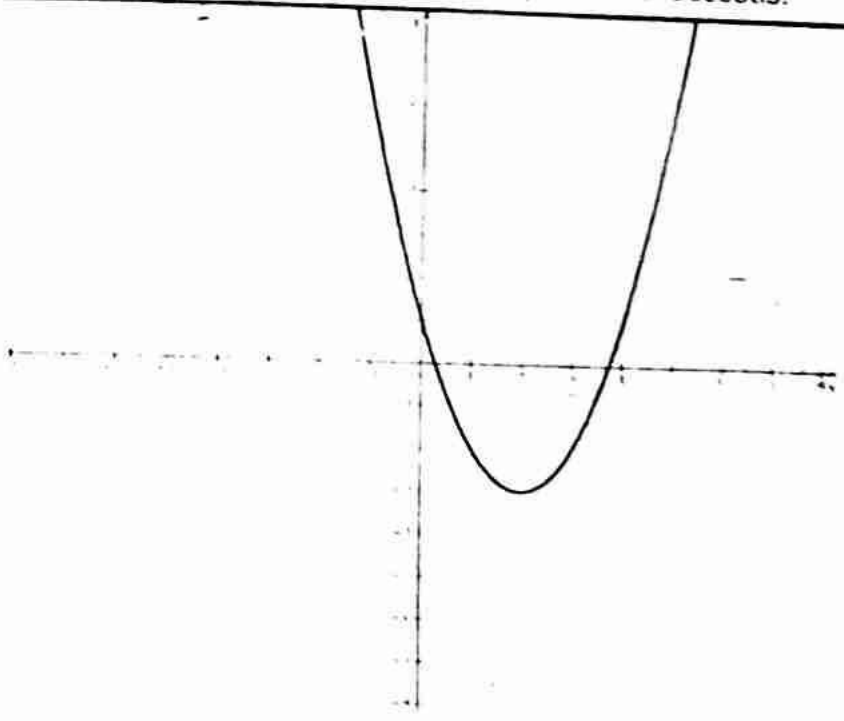
Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x)=x^2+4x+9$.

a. Trouver deux nombres réels a et b tels que *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=(x-a)^2+b$

b. Utiliser la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^2$ et la question a) pour obtenir la représentation graphique de g

EXERCICE 11

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est représentée graphiquement ci-dessous.



Pour chacune des fonctions suivantes :

$g(x)=f(-x)$, $h(x)=-f(x)$, $l(x)=|f(x)|$ et $m(x)=f(2-x)$

Donner les représentations graphiques à partir de celle de f .

EXERCICE 12

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{3}{x}$

1. soit $\left(C_f\right)$ la représentation graphique de la fonction f . Représenter $\left(C_f\right)$ dans un repère orthonormé (O, I, J).

Montrer que f est une fonction impaire.

En déduire son centre de symétrie.

2. Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{2x-1}{x-2}$

On désigne par D_g l'ensemble de définition de g.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in D_g,\ g(x)=a+\frac{b}{x-2}$

b. Soit $\left(C_g\right)$ la représentation graphique de g dans le repère (O, I, J).

Montrer que $\left(C_g\right)$ est l'image de $\left(C_f\right)$ par une translation dont on précisera le vecteur.

Construire $\left(C_g\right)$.

EXERCICE 13

Parmi les fonctions suivantes définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ indiquer celles qui sont paires et celles qui ne le sont pas.

$f(x)=|x|$; $g(x)=x^3$; $h(x)=x^2-3$; $l(x)=\frac{x^2+x}{|x|}$; $m(x)=3x^4+5$

EXERCICE 14

Parmi les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, indiquer celles qui sont impaires et celles qui ne le sont pas :

$f(x)=x$; $g(x)=7x^3$; $h(x)=\frac{x^2+3}{3x}$; $l(x)=x^2+x$; $m(x)=x|x|$

EXERCICE 15

Etudier la parité des fonctions proposées ci-dessous

f ... g ... h ... l ...

$x \mapsto x^2 - 4$ $x \mapsto \frac{1}{x} - \sin x$ $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ $x \mapsto x^n$ $n \geq 1$

EXERCICE 16

Le plan etant muni d'un repère orthogonal. Vérifier que la droite d'equation $x=3$ est un axe de symétrie pour la courbe de la fonction f definie par $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{x-3}$

EXERCICE 17

Le plan etant muni d'un repère orthogonal, vérifier que le point de coordonnées (2 ; -5) est un centre de symetrie pour la représentation graphique de la fonction f definie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 13$

EXERCICE 18

Montrer que la fonction f est périodique de periode T

(a) $f(x) = \sin^2 x$ pour $T = \pi$. (b) $f(x) = \cos\left|\frac{x}{2}\right|$ pour $T = 6\pi$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

Comparer les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{1}{x^4+1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

EXERCICE 2

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

Soit l'application $f:\left]\dfrac{-1}{2};+\infty\right[\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\sqrt{2x+1}$$

1. Démontrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}
2. Construire la courbe représentative de f^{-1}. En déduire la courbe représentative de f.

EXERCICE 3

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=|x-2|$

Parmi les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ suivantes, préciser celles qui sont des applications.

$g(x)=\dfrac{|6x-12|}{2}$ $\quad h(x)=\dfrac{(x-2)^2}{|x-2|}$ $\quad k(x)=\left|\dfrac{x^2+x-6}{x+3}\right|$ $\quad l(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-3}$

a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et deux nombres réels a et b tels que

$$\text{Pour tout } x\in D_f,\quad f(x)=\frac{a}{x-1}+b$$

b. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), montrer que $\left(C_f\right)$ la représentation graphique de f est l'image de $\left(C_g\right)$, représentation graphique de : $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x}$

par une translation que l'on déterminera. Construire $\left(C_g\right)$, puis en déduire $\left(C_f\right)$

EXERCICE 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), à l'aide de la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$

Construire celle de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_1(x)=x^3+1\ ;\ f_2(x)=(x-1)\left(x^2+x+1\right)\ ;\ f_3(x)=x^3+3x^2+3x+1$$

EXERCICE 6

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Vérifier que la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes admet pour axe de symétrie la droite d'équation x = a.

$f_1(x)=2x^2+3x+1 \quad (a=\frac{-3}{4})$: $f_2(x)=\frac{1}{x^2-4x+8} \quad (a=2)$

EXERCICE 7

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Vérifier que la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes admet pour centre de symétrie le point de coordonnées (a, b).

$f_1(x)=\frac{x^2-2x-1}{x-3} \quad (a,b)=(3,4)$. $f_2(x)=\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-4x+2} \quad (a,b)=(1,\frac{3}{2})$

EXERCICE 8

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J).

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+5x$

1. a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout réel x, on a : $f(x)=a(x+b)^2+c$

b. Construire (C).

(Prendre pour unités : 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées)

2. Résoudre graphiquement :

a. L'équation $|-2x^2+5x|=3$

b. L'inéquation $|-2x^2+5x|>3$.

EXERCICE 9

Soit $f(x)=(x-2)^2+1$. Montrer que la droite (Δ) d'équation: x = 2 est axe de symétrie de (C_f).

EXERCICE 10

Soit $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$. Montrer que le point A (1 ; 2) est centre de symétrie de (C_f).

EXERCICE 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne le point A (-1; 4).

Soit f la fonction définie par $f(x)=4x^2-5x$ et (C_f) sa représentation graphique

Déterminer la fonction g dont la représentation graphique est l'image de (C_f) par la symétrie de centre A

EXERCICE 12

On donne $f(x)=x^2$ et $g(x)=x^2+2x+3$.

Déterminer la forme canonique de $g(x)$ puis trouver le vecteur de translation qui permet de construire (C_g) à partir de (C_f).

EXERCICE 13

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=|x-1|+2|3-x|$.

Déterminer l'application affine g qui a même restriction que f sur l'intervalle [1 ; 3].

EXERCICE 14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

f est-elle une injection ou une surjection ?

EXERCICE 15

On donne la fonction f définie par $f(x)=x^2+3x+1$.

Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$ par -2.

CORRECTION DES EXERCICES

RESTRICTION, PROLONGEMENT D'UNE FONCTION

EXERCICE 1

a) f et g ont meme ensemble de départ et d'arrivée et même ensemble de définition $D = \{-2 ; 1 ; 4\}$. De plus, *Pour tout* $x \in D$ $f(x) = g(x)$. Donc f et g sont égales.

b) f et g ont même ensemble de départ et d'arrivée.

Cependant $D_f \neq D_g$ ($D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$), donc f et g ne sont pas égales.

c) On a $f(-2) = 1$ et $g(-2) = -\frac{5}{2}$ par conséquent $f(-2) \neq g(-2)$ donc f et g ne sont pas égales.

EXERCICE 2

1) $f(x) = |2x-1| + |1-x|$

a) Exprimons f (x) sans les symboles de la valeur absolue

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$\|2x-1\|$	1 – 2x	0	2x – 1	2x - 1
$\|1-x\|$	1 - x	1-x	0	x – 1
$\|2x-1\| + \|1-x\|$	2 - 3x	x		3x – 2

Pour tout $x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ $\quad f(x) = 2-3x$

Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ $\quad f(x) = x$

Pour tout $x \in]1;+\infty[$ $\quad f(x) = 3x-2$

b) On en déduit que $g : \left[\frac{1}{2},1\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ coïncide avec f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$

2) $f(x) = \left|\frac{x+1}{x-2}\right|$; $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$

a) Exprimons f (x) sans les symboles de la valeur absolue

Pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$, $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Pour tout $x \in [-1;2]$ $\quad f(x) = -\frac{x+1}{x-2}$

b) f et g coïncident sur l'intervalle $A =]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$ et $f(x) \neq g(x)$ sur l'intervalle

$B = [-1;2]$.

EXERCICE 3

$f(x)=\frac{1}{2+\sqrt{x}}$ et $g(x)=\frac{1}{2+x}$

a) Calculons $f(x)-g(x)$.

Pour tout $x\in[0;+\infty[$ $f(x)-g(x)=\frac{1}{2+\sqrt{x}}-\frac{1}{2+x}=\frac{2+x}{(2+\sqrt{x})(2+x)}-\frac{2+\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})(2+x)}$

$=\frac{x-\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})(2+x)}=\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})(2+x)}=\frac{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)}{(2+\sqrt{x})(2+x)}$

Signe de f(x) - g(x).

Pour tout $x\in[0;+\infty[$ $\frac{\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})(2+x)}\geq 0$, le signe de $f(x)-g(x)$ est celui de $(\sqrt{x}-1)$

Pour tout $x\in]0;1[$ $f(x)-g(x)<0$ alors $f(x)<g(x)$.

Pour tout $x\in]1;+\infty[$ $f(x)-g(x)>0$ alors $f(x)>g(x)$.

Pour tout $x\in\{0;1\}$ $f(x)-g(x)=0$ alors $f(x)=g(x)$.

LES FONCTIONS PARTICULIERES

EXERCICE 4

$g(x)=\frac{1+x^2}{2}$

a) Resolvons l'equation g(x)= y avec $y\in\mathbb{R}$.

$x\in\mathbb{R}$, $\frac{1+x^2}{2}=y$ *equivaut à* $x^2=2y-1$ (avec $y\geq\frac{1}{2}$)

C'est à dire $x=\sqrt{2y-1}$ *ou* $x=-\sqrt{2y-1}$

pour $y=\frac{1}{2}$, $S=\{-\sqrt{2y-1};\sqrt{2y-1}\}$, *pour* $y<\frac{1}{2}$, $S=\emptyset$.

b) Montrons que g est injective et déterminons $g(\mathbb{R}_+)$.

$x\in\mathbb{R}_+$, $\frac{1+x^2}{2}=y$ *équivaut à* $x^2=2y-1$

c'est à dire $x=\sqrt{2y-1}$

Si $y\geq\frac{1}{2}$, l'équation admet la solution unique $\sqrt{2y-1}$

Si $y<\frac{1}{2}$, l'équation n'a pas de solution.

Par consequent, chaque élément y de $\mathbb{R}$ possède 0 ou 1 antécédent par g.

g est donc injective. On en déduit que $g(\mathbb{R}+)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

c) Déduire l'application réciproque de g.

$x \in \mathbb{R}+$, et $y \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

L'équation f(x) = y admet une solution unique dans $\mathbb{R}+$.

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}+$ vers $g(\mathbb{R}+)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$d)\ f^{-1}:\mathbb{R}\to\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

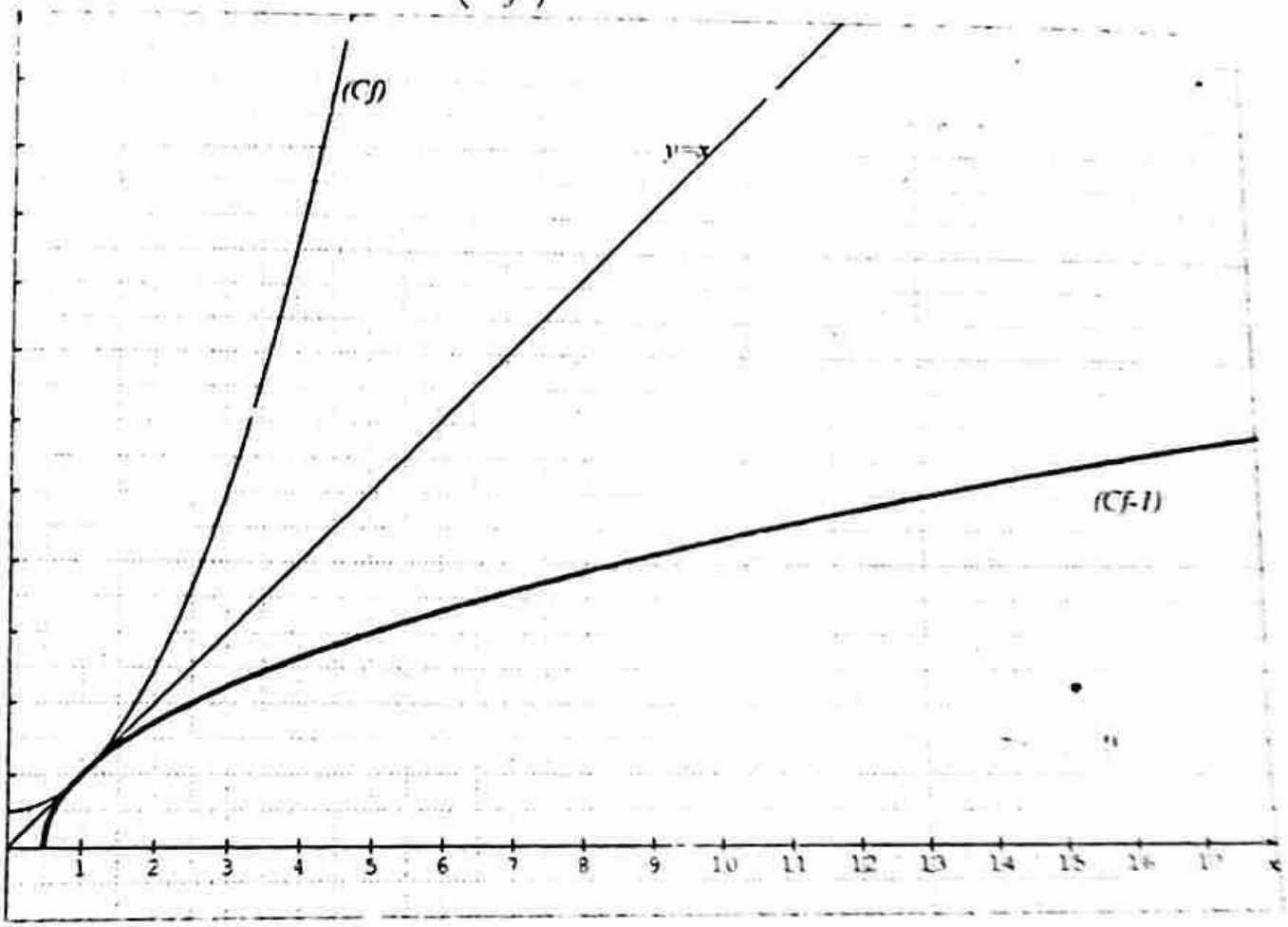
$x \mapsto \sqrt{2x-1}$

EXERCICE 5

$f:\mathbb{R}_+\to\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$

a) Représentation graphique de $\left(C_f\right)$.



b) $\left(C_{f^{-1}}\right)$ la courbe représentative de f^{-1} est image de celle de f par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation y = x.

OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

EXERCICE 6

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $D_g=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

• Ensemble de définition de f+g.

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

Calcul de f+g.

$$f(x)+g(x)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x}{x+1}=\frac{x^2+2x+1+2x^2-2x}{x^2-1}=\frac{3x^2+1}{x^2-1}$$

• Ensemble de définition de 2f - g.

$D_{2f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

Calcul de 2f-g.

$$2f(x)-g(x)=\frac{2(x+1)}{x-1}-\frac{2x}{x+1}=\frac{6x+2}{x^2-1}$$

• Ensemble de définition de f×g.

$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

Calcul de f×g.

$$f(x)\times g(x)=\frac{x+1}{x-1}\times\frac{2x}{x+1}=\frac{2x}{x-1}$$

• Ensemble de définition de $(2f-g)^2$.

$D_{(2f-g)^2}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

Calcul de $(2f-g)^2$.

$$\left(2f(x)-g(x)\right)^2=\left(\frac{6x+2}{x^2-1}\right)^2$$

• Ensemble de définition de $\dfrac{f}{g}$.

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap\left\{x\in D_g/g(x)\neq 0\right\}$$

Calcul de $\dfrac{f}{g}$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+1}{x-1}\times\frac{x+1}{2x}=\frac{x^2+2x+1}{2x(x-1)}$$

EXERCICE 7

1. Déterminons l'ensemble de définition de $h \circ g$ puis calculons $h \circ g(x)$.

Pour tout nombre réel x, $x \in D_{h \circ g}$ équivaut à ($x \in$ Dg et g(x) $\in$ Dh).

Dg = IR et Dh = IR - $\{3\}$

$x \in$ Dhog équivaut à ($x \in IR$ et $x^2 + 3 \neq 3$).

$x \in$ Dhog équivaut à ($x \in IR$ et $x^2 \neq 0$).

$x \in$ Chog équivaut à ($x \in IR$ et $x \neq 0$).

Donc Dhog = IR*.

Pour x ≠ 0, $h \circ g(x) = h(x^2 + 3) = \frac{1}{(x^2+3)-3} = \frac{1}{x^2}$.

2. Déterminons l'ensemble de définition de $h \circ g \circ f$ puis calculons $h \circ g \circ f(x)$.

Pour tout nombre réel x, $x \in D_{h \circ g \circ f}$ équivaut à ($x \in D_f$ et $f(x) \in D_{h \circ g}$)

Df = IR et Dhog = IR*.

$x \in$ Dhogof équivaut à ($x \in IR$ et $2x - 1 \neq 0$)

$x \in$ Dhogof équivaut à ($x \in IR$ et $x \neq \frac{1}{2}$)

Donc Dhogof = $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Pour $x \neq \frac{1}{2}$, $h \circ g \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h \circ g(2x-1) = \frac{1}{(2x-1)^2}$

EXERCICE 8

1. Démontrons que les fonctions $(f + g) \circ h$ et $(f \circ h) + (g \circ h)$ sont égales.

$x \in$ D(f+g)oh $\Leftrightarrow$ ($x \in Dh$ et $h(x) \in D(f + g)$

$x \in$ D(f+g)oh $\Leftrightarrow$ ($x \in Dh$ et $h(x) \in Df \cap Dg$)

Par ailleurs, $x \in$ D(foh+goh) $\Leftrightarrow$ ($x \in$ Dfoh $\cap$ Dgoh)

$x \in$ D(foh+goh) équivaut à ($x \in Dfoh$ et $x \in Dgoh$)

$x \in$ D(foh+goh) équivaut à ($x \in Dh$ et $h(x) \in Df$ et $x \in Dh$ et $h(x) \in Dg$)

$x \in$ D(foh+goh) équivaut à ($x \in Dh$ et $h(x) \in Df$ et $h(x) \in Dg$)

$x \in$ D(foh+goh) équivaut à ($x \in Dh$ et $h(x) \in Df \cap Dg$)

Donc $D(f + g)oh = D(foh + goh)$.

En plus (f+g)oh(x) = (f+g)(h(x)) = f(h(x))+g(h(x))=foh(x)+goh(x).

En conclusion, les fonctions $(f + g) \circ h$ et $(f \circ h) + (g \circ h)$ sont égales.

2. Déterminons les fonctions $h \circ (f + g)$ et $(h \circ f) + (h \circ g)$.

Soit la fonction t = $h \circ (f + g)$. On a $x \in D_t \Leftrightarrow (x \in D_h \cap Dg$ et $f(x) + g(x) \in D_h)$

$x \in Dt$ équivaut à ($x \in IR^*$ et $2x + \frac{1}{x} \in IR$)

Donc Dt = IR*.

t(x)=hо(f+g)(x)=h(f(x)+g(x)) = h $(2x+\frac{1}{x})$ = $h(\frac{2x^2+1}{x})=\left(\frac{2x^2+1}{x}\right)^2=\frac{4x^4+4x^2+1}{x^2}$).

Soit la function k=$(h\,o\,f)+(h\,o\,g)$. On a $x\in D_k \Leftrightarrow (x\in D_{hof}\cap D_{hog})$

$x\in Dk$ *équivaut à* $(x\in Df$ *et* $f(x)\in Dh$ *et* $x\in Dg$ *et* $g(x)\in Dh)$

$x\in D_k$ *équivaut à* $(x\in\mathbb{R}$ *et* $x\in IR$ *et* $x\in IR^*$ *et* $\frac{1}{x}\in IR)$

Donc $D_k=IR^*$.

k(x)=$(h\,o\,f)(x)+(h\,o\,g)(x)$=h(2x)+h($\frac{1}{x}$).= $4x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{4x^4+1}{x^2}$

Donc les fonctions k et t ne sont pas égales.

EXERCICE 9

Montrons que la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{2+x^4}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^4>0$ *équivaut à* $2+x^4>2$ *c'est à dire* $0<\frac{1}{2+x^4}<\frac{1}{2}$ *équivaut à* $0<f(x)<\frac{1}{2}$.

Donc f est bornée par 0 et $\frac{1}{2}$.

2) Montrons que la fonction définie par $g(x)=\frac{1}{2+\sin x}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1\le \sin x\le 1$ *équivaut à* $1\le 2+\sin x\le 3$ *équivaut à* $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le 1$

Donc g est bornée par $\frac{1}{3}$ et 1.

FONCTIONS ASSOCIEES

EXERCICE 10

$g(x)=x^2+4x+9$

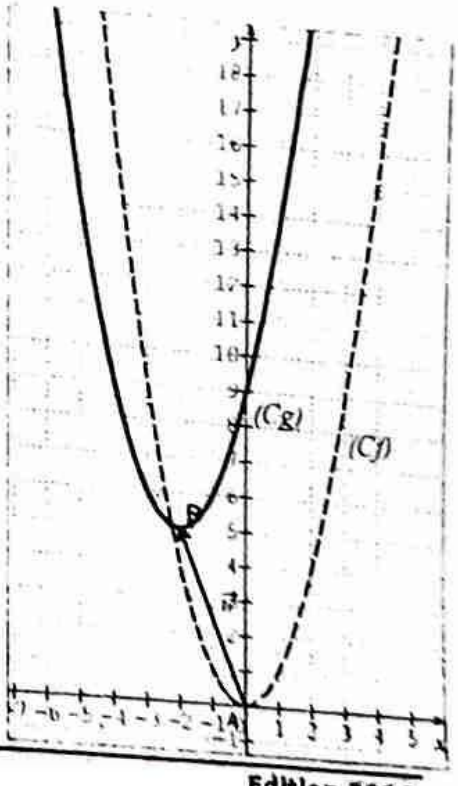
a) Déterminons a et b tels que : *Pour tout* $x\in\mathbb{R}, g(x)=(x-a)^2+b$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}, g(x)=(x+2)^2-4+9=(x+2)^2+5$

d'où a = -2 ; b = 5

b) Représentation graphique de f telle que $f(x)=x^2$

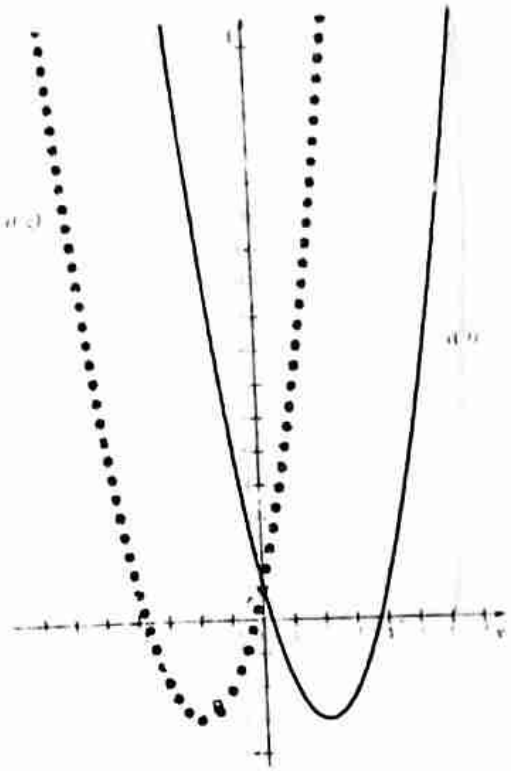
on a : g(x)=f(x-(-2))+5. Donc la courbe représentative de g est l'image de celle de f par la translation de vecteur $\vec{u}(-2;5)$ dans le repère orthonormé (O; I; J).



EXERCICE 11

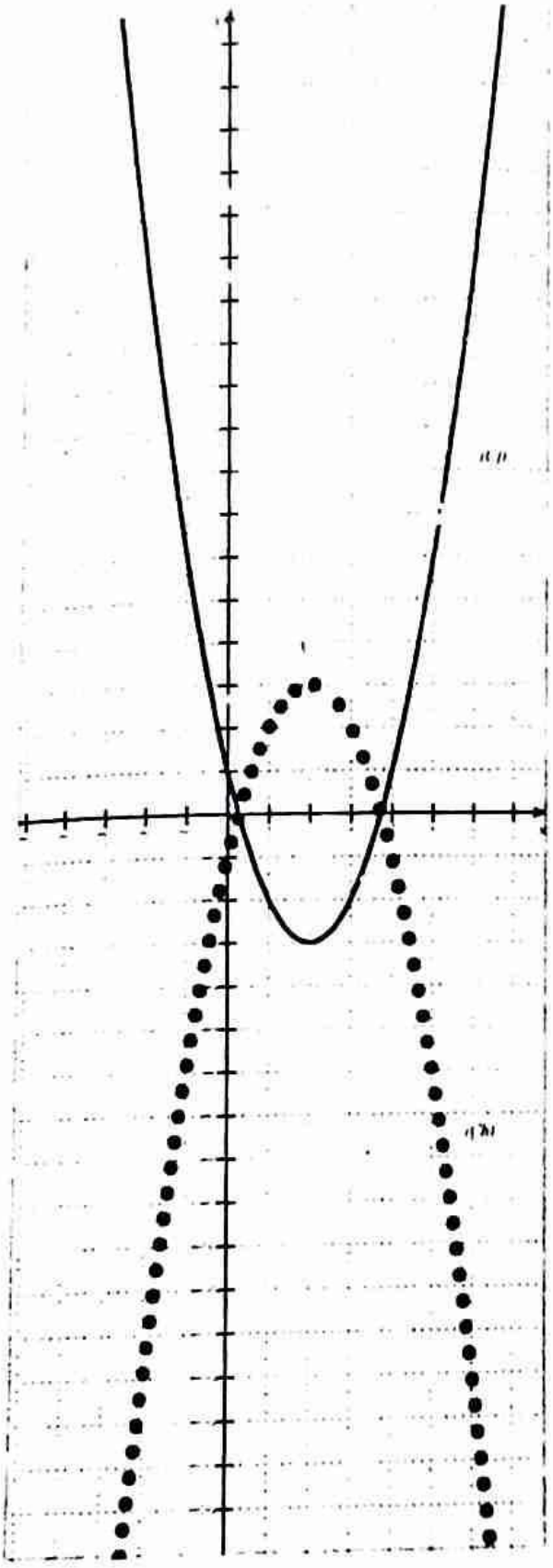
1) a) $g(x) = f(-x)$

(C_g) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe (OJ)

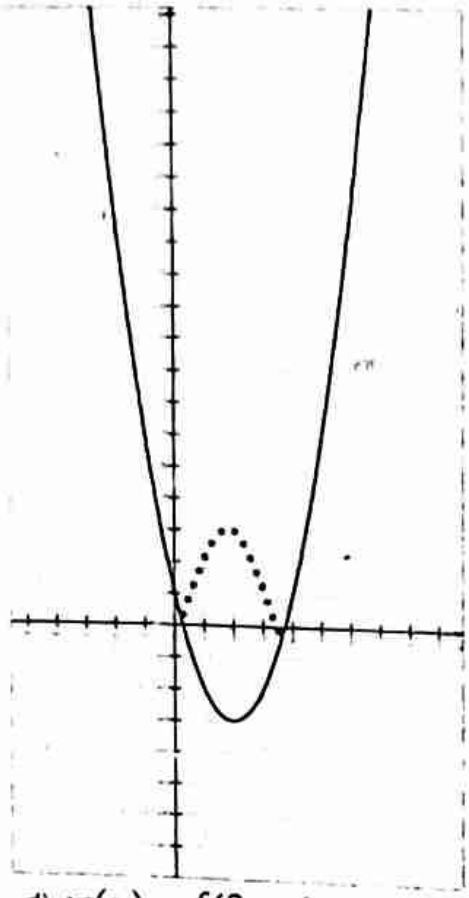


b) $h(x) = -f(x)$

(C_h) est l'image de (C_f) par la symétrie orthogonale d'axe (OI).



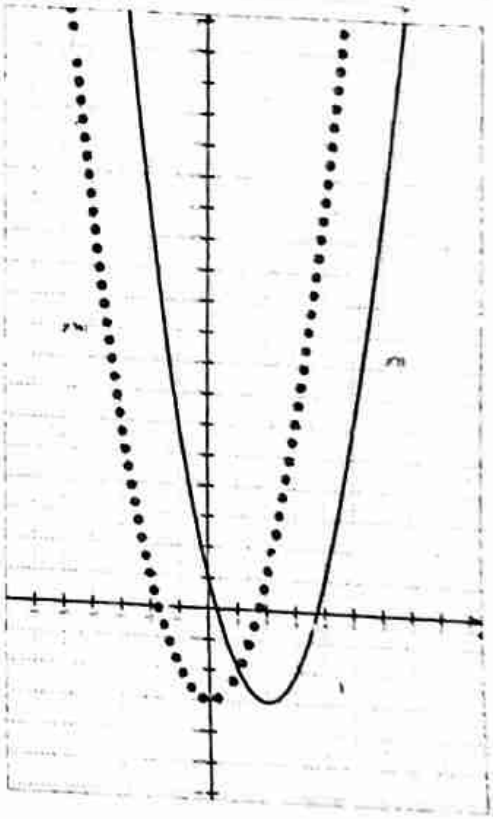
c) $h(x) = |f(x)|$



(C_h) est confondue à (C_f) partout sauf sur l'intervalle où elle est représentée en pointillés.

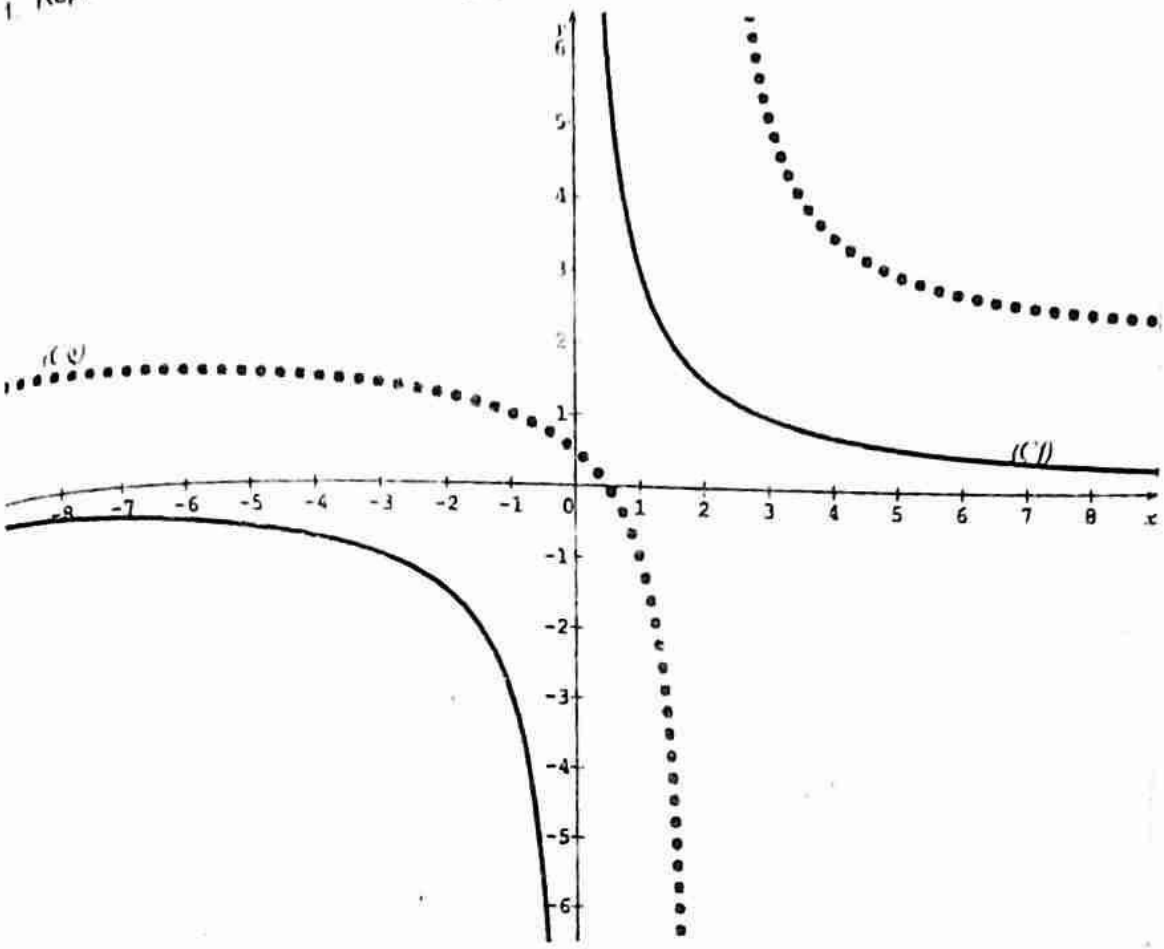
d) $m(x) = f(2-x) = f(-(x-2)) = g(x-2)$

(C_m) est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $-2\overrightarrow{OI}$.



EXERCICE 12

1. Représentons graphiquement (C_f).



Montrons que (C_f) admet un centre de symétrie .

Df = IR*. Et pour tout x appartenant à IR* ; -x appartient à IR* et f(-x)= - f(x). Donc f est impaire et en ce moment l'origine du repère est centre de symétrie de (C_f).

2. Dg=IR-{2}.

a) Déterminons les réels a et b.

En faisant la division euclidienne de 2x-1 par x-2, on obtient $g(x)=2+\frac{3}{x-2}$ pour x≠2.

b) Montrons que (C_g) est limage de (C_f) par une translation.

Pour x≠ 2, on a $g(x)=2+\frac{3}{x-2}$ =f(x-2)+2. Donc (C_g) est limage de (C_f) par la translation de vecteur de coordonnée(2 ;2).

EXERCICE 13

f est une fonction paire si et seulement si $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x)=f(x)$

- $f(x)=|x|$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$ donc f est une fonction paire.

- $g(x)=x^3$ $\quad D_g=\mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ $\quad g(-x)=(-x)^3=-x^3 \neq g(x)$; donc g n'est pas paire.

- $h(x)=x^2-3$ $\quad D_h=\mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ $h(-x)=(-x)^2-3=x^2-3=h(x)$ Donc h est une fonction paire.

- $l(x)=\dfrac{x^2+x}{|x|}$ $\quad D_l=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x \in D_l$ et $\in D_l$ $l(-x)=\dfrac{(-x)^2+(-x)}{|-x|}=\dfrac{x^2-x}{|x|} \neq l(x)$ donc l n'est pas paire .

- $m(x)=3x^4+5$ $\quad D_m=\mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ $m(-x)=3(-x)^4+5=3x^4+5=m(x)$ donc m est paire.

EXERCICE 14

f est une fonction impaire si et seulement si $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x)=-f(x)$

- $f(x)=x$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ $f(-x)=-x=-f(x)$ donc f est une fonction impaire.

- $g(x)=7x^3$ $\quad D_g=\mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ $g(-x)=7(-x)^3=-7x^3=-g(x)$ donc g est une fonction impaire

- $h(x)=\dfrac{x^2+3}{3x}$ $\quad D_h=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $-x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad h(-x)=\dfrac{(-x)^2+3}{3(-x)}=\dfrac{x^2+3}{-3x}=-\dfrac{x^2+3}{3x}=-h(x)$

donc h est une fonction impaire.

- $l(x)=x^2+x$ $\quad D_l=\mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ on a $l(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x \neq -l(x)$

- $m(x)=x|x|$ $\quad D_m=\mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$ $m(-x)=-x|-x|=-x|x|=-m(x)$ donc m est une fonction impaire.

EXERCICE 15

Etudions la parité des fonctions suivantes

a) $f(x)=x^2-4$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$

Donc la fonction f est paire.

b) $g(x)=\dfrac{1}{x}-\sin x$ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$g(-x)=\dfrac{1}{(-x)}-\sin(-x)=-\dfrac{1}{x}+\sin x=-\left(\dfrac{1}{x}-\sin x\right)=-g(x)$

Donc g est une fonction impaire.

c) $h(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

+1 n a pas d'image par f mais –1 a une image par f qui est 0, donc f n'est ni paire ni impaire.

d) $f(x)=x^n$ $n\geq 1$

Si n est paire alors la fonction f est paire.

Si n est impaire alors la fonction f est impaire.

EXERCICE 16

La droite d'équation x = a est un axe de symetrie pour la courbe representative de f

Si pour tout réel x, $a-x\in D_f$ équivaut à $a+x\in D_f$ et $f(a-x)=f(a+x)$

Montrons que la droite d'equation x = 3 est axe de symetrie.

$f(x)=\dfrac{x^2-6x+10}{|x-3|}=\dfrac{(x-3)^2+1}{|x-3|}$

$f(3-x)=\dfrac{x^2+1}{|-x|}=\dfrac{x^2+1}{|x|}$ et $f(3+x)=\dfrac{x^2+1}{|x|}$

Donc $3-x\in D_f$. $3+x\in D_f$ et $f(3-x)=f(3+x)$ par conséquent la droite d'équation x = 3 est un axe de symétrie pour la courbe représentative de f.

EXERCICE 17

Le point A (a ; b) est un centre de symétrie pour la représentation graphique de la fonction f si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a-x \in D_f$ équivaut à $a+x \in D_f$ et $f(a-x)+f(a+x)=2b$.

$f(x)=x^3-6x^2+12x-13$

Montrons que le point A (2 ; -5) est un centre de symétrie à (C_f).

$f(2-x)=(2-x)^3-6(2-x)^2+12(2-x)-13=-x^3-5$

$f(2+x)=(2+x)^3-6(2+x)^2+12(2+x)-13=x^3-5$

$f(2-x)+f(2+x)=-x^3-5+x^3-5=-10=2(-5)$

Donc le point A (2 ; -5) est un centre de symétrie à la représentation graphique de f.

EXERCICE 18

La fonction f est une fonction périodique de période T si et seulement si pour tout $x \in D_f$, $(x+T) \in D_f$ et $f(x+T)=f(x)$

a) $f(x)=\sin^2 x$ pour $T=\pi$

$$f(x+\pi)=\sin^2(x+\pi)=\sin(x+\pi)\times\sin(x+\pi)$$
$$=[-\sin(x)]\times[-\sin(x)]=\sin^2(x)=f(x).$$

Donc f est une fonction périodique de période π.

b) $f(x)=\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ pour $T=6\pi$

$$f(x+6\pi)=\cos\left(\frac{x+6\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{6\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{x}{3}+2\pi\right)=\cos\left(\frac{x}{3}\right)=f(x)$$

Donc f est une fonction périodique de période 6π.

EQUATIONS, INEQUATIONS, SYSTEMES LINEAIRES



Astronome et Mathématicien, **Abu Djafar Muhammad Ibn Musa AL KHWARIZMI** est né à Khwarizem (Ouzbékistan) en 780. Il est un des disciples du calife al Mamum dans la ***Maison de la Sagesse (Bayt al Hikma)*** à Bagdad, une sorte d'école regroupant savants et philosophes.
Leurs tâches consistent à traduire des manuscrits scientifiques grecs et indiens pour étudier la numération, l'algèbre, la géométrie ou l'astronomie.
Son ouvrage **Kitâb al-jabr wa al-muqâbala**, « Le livre du rajout et de l'équilibre » qui sera traduit en latin au XIIème siècle sous le titre ***d'Algebra*** présente sa methode de résolution des équations (muadala).
Elle consiste en :
- **al jabr** (le rebouterment, 4x - 3 = 5 devient 4x = 5 + 3), le mot est devenu "**algèbre**" aujourd'hui.

Dans l'équation, un terme négatif est accepté mais al Khwarizmi s'attache à s'en débarrasser au plus vite. Pour cela, il ajoute son opposé des deux côtés de l'équation.
- **al muqabala** (la réduction, 4x = 9 + 3x devient x = 9)

Les termes semblables sont réduits.
- **al hatt** (2x = 4 devient x = 2,

Division de chaque terme par un même nombre.

AL KHWARIZMI contribuera à nous transmettre le système décimal provenant de l'Inde qu'il expose dans son traité de mathématiques datant de 830, "Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens". On y trouve les principes des opérations, y compris multiplications et divisions, la règle de trois (appelée aujourd'hui "quatrième proportionnelle"), ainsi que la méthode d'extraction de racines carrées.
Il étudie également des propriétés sur les figures usuelles comme le cercle et travaille sur les volumes de solides tels que la sphère, le cône ou la pyramide.
Il établit des tables de sinus et de tangentes. Il observe et calcule les positions du soleil, de la lune et des planètes.
AL KHWARIZMI laisse une empreinte profonde dans les mathématiques enseignées au collège au niveau des calculs littéraux (développements, factorisations, résolutions d'équations, ...) !!!
Notons enfin que le mot « ***algorithme*** » vient d'une déformation du nom du mathématicien perse.
(Un algorithme est une succession de manipulations sur les nombres qui s'exécutent toujours de la même façon).

FICHE DE COURS

ETUDE DES POLYNOMES DU SECOND DEGRE

1. Notion de discriminant

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

On appelle discriminant de P (x) le nombre réel noté Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. Recherche de racines

Signe de Δ	Nombre de racines	Calcul des racines
$\Delta < 0$	Pas de racine	
$\Delta = 0$	Une racine double	$x_0 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta > 0$	2 racines distinctes	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

3. Factorisation au moyen du discriminant

Signe de Δ	Racines	Factorisation
$\Delta < 0$	Pas de racine	Pas de factorisation
$\Delta = 0$	x_0	$P(x) = a(x - x_0)^2$
$\Delta > 0$	x_1 et x_2	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si P admet deux racines x1 et x2, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

4. Etude du signe du polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$

• $\Delta < 0$: P(x) conserve le signe de a sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
P (x)	Signe de a	

• $\Delta = 0$: P(x) conserve le signe de a sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
P (x)	Signe de a	0	Signe de a

• $\Delta > 0$: P(x) conserve le signe de a à l'extérieur de ses racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
P (x)	Signe de a	0 Signe de (-a)	0	Signe de a

EQUATIONS BICARREES

EXERCICE 6

Résoudre les équations suivantes et factoriser le polynôme figurant au premier membre de l'équation.

a. $x \in \mathbb{R}$: $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$ b. $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ c. $x \in \mathbb{R}$, $4x^4 + 20x^2 + 21 = 0$

EXERCICE 7

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + X - 6 = 0$

b) En déduire la résolution des équations : $(E_1) : x^4 + x^2 - 6 = 0$; $(E_2) : x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

EQUATIONS ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES

EXERCICE 8

Résoudre les équations suivantes :

$a.\ x \in \mathbb{R},\ \sqrt{2x-3} = x+4$; $c.\ x \in \mathbb{R},\ \sqrt{2x^2+5x+9} = 0$

$b.\ x \in \mathbb{R},\ \sqrt{-2x^2+3x+5} = x$; $d.\ x \in \mathbb{R},\ \sqrt{3-x^2} = x^2 - 1$

EXERCICE 9

Résoudre les inéquations suivantes :

$a.\ x \in \mathbb{R},\ \sqrt{3x+1} \leq 4-x$; $c.\ x \in \mathbb{R},\ \sqrt{2x-1} - x \geq -3$

$b.\ x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2-9} < x-9$; $d.\ x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+x+1} > 2x-5$

EQUATIONS AVEC PARAMETRE

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 + 2x^2 + m = 0$ (dépendant du paramètre m)

EXERCICE11

Déterminer la valeur du paramètre m, pour que les équations suivantes aient deux solutions de signe contraires.

1. $(2m - 5)\, x^2 + m\, x + 7 = 0$ 2. $(m - 5)\, x^2 - (m + 2)\, x + m - 1 = 0$

EXERCICE 12

$E_m(x) : (m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - x = 0$

1°) résoudre l'équation pour m=-1 :

2°) m≠-1. Déterminer les valeurs pour lesquelles

a) l'équation a deux solutions de signes contraires

b) l'équation a deux solutions distinctes positives

EXERCICE 13

Soit le polynôme $P(x)=x^2-mx+1$ où m est un paramètre réel.

a) Détermine les valeurs de m pour lesquelles P n'a aucune racine.

b) Démontre que si P a deux racines distinctes, alors elles sont de même signe

c) Détermine les valeurs de m pour lesquelles P a deux racines distinctes négatives

SYSTEMES LINEAIRES

EXERCICE 14

Résoudre les systèmes suivants :

$$a.\ \begin{cases} 2x-3y+5z=0 \\ 3x-5y+2z=1 \\ 2x-5y+3z=2 \end{cases} \quad ; \quad b.\ \begin{cases} 7x \quad\quad\quad =14 \\ 3x-5y \quad\quad =1 \\ 7x-17y+3z=1 \end{cases}$$

$$c.\ \begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases} \quad ; \quad d\ \begin{cases} x-2y=\sqrt{2} \\ y-2z=\sqrt{2} \\ z-2x=\sqrt{2} \end{cases}$$

EXERCICE 15

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=135 \\ 3x+2y+4z=145 \\ 4x+2y+3z=160 \end{cases}$$

2. Une Société achète trois terrains. Les membres de la société sont reparties en catégories A, B et C. La cotisation de chaque membre est fonction de sa catégorie et du prix du terrain selon le tableau suivant :

	A	B	C
Terrain1 : 13 500 000	200 000	300 000	400 000
Terrain2 :14 500 000	300 000	200 000	400 000
Terrain3 :16 000 000	400 000	200 000	300 000

Trouve le nombre de membres de la société.

EXERCICES DE SYNTHESE

EXERCICE 16

On considère $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

a. Justifier que -1 est un zéro de P(x)

b. Justifier qu'il existe Q(x) tel que : $P(x) = (x+1)Q(x)$

c. Déterminer Q(x)

d. Déterminer les zéros de Q(x) et en déduire les solutions de l'équation : $P(x) = 0$

EXERCICE 17

Soient la parabole (Γ) d'équation $y = x^2 - 4x + 1$ et la droite (D) d'équation $y = x - 3$.

a) Trace (Γ) et (D) dans un même repère orthonormé (O, I, J).

b) Resous graphiquement :

1°) $x^2 - 4x + 1 < 0$.

2°) $x^2 - 4x + 1 = x - 3$.

EXERCICE 18

a) Résous le système (S) par la méthode du pivot de GAUSS :

$$(S): \begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

b) Résous le système suivant en utilisant des changements d'inconnues :

$$(S_1): \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

Une ménagère se rend au marché et achète des bananes, des mangues et des ananas dont les prix à l'unité sont respectivement 25F ; 60F et 80F.

Elle achète un total de 12 fruits pour une somme de 640F.

Déterminer le nombre de fruits de chaque variété.

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes.

a. $\sqrt{2-x^2}-\sqrt{x^2-1}=0$; *b.* $\sqrt{x^2-9+x}=-9$

c. $\sqrt{2x+3}>\sqrt{x-1}$; *d.* $\sqrt{2\left(x^2-2x+2\right)}<\sqrt{x^2+1}$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

a. $x^2-6x-5=0$; *b.* $2x(x+3)+1=0$

c. $\frac{x}{x-1}=\frac{3x-4}{(x-1)(x-2)}$; *d.* $\frac{x}{x-4}\geq\frac{1}{x+5}$

e. $4x^2-5x+3\geq 0$; *f)* $x^2-3x-4<0$; *g)* $x^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)x+2\sqrt{3}<0$

EXERCICE 4

Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} x-2y+z=-5 \\ -x+y+2z=-4 \\ 2x-y-z=5 \end{cases}$; *b.* $\begin{cases} \frac{4}{x}-\frac{5}{y}=3 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=1 \end{cases}$

EXERCICE 5

On considère le polynôme P (x) définie par : $P(x) = (x^2 - 2x)(2x^2 - 9x - 5)$

1. Vérifier que 5 est une racine de P(x).
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{\left(x^2-2x\right)\left(2x^2-9x-5\right)}{x^2-4}<0$

EXERCICE 6

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+3$

Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthogonal (O; I; J)

1. Déterminer les coordonnées du sommet A de la parabole.
2. Construire (C).
3. Résoudre graphiquement : $f(x)=0$ et $f(x)>4$.
4. Retrouver par calcul, les résultats de la question 3.

EXERCICE 7

Madame TAKIA a payé son vélo à 52500F après deux remises successives de x% sur un prix initial de 60.000 F.

Déterminer x.

EXERCICE 8

Déterminer la valeur du paramètre m, pour que les équations suivantes aient deux solutions strictement positives.

a. $2x^2 + m - x + 2 = 0$

b. $(m-3)x^2 + (2m-1)x - 2 + 4m = 0$

EXERCICE 9

Soit m un nombre réel. On considère l'équation d'inconnue x :

$(E_m) : (1 - m)x^2 - 2mx - (m + 2) = 0$

1. Résoudre l'équation pour $m = 1$
2. Résoudre l'équation pour $m \neq 1$

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

a. $2x^4 - 51x^2 + 15 = 0$

b. $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$

c. $x^4 + x^2 - 12 = 0$

d. $4x^4 - 5x^2 + 1 < 0$

CORRECTION DES EXERCICES

EQUATIONS ET INEQUATIONS DU SECOND DEGRE

EXERCICE 1

1. Utilisons le discriminant pour résoudre les équations.

a) $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-1) \times 3 = 16$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{-2} = 3$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{-2} = -1$

$S_{\mathbb{R}} = \{-1;3\}$

b) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

$\Delta = 0$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. $S_{\mathbb{R}} = \{\sqrt{3}\}$

c) $x \in \mathbb{R}$ $x^2 + 3x + 4 = 0$

$\Delta = -7 < 0$ pas de solution $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$

d) $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = 1$ $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$ $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{2};1\right\}$

2. Résolvons les équations sans utiliser le discriminant :

a) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 9 = 0$ équivaut à $x^2 - 3^2 = 0$. $X^2 = 3^2$ équivaut à $x = 3$ ou $x = -3$. $S_{\mathbb{R}} = \{-3;3\}$.

b) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 = 0$ équivaut à $x^2 = -3$. Le carré d'un réel est toujours positif donc $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

c) $x \in \mathbb{R}$, $(x-3)^2 - 4 = 0$ équivaut à $(x-3)^2 - 2^2 = 0$. C'est-à-dire $(x-5)(x-2) = 0$. Ce qui donne $x = 5$ ou $x = 2$. $S_{\mathbb{R}} = \{2;5\}$

d) $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 5x = 0$ équivaut à $x(3x+5) = 0$. $x(3x+5) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = -\frac{5}{3}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{0; -\frac{5}{3}\right\}$

EXERCICE 2

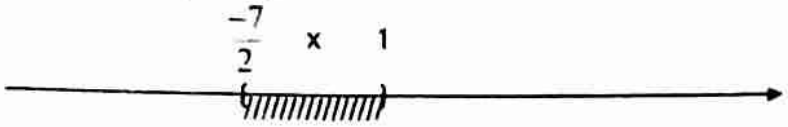
a) $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 5x - 3 \leq 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49$

$x_1 = \frac{-7}{2}$ et $x_2 = 1$

X	$-\infty$	$\frac{-7}{2}$	1	$+\infty$
$2x^2 + 5x - 3$	+	0	- 0	+

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{-7}{2}; 1\right]$



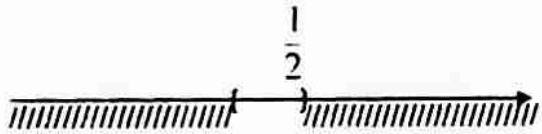
b) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 4 \geq 0$

$\Delta = 4 - 16 = -12$. $-12 < 0$ $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$



c) $x \in \mathbb{R}$, $4x^2 - 4x + 1 > 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0$ $x = \frac{1}{2}$ $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$



d) $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x - 5 < 0$

$\Delta = 16 + 20 = 36$ $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$ $S_{\mathbb{R}} =]-1;5[$



EXERCICE 3

a) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{11-x}{x^2-4}$

$x \in V$ si et seulement si $x - 2 \neq 0$; $x + 2 \neq 0$ et $x^2 - 4 \neq 0$

$x \neq +2$ $x \neq -2$ $V = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$

$x \in V$, $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{11-x}{x^2-4}$ *donc* $\frac{(x+2)+x(x-2)}{x^2-4} = \frac{11-x}{x^2-4}$

alors $x^2 - x + 2 = 11 - x$ *et on a* $x^2 = 9$ *donc* $x = 3$ ou $x = -3$ $S_{\mathbb{R}} = \{-3;3\}$

b) $x \in \mathbb{R}$, $x + \frac{2}{x-3} = 0$

$x \in V$ si et seulement si x-3 ≠ 0 *équivaut à* x ≠ 3 ; donc V = $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$x \in \mathbb{R}$, $x + \frac{2}{x-3} = 0$ *équivaut à* $\frac{x(x-3)+2}{x-3} = 0$ *équivaut à* $\frac{x^2-3x+2}{x-3} = 0$

$C'est-à-dire\ x^2-3x+2=0\ donc\ (x-1)(x-2)=0$

$S_{\mathbb{R}} = \{1;2\}$

c) $x \in \mathbb{R}$, $\frac{2x^2-7x+5}{x^2-2x} \geq 0$

$x \in V$ si et seulement si $x^2 - 2x \neq 0$ *équivaut à* x ≠ 0 et x ≠ 2 : donc V= $\mathbb{R} \setminus \{0;2\}$

Factorisons $2x^2 - 7x + 5$ $\Delta = 9$. on a : $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{5}{2}$ d'où $2x^2 - 7x + 5 = 2(x-1)(x - \frac{5}{2})$.

$\frac{2x^2-7x+5}{x(x-2)} \geq 0$ *donc* $\frac{2(x-1)(x-\frac{5}{2})}{x(x-2)} \geq 0$

Tableau de signe de $P(x) = \frac{2(x-1)(x-\frac{5}{2})}{x(x-2)}$

x	$-\infty$	0	1	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
x-1	-	-	0 +	+	+	
$x-\frac{5}{2}$	-	-	-	-	0 +	
x	-	0 +	+	+	+	
x-2	-	-	-	0 +	+	
P(x)	+	‖ -	0 +	‖ -	0 +	

D'où $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 0] \cup [1,2[\cup [\frac{5}{2}, +\infty[$

b) $x \in \mathbb{R}$,

$x \in V$ si et seulement si x ≠ 0 et x ≠ 1 V = $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

$x \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x+2}{x(x-1)} < 0$

Factorisons $-x^2 + 2x + 2$ $\Delta = -4 < 0$ donc $-x^2 + 2x + 2$ n'est pas factorisable.

Tableau de signe de $P(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x(x-1)}$

X	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x^2+2x-2$		-		-		-	
X		-	0	+		+	
x – 1		-		-	0	+	
P(x)		-	‖	+	‖	-	

Donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

SOMME ET PRODUIT DE RACINES

EXERCICE 4

Calculons b et c.

x_1 et x_2 sont les zéros du polynôme de degré deux K(x). On a : $x_1+x_2 = \frac{-b}{2}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{2}$. Ce qui donne $-1 = \frac{-b}{2}$ et $4 = \frac{c}{2}$. C'est-à-dire b=2 et c=8.

Dans ce cas $K(x)=2x^2+2x+8$.

EXERCICE 5

1) On a : S = -5 et P = -14

Les deux nombres x, y sont solution de l'equation $X^2 - SX + P = 0$

$X^2 + 5X - 14 = 0$

$\Delta = 81$

$x_1 = -7$ et $x_2 = 2$. Les deux nombres réels sont –7 et 2.

2) Soit x l'âge de Grâce et y l'âge de Diane.

on a $\begin{cases} x+y=24 \\ (x+5)(y-3)=168 \\ x+5>y-3 \end{cases}$ *equivaut a* $\begin{cases} y=24-x & (1) \\ (x+5)(21-x)=168 & (2) \\ x+5>y-3 & (3) \end{cases}$

(2) *donne* $(x+5)(21-x) = 168$ *autrement dit* $x^2 - 16x + 63 = 0$

$\Delta = 4$ *donc* $x_1 = 9$ et $x_2 = 7$

(1) *donc* $y = 24 - x$

Pour x = 9, on a : y = 15

Pour x = 7, on a : y = 17

Si x = 9 et y = 15, on a : x + 5 = 14 et y – 3 = 12 d'où x + 5 > y – 3

Et si x = 7 et y = 17, on a : x + 5 = 12 et y – 3 = 14 d'où x + 5 < y – 3

Donc d'après (3) : x = 9 et y = 15

Par conséquent, l'âge de Grâce est 9 et l'âge de Diane est 15.

EQUATION BICARREE

EXERCICE 6

a) $x \in \mathbb{R}$, $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$

Posons: $X = x^2$ d'où $X > 0$ l'équation devient $X^2 - 3X - 28 = 0$ $\Delta = 9 + 112 = 121$

$X_1 = -4 < 0$ et $X_2 = 7 > 0$; on a : $x^2 = 7$ *donc* $x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$ $S_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{7};\sqrt{7}\}$

Factorisation : $x^4 - 3x^2 - 28 = (x^2 + 4)(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$

b) $x \in \mathbb{R}$ $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Posons: $x^2 = X > 0$ l'équation devient $X^2 - 5X + 6 = 0$; $\Delta = 1$: $X_1 = 2 > 0$ et $X_2 = 3 > 0$

On a : $x^2 = 2$ *donc* $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ et $x^2 = 3$ *donc* $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$S_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3}\}$

Factorisation : $x^4 - 5x^2 + 6 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

c) $4x^4 + 20x^2 + 21 = 0$

Posons : $x^2 = X > 0$ d'où $X^2 + 20X + 21 = 0$: $\Delta = 64$; $X_1 = \frac{-7}{2} < 0$ et $X_2 = \frac{-3}{2} < 0$

L'équation n'a pas de solution : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$

Factorisation : $4x^4 + 20x^2 + 21 = 4(x^2 + \frac{7}{2})(x^2 + \frac{3}{2})$

EXERCICE 7

a) **Résolvons dans IR l'équation $X^2+X-6=0$.**

Le polynôme $P(X)=X^2+X-6$ est un polynôme de degré deux. Le discriminant de P est $\Delta = 1-4\times(-6)=1+24=25$. Le polynôme P a deux racines distinctes : $X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{2\times 1} = 2$ et

$X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{2} = -3$

$S_{IR} = \{-3;2\}$.

b) **Résolvons l'équation (E_1) :** $x^4 + x^2 - 6 = 0$

Posons $X=x^2$.

L'équation (E_1) devient $X^2+X-6=0$.

D'après la question a), on a $X=-3$ ou $X=2$. Comme X est un carré, alors X ne peut être négatif. Donc (E_1) équivaut à $X=2$. Ce qui signifie $x^2=2$. c'est-à-dire $x = \sqrt{2}$ *ou* $x = -\sqrt{2}$.

$S_{IR} = \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

Résolvons l'équation(E_2) : $x + \sqrt{x} - 6 = 0$

Le domaine de validité de (E_2) est $[0;+\infty[$ pour que $\sqrt{x}$ existe.

Pour $x \in [0;+\infty[$, posons $X=\sqrt{x}$.

L'équation (E_2) devient $X^2 - X - 6 = 0$.

D'après a) $X = -3$ ou $X = 2$. La racine carrée est toujours positive donc $X = 2$.

Ce qui donne $\sqrt{x} = 2$ c'est-à-dire $x = 4$.

$S = \{4\}$

EQUATION ET INEQUATIONS IRRATIONNELLES

EXERCICE 8

a) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x-3} = x+4$

Ensemble de validité V : $x \in V$ si et seulement si $2x - 3 \geq 0$. $V = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

$$x \in \mathbb{R},\ \sqrt{2x-3} = x+4 \Leftrightarrow x \in V \text{ et } \begin{cases} 2x-3 = (x+4)^2 \\ x+4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in V \text{ et } \begin{cases} x^2+6x-19 = 0 \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \Delta = -40 \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \varnothing$$

b) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{-2x^2+3x+5} = x$

$x \in V$ si et seulement si $-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$

$-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$ $\quad \Delta = 49$; $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{5}{2}$; d'où $V = \left[-1; \frac{5}{2}\right]$

$$x \in \mathbb{R},\ \sqrt{-2x^2+3x+5} = x \text{ équivaut à } x \in V \text{ et } \begin{cases} -2x^2+3x+5 = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } x \in V \text{ et } \begin{cases} -3x^2+3x+5 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}. \quad \Delta = 69;\ x_1 = \frac{3+\sqrt{69}}{6} \text{ et } x_2 = \frac{3-\sqrt{69}}{6}$$

donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3+\sqrt{69}}{6}\right\}$

c) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2x^2+5x+9} = 0$ (E_1)

$x \in V$ si et seulement si $2x^2 + 3x + 5 \geq 0$ (E_1)

$2x^2 + 3x + 5 \geq 0$ $\quad \Delta = -47$ $\quad V = \mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R},\ \sqrt{2x^2+5x+9} = 0 \Leftrightarrow 2x^2+5x+9 = 0 \Rightarrow \Delta = -47 \text{ donc } S_{\mathbb{R}} = \varnothing$$

d) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3-x^2} = x^2 - 1$

$x \in V$ si et seulement si $3 - x^2 \geq 0$. $V = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$

$$x \in \mathbb{R},\ \sqrt{3-x^2} = x^2-1 \Leftrightarrow x \in V \text{ et } \begin{cases} 3-x^2 = (x^2-1)^2 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

- $x^2 - 1 \geq 0$ équivaut à $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$
- $\sqrt{3-x^2} = x^2 - 1 \Leftrightarrow 3 - x^2 = (x^2-1)^2$ équivaut à $x^4 - x^2 - 2 = 0$

Posons $X = x^2 > 0$

L'équation devient $X^2 - X - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1+8 = 9$ $X_1 = -1 < 0$ et $X_2 = 2 > 0$

$x^2 = 2$ *donc* $x_1 = -\sqrt{2}$ ou $x_2 = \sqrt{2}$; $x_1 \in [-\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}] \cap]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$ et

$x_2 \in [-\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}] \cap]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

EXERCICE 9

a) $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{3x+1} \le 4-x$ (I)

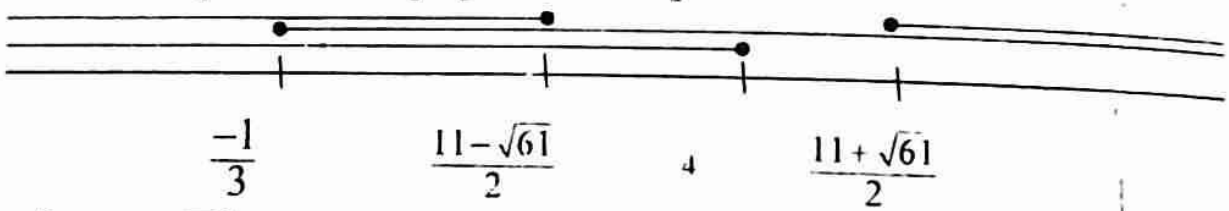
(I) équivaut à $\begin{cases} 3x+1 \ge 0 & (I1) \\ 4-x \ge 0 & (I2) \\ 3x+1 \le (4-x)^2 & (I3) \end{cases}$

(I1) équivaut à $x \ge \dfrac{-1}{3}$

(I2) équivaut à $x \le 4$.

(I3) équivaut à $3x+1 \le 16-8x+x^2$ c est àdire $-x^2+11x-15 \le 0$

$\Delta = 61$, donc $x \in \left]-\infty ; \dfrac{11-\sqrt{61}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{11+\sqrt{61}}{2} ; +\infty\right[$



$S_a = \left[-\dfrac{1}{3} ; \dfrac{11-\sqrt{61}}{2}\right]$

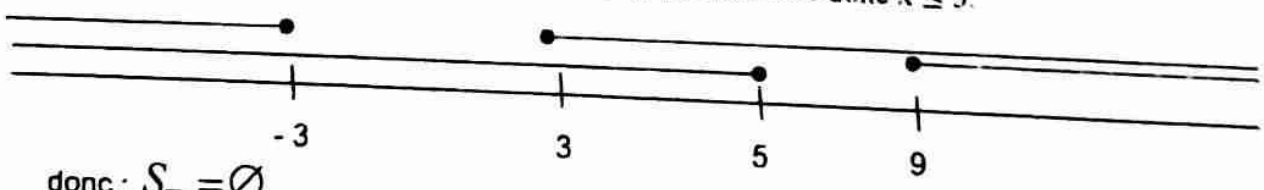
b) $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{x^2-9} < x-9$

(I) équivaut à $\begin{cases} x^2-9 \ge 0 & (I1) \\ x-9 \ge 0 & (I2) \\ x^2-9 \le (x-9)^2 & (I3) \end{cases}$

(I1) équivaut à $x \in]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$

(I2) équivaut à $x \ge 9$.

(I3) équivaut à $x^2-9 \le x^2-18x+81$, c est àdire $18x \le 90$ donc $x \le 5$.



donc : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$

c) $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{2x-1} - x \geq -3$ ce qui équivaut à $\sqrt{2x-1} \geq x-3$

$x \in V$ si et seulement si $2x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire que $x \geq \frac{1}{2}$ et $V = [\frac{1}{2}; +\infty[$

$x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{2x-1} \geq x-3$

Si $x - 3 \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 3$, alors tout nombre négatif est plus petit que tout nombre positif. Donc les solutions sont les éléments de $[\frac{1}{2};3]$.

Si $x - 3 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 3$, alors l'inéquation équivaut à $2x - 1 \geq (x - 3)^2$ ce qui donne $-x^2 + 8x - 10 \geq 0$

$\Delta = 64 - 40 = 24$; et $x \in [4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6}]$ donc les solutions sont éléments de $[3; 4 + \sqrt{6}]$

Finalement $S_{\mathbb{R}} = [\frac{1}{2};3] \cup [3; 4 + \sqrt{6}] = [\frac{1}{2}; 4 + \sqrt{6}]$.

d) $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{x^2 + x + 1} > 2x - 5$

$x \in V$ si et seulement si $x^2 + x + 1 \geq 0$, $\Delta = -3$ donc $V = \mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{x^2 + x + 1} > 2x - 5$

Si $2x-5 \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq \frac{5}{2}$ alors tout nombre négatif est plus petit que tout nombre positif. Donc les solutions sont les éléments de $]-\infty; \frac{5}{2}]$.

Si $2x - 5 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq \frac{5}{2}$, alors l'inéquation équivaut à $x^2 + x + 1 > (2x - 5)^2$ ce qui donne $-3x^2 + 21x - 24 > 0$

$\Delta = 153$; et $x \in]\frac{7-\sqrt{17}}{2}; \frac{7+\sqrt{17}}{2}[$ donc les solutions sont éléments de $[\frac{5}{2}; \frac{7+\sqrt{17}}{2}[$.

Finalement $S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \frac{5}{2}] \cup [\frac{5}{2}; \frac{7+\sqrt{17}}{2}[=]-\infty; \frac{7+\sqrt{17}}{2}[$.

EQUATIONS AVEC PARAMETRE

EXERCICE 10

$x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 2x^2 + m = 0$; posons $X = x^2$ on a $X^2 + 2X + m = 0$; $\Delta = 4(1+m)$

- Si $\Delta < 0$ on a $m < -1$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$
- Si $\Delta = 0$ on a $m = -1$ et $X = -1 < 0$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$
- Si $\Delta > 0$ on a $m > -1$ et si $-1 < m < 0$ alors $X_1 = -1 - \sqrt{1+m} < 0$ et

$X_2 = -1 + \sqrt{1+m} < 0$ donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

si $m = 0$ alors $X_1 = -2$ et $X_2 = 0$. $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$

si $m > 0$ alors $X_1 = -1 - \sqrt{1+m} < 0$ et $X_2 = -1 + \sqrt{1+m} > 0$

D'ou $x^2 = -1 + \sqrt{1+m}$

Donc $x_1 = \sqrt{-1+\sqrt{1+m}}$ ou $x_2 = -\sqrt{-1+\sqrt{1+m}}$

Par conséquent : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\sqrt{-1+\sqrt{1+m}}\ ; \sqrt{-1+\sqrt{1+m}}\right\}$

EXERCICE 11

1) $(2m-5)x^2 + mx + 7 = 0$ (E1)

(E1) admet deux solutions de signes contraires si $\Delta > 0$ et les solutions x_1 et x_2 sont tels que $x_1 x_2 = \dfrac{7}{2m-5}$. Donc x_1 et x_2 sont de signes contraires lorsque $\dfrac{7}{2m-5} < 0$

$\Delta = m^2 - 4(2m-5) \times 7 = m^2 - 56m + 140$

On en déduit que : $\Delta_m = 4\sqrt{161}$ d'ou $m_1 = 28 - 2\sqrt{161}$ et $m_2 = 28 + 2\sqrt{161}$

Si $m \in \left]28 - 2\sqrt{161}\ ; 28 + 2\sqrt{161}\right[$ alors $\Delta < 0$.

Si $m \in \left\{28 - 2\sqrt{161}\ ; 28 + 2\sqrt{161}\right\}$ alors $\Delta = 0$.

Si $m \in \left]-\infty\ ; 28 - 2\sqrt{161}\right[\cup \left]28 + 2\sqrt{161}\ ; +\infty\right[$ alors $\Delta > 0$

L'équation (E_1) admet 2 solutions de signes contraires lorsque $\dfrac{7}{2m-5} < 0$.

- Pour $m \in \left]\dfrac{5}{2}\ ; 28 - 2\sqrt{161}\right[\cup \left]28 + 2\sqrt{161}\ ; +\infty\right[$, 2m-5> 0 et $\dfrac{7}{2m-5} > 0$.
- Pour $m \in \left]-\infty\ ; \dfrac{5}{2}\right[$ 2m-5< 0 et $\dfrac{7}{2m-5} < 0$.

En définitive, (E1) admet deux solutions de signes contraires lorsque $m \in \left]-\infty\ ; \dfrac{5}{2}\right[$.

2) $(m-5)x^2+(m+2)x+m-1=0$ (E_2)

(E_2) admet deux solutions de signes contraires si $\Delta > 0$ et les solutions x_1 et x_2 sont tels que $x_1x_2=\dfrac{m-1}{m-5}$. Donc x_1 et x_2 sont de signes contraires lorsque $\dfrac{m-1}{m-5}<0$

$\Delta=(m+2)^2-4(m-5)\times(m-1)=-3m^2+28m-16$

On en déduit que : $\Delta_m=2^4\times 37$ d'où $m_1=\dfrac{14-2\sqrt{37}}{3}$ et $m_2=\dfrac{14+2\sqrt{37}}{3}$

Si $m\in\left]-\infty;\dfrac{14-2\sqrt{37}}{3}\right[\cup\left]\dfrac{14+2\sqrt{37}}{3};+\infty\right[$ alors $\Delta<0$.

Si $m\in\left\{\dfrac{14-2\sqrt{37}}{3};\dfrac{14+2\sqrt{37}}{3}\right\}$ alors $\Delta=0$

Si $m\in\left]\dfrac{14-2\sqrt{37}}{3};\dfrac{14+2\sqrt{37}}{3}\right[$ alors $\Delta>0$ donc l'équation admet 2 solutions

Etudions le signe de $\dfrac{m-1}{m-5}$

m	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$m-1$		+	0	-		+	
$m-5$					0	+	

L'équation (E_2) admet deux solutions de signes contraires lorsque

$m\in\left]\dfrac{14-2\sqrt{37}}{3};\dfrac{14+2\sqrt{37}}{3}\right[\cap]1;5[=]1;5[$.

En conclusion, l'équation (E_2) admet deux solutions de signes contraires lorsque $m\in]1;5[$.

EXERCICE 12

$E_m(x):(m+1)x^2-(m+3)x+3-m=0$

1°) **Pour m=-1**, l'équation devient $-2x+3-(-1)=0$. C'est-à-dire $-2x+4=0$. Ce qui donne $x=2$.

$S_{IR}=\{2\}$.

2°) a) **Déterminons les valeurs de m pour lesquelles l'équation a deux solutions de signes contraires.**

Le polynôme de degré 2. $(m+1)x^2-(m+3)x+3-m$, a deux solutions distinctes lorsque son discriminant est strictement positif.

Calculons le discriminant $\Delta = (-(m+3))^2-4(m+1)(3-m) = (m+3)^2-4(3m-m^2+3-m)$

$\Delta = m^2+6m+9-4(2m-m^2+3) = m^2+4m^2+6m-8m+9-12= 5m^2-2m-3$.

Etudions le signe de Δ. Pour cela, il faut calculer le discriminant du polynôme $5m^2-2m-3$.

Soit Δ_1 le discriminant du polynôme $5m^2-2m-3$. $\Delta_1 = (-2)^2-4\times(-3)\times 5 = 4+60 = 64$.

Les zéro sont donc $m_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{64}}{2\times 5} = \frac{2+8}{10} = 1$ et $m_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{64}}{10} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$.

Donc pour $m \in]-\infty ; -\frac{3}{5}[\cup]1 ; +\infty[$ Δ a même signe que 5. C'est-à-dire Δ est positif.

Finalement, $E_m(x):(m+1)x^2-(m+3)x+3-m=0$, a deux solutions distinctes lorsque $m \in]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]1 ; +\infty[$.

Pour que les solutions soient de signes contraires, il suffit que le produit des zéros du polynôme $(m+1)x^2-(m+3)x+3-m$ soit négatif. Ce qui revient à $\frac{3-m}{m+1} < 0$.

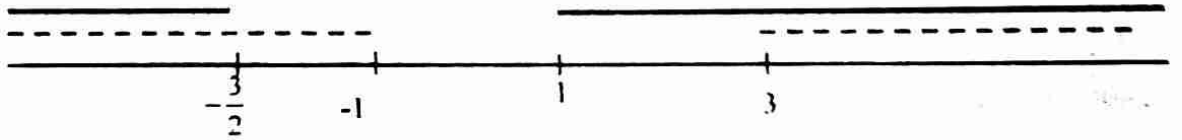
Etudions le signe de la fraction rationnelle $\frac{3-m}{m+1}$.

m	$-\infty$		-1		3	$+\infty$
3-m		+		+	0	-
m+1		-	0	+		+
$\frac{3-m}{m+1}$		-	‖	+	0	-

D'après ce tableau de signe, $\frac{3-m}{m+1} < 0$ équivaut à $m \in]-\infty ;-1[\cup]3 ; +\infty[$.

Les zéros sont de signes contraires lorsque $m \in]-\infty ;-1[\cup]3 ;+\infty[$ et $m \in]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]1; +\infty[$

c'est-à-dire $(]-\infty ;-1[\cup]3 ;+\infty[)\cap(]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]1; +\infty[) =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]3 ;+\infty[$.



Conclusion : L'équation $E_m(x):(m+1)x^2-(m+3)x+3-m=0$ a deux solutions de signes contraires lorsque $m \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]3 ;+\infty[$.

b) Déterminons les valeurs de m pour lesquelles l'équation a deux solutions distinctes positives.

D'après a) l'équation a deux solutions distinctes lorsque $m \in]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]1 ; +\infty[$.

En plus ces solutions sont de même signe lorsque $m \in]-\frac{3}{2} ; 1[\cup]1 ; 3[$.

Ce qui revient à dire que $E_m(x)$ a deux solutions de même signe lorsque $m \in]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]1 ; +\infty[$ et $m \in]-\frac{3}{2} ; 1[\cup]1 ; 3[$, c'est-à-dire $m \in]1 ; 3[$.

Ces solutions sont positives lorsqu'en plus leur somme est positive.

Ce qui signifie que $\frac{-(-(m+3))}{m+1}>0$, c'est-à-dire $\frac{m+3}{m+1}>0$.

m	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
m+3	+	+	-	
m+1	-	+	+	
$\frac{m+3}{m+1}$	-	+	-	

Les solutions de $E_m(x)$ sont positives pour $m \in]-1\ ;\ 3]$.

Finalement $E_m(x)$ a deux solutions distinctes positives lorsque $m \in]1;\ 3] \cap]-1;\ 3] =]1;\ 3[$.

EXERCICE 13

$P(x) = x^2 - mx + 1$ où m est un paramètre réel.

a) Déterminons les valeurs de m pour lesquelles P n'a aucune racine.

Le polynôme de degré 2 P n'a aucune racine lorsque son discriminant est négatif.

Calculons le discriminant Δ de P.

$\Delta=(-m)^2-4\times 1\times 1 = m^2-4$.

Les zéros du discrinants Δ sont -2 et 2. Donc Δ est négatif lorsque $m \in]-2\ ;2[$.

b) Démontrons que si P a deux racines, alors elles sont de même signe.

Si x_1 et x_2 sont les deux racines de P, on a $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Ce qui nous donne $x_1x_2=\frac{1}{1}=1$.

Le produit x_1x_2 est positif, donc les deux racines sont de même signe.

c) Déterminons les valeurs de m pour lesquelles P a deux racines distinctes négatives.

P a deux racines distinctes si et seulement si $m \in]-\infty\ ;-2[\cup]2\ ;+\infty[$.

D'après b) si P a deux racines distinctes, alors elles sont de même signe.

Donc les racines de P sont négatives si leur somme est négative. Ce qui revient à $\frac{-b}{a}<0$.

Ce qui signifie $\frac{-(-m)}{1}<0$, c'est-à-dire $m<0$

P a deux racines négatives lorsque m est négatif et $m \in]-\infty\ ;-2[\cup]2\ ;+\infty[$. Donc P admet deux racines négatives lorsque $m \in]-\infty\ ;-2[$.

SYSTEMES LINEAIRES

EXERCICE14

$$a)\ \begin{cases} 2x-3y+5z=0 \\ 3x-5y+2z=1 \\ 2x-5y+3z=2 \end{cases}$$

Déterminons x ; y et z par combinaison

$$\begin{cases} 2x-3y+5z=0 & (L1) \\ 3x-5y+2z=1 & (L2) \\ 2x-5y+3z=2 & (L3) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x-3y+5z=0 & (L1) \\ y+11z=-2 & (L'2)=3(L1)-2(L2) \\ y+z=-1 & (L'3)=L1-L3 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} 2x-3y+5z=0 & (E1) \\ y+11z=-2 & (E'2) \\ 10z=-1 & (E''3=E'2-\dots \end{cases}$$

Donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(\frac{-11}{10}; -9; -\frac{1}{10}\right)\right\}$

b) $\begin{cases} 7x \quad\quad = 14 \\ 3x-5y \quad\quad = 1 \\ 7x-17y+3z=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x \quad\quad = 14 \\ 3x-5y \quad\quad = 1 \\ 7x-17y+3z=1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=\frac{4}{3} \end{cases} \text{ donc } S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(2;1;\frac{4}{3}\right)\right\}$$

c) $\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases}$

Déterminons x ; y et z par substitution

$$\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=-2-2y-3z \\ -y-5z=5 \\ -5y-7z=7 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=-2-2y-3z \\ y=-5-5z \\ z=-1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

Donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(1;0;-1)\}$

d) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{2} \\ y-2z=\sqrt{2} \\ z-2x=\sqrt{2} \end{cases}$

SHOT ON P15
Dual CAMERA

Déterminons x ; y et z par combinaison

$$\begin{cases} 2x-3y+5z=0 & (L1) \\ 3x-5y+2z=1 & (L2) \\ 2x-5y+3z=2 & (L3) \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x-3y+5z=0 & \\ y+11z=-2 & \\ y+z=-1 & \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} 2x-3y+5z=0 & (E1) \\ y+11z=-2 & (E'2) \\ 10z=-1 & (E''3=E'2-\ldots) \end{cases}$$

Donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(\frac{-11}{10}; \ldots; -\frac{1}{10}\right)\right\}$

b) $\begin{cases} 7x \quad\quad = 14 \\ 3x-5y \quad = 1 \\ 7x-17y+3z=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x \quad\quad = 14 \\ 3x-5y \quad = 1 \\ 7x-17y+3z=1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=\frac{4}{3} \end{cases} \text{ donc } S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \left\{\left(2;1;\frac{4}{3}\right)\right\}$$

c) $\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases}$

Déterminons x ; y et z par substitution

$$\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=-2-2y-3z \\ -y-5z=5 \\ -5y-7z=7 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=-2-2y-3z \\ y=-5-5z \\ z=-1 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

Donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \{(1;0;-1)\}$

d) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{2} \\ y-2z=\sqrt{2} \\ z-2x=\sqrt{2} \end{cases}$

Déterminons x, y et z par substitution

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{2} \\ y-2z=\sqrt{2} \\ z-2x=\sqrt{2} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=\sqrt{2}+2y \\ y=\sqrt{2}+2z \\ -7z=7\sqrt{2} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \\ z=-\sqrt{2} \end{cases}$$

Donc $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}=\{(-\sqrt{2}:-\sqrt{2}:-\sqrt{2})\}$

EXERCIE 15

1. Résolvons le système par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S)\begin{cases} 2x+3y+4z=135 & l_1 \\ 3x+2y+4z=145 & l_2 \\ 4x+2y+3z=160 & l_3 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+3y+4z=135 & l_1 \\ 0+5y+4z=115 & l'_2=3l_1-2l_2 \\ 0-4y-5z=-110 & l'_3=l_3-2l_1 \end{cases}$$

$$(S)\text{équivaut à } \begin{cases} 2x+3y+4z=135 & l_1 \\ 0+5y+4z=115 & l'_2 \\ 0-4y-5z=-110 & 4l_2+5l_3 \end{cases} \text{ et on obtient } \begin{cases} 2x+3y+4z=135 \\ 5y+4z=115 \\ -9z=-90 \end{cases}$$

$$(S) \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+3y+40=135 \\ 5y+40=115 \\ z=10 \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} 2x+3y+40=135 \\ y=15 \\ z=10 \end{cases}$$

$$(S) \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+45+40=135 \\ y=15 \\ z=10 \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} x=25 \\ y=15 \\ z=10 \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R}}=\{(25;15;10)\}$

2. Le nombre de membres de la société.

Soit x le nombre de membres de la catégorie A, y le nombre de membres de la catégorie B et z le nombre de membres de la catégorie C. Le tableau de repartition des cotisations nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} 200000x+300000y+400000z=13500000 \\ 300000x+200000y+400000z=14500000 \\ 400000x+200000y+300000z=16000000 \end{cases} \text{ qui équivaut à } \begin{cases} 2x+3y+4z=135 \\ 3x+2y+4z=145 \\ 4x+2y+3z=160 \end{cases}$$

D'après la résolution, on a 25 membres de la catégorie A, 15 membres de la catégorie B et 10 membres de la catégorie C. Soit 50 membres.

EXERCICES DE SYNTHESE

EXERCICE 16

$P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

a) $P(-1) = 0$ donc -1 est un zéro de $P(x)$.

b) -1 est un zéro de $P(x)$ donc $P(x)$ peut s'écrire $(x+1)Q(x)$.

c) Déterminons $Q(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - x - 3 & x + 1 \\ \hline -x^3 - x^2 & x^2 + 2x - 3 \\ \hline 2x^2 - x & \\ -2x^2 - 2x & \\ \hline -3x - 3 & \\ 3x + 3 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Donc $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

d) Déterminons les zéros de $Q(x)$

$Q(x) = x^2 + 2x - 3$ $\Delta = 16$ on a $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$

Les zéros de $Q(x)$ sont -3 et 1

Résolvons $P(x) = 0$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ *équivaut à* $(x+1)(x+3)(x-1) = 0$

équivaut à $x + 1 = 0$ ou $x + 3 = 0$ ou $x - 1 = 0$

c'est-à-dire $x = -1$ ou $x = -3$ ou $x = 1$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-3; -1; 1\}$$

EXERCICE 17

Soient la parabole (Γ) d'équation $y = x^2 - 4x + 1$ et la droite (D) d'équation $y = x - 3$.

a) Traçons (Γ) et (D)

Le sommet S de la parabole (Γ) a pour coordonnées $\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ où Δ est le discriminant du polynôme $x^2 - 4x + 1$.

$\Delta = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$. $S\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right) = S\left(\frac{-(-4)}{2\times 1}; \frac{-12}{4\times 1}\right) = S(2; -3)$.

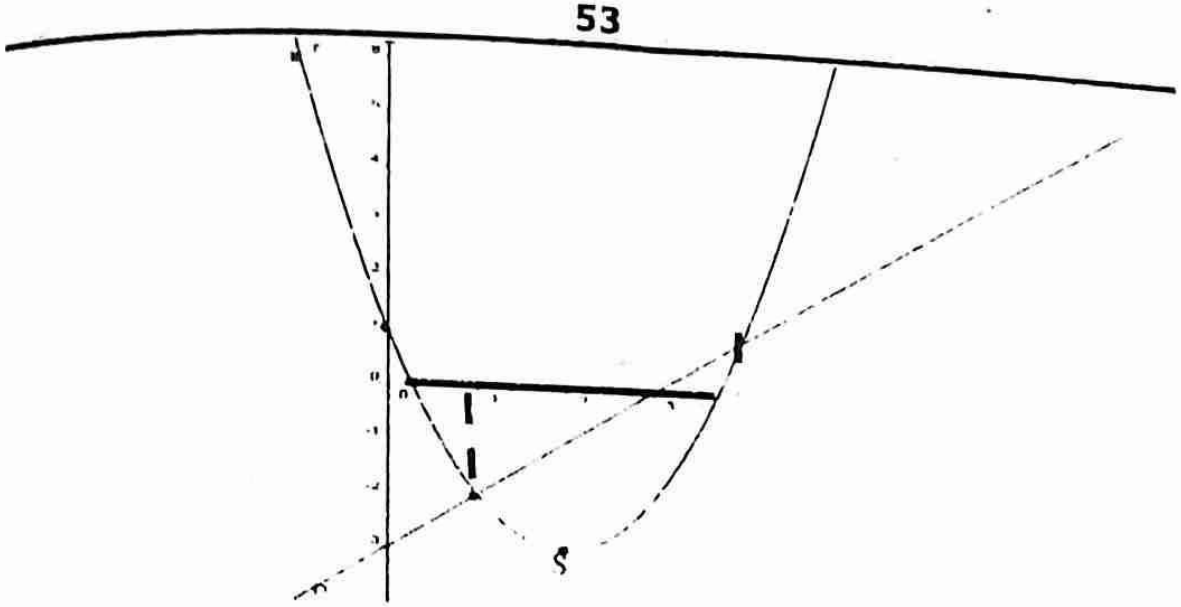
La parabole est tournée vers le haut car a = 1 et 1 est positif.

Avec ce tableau de valeurs pour (Γ)

X	-1	0	1	3
y	6	1	-2	-2

Et pour (D)

X	1	3
y	-2	0



b) Résolution graphique (Voir sur le graphique).

1°) $S_{IR}=]0,2\ ;\ 3,8[$

2°) $S_{IR}=\{1\ ;4\}$

EXERCICE 18

a) Résolvons le système (S) par la méthode du pivot de GAUSS :

$$(S):\begin{cases}3x+2z=1 & l_1\\ x+2y-z=8 & l_2\\ 3x+2y+2z=7 & l_3\end{cases}$$

(S) équivaut à $\begin{cases}3x+2z=1 & l_1\\ -6y+5z=-23 & l_2-3l_1\\ 2y=6 & l_3-l_1\end{cases}$ C'est-à-dire $\begin{cases}3x+2z=1\\ -6y+5z=-23\\ y=3\end{cases}$

En remplaçant y par sa valeur 3 dans la deuxième équation, le système devient :

$\begin{cases}3x+2z=1\\ -18+5z=-23\\ y=3\end{cases}$ Ce qui équivaut à $\begin{cases}3x+2z=1\\ z=-1\\ y=3\end{cases}$

En remplaçant z dans la première équation par sa valeur -1, on a $\begin{cases}3x-2=1\\ z=-1\\ y=3\end{cases}$

Finalement (S) équivaut à $\begin{cases}x=1\\ z=-1\\ y=3\end{cases}$

La solution est $S=\{(1;3;-1)\}$.

b) Résolvons le système en effectuant un changement de variables

(S_1) : $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

En posant $X = x^2$ et $Y = y^2$, le système devient : $\begin{cases} 4X - Y = 12 & /\ \\ X + Y = 3 & /\ \end{cases}$

(S1) équivaut à $\begin{cases} 4X - Y = 12 & /\ \\ 5Y = 0 & /\ -4/ \end{cases}$. Ce qui donne Y=0 et en remplaçant Y dans la première équation par 0, on a $\begin{cases} 4X = 12 \\ Y = 0 \end{cases}$ Et on a X=3 et Y= 0.

(S1) équivaut à $\begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 0 \end{cases}$ *Ce qui équivaut à* $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$

Les solution du système sont $\{(-\sqrt{3};0);(\sqrt{3};0)\}$

LIMITES ET CONTINUITE



Guillaume de **L'HOSPITAL**, marquis de Saint Mesme, est né à Paris en 1661 et décède le 2 Février 1704 à Paris.

Il est un élève de Jean BERNOULLI qui lui apprend le calcul différentiel.

C'est ainsi que **L'HOSPITAL** est le premier à écrire un traite sur ce nouvel outil, le livre ***Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*** **(1696).** C'est dans ce livre qu'apparait ***la célèbre règle de L'HOSPITAL, qui permet parfois de lever des formes indéterminées du type 0/0.***

En 1707, **L'HOSPITAL** publie également un traité sur les coniques (***Traité analytique des sections coniques***), qui sera pendant un siècle un classique du genre.

La connaissance du calcul différentiel fait que **L'HOSPITAL** est un de ceux qui résoud le problème de la brachistochrone, indépendamment de mathématiciens prestigieux comme NEWTON ou LEIBNIZ.

SHOT ON P15
Itel DUAL CAMERA

FICHE DE COURS

Quelques propriétés sur les limites

Propriété 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Propriété 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

Propriété 3

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Opérations sur les limites

Somme

f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
f + g	$\ell + \ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Produit

f	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
g	ℓ'	∞	∞	∞
f × g	$\ell \times \ell'$	∞ règle des signes	forme indéterminée	∞ règle des signes

Quotient

f	ℓ	ℓ	0	ℓ	∞	∞
g	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	+/- ∞ à gauche/à droite	forme indéterminée	0	∞ règle des signes	forme indéterminée

Limite en l'infinie d'une fonction polynôme

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

Limite en l'infinie d'une fonction rationnelle

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Remarque :

La propriété sur les limites de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ ou en $-\infty$

En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.

Comment trouver la limite d'une fonction f en l'infini

- On compare la fonction f à des fonctions plus simples dont on connaît la limite à l'infini.
- On utilise les théorèmes relatifs à la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Astuce : Penser lors d'une forme indéterminée, à mettre en facteur le terme de plus haut degré.

Comment interpréter la limite d'une fonction

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$) alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$) alors la droite d'équation x = a est asymptote verticale à la courbe représentative de f.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)-(ax+b)\right] = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x)-(ax+b)\right] = 0$, alors la droite d'équation y = ax + b est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

QUELQUES METHODES PRATIQUES

Méthode 1 : Comment calculer des limites aux points qui annulent le dénominateur ?

Calculer la valeur prise par le numérateur.

- Si elle est différente de 0, la limite est infinie ; étudier alors le signe du dénominateur.
- Si elle est égale à 0, factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier.

Méthode 2 : Comment calculer des limites à l'infini ?

Si les théorèmes des opérations sur les limites ne s'appliquent pas, lorsque la fonction f est une fonction irrationnelle : multiplier et diviser par l'expression conjuguée.

Remarque : On retiendra les principes suivants :

$+\infty-\infty$: factoriser le terme dominant

$\frac{\infty}{\infty}$: factoriser le terme dominant au numérateur et au dénominateur puis simplifier

$\frac{0}{0}$: factoriser le terme tendant vers 0 au numérateur et au dénominateur puis simplifier

$0\times\infty$: se ramener en général à l'une des formes $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Méthode 3: Comment démontrer qu'une droite est asymptote oblique?

La fonction f est représentée par $\left(C_f\right)$ et la droite (D) a pour équation $y=ax+b$

- Démontrer que la différence $f(x)-(ax+b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.
- L'étude du signe de cette différence donne la position de $\left(C_f\right)$ par rapport à (D).

EXERCICES RESOLUS

LIMITE EN UN POINT a

EXERCICE 1

Calculer les limites des fonctions suivantes en a

1. $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ $a=4$; 2. $f(x)=\left(-3x^2+x+7\right)x\sqrt{x}$ $a=4$

3. $f(x)=\dfrac{x^2-x+1-\sin x+\cos^2 x}{(3x-1)^2}$ $a=0$; 4. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ $a=-3$

5. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ $a=1$; 6. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|-1}$ $a=-1$; 7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ $a=9$

EXERCICE 2

1. Etudier la limite en 0 des fonctions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition : $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$ et $g(x)=\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}$

2. Etudier la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition : $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ et $g(x)=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x-1}}$

EXERCICE 3 : calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x-3}{x^2-1}$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}$

d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$ e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{2x}$

EXERCICE 4

Calcule les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+3}{1-x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

c) Sachant que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$, calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$

LIMITE EN L'INFINI

EXERCICE 5

Calculer les limites suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$

1. $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$
2. $f(x) = 4x^4 + x - 2$
3. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

5. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + x}$; 6. $f(x) = \dfrac{2x-1}{-x^2+1}$; 7. $f(x) = \dfrac{7}{x^5 - 2x^2 + 1}$

8. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 + x - 2}$; 9. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{7x^5 - 2x^2 + x - 1}$; 10. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 3}$

EXERCICE 6: calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 - 3x^2 + 1$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 6}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}$,

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 + 3} - 5x$

PROPRIETES DE COMPARAISON

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

1-a. Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[\quad \frac{x}{3} \leq f(x) \leq x$

b. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\quad x \leq f(x) \leq \frac{x}{3}$

2. En déduire les limites de f en $+\infty$; $-\infty$ et en 0.

EXERCICE 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$

1. On utilisera les propriétés de comparaison pour calculer les limites de f à gauche et à droite en 0.
2. La fonction f a-t-elle une limite en 0 ?

CONTINUITE EN UN POINT a

EXERCICE 9

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{|x|}{x}$ et $g(x)=\frac{x^2+|x|}{|x|}$

a. Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f et g au point d'abscisse 0.

b. Les fonctions f et g admettent-elles une limite au point 0 ?

c. Etudier la continuité de f et g en 0.

EXERCICE 10

Soit les fonctions numériques f et g définies respectivement par :

a) $\begin{cases} \text{pour tout } x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} & f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} \\ & f(2)=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \forall x\in]-\infty,2[& g(x)=x-1 \\ \forall x\in]2,+\infty[& g(x)=2 \end{cases}$

Etudier la continuité des fonctions f et g en 2.

EXERCICE 11

Soit la fonction numérique définie par: $\begin{cases} \text{pour tout } x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;2\} & f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2} \\ & f(-2)=f(2)=4 \end{cases}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f ?

2) f est-elle continue en –2 et en 2 ?

EXERCICE 12

Soit la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\frac{x+1}{2x+3} & \text{si } x\le 0 \\ f(x)=x^2+x+a & \text{si } x>0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 0. (On discutera suivant les valeurs du nombre réel a).

PROLONGEMENT PAR CONTINUITE

EXERCICE 13

1. Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0.

a. $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $x_0=0$; b. $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ $x_0=0$

2. Vérifier que la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

EXERCICE 14

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ et $g(x)=\dfrac{x^2+|x|}{|x|}$

1. Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f et g au point d'abscisse 0.
2. Les fonctions f et g admettent-elles une limite au point 0 ?
3. Etudier la continuité de f et g en 0.

INTERPRETATION GRAPHIQUE DES LIMITES

EXERCICE 15

On donne $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. En déduire l'existence d asymptotes à la courbe représentative de f, parallèles aux axes des coordonnées, et indiquer leurs équations.

EXERCICE 16

On donne : $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$

Démontrer que la droite (D) : $y=x+2$ est asymptote oblique a $\left(C_f\right)$ en $+\infty$.

EXERCICE DE SYNTHESE

EXERCICE 17

Soit la fonction f de IR vers IR définie par $f(x)=\dfrac{x+1}{|x^2-2x|-3}$.

a) Détermine l'ensemble de définition de f.

b) Calcule les limites suivantes puis interprète les résultats: $\lim_{x\to} f(x)$; $\lim_{x\to} f(x)$; $\lim_{x\to} f(x)$; $\lim_{x\to} f(x)$.

c) Démontre que f peut être prolongé par continuité en x_0=-1 et préciser ce prolongement par continuité.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en x_0.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$

b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

c) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 5x$

d) $f(x) = -x^6 - x^2 + 4$

e. $f(x)=\dfrac{4x-5}{2x+3}$; f. $f(x)=\dfrac{4-5x}{x+4}$ $x_0=-4$; g. $f(x)=\dfrac{x^3+4}{1-2x}$ $x_0=\dfrac{1}{2}$

h. $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{1-3x^2}$; i. $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}-\dfrac{1}{x}$ $x_0=0$

EXERCICE 2

Etudier la limite de la fonction f en x_0 (On calculera éventuellement les limites à gauche et à droite en x_0).

a. $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ $x_0=4$; b. $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$ $x_0=4$

EXERCICE 3. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 1.

1. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-5}{x^2-5x+4}$ 2. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$ 3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}$

EXERCICE 4. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{3x-4}{x-2}$ b. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2-1}$ c. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$

d. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{x-1}$ e. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$ f. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{5-x}}$

g. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1-\sqrt{x+3}}{x+3}$ h. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2}-x}{x^2-4}$ i. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x}$

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

a. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; b. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+5x}{3x-1}$

c. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$; d. $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$

EXERCICE 6

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 + 5x^2 + 7x + 2$ b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x+3}{2x+6}$ c. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x}{3x^3 - 1}$ e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}+3}{x-2}$ f. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$

g. $\lim\limits_{x \to +\infty} -5x + \sqrt{x+2}$ h. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + \dfrac{3}{x}}{x^2 + 2}$ i. $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^3 - 1}$

EXERCICE 7

1. $f(x) = \dfrac{-3x+2}{2x-3}$ 2. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 12}$ 3. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$

4. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ 5. $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}$ 6. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x}{x^3 - x^2}$

a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

b. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

c. En déduire l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de f , parallèles aux axes des coordonnées, et indiquer leurs équations.

EXERCICE 8

On donne la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x < 0 \quad f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+2} \\ \text{pour } x > 0 \quad f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 3}{x^2 + 5x - 2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 0 de f .

La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

EXERCICE 9

Encadrer sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 \sin x}{1 + x^4}$ par deux fonctions rationnelles simples.

En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

EXERCICE 10

Soit $f(x) = \dfrac{x+2}{\cos^2 + 3}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

SHOT ON PIXEL

EXERCICE 11

Etudier la continuité en –1 de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[& f(x) = x^2 + 4x + 3 \\ \forall x \in [-1; +\infty[& f(x) = x^3 \end{cases}$$

EXERCICE 12

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$; $g(x) = x - 3$

1. Déterminer la fonction $f.g$.

2. On considère la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} h(x) = (f.g)(x) \\ h(3) = 5 \end{cases}$$

Etudier la continuité en 3 de la fonction h.

EXERCICE 13

1. On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$

On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

2. Montrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives $y = 1$ et $y = -x + 1$ sont asymptotes à (C_f)

EXERCICE 14

1. Etudier la continuité en –1 de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[& f(x) = x^2 + 4x + 3 \\ \forall x \in [-1; +\infty[& f(x) = x^3 \end{cases}$$

2. Etudier la continuité en 1 de la fonction f définie par :

a. $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[& f(x) = x \\ \forall x \in]1; +\infty[& f(x) = \dfrac{1}{x} \\ f(1) = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1[& f(x) = x^2 \\ \forall x \in [1; +\infty[& f(x) = x + 1 \end{cases}$

EXERCICE 15

On donne $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

f admet – elle un prolongement par continuité en 1 ? Si oui, trouver ce prolongement.

EXERCICE 16

On donne $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

f admet – elle un prolongement par continuité en 1 ? Si oui, trouver ce prolongement.

EXERCICE 17

Peut-on prolonger la fonction f suivante par continuité en a ?
Si oui, précisez le prolongement.

1. $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2}$ $\quad a=2$
2. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$ $\quad a=3$
3. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-\lvert x\rvert}$ $\quad a=0$

CORRECTION DES EXERCICES

LIMITE EN UN POINT a

EXERCICE 1

1) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4) = 18$; 2) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4) = -296$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2$

4) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} (x-3) = -6$

5) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+3) = 4$

6) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{|x|-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{-x-1}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} -(x-1) = 2$

7) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x})^2-3^2}$

$= \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{1}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{1}{\sqrt{9}+3} = \dfrac{1}{3+3}$

$\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \dfrac{1}{6}$.

EXERCICE 2

1- a) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$;

Etudions le signe de $P(x) = 1+x+x^2$

$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = 1-4 = -3 < 0$

donc $P(x) = 1+x+x^2$ n'a pas de racine et

$1+x+x^2 > 0$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$ *donc* $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+x+x^2} = \sqrt{1+0+0^2} = \sqrt{1} = 1$

1-b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{2+x}{1-x}}$

$x \in Dg$ *équivaut à* $1-x\neq 0$ *et* $\dfrac{2+x}{1-x}\geq 0$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
2 + x	-	0 +	+	+
1 - x	+	+	0 -	-
$\dfrac{2+x}{1-x}$	-	0 +	‖	-

$Dg=[-2;1[$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{2+x}{1-x}}=\sqrt{\frac{2+0}{1-0}}=\sqrt{\frac{2}{1}}=\sqrt{2}$$

2-a) $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$

$x\in D_f$ *équivaut à* $x\neq 0$ *et* $1+\dfrac{1}{x}\geq 0$ *c'est-à-dire* $x\neq 0$ *et* $\dfrac{x+1}{x}\geq 0$

ce qui donne $x\in]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$ *donc* $D_f=]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$

(Indication : faire un tableau de signe pour $\dfrac{x+1}{x}$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \quad car \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1\end{cases}$$

2-b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{3x+1}{x-1}}$

$x\in Dg$ *équivaut à* $x-1\neq 0$ *et* $\dfrac{3x+1}{x-1}\geq 0$ *équivaut à* $x\neq 1$ *et* $\dfrac{3x+1}{x-1}\geq 0$

c'est-à-dire $x\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]\cup]1;+\infty[$ *donc* $Dg=\left]-\infty;-\dfrac{1}{3}\right]\cup]1;+\infty[$

(Indication : faire un tableau de signe pour $\dfrac{3x+1}{x-1}$)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\sqrt{3} \quad car \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x}=3\\ \lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x}=\sqrt{3}\end{cases}$$

EXERCICE 3. Calculons les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x-3}{x^2-1}$

Quand x tend vers 1, le numérateur est non nul alors que le dénominateur tend vers 0.
Il convient dans ce cas d'étudier le signe du dénominateur.

On constate que pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $x^2-1>0$ et pour tout $x\in]-1;1[$, $x^2-1<0$

Pour tout $x\in]-1;1[$, $x^2-1<0$ et $\lim\limits_{x\to 1} x^2-1=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$

Or $\dfrac{x-3}{x^2-1}=(x-3)\dfrac{1}{x^2-1}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-3)\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to 1}(x-3)=-2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$

b. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$

Quand x tend vers 2, le numérateur est non nul alors que le dénominateur s'annule.
Il convient dans ce cas d'étudier le signe du dénominateur.

On constate que pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$, $x^2-x-2>0$

et pour tout $x\in]-1;2[$, $x^2-x-2<0$

Pour tout $x\in]-1;2[$, $x^2-x-2<0$ et $\lim\limits_{x\to 2} x^2-x-2=0$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1}{x^2-x-2}=-\infty$

Or $\dfrac{2x+5}{x^2-x-2}=(2x+5)\dfrac{1}{x^2-x-2}$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{2x+5}{x^2-x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (2x+5)\dfrac{1}{x^2-x-2}=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to 2}(2x+5)=9$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1}{x^2-x-2}=-\infty$

c. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}$

• *Première méthode :*

Quand x tend vers 0, le numérateur est non nul alors que le dénominateur s'annule.

Il convient dans ce cas d'étudier le signe du dénominateur.

On constate que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x+\sqrt{x}>0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x+\sqrt{x}=0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x+\sqrt{x}}=+\infty$$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\sqrt{x}>0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}=0$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}}+1=+\infty$

Or $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)\frac{1}{x+\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)\frac{1}{x+\sqrt{x}}=+\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x+\sqrt{x}}=+\infty$

• *Deuxième méthode :* (*factorisation puis simplification*)

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}+1}{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+1\right)}=\frac{\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+1\right)\times 1}{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+1\right)}=\frac{1}{x}$$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty$

d. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

Quand x tend vers 2, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0.
Il convient, dans ce cas, de factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-2)$ puis de les simplifier par ce facteur commun.

On a: $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x+3}{x-3}$

Donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{2+3}{2-3} = \dfrac{5}{-1} = -5$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

Quand x tend vers 0, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0.
Cependant, la factorisation ne convient pas.
Ici, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du numérateur.

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-(1)^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{0}{2} = 0$$

car $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2+1}+1 = 2$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{2x}$

Ici, l'astuce consiste à faire apparaître la limite de référence $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$

$$\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{\sin 5x}{2x} \times \frac{5}{5} = \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{5}{2}$$

On pose $X = 5x$; quand x tend vers 0, X tend vers 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{5}{2} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{car} \quad \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

EXERCICE 4

Calculons les limites :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{1-x^2}$

$\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$, $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)=0$ et pour $0<x<1$, on a $1-x^2>0$. Donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{1-x^2}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

$\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x+2}-2)=\sqrt{4}-2=0$ et $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x+7}-3)=\sqrt{9}-3=0$. On arrive à une forme indéterminée. Une transformation de l'expression est donc nécessaire.

En utilisant l'expression conjuguée du dénominateur, on a.

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7})^2-9}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x+7-9}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2}$$

En calculant la limite en 2 du numérateur et du dénominateur, on a toujours 0. Donc nous continuons la transformation de l'expression en utilisant l'expression conjuguée du numérateur. Et on a :

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\frac{(x+2-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{4}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

c) Sachant que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$.

$\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}=\dfrac{2\sin x\cos x}{x\cos x}=\dfrac{2\sin x}{x}$. Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2\times 1=2$

LIMITES EN L'INFINI

EXERCICE 5

1) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$

2) $f(x) = 4x^4 + x - 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^4 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^4 = +\infty$

3) $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$

4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

5) $f(x) = \dfrac{x^5 - x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^5}{x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

6) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{-x^2 + 1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{-x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{2}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{-x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{x} = 0$

7) $f(x) = \dfrac{7}{x^5 - 2x^2 + 1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{7}{x^5} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7}{x^5} = 0$

8) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{4x^2 + x - 2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{4x^2} = \dfrac{3}{4}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{4x^2} = \dfrac{3}{4}$

9) $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{7x^5-2x^2+x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{7x^5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{7x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{x^3}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{7x^5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{7x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{x^3}=0$

10) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-3}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$

EXERCICE 6. Calculons les limites suivantes :

a $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3-3x^2+1$

$-2x^3-3x^2+1$ est une fonction polynôme. on a alors

$\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3-3x^2+1=\lim\limits_{x\to+\infty}-2x^3=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ et $-2<0$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x+7}{x-4}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+7}{x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x+7}{x-4}}=\lim\limits_{X\to2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3},\ x\geq3$

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}=\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}=\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}$$

$$=\frac{(x-2)-(x-3)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}=\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}=0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=+\infty$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3}-5x$

$\sqrt{2x^2+3}-5x=\sqrt{x^2\left|2+\frac{3}{x^2}\right|}-5x=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-5x=|x|\cdot\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-5x$

$\forall x\in]0;+\infty[\ :\ |x|=x$

(Remarque: ici, on prend x sur $]0;+\infty[$ car la limite se calcule en $+\infty$)

$\sqrt{2x^2+3}-5x=|x|\cdot\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-5x=x\cdot\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-5x=x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-5\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3}-5x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-5\right)=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-5\right)=\sqrt{2}-5<0\ \left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0\right)$

PROPRIETES DE COMPARAISON

EXERCICE 7

$f(x)=\dfrac{x}{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

1) a) Démontrons que: $\forall x\in]0;+\infty[\quad \frac{x}{3}\le f(x)\le x$

$-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$ *équivaut à* $-1\le-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$ *donc* $-1+2\le 2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1+2$

On a $1\le 2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 3$ *équivaut à* $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\le 1$ *donc* $\frac{x}{3}\le\frac{x}{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\le x$

Donc $Pour\ tout\ x\in]0;+\infty[\quad \frac{x}{3}\le f(x)\le x$

b) Démontrons que $Pour\ tout\ x\in]-\infty;0[\quad x\le f(x)\le\frac{x}{3}$

$-1\le\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$ *équivaut à* $-1\le-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$ *équivaut à* $-1+2\le 2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 1+2$

équivaut à $1\le 2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 3$

équivaut à $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\le 1$ *équivaut à* $x\le\frac{x}{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\le\frac{x}{3}$

(Ici, l'inégalité a changé de sens car on a multiplié par un nombre réel négatif)

Donc $Pour\ tout\ x\in]-\infty;0[\quad x\le f(x)\le\frac{x}{3}$

2) limites de f en $+\infty$; $-\infty$ et en 0.

• *Pour tout* $x \in]0;+\infty[$ $\quad \frac{x}{3} \leq f(x) \leq x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• *Pour tout* $x \in]-\infty;0[$ $\quad x \leq f(x) \leq \frac{x}{3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

• *Pour tout* $x \in]-\infty;0[$ $\quad x \leq f(x) \leq \frac{x}{3}$ et $\forall x \in]0;+\infty[$ $\quad \frac{x}{3} \leq f(x) \leq x$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{3} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

EXERCICE 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$

1) Calculons les limites de f à gauche et à droite en 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{x} \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -1 + \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 1 + \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -1 + \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ donc f n'a pas de limite en 0.

CONTINUITE EN UN POINT a

EXERCICE 9

a) Calculons la limite à gauche et la limite à droite des fonctions f et g en 0.

• $f(x) = \frac{|x|}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x}{x} = -1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$

• $g(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x|}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x^2+|x|}{|x|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x^2+(-x)}{(-x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x^2-x}{-x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x(x-1)}{-x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} -(x-1) = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^2+|x|}{|x|} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^2+(x)}{(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^2+x}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (x+1) = 1$$

b) limite de f et g en 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = 1$ donc g admet une limite en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

c) Continuité de f et g en 0.

f et g ne sont pas définies en 0 donc f et g ne sont pas continues en 0.

EXERCICE 10

- **Etude de la continuité en 2 de la fonction f définie par** $\begin{cases} \text{Pour tout } x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} & f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2} \\ & f(2)=4 \end{cases}$

$D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$ donc f est continue en 2

- **Etude de la continuité en 2 de la fonction g définie par** $\begin{cases} \text{Pour tout } x\in\left]-\infty;2\right[& g(x)=x-1 \\ \text{Pour tout } x\in\left[2;+\infty\right[& g(x)=2 \end{cases}$

On a $D_g = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} (x-1) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} 2 = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x) = g(2) = 2$ donc g est continue à droite en 2.

Cependant : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} g(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x)$ donc g n'est pas continue en 2.

EXERCICE 11

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;2\} & f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|-2} \\ & f(-2)=f(2)=4 \end{cases}$

L'ensemble de définition de f : $D_f=\mathbb{R}$

- Continuité de f en -2

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{|x|-2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{-x-2}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)}=\lim_{x\to -2}-(x-2)=4$$

On a $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=4$ Donc f est continue en –2.

- Continuité de f en 2

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{|x|-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

On a $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=4$ Donc f est continue en 2.

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{2x+3} & \text{si } x\le 0 \\ f(x)=x^2+x+a & \text{si } x>0 \end{cases}$

Etudions la continuité de f en 0.

$D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-3}{2}\right\}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{2x+3}=\dfrac{1}{3}$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+a=a$

f est continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

Donc f est continue en 0 pour $a=\dfrac{1}{3}$.

PROLONGEMENT PAR CONTINUITE

EXERCICE 13

1) $a) f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \qquad x_0 = 0$

Ensemble de définition

$x \in D_f$ *équivaut à* $x > 0$ *et* $\sqrt{x} \neq 0$ *équivaut à* $x \geq 0$ *et* $x \neq 0$ *donc* $x > 0$

donc $D_f =]0;+\infty[$

Prolongement par continuité

$0 \notin D_f =]0;+\infty[$

$$f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}-1\right) = -1$$

Donc f peut être prolongée par continuité en 0.

Soit g le prolongement par continuité de f en 0.

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \forall x \in]0;+\infty[\\ g(0) = -1 \end{cases}$$

ou

$$g(x) = \left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$b) f(x) = \frac{\tan x}{x} \qquad x_0 = 0$$

Ensemble de définition

$x \in D_f$ *équivaut à* $x \neq 0$ *et* $\cos x \neq 0$ *équivaut à* $x \neq 0$ *et* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

donc $D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{0; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

Prolongement par continuité

$0 \notin D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{0; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \frac{\tan x}{x} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1 \; car \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \quad car \quad \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \end{cases}$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0.

Soit g le prolongement par continuité de f en 0.

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\tan x}{x} \quad pour\ tout\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\} \quad avec \quad k \in \mathbb{Z} \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

2) Vérifions que $g(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

$x \in D_f$ *équivaut à* $1+x \geq 0$ *et* $x \neq 0$ *équivaut à* $x \geq -1$ *et* $x \neq 0$. *Donc* $D_f = [-1;+\infty[\setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-(1)^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

$$= \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = g(x)$$

Cette fonction g est définie sur $[-1;+\infty[$.

Donc g est le prolongement par continuité en 0 de la fonction f.

EXERCICE 14

1. Calculons la limite à gauche et la limite à droite de f et g en 0.

- $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1 \quad ; \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

- $g(x) = \dfrac{x^2+|x|}{|x|}$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{x^2+|x|}{|x|} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{x^2+(-x)}{(-x)} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{x^2-x}{-x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{x(x-1)}{-x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} -(x-1) =$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{x^2+|x|}{|x|} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{x^2+(x)}{(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{x^2+x}{x}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{x(x+1)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (x+1) = 1$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = 1$ donc g admet une limite en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

3. f et g ne sont pas définies en 0 donc f et g ne sont pas continues en 0.

INTERPRETATION GRAPHIQUE DES LIMITES

EXERCICE 15. On donne $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$.

1. **Déterminons l'ensemble de définition Df de f.**

$x \in D_f$ *équivaut à* $x-3 \neq 0$ *équivaut à* $x \neq 3$. *Donc,* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

$D_f =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

2. calculons les limites aux bornes de Df.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x-4}{x-3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-4}{x-3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

$f(x) = \dfrac{2x-4}{x-3} = (2x-4) \times \dfrac{1}{x-3}$

• $\forall x < 3,\ x-3 < 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \dfrac{2x-4}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} (2x-4) \times \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} (2x-4) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

• $\forall x > 3,\ x-3 > 0$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{2x-4}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} (2x-4) \times \frac{1}{x-3} = +\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} (2x-4) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{1}{x-3} = +\infty$

3. Déduisons les asymptotes verticales et horizontales.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

donc (D): $y = 2$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{1}{x-3} = -\infty$ et de plus $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{1}{x-3} = +\infty$

donc la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à (C)

EXERCICE 16

$$f(x) - (x+2) = \frac{x^2-3}{x-2} - (x+2) = \frac{(x^2-3)-(x-2)(x+2)}{x-2} = \frac{(x^2-3)-(x^2-4)}{x-2} = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - (x+2)| = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

Donc la droite (D): $y = x+2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

EXERCICES DE SYNTHESE

EXERCICE 17

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{|x^2-2x|-3}$

a) Déterminons l'ensemble de définition de f.

f(x) existe si et seulement si $|x^2-2x|-3 \neq 0$.

Le signe du polynôme x^2-2x est positif ailleurs et négatif entre les zéros qui sont 0 et 2.

Donc pour $x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$, $|x^2-2x| = x^2-2x$. Et la condition devient $x^2-2x-3 \neq 0$.

Le discriminant du polynôme x^2-2x-3 est $\Delta = 4-4\times(-3)\times 1 = 4+12 = 16$.

Les zéros de x^2-2x-3 sont donc 3 et -1.

Pour $x \in]0;2[$, $|x^2-2x| = -x^2+2x$. Et la condition devient $-x^2+2x-3 \neq 0$.

Le discriminant du polynôme $-x^2+2x-3$ est $\Delta = 4-4\times(-3)\times(-1) = 4-12 = -8$.

Le discriminant est négatif, donc le polynôme n'a pas de zéro.

Finalement, f(x) existe si et seulement si $x \neq -1$ et $x \neq 3$. $Df = \mathbb{R} - \{-1;3\}$

b) Calculons les limites :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{|x^2-2x|-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{|x^2-2x|-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to3} f(x)$: Pour $x \in]2; +\infty[$, $|x^2-2x| = x^2-2x$, $\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$

$\lim\limits_{x\to3}(x+1) = 4$, $\lim\limits_{x\to3}(x^2-2x-3) = 0$ *et pour* $x<3$, $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$ *est négatif.*

Donc, $\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$.

$\lim\limits_{x\to3}(x+1) = 4$, $\lim\limits_{x\to3}(x^2-2x-3) = 0$ *et pour* $x>3$, $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$ *est positif.*

Donc, $\lim\limits_{x\to3} f(x) = +\infty$

c) Démontrons que f peut être prolongé par continuité en $x_0 = -1$.

$-1 \in Df$ Calculons $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

Pour $x \in]-\infty; 0[$, $|x^2-2x| = x^2-2x$.

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{|x^2-2x|-3} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+1}{(x+1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{x-3} = -\dfrac{1}{4}$.

Soit la fonction g telle que $\begin{cases} pour\ x \in Df,\ g(x) = f(x) \\ g(-1) = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

g est le prolongement par continuité de f en -1.

DERIVATION



Isaac NEWTON est né le 25 décembre 1642 d'une famille modeste.
Elève plutôt médiocre, il manifeste .cependant un goût marqué pour les inventions mécaniques.
Il exécute divers modèles avec des outils qu'il achète sur ses économies.
C'est à 21 ans seulement que **NEWTON** généralise la fameuse formule connue aujourd'hui sous le nom de ***binôme de NEWTON***.

En 1665, **NEWTON** conçoit ***le calcul différentiel et intégral*** qu'il appelle le calcul des fluxions. Il généralise les méthodes déjà utilisées pour la construction de tangentes à une courbe et pour le calcul de surfaces délimitées par une courbe.
Mais la paternité de l'invention du calcul infinitésimal est un sujet de contestation qui oppose Isaac **NEWTON** et le philosophe et mathématicien allemand Gottfried Von LEIBNIZ.
Cependant, la postérité ne croit au plagiat ni de l'un ni de l'autre.

La légende raconte que, un jour, assis sous un pommier, la chute d'une pomme attire son attention sur la pesanteur. Il conçoit ***la théorie de la gravitation universelle***.
Il explique que tout corps, dans l'espace et sur la Terre, subit les effets d'une force appelée gravité. Poursuivant les travaux de *Kepler*, il se demande si c'est la même cause qui retient la lune dans l'orbite qu'elle décrit autour de la Terre, et les planètes dans leurs orbites autour du soleil. En hommage à ses travaux, son nom est donné à une unité de mesure de force utilisée en physique, le **NEWTON**.

NEWTON entreprend des expériences sur la réfraction de la lumière à travers les prismes. Il découvre la composition de la lumière, calcule les différents effets de réfraction, et fonde sa théorie sur cette matière.
En 1672, il entre à la Royal Society de Londres, en lui présentant la description d'un télescope qui porte son nom. **NEWTON** a l'idée de remplacer une lentille par un miroir concave (forme d'une cuillère) qui réfléchit la lumière sans la décomposer.

Le télescope de **NEWTON** long d'à peine 20 cm grossit 40 fois.
En 1705, il est anobli par la *Reine Anne* d'Angleterre pour se faire appeler *Sir Isaac* **NEWTON**.
En 1707, il fait publier en latin un ouvrage de mathématique, l'*Arithmétique universelle*, qui n'était que le texte des cours d'algèbre qu'il dispense.
Il laisse de nombreux écrits sur des questions théologiques qui présentent en particulier ses réflexions sur les Prophéties ou des travaux sur l'interprétation de l'Apocalypse **NEWTON** meurt le 20 mars 1727.

FICHE DE COURS

Nombre dérivé en x_0

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.

On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé en x_0 et notée $f'(x_0)$.

Remarque : Il est équivalent de dire que f est dérivable en x_0 si la quantité $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.

2. Lien avec la notion de limite

Propriété

Si f est dérivable en x_0, alors f admet une limite finie en x_0.

Remarque : la réciproque est fausse !

3. Nombre dérivé à droite. Nombre dérivé à gauche

Définition

Si $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie, on dit que f est dérivable à droite en x_0.

On note alors $f'_d(x_0)$ cette limite, appelée « nombre dérivé à droite » en x_0.

On définit de façon similaire le nombre dérivé à gauche $f'_g(x_0)$.

Théorème

f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont égaux.

4. Interprétation graphique

Propriété

S'il existe, le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

Remarque :

Si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent mais sont différents, la courbe admet deux demi-tangentes en M_0 et fait un « angle » en ce point.

Fonction dérivée

1. Définition

La fonction dérivée est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

2. Formules sur les dérivées

Dérivées usuelles

f(x)	f ' (x)	$D_{f'}$
a	0	$\mathbb{R}$
ax + b	a	$\mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c$	2ax + b	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*+$
cos x	-sin x	$\mathbb{R}$
sin x	cos x	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions :

f = k u	f ' = k u'
f = u + v	f ' = u' + v'
f = u v	f ' = u' v + u v'
$f = \frac{1}{v}$	$f' = \frac{-v'}{v^2}$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$f = \sqrt{u}$	$f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f(x) = (g \circ h)(x)$	$f'(x) = h'(x) \times g'(h(x))$
$f = (u^n)$	$f' = nu^{n-1}u'$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
$f = \frac{1}{u^n}$	$f' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$

Utilisation des dérivées

1. Equation de la tangente au point d'abscisse a

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 a pour équation :

$y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$

2. Sens de variation d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Remarque : ce théorème n'est valable que sur un intervalle.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{*}-$ et sur $\mathbb{R}^{*}+$, mais pas sur $\mathbb{R}^{*}$.

3. Extrema d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.

Si f ' s'annule en changeant de signe en x_0, alors f admet un extremum en x_0.

Remarque :

Dans ce cas, (C_f) admet une tangente horizontale en $M_0(x_0, f(x_0))$.

EXERCICES RESOLUS

CALCUL DU NOMBRE DERIVE EN x_0

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Etudier la dérivabilité de f en 0.

EXERCICE 2

Soit la fonction g définie par $g(x) = (x + \frac{1}{x})\sin(\pi x)$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^*$. $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\pi(x+\frac{1}{x})\frac{\sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)}$.

2. En déduire que g est dérivable en 1 et calculer le nombre dérivé de g en 1.

CALCUL DE FONCTIONS DERIVEES

EXERCICE 3

1 Rappelle les limites suivantes $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$, $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}$.

2. En posant $x=x_0+h$, démontre que pour $x \neq x_0$,

$$\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} = \sin(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\frac{\sin(h)}{h}$$

3. Déduis-en la dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(x)$ sur IR.

EXERCICE 4

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions numériques f définies par :

a. $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ b. $f(x) = x^3(x^2+4)$ c. $f(x) = \sin x.\cos x$; d) $f(x) = 5\sqrt{x}$

e. $f(x) = \frac{x}{3}$; f. $f(x) = 7(x^2-1)$; g. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 7$.

h. $f(x) = x^{17}$; i. $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^{10}$; j. $f(x) = \sin^3 x.\cos^2 x$

EXERCICE 5

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions numériques définies par :

$a. f(x) = \frac{1}{x^2+3x-2}$; $b. f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{4x^2+1}$; $c. f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$; $d. f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$

e. $f(x) = \sin(-2x + 10)$ f. $f(x) = \cos 7x \cdot \sin(-3x + 1)$ g. $f(x) = \cos^2(5x - 1)$

TANGENTE EN UN POINT A UNE COURBE

EXERCICE 6

Quel est le coefficient directeur (s'il existe) de chacune des droites d'équations respectives :

a. $2x - 6y + 5 = 0$; b. $x - 2 = 0$; c. $3y + 4 = 0$; d. $5x + 3x - 1 = 0$; e. $y = -4x + 5$

EXERCICE 7

1. Donner une équation de la droite passant par le point A (-2; 7) et dont le coefficient directeur est $\sqrt{3}$

2. Donner une équation de la droite passant par le point B (5 ; 3) et parallèle à la droite d'équation : $3x - 2y + 7 = 0$.

EXERCICE 8

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, construire la représentation graphique $\left(C_f\right)$ de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Calculer le nombre dérivé de f en chacun des points d'abscisses : 0 ; 1 ; 2 ; $\frac{5}{2}$.
- Construire les tangentes à $\left(C_f\right)$ respectivement aux points d'abscisses 0 ; 1 ; 2 ; $\frac{5}{2}$.
- Donner une équation de ces tangentes.

EXERCICE 9

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 4$

a. Montrer que la représentation graphique de f dans un repère (O, I, J) admet deux tangentes de coefficient directeur 6.

b. Donner une équation de chacune de ces tangentes.

EXERCICE 10

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par: $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

On désigne par (P) sa représentation graphique.

On suppose que (P) passe par le point A (0; 4) et que la tangente à (P) au point B (2; -1) est parallèle à la droite (OI).

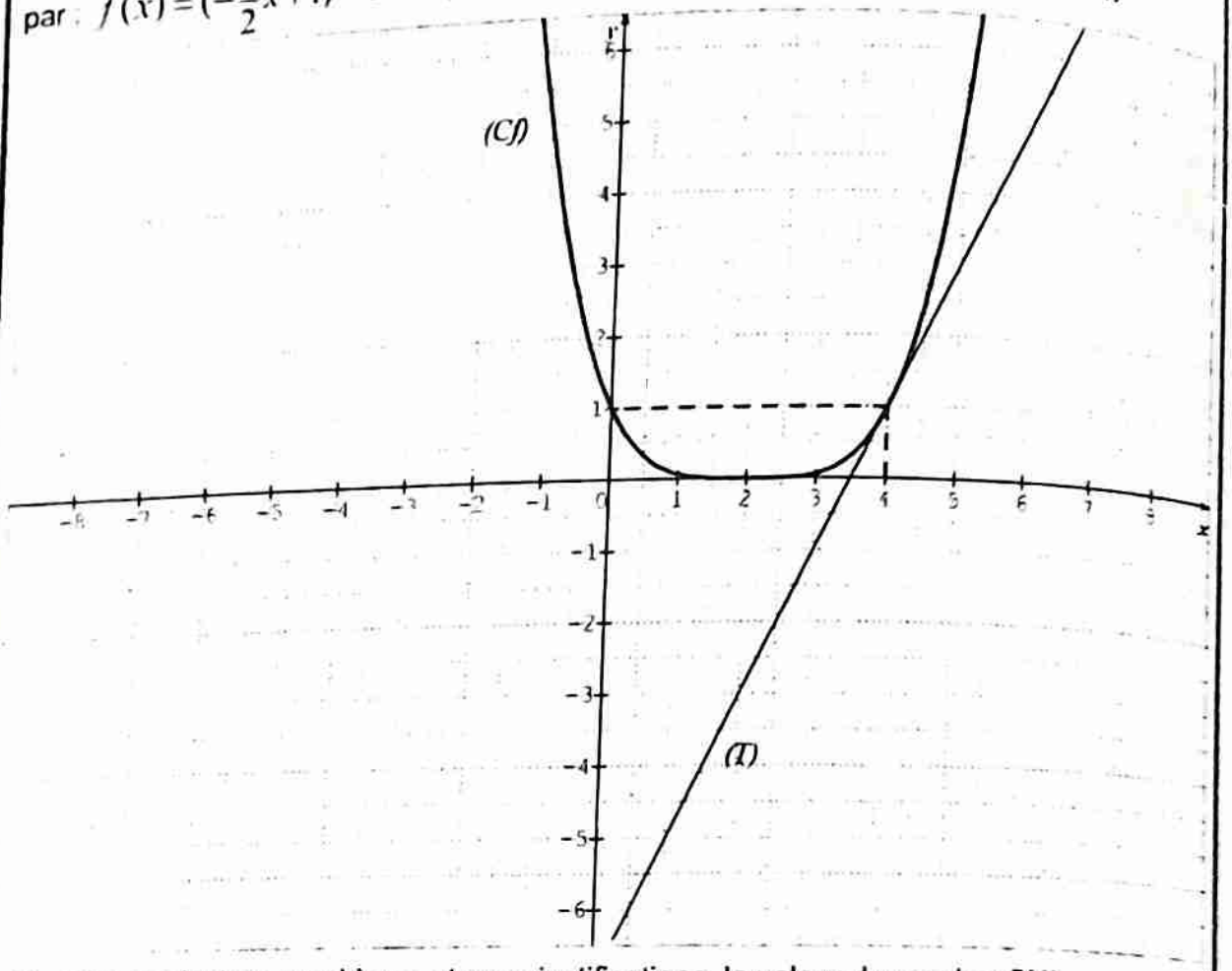
a. Déterminer a, b et c.

b. Tracer (P) et les tangentes à (P) respectivement aux point A et B.

c. Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces tangentes.

EXERCICE 11

Sur le graphique ci-dessous sont représentées la courbe Cf de la fonction f définie sur IR par : $f(x)=(-\frac{1}{2}x+1)^4$ ainsi que la tangente (T) à Cf au point d'abscisse $x_0 = 4$.



1. Donner, par lecture graphique, et sans justifications, la valeur du nombre f'(4).
2. Déterminer, à l'aide du calcul de la dérivée de f, la valeur du nombre f'(3) et construis la tangente (L) à Cf au point d'abscisse 3.

ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

EXERCICE 12

On considère la fonction h définie sur IR* par : $h(x)=x-2+\frac{4}{x}$

1. Calculer la dérivée h' de h puis étudier son signe.
2. Etudier les variations de h.

EXERCICE 13

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x^3-4x^2+4x$

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Étudier le signe de la dérivée f'.
3. Etudier les variations de f.

EXERCICE 14

Soit f une fonction de $]-\pi;\pi[$ versIR telle que $f(x)=\tan(x)$.

1. Détermine l'ensemble de définition Df de f.
2. Calcule la dérivée f' de f.
3. Etudier les variations de f.
4. Dresser le tableau de variation de f.

EXTREMUM LOCAL ET OPTIMISATION

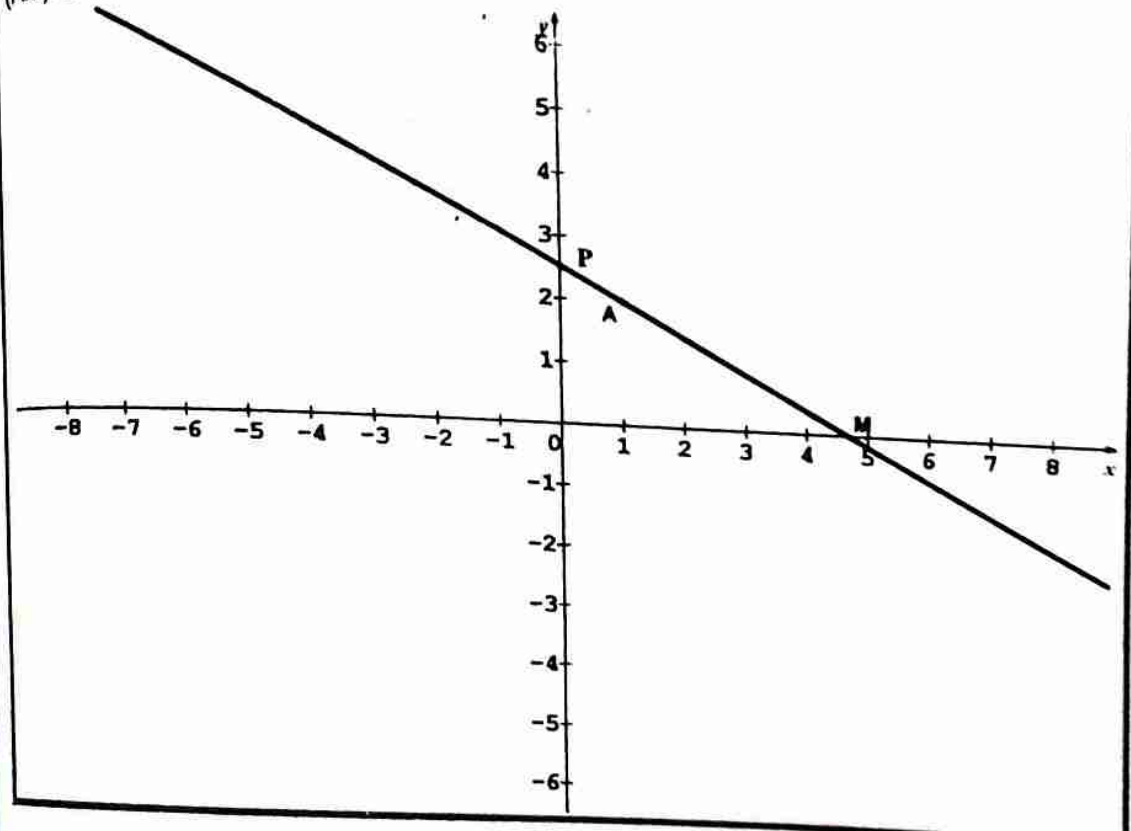
EXERCICE 15

Rechercher les extremums locaux des fonctions définies par :

a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ b. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

EXERCICE 16

Dans un repère orthonormé, soit A le point de coordonnées (1; 2) et M un point d'abscisse x supérieur à1 de l'axe des abscisses. On appelle P le point d'intersection de la droite (AM) et l'axe des ordonnées.



1) Démontre que l'ordonnée de P est $\frac{2x}{x-1}$.

2) Démontre que l'aire du triangle OMP est $\frac{x^2}{x-1}$.

3) a) Etudier la variation de la fonction f définie sur]1 ;+∞[par f(x)= $\frac{x^2}{x-1}$.

b) Détermine la position du point M qui permet d'obtenir l'aire de OMP minimale. Quelle est cette aire ?

EXERCICE 17

On considère un rectangle de longueur y, de largeur x et de périmètre 4 cm.

On recherche les dimensions du rectangle pour que son aire soit maximum.

1) Démontrer que y =2-x et que $x \in]0;1]$.

2) Soit S l'aire du rectangle. Démontrer que S= - x^2 + 2x.

3) Soit la fonction h définie sur [0;1] par h(x)= - x^2 + 2x et h' la dérivée de h. Démontrer que pour tout x ∈ [0;1], h'(x)≥0 ; puis dresser le tableau de variation de h.

4) En déduire les dimensions du rectangle pour que son aire soit maximum.

EXERCICES DE SYNTHESE

EXERCICE 18

Soit $f(x) = x^3 + 3x - 7$

1) Calculer $f'(x)$.

2) Etudier le sens de variation de f.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) calculer $f(1)$ et $f(2)$.

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que 1 < α < 2

6) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

EXERCICE 19

Soit h la fonction définie sur IR \ {1} par h(x) = $\frac{2x+3}{x-1}$.

On note (Ch) sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée h' de h.

2. Soit A le point d'intersection de (Ch) avec l'axe des abscisses.

Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente (T1) à la courbe (Ch) en A.

3. Soit B le point d'intersection de (Ch) avec l'axe des ordonnées.

Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente (T2) a la courbe (Ch) en

EXERCICE 20

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 8x+4y+2z=-2 \\ 27x+9y+3z=0 \end{cases}$

Soit la fonction g définie de sur IR par $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ et vérifiant les conditions suivantes : g(1)=0, g(2)=2 et g(3)=4.

Traduire chaque condition par une équation

Démontrer à l'aide du 1) que $g(x)=-x^3+6x^2-9x+4$

a) Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Détermine g'(x) et déduire le signe de g'(x).

c) Dresser le tableau de variation de g et donner les estremums relatifs de g.

SHOT ON P15

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

Déterminer le (ou les) intervalles de $\mathbb{R}$ sur le (s) quel (s) chacune des fonctions suivantes est dérivable et calculer sa dérivée.

$a.f(x)=4x^2-3x+1$; $b.f(x)=2x-4+\frac{3}{x}$; $c.f(x)=x-1+\sqrt{x}$

$d.f(x)=2+(3x+2)^2$; $e.f(x)=(2x+3)(3x-7)$; $f.f(x)=(5x-4)\left(1-\frac{x}{2}\right)$

$g.f(x)=\frac{2x+1}{3x-1}$; $h.f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; $i.f(x)=2x+\frac{1}{\sqrt{x}}$; $j.f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x-3}$

$k.f(x)=\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^2$; $l.f(x)=\sqrt{2x+5}$; $m.f(x)=\sin 2x$

EXERCICE 2

Calculer la dérivée de la fonction f ci-dessous :

1. $f(x)=\left(x^4-7\right)^3$ 2. $f(x)=(3x+4)^5$ 3. $f(x)=\left(3x^2+2x-4\right)^{-4}$

4. $f(x)=\frac{x^2+x}{3x^3-1}$ 5. $f(x)=\left(\frac{3x-4}{x-1}\right)^2$ 6. $f(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2-3}\right)^3$

7. $f(x)=\sqrt{x^2+7x-1}$ 8. $f(x)=\sqrt{3+\cos 2x}$ 9. $f(x)=\sqrt{1+\sin 3x}$

10. $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 11. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 12. $f(x)=\frac{x}{2+\cos 4x}$

13. $f(x)=\cos^3 2x$ 14. $f(x)=(1+\sin x)^2$ 15. $f(x)=\sin(\pi x^2)$

16. $f(x)=\sin(\frac{\pi}{x})$ 17. $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 18. $f(x)=\sin^4(\pi x)$

19. $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$ 20. $f(x)=\sin 3x \cdot \cos 2x$ 21. $f(x)=(\sin^3 x)\cdot \tan x$

22. $f(x)=\frac{x\cdot\sqrt{x+1}}{2x-3}$ 23. $f(x)=\left(x^3-1\right)^2\cdot\sqrt{x^2+1}$ 24. $f(x)=\frac{\tan x}{x^2+3}$

EXERCICE 3

Déterminer les tangentes à la courbe $\left(C_f\right)$ issues du point A(x_0, y_0) dans les cas suivants : a) $f(x)=3x^2-4x+2$, A (-1, -3) ; b) $f(x)=\frac{3x-5}{x-2}$, A (0, 3)

EXERCICE 4

Etudier le signe de la dérivée et donner le tableau de variations de f.

1. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x$; 2. $f(x)=x^2(x-1)^3$; 3. $f(x)=\frac{2x^2+4x-1}{x^2+1}$

4. $f(x)=\sqrt{2-x}$ sur $I=]-\infty;2]$; 5. $f(x)=\sin 2x$ sur $I=[0;\pi]$

EXERCICE 5

On considère l'équation : $x^3 - 9x^2 + 24x - 17 = 0$

1. Montrer que cette équation admet trois racines et encadrer chacune d'elles par deux entiers consécutifs.
2. Trouver une valeur approchée de la plus grande racine, à 0,1 près.

EXERCICE 6

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire une équation de la tangente au point A d'abscisse a de la représentation graphique de la fonction f.

1. $f: x \to 3x^2-5x+1$ Pour a = -1, a = 2 et a = 3
2. $f: x \to x-1+\frac{1}{x+2}$ Pour a = - 4, a = 1 et a = 2
3. $f: x \to \tan x$ Pour a = 0, a = $\frac{\pi}{6}$ et a = $\frac{\pi}{4}$
4. $f: x \to 5\sqrt{2x-3}$ Pour a = 6

EXERCICE 7

Etudier le signe de la dérivée et donner le tableau de variations de f.

1. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x$; 2. $f(x)=x^2(x-1)^3$; 3. $f(x)=\frac{2x^2+4x-1}{x^2+1}$

4. $f(x)=\sqrt{2-x}$ sur $I=]-\infty;2]$; 5. $f(x)=\sin 2x$ sur $I=[0;\pi]$

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{5x}{x^2+4}$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

   En déduire l'équation de l'asymptote à (C_f).

2. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0.

   Etudier la position de (C_f) par rapport à sa tangente T.

EXERCICE 9

Soit $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1$.

Etudier les extremums relatifs de f.

EXERCICE 10

Soient les fonctions : $f(x)=x^3-3x$; $g(x)=x-\frac{4}{x}$

et leurs courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans un repère orthonormé.

1. Résoudre le système $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases}$

En déduire que (C_f) et (C_g) se coupent en deux points A et B en lesquels elles admettent les mêmes tangentes ((C_f) et (C_g) sont « tangentes » en A et B).

2. Etudier les positions relatives de (C_f) et (C_g) par rapport à ces tangentes.

3. Etudier la position de (C_g) par rapport à la droite Δ d'équation y = x et montrer que Δ est asymptote à (C_g).

4. Etablir les tableaux de variations de f et g, puis tracer (C_f) et (C_g).

CORRECTION DES EXERCICES

CALCUL DU NOMBRE DERIVE EN x_0

EXERCICE 1

On a $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

Etudions la dérivabilité de f en 0.

f est dérivable en 0 si $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie.

Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+|x|}-\dfrac{0}{1+|0|}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+|x|}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+|x|)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|}=1$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie donc f est dérivable en 0 et le nombre dérivé de f en 0 est 1.

EXERCICE 2

$g(x)=(x+\dfrac{1}{x})\sin(\pi x)$

1) **Démontrons que pour tout x appartenant à IR*,** $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=-\pi(x+\dfrac{1}{x})\dfrac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}$

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{(x+\frac{1}{x})\sin(\pi x)-(1+\frac{1}{1})\sin(1\times\pi)}{x-1}=\frac{(x+\frac{1}{x})\sin(\pi x)-2\sin(\pi)}{x-1}$$

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{(x+\frac{1}{x})\sin(\pi x)-2\times 0}{x-1}$$

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{(x+\frac{1}{x})\sin(\pi x)}{x-1}=\frac{\pi(x+\frac{1}{x})\sin(\pi x)}{\pi(x-1)}=-\frac{\pi(x+\frac{1}{x})\sin(\pi x-\pi)}{\pi(x-1)}$$

Car $\sin(x-\pi)=-\sin(x)$.

$$\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=-\pi(x+\frac{1}{x})\frac{\sin(\pi(x-1))}{\pi(x-1)}$$

2) **Déduisons la dérivabilité de g en 1.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(-\pi(x+\frac{1}{x})\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)})=\lim_{x\to 1}(-\pi(x+\frac{1}{x}))\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}$$

$\lim\limits_{x\to 1}(-\pi(x+\dfrac{1}{x}))=-2\pi$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X}=1$, donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=-2\pi$.

g est dérivable en 1 et $g'(1)=-2\pi$.

CALCUL DE FONCTIONS DERIVEES

EXERCICE 3

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(h)}{h}=1$; $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(h)-1}{h}=0$

2. Démontrons que pour $x\neq x_0$, $\dfrac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\sin(x_0)\dfrac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x_0)\dfrac{\sin(h)}{h}$

$$\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}=\frac{\sin x_0\cosh+\cos x_0\sinh-\sin x_0}{h}$$

$$\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sin x_0(\cosh-1)+\cos x_0\sinh}{h}=\frac{\sin x_0(\cosh-1)}{h}+\frac{\cos x_0\sin(h)}{h}$$

$$\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\sin x_0\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos x_0\frac{\sin(h)}{h}$$

3. Déduisons la dérivée de la fonction $x\mapsto \sin(x)$.

Pour tout x_0 appartenant à IR,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(\sin x_0\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos x_0\frac{\sin(h)}{h})$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(\sin x_0\frac{\cos(h)-1}{h})+\lim_{x\to x_0}(\cos x_0\frac{\sin(h)}{h})$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\sin x_0\lim_{x\to x_0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos x_0\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(h)}{h}=\sin x_0\times 0+\cos x_0\times 1=\cos x_0.$$

Pour tout x_0 appartenant à IR, $-1\leq\cos x_0\leq 1$, donc $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.

$\cos x_0$ est le nombre dérivé en x_0 de la fonction $x\mapsto\sin(x)$.

Donc la dérivée de la fonction $x\mapsto\sin(x)$ est la fonction $x\mapsto\cos(x)$.

EXERCICE 4 : Calculons la fonction dérivée :

a) $f'(x)=\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)'=3x^2+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=3x^2-\dfrac{1}{x^2}$

b) $f'(x)=\left[x^3\left(x^2+4\right)\right]'=3x^2\left(x^2+4\right)+x^3(2x)=3x^4+12x^2+2x^4=5x^4+12x^2$

c) $f'(x)=\left[\sin x.\cos x\right]'=\cos x.\cos x+\sin x(-\sin x)=(\cos x)^2-(\sin x)^2$

d) $f'(x)=\left[5\left(\sqrt{x}\right)\right]'=5\left(\sqrt{x}\right)'=5\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

e) $f'(x)=\left[\dfrac{x}{3}\right]'=\dfrac{1}{3}(x)'=\dfrac{1}{3}\times 1=\dfrac{1}{3}$

$f'(x)=\left[7\left(x^2-1\right)\right]'=7\left(x^2-4\right)'=7(2x)=14x$

$f'(x)=\left[2x^3-3x^2+6x-7\right]'=6x^2-6x+6$

$f'(x)=\left[x^{17}\right]'=17x^{16}$

$f'(x)=\left[\left(x^2-3x+1\right)^{10}\right]'=10\left(x^2-3x+1\right)'\left(x^2-3x+1\right)''=10(2x-3)\left(x^2-3x+1\right)''$

$f'(x)=\left[\sin^3 x.\cos^2 x\right]'=\left[\sin^3 x\right]'\cos^2 x+\sin^3 x\left[.\cos^2 x\right]'$

$=\left(3\cos x\sin^2 x\right).\cos^2 x+\sin^3 x.(-2\sin x\cos x)$

$=\left(3\cos^3 x\sin^2 x\right)+\left(-2\sin^4 x\cos x\right)$

$=3\cos^3 x\sin^2 x-2\sin^4 x\cos x$

EXERCICE 5 : Calculons la fonction dérivée

a) $f'(x)=\left(\frac{1}{x^2+3x-2}\right)'=\frac{-\left(x^2+3x-2\right)'}{\left(x^2+3x-2\right)^2}=\frac{-(2x+3)}{\left(x^2+3x-2\right)^2}=\frac{-2x-3}{\left(x^2+3x-2\right)^2}$

b) $f'(x)=(2x-1)'+\left(\frac{3}{4x^2+1}\right)'=2+3\frac{-\left(4x^2+1\right)'}{\left(4x^2+1\right)^2}=2+3\frac{-8x}{\left(4x^2+1\right)^2}=2-\frac{24x}{\left(4x^2+1\right)^2}$

c) $f'(x)=\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)'=\frac{-\left(x\sqrt{x}\right)'}{\left(x\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-\left[(x)'.\sqrt{x}+x.\left(\sqrt{x}\right)'\right]}{(x)^2\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-\left[1\times.\sqrt{x}+x.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]}{x^2x}$

$=\frac{-\left[\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right]}{x^3}=\frac{-\left[\frac{2x+x}{2\sqrt{x}}\right]}{x^3}=\frac{-\left[\frac{3x}{2\sqrt{x}}\right]}{x^3}=-\frac{3x}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{x^3}=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

d) $f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}}\right)'=\frac{-\left(\sqrt{4x-1}\right)'}{\left(\sqrt{4x-1}\right)^2}=\frac{-\frac{4}{2\sqrt{4x-1}}}{4x-1}$

$=-\frac{4}{2\sqrt{4x-1}}\times\frac{1}{4x-1}=-\frac{4}{2(4x-1)\sqrt{4x-1}}=-\frac{2}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$

e) $f'(x)=\left[\sin(-2x+10)\right]'=-2\cos(-2x+10)$

f) $f'(x)=\left[\cos 7x.\sin(-3x+1)\right]'$

$=(\cos 7x)'.\sin(-3x+1)+\cos 7x.\left[\sin(-3x+1)\right]'$

$=(-7\sin 7x).\sin(-3x+1)+\cos 7x.\left[-3\cos(-3x+1)\right]$

$=-7\sin 7x.\sin(-3x+1)-3\cos 7x.\cos(-3x+1)$

g) $f'(x)=\left[\cos^2(5x-1)\right]'=\left[\left(\cos(5x-1)\right)^2\right]'=2\left[\cos(5x-1)\right]'.\cos(5x-1)$

$=2\left[-5\sin(5x-1)\right].\cos(5x-1)=-10\sin(5x-1).\cos(5x-1)$

TANGENTE EN UN POINT A UNE COURBE

EXERCICE 6

Coefficient directeur de chacune des droites d'équations respectives :

a) $2x - 6y + 5 = 0$ (D_1) *équivaut à* $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}$ donc le coefficient directeur de D_1 est $\frac{1}{3}$.

b) $x - 2 = 0$ (D_2) *équivaut à* $x = 2$ donc il n'y a pas de coefficient directeur.

c) $3y + 4 = 0$ (D_3) *équivaut à* $y = \frac{-4}{3}$ donc le coefficient directeur est 0.

d) $y = -4x + 5$ (D_4). Le coefficient directeur est – 4.

EXERCICE 7

1) Equation de la droite passant par A (-2 ; 7) et de coefficient directeur $\sqrt{3}$.

L'équation est de la forme : $y=\sqrt{3}x+b$

Déterminons b

$y = 7$ et $x = -2$ d'où $7=\sqrt{3}\times(-2)+b$ *donc* $b = 7 + 2\times\sqrt{3} = 7 + 2\sqrt{3}$

Donc $y=\sqrt{3}x+7+2\sqrt{3}$

2) Equation de la droite passant par B (5 ; 3) et parallèle à la droite d'équation 3x-2y+7=0.

Les deux droites ont le même coefficient directeur $a=\frac{3}{2}$.

$y=\frac{3}{2}x+b$

Déterminons b

$3=\frac{3}{2}\times 5+b$ *donc* $b=3-\frac{3}{2}\times 5=3-\frac{15}{2}=\frac{6-15}{2}=-\frac{9}{2}$

Donc $y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$

EXERCICE 8

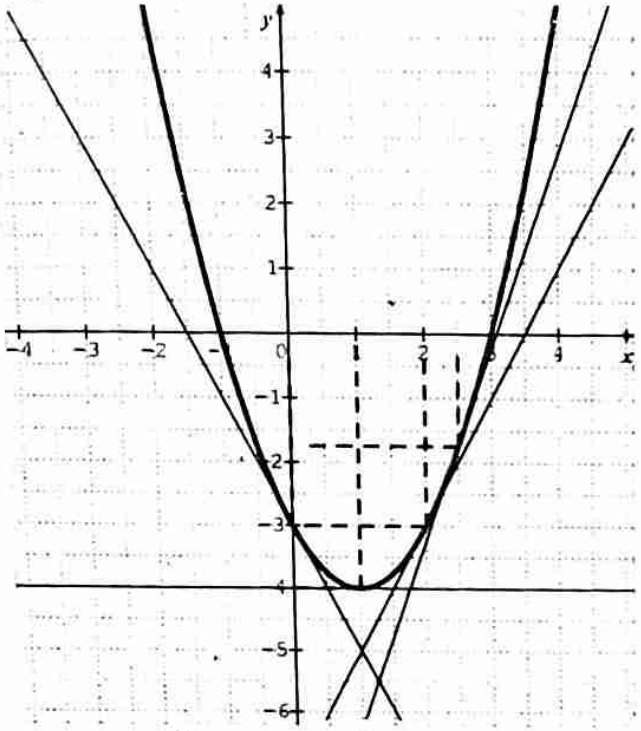
$f(x) = x^2 - 2x - 3$

a) $f'(x) = 2x - 2$

Calculons le nombre dérivé de f en 0 ; 1 ; 2 ; $\frac{5}{2}$.

- $f'(0) = 2\times0 - 2 = -2$
- $f'(1) = 2\times1 - 2 = 0$
- $f'(2) = 2\times2 - 2 = 2$
- $f'(\frac{5}{2}) = 2\times\frac{5}{2} - 2 = 3$

b) Construction des tangentes.



c) Equation des tangentes : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

- En 0 : $f'(0) = -2$ et $f(0) = -3$

  $y = -2(x-0) - 3$ d'où $y = -2x - 3$

- En 1 : $f'(1) = 0$ et $f(1) = -4$

  $y = 0(x-0) - 4$ d'où $y = -4$

- En 2 : $f'(2) = 2$ et $f(2) = -3$

  $y = 2(x-2) - 3$ d'où $y = 2x - 7$

- En $\frac{5}{2}$: $f'(\frac{5}{2}) = 3$ et $f(\frac{5}{2}) = -\frac{7}{4}$

  $y = 3(x-\frac{5}{2}) - \frac{7}{4}$ d'où $y = 3x - \frac{37}{4}$

EXERCICE 9 : $f'(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 4$

a) Pour montrer que (C_f) admet deux tangentes de coefficient directeur 6, il faut montrer que l'équation $f'(x) = 6$ admet deux solutions.

$f'(x)=6$ équivaut à $6x^2-2x+2=6$. C'est-à-dire $6x^2-2x-4=0$ donc $3x^2-x-2=0$

$\Delta=1^2-4\times3\times(-2)=1+24=25>0$ donc $\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$

donc (C_f) admet 2 tangentes de coefficient directeur 6 aux points d'abscisses:

$x_1=\frac{1-5}{6}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$ et $x_2=\frac{1+5}{6}=\frac{6}{6}=1$

b) Equation des tangentes $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

• Pour $x=\frac{-2}{3}$: $f'(\frac{-2}{3})=6$ $f(\frac{-2}{3})=2\times\frac{-8}{27}-\frac{4}{9}+2\times\frac{-2}{3}-4=\frac{172}{27}$

$y=f'(\frac{-2}{3})(x+\frac{2}{3})+f(\frac{-2}{3})=6(x+\frac{2}{3})+\left(\frac{-172}{27}\right)$ On a $y=6x-\frac{64}{27}$

• Pour $x=1$ $f'(1)=6$ $f(1)=2\times1-1+2\times1-4=-1$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=6(x-1)+(-1)$ On a $y=6x-7$

EXERCICE 10 $f(x)=ax^2+bx+c$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

a) Déterminons a, b et c.

(P) passe par le point A (0; 4) donc $f(0)=4$ équivaut à $a\times0^2+b\times0+c=4$.

Donc $c=4$

(P) passe par le point B (2; -1) donc $f(2)=-1$ équivaut à $a\times2^2+b\times2+c=-1$

ce qui donne $4a+2b+4=-1$ donc $4a+2b=-5$ (1)

La tangente à (P) au point B (2; -1) est parallèle à la droite (OI) donc $f'(2)=0$.

C'est-à-dire $2a\times2+b=0$ ce qui donne $4a+b=0$. Donc $4a=-b$ (2)

(1) et (2) donnent $b=-5$; $a=\frac{5}{4}$

Finalement : $a=\frac{5}{4}$; $b=-5$ et $c=4$

b) Tracé de P et des tangentes à (P) aux points A et B

$f(x)=\frac{5}{4}x^2-5x+4$

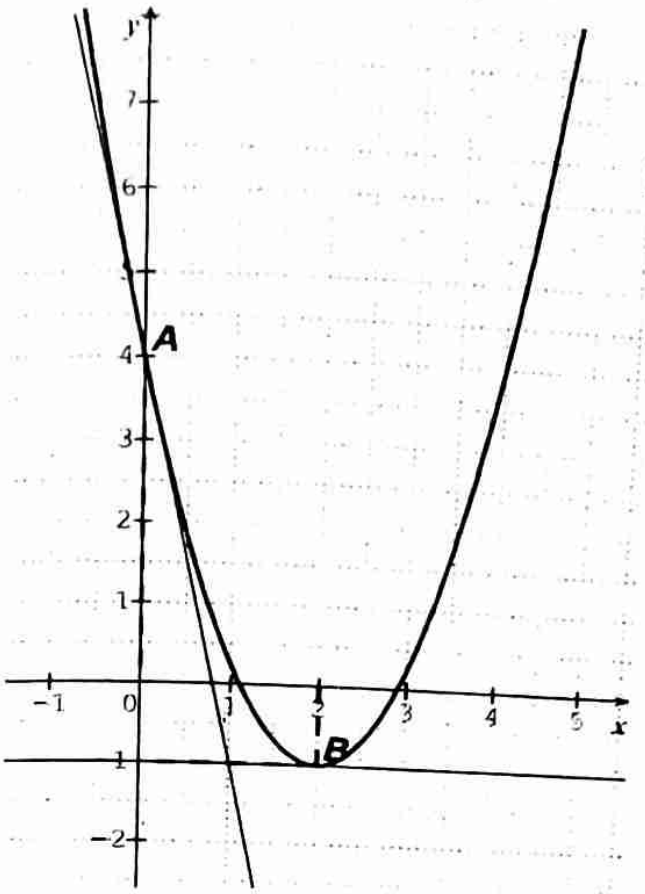
$f'(x)=\frac{5}{2}x-5$; $f'(0)=\frac{5}{2}\times0-5=-5$; $f'(2)=\frac{5}{2}\times2-5=0$

Equation de la tangente en A (0; 4) :

(T_A) : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-5(x-0)+4$ donc $y=-5x+4$

Équation de la tangente en B (2; -1) :

(T_B): $y = f'(2)(x-2)+f(2) = 0(x-2)-1$ *donc* $y=-1$



c) Calcul des coordonnées du point d'intersection de ces tangentes.

On a : (T_A): $y=-5x+4$ et (T_B): $y=-1$

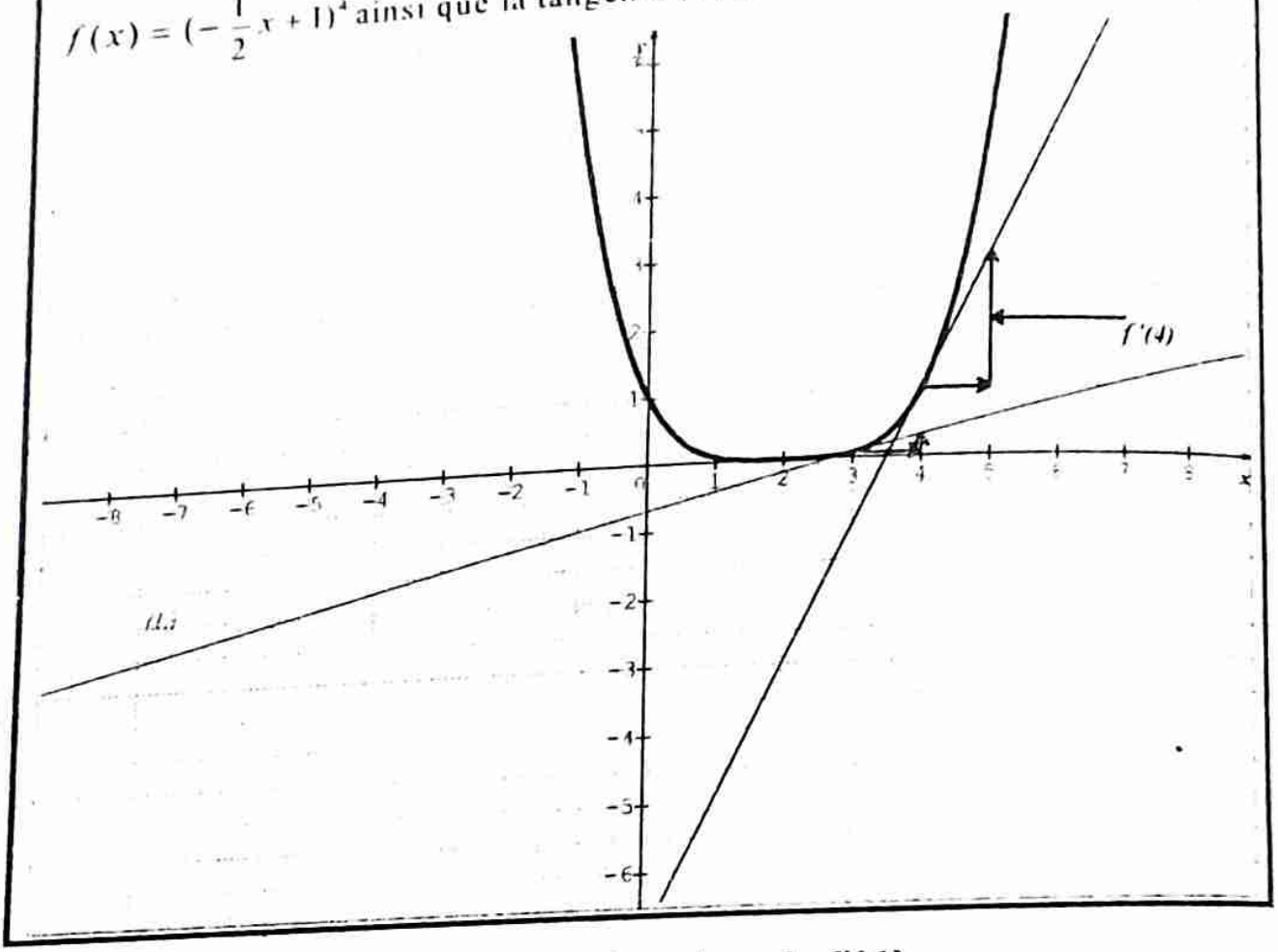
L'abscisse du point d'intersection des tangentes (T_A) et (T_B) vérifie l'équation :

$-5x+4=-1$ ce qui équivaut à $-5x=-5$ soit $x=1$

Le point d'intersection des tangentes (T_A) et (T_B) a donc pour coordonnées (1 ;-1)

EXERCICE 11

Sur le graphique sont représentées la courbe Cf de la fonction f définie sur IR par $f(x) = (-\frac{1}{2}x + 1)^4$ ainsi que la tangente (T) à Cf au point d'abscisse $x_0 = 4$.



1. Donnons par lecture graphique la valeur de f'(4).

La tangente (T) à la courbe au point d'abscisse 4 a pour coefficient directeur f'(4).

Donc le vecteur de coordonnées (1 ; f'(4)) est vecteur directeur de la tangente (T).

sur la figure, f ' (4)=2.

2. Calculons f ' (3).

Calculons d'abord la fonction dérivée f' de f.

Pour tout x dans IR, $f'(x) = ((-\frac{1}{2}x+1)^4)' = 4(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}x+1)^3 = -2(-\frac{1}{2}x+1)^3$.

$f'(3) = -2(-\frac{1}{2}\times 3+1)^3 = -2(-\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{4}$

Pour la construction de la tangente (L), nous allons construire le vecteur directeur de (L) de coordonnées $(1 ; \frac{1}{4})$ à partir du point (3 ; f(3))=$(3 ; \frac{1}{16})$.

ETUDE DES VARIATIONS D'UNE FONCTION

EXERCICE 12

La fonction h est définie sur IR* par $h(x) = x-2+\frac{4}{x}$

1. Calculons la dérivée h' de h.

$$h'(x) = (x-2+\frac{4}{x})' = (x-2)'+(\frac{4}{x})' = 1+\frac{0\times x-1\times 4}{x^2} = 1-\frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

Etudions le signe de h' :

Pour tout x non nul, $x^2>0$. Donc le signe de h'(x) est celui de (x+2)(x-2).

Pour x ∈.]-∞ ; -2[∪]2 ; +∞[, h'(x)> 0 ; Pour x ∈]-2 ;0[∪]0 ;2[, h'(x) <0 ;

Pour x∈ {−2; 2}, h'(x) = 0.

2. Etudions les variations de h.

Pour x ∈.]-∞ ; -2[∪]2 ; +∞[, h'(x)> 0 donc h est strictement croissante sur .]-∞ ; -2[et sur]2 ; +∞[, Pour x ∈]-2 ;0[∪]0 ;2[, h'(x) <0 donc h est stictement décroissante sur]-2 ;0[et sur]0; 2[.

EXERCICE 13

$$f(x)=x^3-4x^2+4x$$

1. Calculons la dérivée f ' de f.

$$f'(x)=(x^3-4x^2+4x)'=(x^3)'-(4x^2)'+(4x)'=3x^2-4\times 2x+4=3x^2-8x+4$$

2. Etudions le signe de f '.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = 3x^2-8x+4$. Le discriminant f' est Δ = 64-4×4×3=16.

Les zéros de f' sont donc $x_1 = \frac{8+4}{6} = 2$ et $x_2 = \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}$.

Pour $x \in \left]-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup[2;+\infty[$ f'(x) est positif car de même signe que 3 ;

pour $x \in \left[\frac{2}{3};2\right]$ f'(x) est négatif car de signe contraire de 3.

3. Etudions les variations de f.

f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right] et [2;+\infty[$ et f est décroissante sur $\left[\frac{2}{3};2\right]$.

EXERCICE 14

f est une fonction de $]-\pi;\pi[$ vers IR telle que f(x)= tan(x).

L'ensemble de définition Df.

tan(x) existe si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Donc Df= $\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

1. Calculons la dérivée f ' de f.

Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

2. Etudions les variations de f.

Pour tout x appartenant à Df, $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$. Donc $f'(x) > 0$.

f est donc croissante sur chacune des intervalles $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

Dressons le tableau de variation de f.

Calculons les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

$\lim\limits_{x \to -\pi} \tan(x) = \tan(-\pi) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin(x) = -1$. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$ et pour $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$,

$\cos(x) < 0$. Donc $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$ et pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\cos(x) > 0$.

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$

Par les mêmes raisonnements, on arrive à expliquer que :

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi} \tan(x) = 0$.

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	+		+		+		
$f(x)$	0	↗	$+\infty$	↗	$-\infty$	↗	0

EXTREMUM LOCAL ET OPTIMISATION

EXERCICE 15

Recherche des extremums locaux des fonctions.

a) $f(x)=x^3-6x^2+2 \qquad D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$ *équivaut à* $3x(x-4)=0$. *C'est-à-dire* $3x=0$ *ou* $x-4=0$. *Ce qui donne* $x=0$ *ou* $x=4$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	2	↘	-30	↗	

$f'(x)$ s'annule et change de signe en 0 et en 4. $f(0)=2$ et $f(4)=-30$

On déduit que : 2 est un maximum relatif de f et -30 est un minimum relatif de f.

b) $f(x)=3x^4-4x^3 \qquad D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$ *équivaut à* $12x^2(x-1)=0$. *C'est-à-dire* $12x^2=0$ *ou* $(x-1)=0$. *Donc* $x=0$ *ou* $x=1$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$		↘		↘	-1	↗	

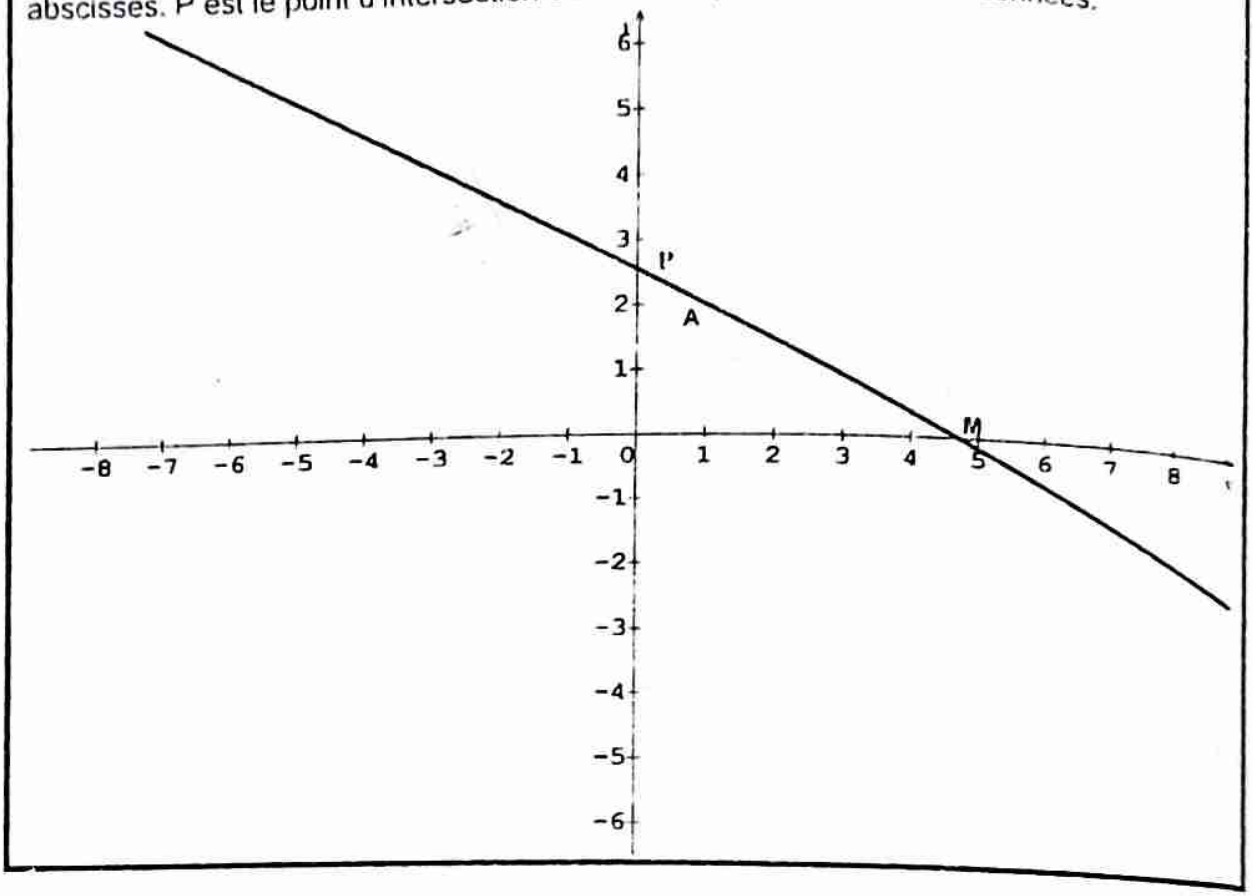
$f'(x)$ s'annule en 0 mais n'y change pas de signe ; f n'admet pas d'extremum en 0.

$f'(x)$ s'annule et change de signe en 1.

$f(1)=-1$ donc -1 est un minimum relatif de la fonction f.

EXERCICE 16

Dans le repère orthonormé, A (1; 2) et M un point d'abscisse x supérieur à1 de l'axe des abscisses. P est le point d'intersection de la droite (AM) et l'axe des ordonnées.



1) Démontrons que l'ordonnée de P est $\frac{2x}{x-1}$

x est l'abscisse de M et y l'ordonnée de P. Les points M(x :0), A(1 :2) et P(0 :y) sont alignés. Ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} -1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Ce qui équivaut à $(x-1)(y-2)-(-1)(-2)=0$. Ce qui revient à dire $y(x-1)-2(x-1)-2=0$.

C'est-à-dire $y(x-1)-2x=0$. Finalement l'ordonnée de P est $y=-\frac{2x}{x-1}$, avec $x>1$.

2) Démontrons que l'aire du triangle OMP est $\frac{x^2}{x-1}$

L' aire du triangle OMP rectangle en O est $\frac{OM\times OP}{2}=\frac{x\times\frac{2x}{x-1}}{2}=\frac{2x^2}{2(x-1)}=\frac{x^2}{x-1}$.

3. a) Etudions les variations de la fonction f définie sur]1 ;+∞[par $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x-1}\right)'=\frac{(x^2)'(x-1)-(x-1)'(x^2)}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-1x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Comme le dénominateur est positif, le signe de f' est celui de x^2-2x ' es zéros sont 0 et 2.Donc pour $x\in[1;2]$, f'(x) est négatif (signe contraire de 1) ; et pour $x\in[2;+\infty[$, f'(x) est positif (du signe de 1) . Ainsi, f est croissante sur $[2;+\infty[$, et décroissante sur]1 ;2].

b) Déterminons la position de M pour que l'aire soit minimale.

L'aire du triangle OMP est donnée en fonction de l'abscisse x du point M par $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Dressons le tableau de variations de f.

Calculons les limites de f(x) aux bornes de Df.

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ $\lim_{x\to 1} x^2=1$ $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ et pour $x>1$, $x-1>0$. Donc, $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$f(2)=\frac{2^2}{2-1}=4$$

x	1		2		+∞
f'(x)	‖	−	0	+	
f(x)	‖ +∞	↘	4	↗	+∞

D'après le tableau de variation, l'aire est minimale lorsque le point M a pour abscisse 2. Et cette aire minimale est 4.

EXERCICE 17

1) Démontrons que y=2-x.

Le périmètre du rectangle est égal à 4, donc 2(x+y)=4. ce qui veut dire que x+y=2.

C'est-à-dire y=2-x.

Déduisons-en que $x\in]0;1]$.

La longueur du rectangle y est supérieure ou égale à la largeur x et x n'est pas nul.

Ce qui signifie que y ≥ x. C'est-à-dire 2-x ≥ x. Ce qui équivaut à 2 ≥ 2x. Et donc 1 ≥ x.

Comme x est strictement positif, alors $x \in]0;1]$.

2) Démontrons que $S = -x^2+x$.

L'aire du rectangle est égale au produit de x par y. Donc $S= xy=x(2-x)=2x-x^2 = -x^2 +2x$.

3) Démontrons que pour tout $x \in [0;1] \in [0;1]$, $h'(x) \geq 0$.

$h'(x) = (-x^2 + 2x)'= -2x+2$.

$x \in [0;1]$ équivaut à $0 \leq x \leq 1$. Ce qui donne $-2 \leq -2x \leq 0$ et enfin $0 \leq -2x+2 \leq 2$.

Ainsi, pour tout $x \in [0;1]$, on a $0 \leq h'(x) \leq 2$, donc $h'(x) \geq 0$. Par conséquent la fonction h est croissante sur [0 ;1].

x	0	1
$h'(x)$	+	
$h(x)$	0	1

$h(0)=-0^2+2x0 = 0$: $h(1)=-1^2+2x1=-1+2=1$.

3) Déduisons les dimensions du rectangle pour que l'aire soit maximum.

D'après le tableau de variation, l'aire est maximum lorsque $x = 1$.

Et $y = 2- x = 2-1=1$.

En conclusion l'aire du rectangle est maximum lorsque le rectangle est un carré de côté 1cm.

EXERCICES DE SYNTHESE

EXERCICE 18 $f(x)=x^3+3x-7$

1) calcul de $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)=3x^3+3=3(x^2+1)$

2) Etude du sens de variation.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)=3(x^2+1)>0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$
$f'(x)$	$+\infty$
$f(x)$	$+$

4) Calcul de $f(1)$ et $f(2)$

$f(1)=1^3+3\times1-7=4-7=-3$

$f(2)=2^3+3\times2-7=8+6-7=7$

5) f est continue et strictement croissante sur $]1;2[$ et $f(1)\times f(2)<0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $]1;2[$.

6) Valeur approchee de α a 10^{-2} près.

Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} par la méthode de balayage.

x	1.0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f(x)	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+

Donc $1,3 < \alpha < 1,4$

x	1,3	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,38	1,39	1,40
f(x)	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+

Donc $1,33 < \alpha < 1,34$, par conséquent une valeur approchée de α à 10^{-2} près est 1,33 .

EXERCICE 19

$h(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

1. Calculons la dérivée h' de h.

Pour $x\neq1$, on a :

$$h'(x)=\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)'=\frac{(2x+3)'(x-1)-(x-1)'(2x+3)}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)-1(2x+3)}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{-5}{(x-1)^2}$$

2. Calculons les coordonnées du point A.

A (x ;y) est sur l'axe des abscisses donc son ordonnee est y=0. On a donc $\frac{2x+3}{x-1}=0$

Ce qui équivaut à $2x+3=0$. C'est-à-dire $x=-\frac{3}{2}$. Donc $A(-\frac{3}{2};0)$.

Ecrivons une équation de la tangente (T1).

(T1) a une équation de la forme : $y=(x-(-\frac{3}{2}))h'(-\frac{3}{2})+h(-\frac{3}{2})$.

$h'(-\frac{3}{2})=\frac{-5}{(-\frac{3}{2}-1)^2}=\frac{-5}{(-\frac{5}{2})^2}=\frac{-5}{\frac{25}{4}}=-5\times\frac{4}{25}=-\frac{4}{5}$ et $h(-\frac{3}{2})=0$.

Ce qui donne : $y=(x+\frac{3}{2})\times(-\frac{4}{5})+0$. Une équation de (T1) est : $y=-\frac{4}{5}x-\frac{6}{5}$.

Calculons les coordonnées de B.

B(x ;y) est un point de l'axe des ordonnées, donc x=0. Puisque $B\in(Ch)$, alors y = h(0).

y = -3. Le couple de coordonnées de B est (0 ;-3).

Ecrivons une équation de (T2).

(T2) a une équation de la forme : y=(x-(0))h'(0)+h(0).

h'(0)= -5 et h(0)=-3. On a donc y=-5x-3. Une equation de (T2) est : y =-5x-3

EXERCICE 20

1. Résolvons dans IR^3 le système (S) : $\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 8x+4y+2z=-2 \\ 27x+9y+3z=0 \end{cases}$

(S) équivaut à $\begin{cases} x+y+z=-4 & l_1 \\ 4x+2y+z=-1 & l_2 \\ 9x+3y+z=0 & l_3 \end{cases}$ En utilisant la méthode du pivot de Gauss on a

(S) équivaut à $\begin{cases} x+y+z=-4 & l_1'=l_1 \\ 0-2y-3z=15 & l_2'=l_2-4l_1 \\ 0-6y-8z=36 & l_3'=l_3-9l_1 \end{cases}$

(S) équivaut à $\begin{cases} x+y+z=-4 & l_1' \\ -2y-3z=15 & l_2' \\ z=-9 & l_3'-3l_2' \end{cases}$ En remplaçant z par sa valeur -9 dans les premières lignes on a : (S) equivaut à $\begin{cases} x+y-9=-4 \\ -2y-3(-9)=15 \\ z=-9 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x+y-9=-4 \\ y=6 \\ z=-9 \end{cases}$

Finalement (S) équivaut à $\begin{cases} x=-1 \\ y=6 \\ z=-9 \end{cases}$.

$S_{IR3}=\{(-1;6;-9)\}$

2. **Traduisons les égalités :**

On a $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, avec g(1)=0 ; g(2)=2 et g(3)=4.

g(1)=0 équivaut à $a+b+c+d=0$; g(2)=2 équivaut à $a\times2^3+b\times2^2+c\times2+d=2$, c'est-à-dire 8a+4b+2c+d=2 ; g(3)=4 équivaut à $27a+9b+3c+d=4$

3. **Démontrons à l'aide de 1) que** $g(x)=-x^3+6x^2-9x+4$

Soit (Z) le système formé par les trois équations : (Z) : $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=2 \\ 27a+9b+3c+d=4 \end{cases}$

(Z) équivaut à $\begin{cases} a+b+c=-d \\ 8a+4b+2c=2-d \\ 27a+9b+3c=4-d \end{cases}$. En prenant d=4 on a :

(Z) équivaut à $\begin{cases} a+b+c=-4 \\ 8a+4b+2c=-2 \\ 27a+9b+3c=0 \end{cases}$. D'après 1) on a : a=-1, b=6 et c=-9.

En conclusion, $g(x)=-x^3+6x^2-9x+4$.

4. a) Calculons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

La limite de g en $-\infty$ c'est $\lim_{x\to-\infty}(-x^3) = -\lim_{x\to-\infty} x^3 = -1\times(-\infty) = +\infty$

La limite de g en $+\infty$ est la limite de $-x^3$ en $+\infty$. Donc La limite de g en $+\infty$ est $-\infty$.

b) Déterminons g'(x) puis étudions son signe.

$$g'(x)=(-x^3+6x^2-9x+4)'=-3x^2+6\times2x-9=-3x^2+12x-9$$

Pour étudier le signe de g'(x) trouvons les zéros. La somme des coefficients de g'(x) est : -3+12-9=0. donc 1 est un zéro de g'(x). g'(x) s'écrit alors -3(x-1)(ax+b).

Dans l'écriture de g'(x), le coefficient de x^2 est -3 et le terme constant est -9. donc a=1 et b=-3. Donc g'(x)=-3(x-1)(x-3). Les zéros du polynôme de degré 2, g'(x), sont 1 et 3.

g'(x) est négatif (signe de -3) sur $]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ et g'(x) est positif (signe contraire de -3) sur $]1;3[$.

c) Dressons le tableau de variations de g.

g(1)= 0 ; g(3)=4

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	0	-	
g(x)	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Les extremums relatifs de g sont :

0 est un minimum relatif et 4 est maximum relatif.

4. a) Calculons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

La limite de g en $-\infty$ c'est $\lim_{x\to-\infty}(-x^3) = -\lim_{x\to-\infty} x^3 = -1\times(-\infty) = +\infty$

La limite de g en $+\infty$ est la limite de $-x^3$ en $+\infty$. Donc La limite de g en $+\infty$ est $-\infty$.

b) Déterminons g'(x) puis étudions son signe.

$$g'(x)=(-x^3+6x^2-9x+4)'=-3x^2+6\times2x-9=-3x^2+12x-9$$

Pour étudier le signe de g'(x) trouvons les zéros. La somme des coefficients de g'(x) est : -3+12-9=0. donc 1 est un zéro de g'(x). g'(x) s'écrit alors -3(x-1)(ax+b).

Dans l'écriture de g'(x), le coefficient de x^2 est -3 et le terme constant est -9, donc a=1 et b=-3. Donc g'(x)=-3(x-1)(x-3). Les zéros du polynôme de degré 2, g'(x), sont 1 et 3.

g'(x) est négatif (signe de -3) sur $]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ et g'(x) est positif (signe contraire de -3) sur]1 ;3[.

c) Dressons le tableau de variations de g.

g(1)= 0 ; g(3)=4

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
g'(x)	-	0	+ 0	-
g(x)	$+\infty$ ↘	0	↗ 4	↘ $-\infty$

Les extremums relatifs de g sont :

0 est un minimum relatif et 4 est maximum relatif.

ETUDE DE FONCTIONS



René DESCARTES, le plus célèbre mathématicien français, est né le 31 mars 1596.

A 20 ans, il accède à la *faculté de Poitiers* pour y étudier le Droit et obtient une licence.
De 1629 à 1633, **DESCARTES** écrit ***"Le Monde"***. Il y présente une théorie physique de l'Univers et affirme pouvoir démontrer scientifiquement l'existence de Dieu.
En 1637, il publie ***La géométrie*** où **DESCARTES** présente en particulier des constructions à la règle et au compas de la multiplication et de la division en s'appuyant sur le théorème de Thalès.
La même année, il publie ***Le Discours de la Méthode*** dans lequel il explique les ***Règles pour la conduite de l'esprit humain.***
Citons également son célèbre : ***"Je pense, donc je suis"***

L'empreinte que nous laisse **DESCARTES** dans l'univers des sciences est considérable. C'est lui qui met en place les notations modernes que nous connaissons en algèbre, comme par exemple l'exposant pour les puissances. Il propose d'utiliser les premières lettres de l'alphabet (a, b ou c) pour des quantités connues et les dernières (x, y ou z) pour les inconnues.

Descartes est aussi à l'origine du repère du plan.
On parle de ***repère cartésien***.
Une anecdote raconte qu'observant une mouche qui se promenait sur les carreaux d'une fenêtre, il aurait pensé à définir, à l'aide des carreaux, des coordonnées du plan. **DESCARTES** explique ainsi qu'il est possible de traiter les problèmes de géométrie en problèmes numériques.
Cette géométrie porte aujourd'hui un nom : **la géométrie analytique**.

Pour étudier les propriétés d'une courbe, il passe par une équation déterminée par une relation liant ses coordonnées. Celle-ci contient implicitement toutes les propriétés de la courbe.

L'oeuvre philosophique que laisse **DESCARTES** est considérable et exprime une nouvelle approche des sciences et des mathématiques en particulier.
Pour Descartes, un scientifique ne reconnaît comme vrai que ce qui est clairement démontré.
La résolution d'un problème se fait consciencieusement, étape par étape, sans rien négliger. On voit là naître un esprit nouveau, qu'on qualifiera plus tard de « ***cartésien*** » c'est-à-dire qui présente des qualités de clarté, de logique et de méthode.
Le 11 février 1650, à Stockholm, **DESCARTES** meurt d'une infection pulmonaire à l'âge de 53 ans.
Notons enfin que le village natal de **DESCARTES**, la Haye, a été rebaptisé au nom de « ***Descartes*** ».
Ce n'est pas ordinaire tout de même. Imaginez une seule seconde que la ville où vous êtes né, prenne un jour votre nom !!!

FICHE DE COURS

Notion de bijection

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle [a, b].

• Si, pour tout x ∈] a, b [, f '(x) > 0, alors f réalise une bijection strictement croissante de [a, b] sur [f(a), f(b)].

• Si, pour tout x ∈] a, b [, f '(x) < 0, alors f réalise une bijection strictement décroissante de [a, b] sur [f(b), f(a)].

Remarque :

• On peut remplacer f (a) par $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et [a, b] par] a, b], [f (a), f (b)] par] $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, f (b)], lorsque f n'est pas définie en a mais admet en a une limite (finie ou infinie).

• Si f^{-1} est la bijection réciproque, alors f^{-1} a le même sens de variation que f.

Plan d'étude d'une fonction

• Ensemble de définition D_f.

• Eventuelle parité ou périodicité (pour réduire l'ensemble d'étude).

• Limites ou valeurs de f aux bornes des intervalles constituant D_f et éventuelles asymptotes.

• Existence et détermination de f ' (en utilisant les opérations ou la définition) puis signe de f '(x).

• Tableau de variation récapitulant les résultats précédents.

• Recherche éventuelle d'un centre ou d'un axe de symétrie.

• Tracé de la courbe après avoir placé :

- les axes du repère avec la bonne unité ;
- les points particuliers (tangente horizontale ou verticale, intersection avec les axes, ...) ;
- les éventuelles asymptotes.

EXERCICES RESOLUS

FONCTIONS POLYNOMES

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Etudier le sens de variation de f.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Construire (C_f).

EXERCICE 2

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites aux bornes de D_f.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Etudier le sens de variation de f.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer que le point A (-1; -2) est un centre de symétrie.

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Ecrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2.
5. Etudier le sens de variation de f.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Construire (C_f).

FONCTIONS RATIONNELLES

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x-1}{3-2x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f noté D_f.

2. Calculer les limites aux bornes de D_f.

3. Calculer $f'(x)$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

4. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5. Montrer que le point $A\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour (C_f).

6. Construire (C_f).

EXERCICE 5

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{1-x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites aux bornes de D_f.

3. Calculer $f'(x)$.

4. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

5. Montrer que la droite d'équation y = -x + 1 est une asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

6. Résoudre le système dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} y=-x+1 \\ x=1 \end{cases}$.

7. Montrer que le point A (1; 0) est un centre de symétrie de (C_f).

8. Construire (C_f).

EXERCICE 6

Le plan est muni d'un repère orthonorme (O, I, J).

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}$ où $(a, b)\in\mathbb{R}^2$

1. Déterminer a et b pour que la représentation graphique (C_f) de f passe par le point $A\left(\begin{matrix}\sqrt{2}\\2\end{matrix}:2\sqrt{2}-1\right)$ et que la tangente à (C_f) au point A soit parallèle à la droite (OI).

2. Etudier le sens de variation de f et construire (C_f).

EXERCICE 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-2}$

On désigne par D_f l'ensemble de définition de f et par (C_f) sa représentation graphique.

1. a. Etudier le sens de variation de f.

   b. Préciser l'asymptote verticale à (C_f).

   c. Déterminer l'asymptote oblique à (C_f).

   d. Construire (C_f).

2. Montrer que le point d'intersection des asymptotes à (C_f) est un centre de symétrie pour (C_f).

3. Résoudre graphiquement : $x\in\mathbb{R}$, $\frac{x^2+2x-3}{x-2}=m$; où m est un paramètre.

(On donnera le nombre de solutions suivant les valeurs de m).

SHOT ON P15 Dual CAMERA

EXERCICE 8

Partie A :

On considère la fonction définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2-4}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$ la dérivée de f
3. Déterminer a et b pour que (C_f) passe par le point $A\left(0;\dfrac{-5}{4}\right)$ et admette une tangente de coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$

Partie B :

Dans cette partie, on prend a = -2 et b = 5.

1. Etudier les limites aux bornes de D_f.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Déterminer les points d'intersection B et C de (C_f) avec respectivement les axes (OI) et (OJ).
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A\left(0;\dfrac{-5}{4}\right)$.
5. Construire (C_f) et la tangente (T).

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE 9

On veut étudier les variations de la fonction g(x) = 2x - cos(2x) + 4sin(x) sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

On définit une fonction f sur IR par f (x) = 1+ sin(2x) + 2cos(x).

1) vérifier que 2π est la période de f.

2) a)Montrer que le point de la courbe de f d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ est centre de symétrie de (Cf) .

b) Proposer un domaine d'étude de f.

3) a) Montrer que f ' (x) = -2(2sin x - 1)(1+ sin x)

b) En déduire les variations de f.

4) Tracer la courbe de f dans un repère dont l'unité est laissée à votre sagesse.

5) Etudier les variations de g sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 10

1) Soit $P(x) = 2x^2 - x - 1$.

Résoudre dans IR l'équation P(x) = 0, puis étudier le signe de P(x).

2) On appelle f la fonction définie sur IR par $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$.

a) Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$

b) Montrer que $f'(x) = 4\cos 2x - 2\cos x - 2$.

c) Etudier les variations de f sur $[0 ; \pi]$ en utilisant la question 1)

3) Tracer une période de la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, i, j)

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction s'annule pour une unique valeur. En utilisant la méthode du balayage, trouver un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette valeur.

1. $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$
2. $f(x) = 3x^3 + x^2 + 1$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, en utilisant la méthode de dichotomie, trouver un encadrement d'amplitude 0,25 de chacun des zéros de la fonction f.

1. $f(x) = -2x^3 + x^2 + 20x + 12$
2. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}$

EXERCICE 3

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative (C_f) de f soit tangente au point d'abscisse 0 à la droite d'équation $y = 4x + 3$.
2. Pour les valeurs de a et b trouvées à la question 1), démontrer que : pour tout reel x, $f(x) = 3 + \dfrac{4x}{x^2 + 1}$
3. Etudier les variations de f.
4. Démontrer que le point I (0, 3) est un centre de symetrie de (C_f)
5. a. Tracer (C_f) et sa tangente au point I.

   b. En déduire de la courbe (C_f) la représentation graphique de (C_g) telle que g est définie par $g(x) = -f(x)$.

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repere orthonormé.

On considère la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x + 2}$

1. Etudier les variations de f . Puis déterminer l'asymptote verticale de $\left(C_f\right)$.

2. Trouver trois nombres réels a, b, c tel que : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

En déduire que la représentation graphique $\left(C_f\right)$ de f admet une asymptote oblique dont on precisera une équation.

3. Démontrer que le point de concours des asymptotes est un centre de symétrie de $\left(C_f\right)$.

4. Construire $\left(C_f\right)$.

5. Soit (D_m) la droite d'équation : y = mx – 1. Discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de points d'intersection de (D_m) et de $\left(C_f\right)$.

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

On désigne par D_f l'ensemble de définition de f et par $\left(C_f\right)$ sa représentation graphique.

1. a. Etudier le sens de variation de f .

b. Préciser l'asymptote verticale à $\left(C_f\right)$.

c. Construire $\left(C_f\right)$.

2. Montrer que le point d'intersection des asymptotes à $\left(C_f\right)$ est un centre de symétrie pour $\left(C_f\right)$

3. En s'aidant de $\left(C_f\right)$ construire la représentation graphique $\left(C_{f'}\right)$ de la fonction $|f|$.

4. En s'aidant de $\left(C_f\right)$, résoudre graphiquement l'équation $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - m|x| + 1 = 0$ où m est un paramètre.

EXERCICE 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+2}{x-3}$ et (C_f) sa représentation graphique.

a. Etudier le sens de variation de f

b. Trouver les asymptotes à (C_f).

c. Montrer que le point A (3, 2) est centre de symétrie pour (C_f).

2. Soit la fonction numérique g définie par : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in]-\infty;2], \ g(x)=2x-2 \\ \text{Pour tout } x \in]2;+\infty[, \ g(x)=f(x) \end{cases}$

a. Donner l'ensemble de définition de g.

b. Construire la représentation graphique (C_g) de g. (On ne demande pas d'étudier g)

EXERCICE 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Soit la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{2(x-1)}$ et (C_f) sa représentation graphique.

1. Quel est D_f l'ensemble de définition de f ?

2. Etudier le sens de variation de f

3.a. Démontrer que la droite d'équation $y=\frac{1}{2}(x-1)$ est une asymptote à (C_f).

Etudier la position de (C_f) par rapport à cette asymptote.

b. Préciser la deuxième asymptote de (C_f).

4. Construire (C_f).

5. Démontrer que le point I (1, 0) est un centre de symétrie pour (C_f)

EXERCICE 8

1 Déterminer les nombres réel a, b et c pour que la parabole d'equation : $y = ax^2 + bx + c$:

- passe par le point A (0 ; - 3)
- ait un sommet d'abscisse -1
- admette, au point d'abscisse 1, une tangente de coefficient directeur 4.

2 Construire les courbes représentatives (C_f) et (C_g) des fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $g(x) = 1 - x^2$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection B et D de (C_f) et (C_g).

3. Donner une equation de la droite (BD)

4. Etudier graphiquement le signe de : $P(x) = x^2 + 2x - 3 - (1 - x^2)$

EXERCICE 9

1 Déterminer les nombres réels a b et c pour que l'hyperbole (H) d'équation $y = \frac{ax + b}{x + c}$.

- ait le point A (-1; 2) comme centre de symétrie ;
- admette, au point d'abscisse 1, une tangente parallèle à la droite d'équation y = - x.

2 Construire (H).

EXERCICE 10

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \cos 2x$ et (C_h) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Etudier h.

2. Tracer (C_h).

EXERCICE 11

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{2}{x+1}$

et (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Déterminer D_f

2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3. Calculer la dérivée de f.

4. Etudier le sens de variation de f. Puis dresser son tableau de variation.

5. Démontrer que le point $A(-1;\ 1)$ est centre de symétrie de (C_f).

6. Montrer que la droite d'équation $(D): y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ est asymptote à (C_f).

7. Etudier les positions relatives de (C_f) et (D).

8. Tracer (C_f).

EXERCICE 12

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=4x^3-9x^2+6x+1$

1. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2. a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α

b. Vérifier que : $\alpha \in]-1;0[$

3. Démontrer que $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in]-\infty;\alpha[,\ g(x)<0 \\ \text{Pour tout } x \in]\alpha;+\infty[,\ g(x)>0 \end{cases}$

• Sens de variation de f :

$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \in \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[, f'(x)>0, \text{ donc f est strictement croissante sur } \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\\ \text{Pour tout } x \in \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[, f'(x)<0, \text{ donc f est strictement décroissante sur } \left]-\frac{3}{2};+\infty\right[\end{array}\right.$

Pour $x=-\frac{3}{2}$, $f'(x)=0$, *donc* f *admet un extremmum relatif.*

5) Tableau de variation de f :

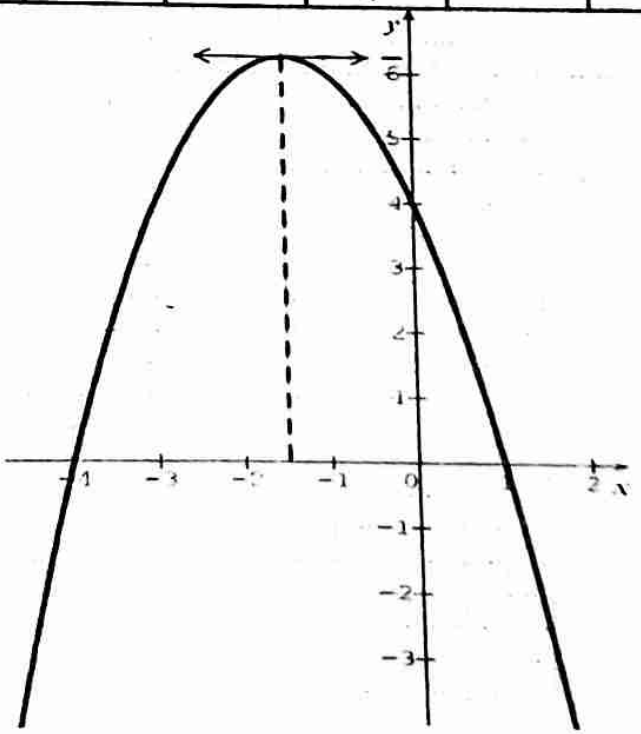
x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{25}{4}$	↘ $-\infty$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{4}$

6) Construction de $\left(C_f\right)$.

Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1
$f(x)$	0	4	6	$\frac{25}{4}$	6	4	0



EXERCICE 2

$f(x)=x^3+3x^2-4$

1) Ensemble de définition de f.

f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$.

2) Limites aux bornes de D_f.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

4) Calcul de $f'(x)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

4) Etude des variations de f.

- Signe de $f'(x)$

$f'(x)=0$ *équivaut à* $3x(x+2)=0$. *C'est – à – dire* $3x=0$ *ou* $x+2=0$. $x=0$ *ou* x

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

- sens de variation de f.

$\forall x\in]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$, $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]0;+$

$\forall x\in]-2;0[$, $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]-2;0[$

Si $x\in\{-2;0\}$, $f'(x)=0$ f admet un extremum relatif

5) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

$f(-2)=0$ $\quad$; $\quad$ $f(0)=-4$

6) Montrons que le point A (-1; -2) est centre de symétrie de la courbe représentative de f.

$(-1-x) \in \mathbb{R}$ et $(-1+x) \in \mathbb{R}$.

Montrons que $f(-1-x)+f(-1+x)=2\times(-2)$

$f(-1-x)=(-1-x)^3+3(-1-x)^2-4=-x^3+3x-2$

$f(-1+x)=(-1+x)^3+3(-1+x)^2-4=x^3-3x-2$

$f(-1-x)+f(-1+x)=-4=2\times(-2)$

Donc le point A (-1 ; -2) est le centre de symétrie de $\left(C_f\right)$.

EXERCICE 3

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

1. Déterminons D_f

f est une fonction polynôme donc elle est définie sur son ensemble de départ. D_f=IR.

2. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$

3. Calculons $f'(x)$

$f'(x)=(x^3-6x^2+12x-7)'=3x^2-12x+12$

4. Ecrivons une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2.

f'(2) = 0. Donc (T) est une tangente horizontale à $\left(C_f\right)$. f(2) = 1, donc (T) a pour équation y = 1.

5. Etudions les variations de f

Etudions le signe de $f'(x)$

$f'(x)=3x^2-12x+12=3(x^2-4x+4)=3(x-2)^2$

Le carré d'un nombre est positif, donc pour tout nombre réel x, f'(x) ≥0.

6. Dressons le ableau de variation de f(x).

f est croissante sur IR car pour tout reel x, f'(x)≥0.

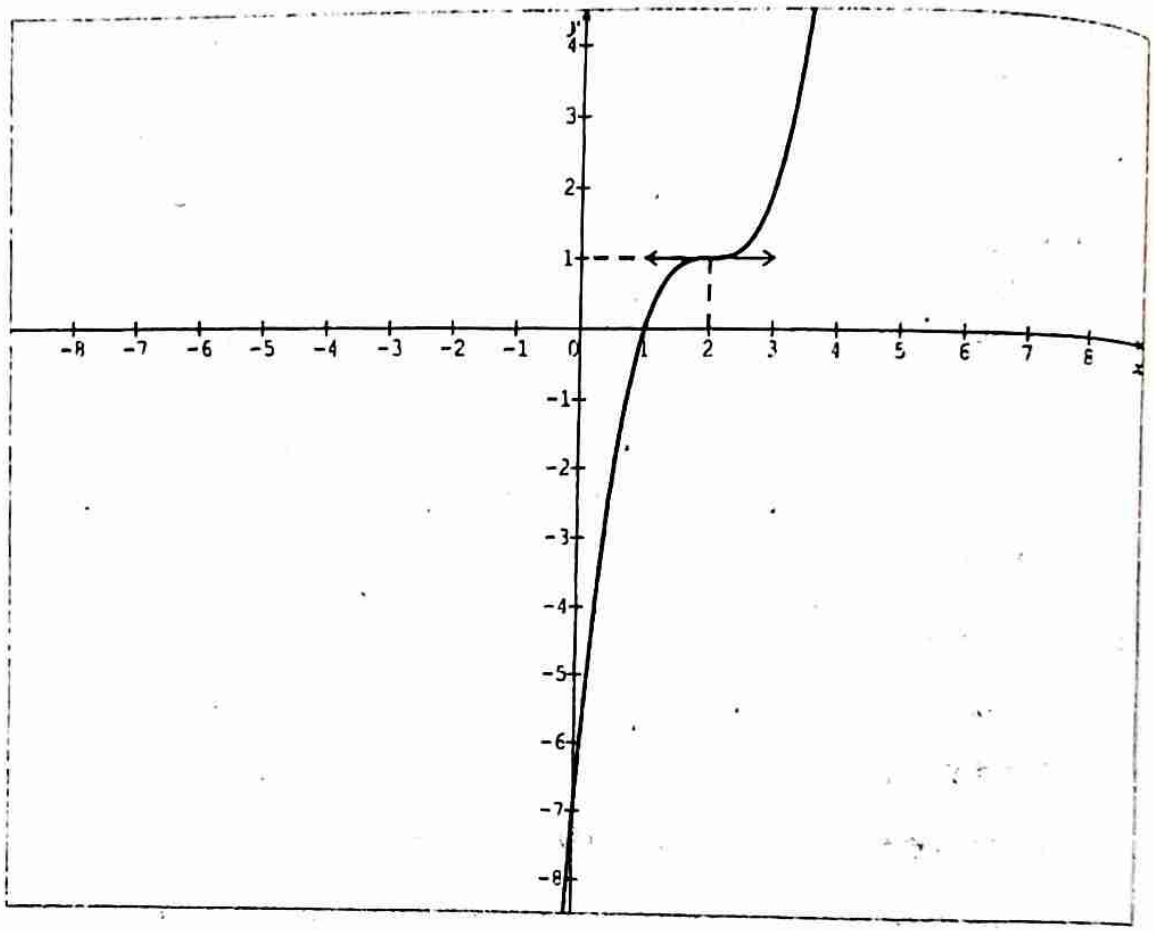
x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)	+	0	+
f(x)	$-\infty$	⟶	$+\infty$

SHOT ON P15
DUAL CAMERA

Construisons (C_f)

Un tableau de valeurs est nécessaire pour construire (C_f)

x	0	1	3
f(x)	-7	0	2



FONCTIONS RATIONNELLES

EXERCICE 4 $f(x)=\dfrac{x-1}{3-2x}$

1) Ensemble de définition de f :

$x \in D_f$ *équivaut à* $3-2x \neq 0$. C'est-à-dire $x \neq \dfrac{3}{2}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

2) Limites aux bornes de D_f :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{-2x} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{-2x} = -\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=+\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} x-1=\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} 3-2x=0 \ \ et \ \ 3-2x>0 \ \ si \ \ x<\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x)=-\infty \quad car \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} x-1=\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} 3-2x=0 \ \ et \ \ 3-2x<0 \ \ si \ \ x>\frac{3}{2} \end{cases}$$

3) Calcul de $f'(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{3-2x}\right)'=\frac{(x-1)'(3-2x)-(3-2x)'(x-1)}{(3-2x)^2}=\frac{1(3-2x)-(-2)(x-1)}{(3-2x)^2}$$

$$Pour\ tout\ x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\},\ f'(x)=\frac{1}{(3-2x)^2}$$

4) Sens de variation de f :

$$Pour\ tout\ x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\},\ f'(x)=\frac{1}{(3-2x)^2},\ donc\ f'(x)>0.$$

donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

5) Tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗	$-\frac{1}{2}$

6) Montrons que le point $A\left(\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour $\left(C_f\right)$.

$\left(\frac{3}{2}-x\right)\in\mathbb{R}$ et $\left(\frac{3}{2}+x\right)\in\mathbb{R}$.

Montrons que $f\left(\frac{3}{2}-x\right)+f\left(\frac{3}{2}+x\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$f(\frac{3}{2}-x)=\frac{-x+\frac{1}{2}}{2x}$$

$$f(\frac{3}{2}+x)=\frac{-\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2x}$$

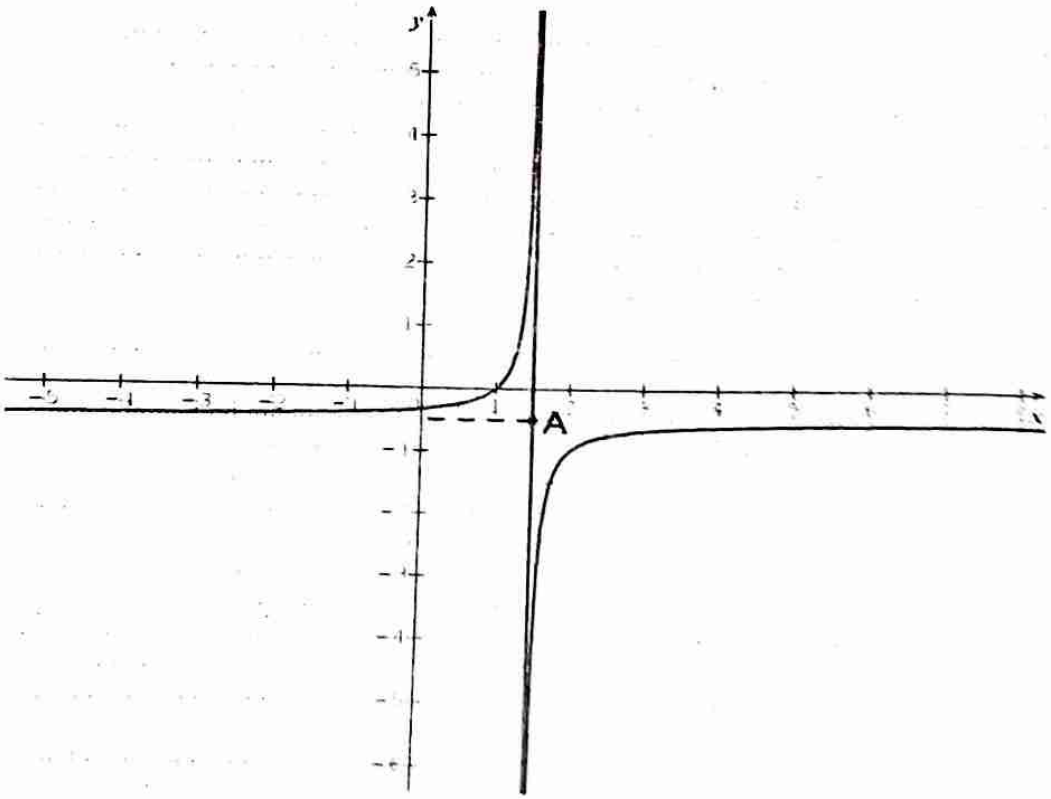
$$f(\frac{3}{2}-x)+f(\frac{3}{2}+x)=\frac{-x+\frac{1}{2}}{2x}+\frac{-\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2x}=-1=2\times(-\frac{1}{2})$$

Donc le point $A\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ est le centre de symétrie de $\left(C_f\right)$.

7) Construction de $\left(C_f\right)$:

Table de valeurs :

x	-4	-2	0	1	2	3	4
$f(x)$	-0,45	-0,43	$-\frac{1}{3}$	0	-1	-0,66	-0,60



EXERCICE 5 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{1-x}$

1) L'ensemble de définition de f.

$x \in D_f$ *équivaut à* $1-x \neq 0$, *c'est-à-dire* $x \neq 1$. $D_f = \mathbb{R}-\{1\}$.

2) Limites aux bornes de D_f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty ; \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=+\infty \quad car \quad \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} x^2-2x+3=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} 1-x=0 \ et \ 1-x>0 \ si \ x<1\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=-\infty \quad car \quad \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} x^2-2x+3=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} 1-x=0 \ et \ 1-x<0 \ si \ x>1\end{cases}$$

3) Calcul de $f'(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{1-x}\right)=\frac{(x^2-2x+3)'(1-x)-(x^2-2x+3)(1-x)'}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{(2x-2)(1-x)-(x^2-2x+3)(-1)}{(1-x)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}$

4) Le sens de variation de f :

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $(1-x)^2>0$, donc f'(x) est de même signe que -x^2+2x+1.

Etudions le signe de $-x^2+2x+1$.

$\Delta=2^2-4\times(-1)\times 1=8$. $\Delta>0$, donc $-x^2+2x+1$ est négatif à l'extérieur des zéros et positif entre les zéros.

Cherchons les zéros:

$x_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2(-1)} = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2(-1)} = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = 1-\sqrt{2}$

- Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Sens de variation de f.

Pour tout $x \in]-\infty;1-\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2};+\infty[$, $f'(x)<0$.

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;1-\sqrt{2}[$ *et sur* $]1+\sqrt{2};+\infty[$.

Pour tout $x \in]1-\sqrt{2};1[\cup]1;1+\sqrt{2}[$, $f'(x)>0$.

Donc f est strictement croissante sur $]1-\sqrt{2};1[$ *et sur* $]1;1+\sqrt{2}[$

- Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$

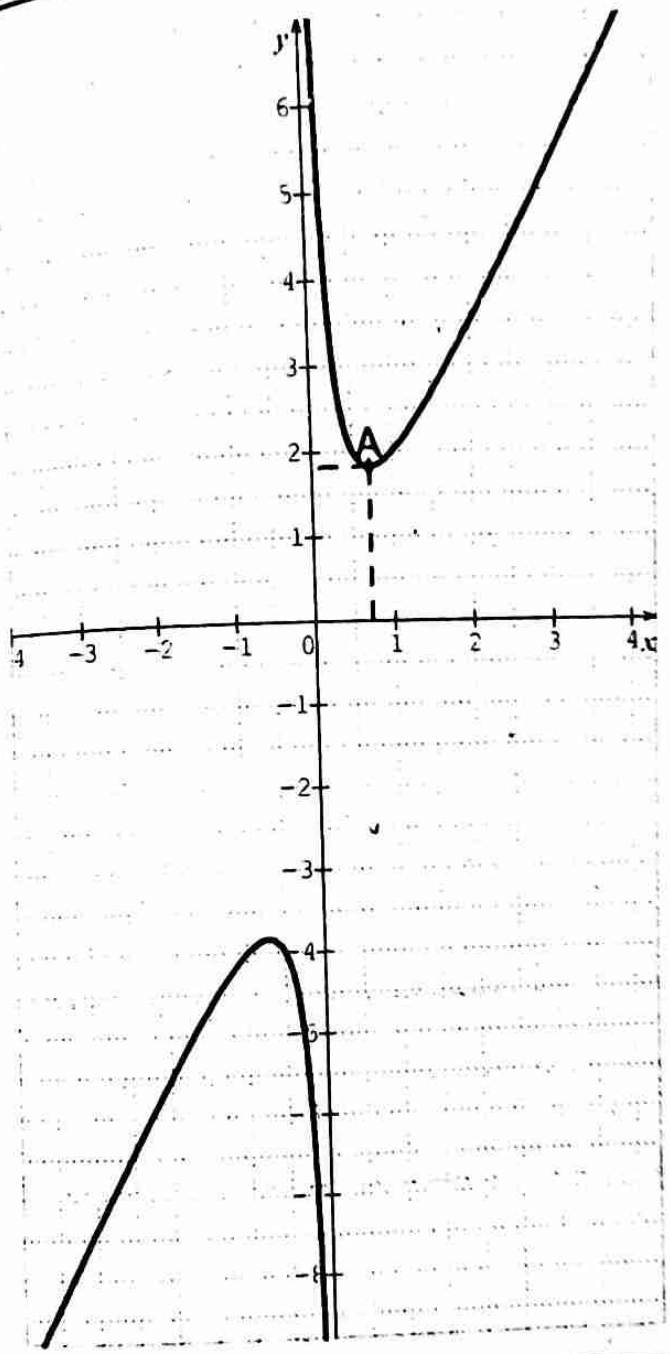
$f(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$; $f(1+\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$

$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-2\sqrt{2}-1$; $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}-1$

- Construction de (C_f).

Table de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	4
$f(x)$	-9,25	-7,33	-5,5	-4	-4	/////////	2	2	3,5	7,25



EXERCICE 7 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-2}$

- L'ensemble de définition

$x \in D_f$ *équivaut à* $x-2\neq 0$. *C'est-à-dire* $x\neq 0$. $Df=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ de f

1) Etude du sens de variation de f sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

- Calcul de $f'(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+2x-3}{x-2}\right)=\frac{(x^2+2x-3)'(x-2)-(x-2)'(x^2+2x-3)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(2x+2)(x-2)-1(x^2+2x-3)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2x^2-4x+2x-4-x^2-2x+3}{(x-2)^2}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f'(x)=\dfrac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$

- Signe de $f'(x)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $(x-2)^2$ *est positif, donc le signe de* $f'(x)$ *est celui de* x^2-4x-1.

Etudions le signe de x^2-4x-1

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times(-1)=16+4=20$. $\Delta>0$, donc x^2-4x-1 *est positif à l'extérieur des zéros et négatifs entre les zéros.*

Les zéros sont $x_1=\dfrac{4-2\sqrt{5}}{2}=2-\sqrt{5}$ *et* $x_2=\dfrac{4+2\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
x^2-4x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Asymptote verticale à $\left(C_f\right)$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

Donc la droite d'équation (D_1) d'équation x = 2 est asymptote verticale à $\left(C_f\right)$.

c) L'asymptote oblique à $\left(C_f\right)$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$x^2 + 2x - 3$	$x - 2$
$-x^2 + 2x$	$x + 4$
$4x - 3$	
$-4x + 8$	
5	

$$f(x) = x + 4 + \frac{5}{x-2}$$

Montrons que la droite (D_2) d'équation y = x + 4 est asymptote à $\left(C_f\right)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\left[f(x) - y\right] = x + 4 + \frac{5}{x-2} - (x+4) = \frac{5}{x-2}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left[f(x) - y\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{5}{x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{5}{x} = 0$$

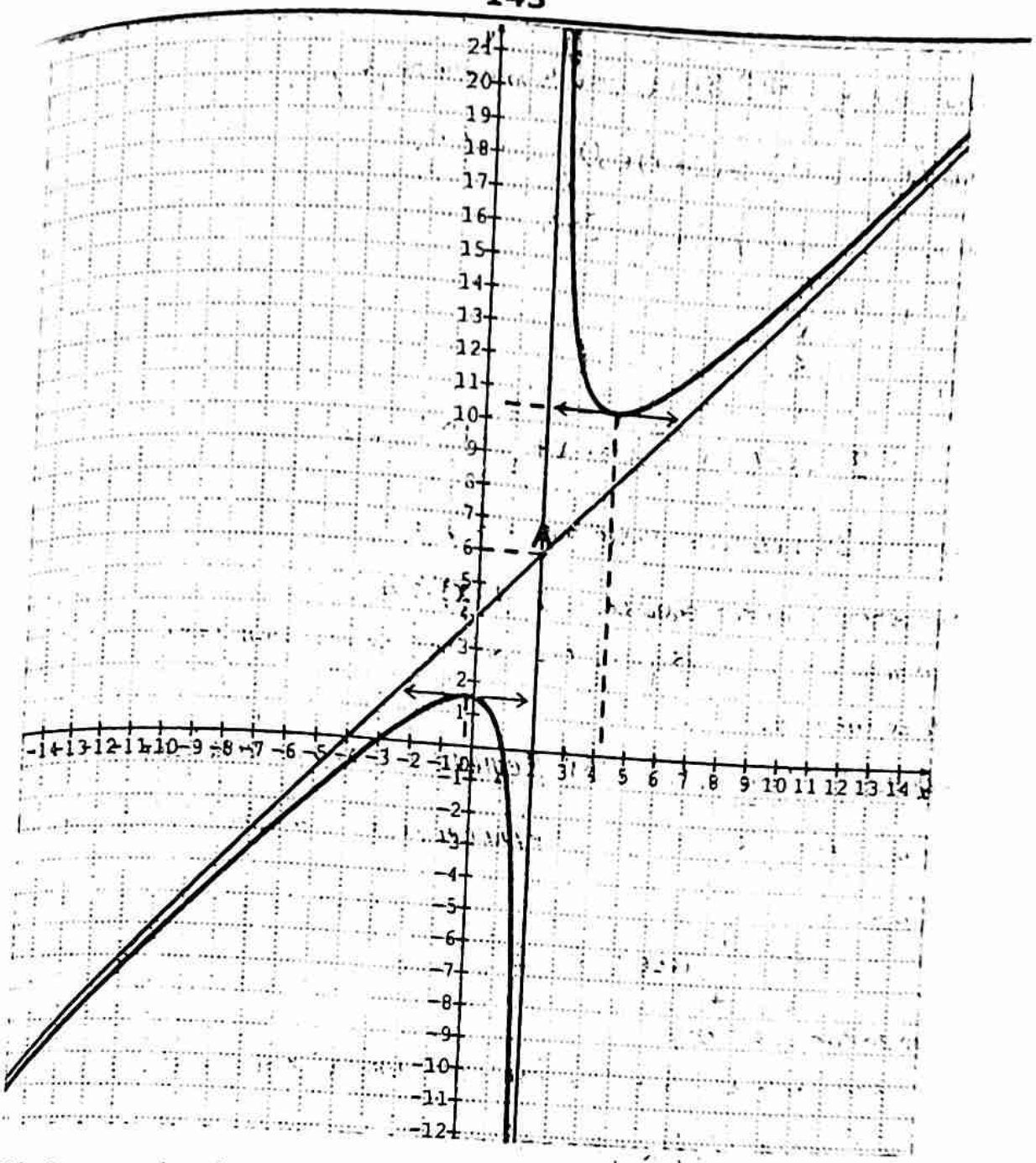
$$\lim_{x\to +\infty}\left[f(x) - y\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{x} = 0$$

Donc la droite d'équation y = x + 4 est asymptote oblique à $\left(C_f\right)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

d) Construction de $\left(C_f\right)$.

Table de valeurs :

x	-8	-3	-2	-1	$2-\sqrt{3}$	0	1	2	3	$2+\sqrt{3}$	8
f(x)	-4,5	-0,6	0,75	1	1,53	1,5	1	//////	12	10,47	12,8



2) Montrons que le point d'intersection des asymptotes à $\left(C_f\right)$ est un centre de symétrie pour $\left(C_f\right)$

• Déterminons les coordonnées du point A intersection des asymptotes (D_1) et (D_2)

$A \in (D_1) \cap (D_2)$ *équivaut à* $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = x_1 + 4 \end{cases}$ *C'est-à-dire* $\begin{cases} x_A = 2 \\ y_A = 2 + 4 = 6 \end{cases}$

Et on a $A(2;6)$

D'où le point d'intersection des droites (D_1) et (D_2) est le point $A(2;6)$

• Montrons que le point $A(2;6)$ est centre de symétrie de $\left(C_f\right)$

$(2-x)\in D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $(2+x)\in D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Montrons que $f(2-x)+f(2+x)=2\times 6$

$$f(2-x)=6-x-\frac{5}{x}$$

$$f(2+x)=6+x+\frac{5}{x}$$

$$f(2-x)+f(2+x)=6-x-\frac{5}{x}+6+x+\frac{5}{x}=12=2\times 6$$

Donc le point $A(2;6)$ est centre de symétrie de $\left(C_f\right)$.

3) Résolvons graphiquement l'équation $x\in\mathbb{R}\,;f(x)=m$

Pour tout $m\in\left]-\infty;f(2-\sqrt{5})\right[\cup\left]f(2+\sqrt{5});+\infty\right[$ *l'équation* $f(x)=m$ *admet deux solutions.*

Pour tout $m\in\{f(2-\sqrt{5});f(2+\sqrt{5})\}$ *l'équation* $f(x)=m$ *admet une solution.*

Pour tout $m\in\left]f(2-\sqrt{5});f(2+\sqrt{5})\right[$, *l'équation* $f(x)=m$ *n'admet pas de solution.*

EXERCICE 8

Partie A $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2-4}$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

1) L'ensemble de définition de f :

$x\in D_f$ *équivaut à* $x^2-4\neq 0$. *C'est-à-dire* $x^2\neq 4$. *Ce qui donne* $x\neq 2$ *et* $x\neq -2$. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

2) Calcul de $f'(x)$

$$f'(x)=\left(\frac{ax+b}{x^2-4}\right)=\frac{(ax+b)'(x^2-4)-(ax+b)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}$$

$$=\frac{a(x^2-4)-2x(ax+b)}{(x^2-4)^2}=\frac{ax^2-4a-2ax^2-2bx}{(x^2-4)^2}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$, $f'(x)=\dfrac{-ax^2-2bx-4a}{(x^2-4)^2}$

*(C_f) passe par le point $A\left(0;\frac{-5}{4}\right)$ équivaut à $f(0)=\frac{-5}{4}$.

$f(0)=\frac{-5}{4}$ équivaut à $\frac{a\times 0+b}{0-4}=\frac{-5}{4}$ c'est-à-dire $\frac{b}{-4}=\frac{-5}{4}$. Donc $b=5$.

• La tangente à (C_f) au point A a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

Equivaut à $f'(x_A)=\frac{1}{2}$. C'est-à-dire $f'(0)=\frac{1}{2}$. Or, $f'(x)=\frac{-ax^2-4a-2bx}{(x^2-4)^2}$.

D'où $f'(0)=\frac{1}{2}$. C'est-à-dire $\frac{-4a}{(-4)^2}=\frac{1}{2}$. Ce qui équivaut à $\frac{-4a}{16}=\frac{1}{2}$.

Donc $\frac{-a}{4}=\frac{1}{2}$ $a=-2$. Finalement: $a=-2$; $b=5$ doù $f(x)=\frac{-2x+5}{x^2-4}$

Partie B a = -2 et b = 5 donc $f(x)=\frac{-2x+5}{x^2-4}$

1) Etude des limites aux bornes de $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2} -2x+5=9\\ \lim\limits_{x\to-2} x^2-4=0 \text{ et } x^2-4>0 \text{ si } x<-2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=-\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2} -2x+5=9\\ \lim\limits_{x\to-2} x^2-4=0 \text{ et } x^2-4<0 \text{ si } -2<x<2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=-\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2} -2x+5=1\\ \lim\limits_{x\to2} x^2-4=0 \text{ et } x^2-4<0 \text{ si } -2<x<2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2} -2x+5=1\\ \lim\limits_{x\to2} x^2-4=0 \text{ et } x^2-4>0 \text{ si } x>2\end{cases}$

2) Etudions les variations de f.

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$, $f'(x) = \dfrac{2x^2-10x+8}{(x^2-4)^2} = \dfrac{2(x^2-5x+4)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{2(x-1)(x-4)}{(x^2-4)^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$, $(x^2-4)^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x-4)$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(x-1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

•Sens de variation de f.

Pour tout $x \in]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]4;+\infty[$, $f'(x) > 0$, *donc* f *est strictement croissante sur* $]-\infty;-2[$, *sur* $]-2;1[$ *et sur* $]4;+\infty[$,

Pour tout $x \in]1;2[\cup]2;4[$, $f'(x) < 0$. *donc* f *est strictement décroissante sur* $]1;2[$, *sur* $]2;4[$.

•Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

$f(1)=-1$; $f(4)=\dfrac{-1}{4}$

3) Déterminons les coordonnées des points B et C tels que :

$B \in (Cf)\cap(OI)$ *équivaut à* $f(x_B)=0$, *C'est-à-dire* $\dfrac{-2x_B+5}{x_B^2-4}=0$.

Ce qui équivaut à $-2x_B+5=0$. *Et on a* $x_B=\dfrac{5}{2}$. *Donc* $B(\dfrac{5}{2};0)$.

$C \in (Cf)\cap(OJ)$ *équivaut à* $x_C=0$, *C'est-à-dire* $y_C=\dfrac{-2\times0+5}{0^2-4}$

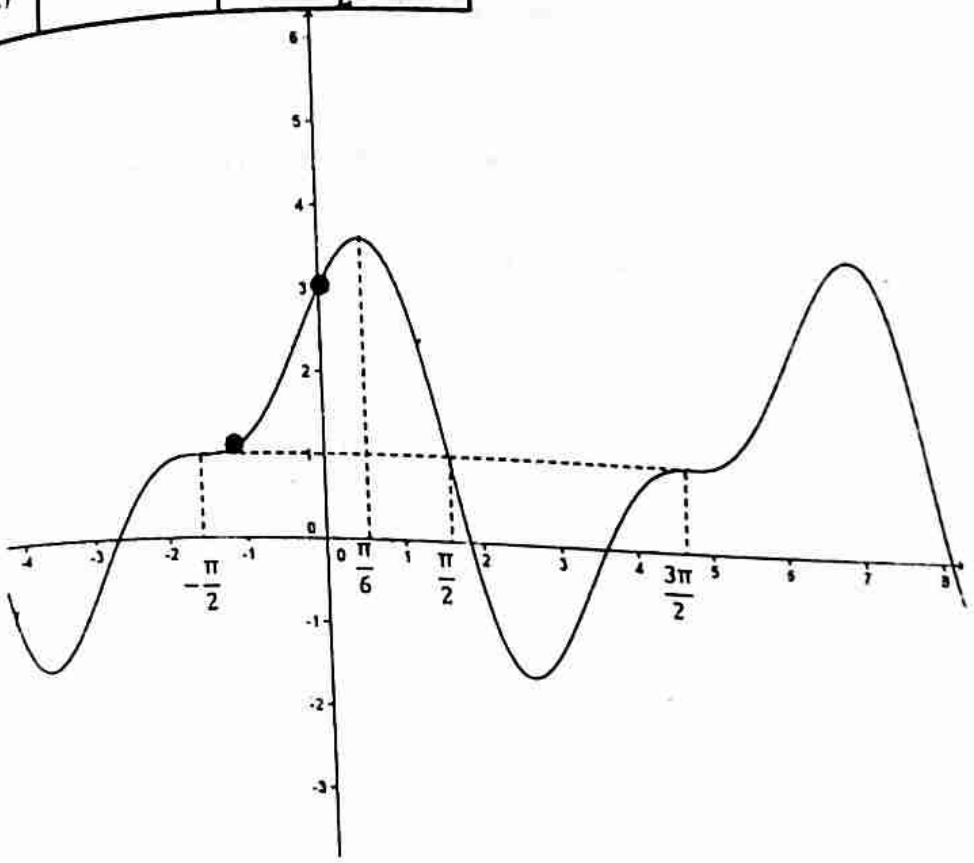
$y_C=\dfrac{5}{-4}$. *Donc* $C(0;-\dfrac{5}{2})$.

x	$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$		1
f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗	$\frac{2+3\sqrt{3}}{2}$	↘	

3) Traçons la courbe (Cf)

Tableau de valeurs :

x	0	$-\frac{\pi}{6}$
f(x)	3	$\frac{6-\sqrt{3}}{2}$



4) Etudions les variations de g(x) = 2x - cos(2x) + 4sin(x) sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

g'(x)= (2x - cos(2x) + 4sin(x))' = 2-(-2sin(2x))+4cos(x)=2+2sin(2x)+4cos(x)

g'(x)=2(1+sin(2x)+2cos(x)) = 2f(x).

Le signe de g' est celui de f puisque 2 est positif. D'après la représentation graphique, pour $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f(x)\geq 1$, donc f(x) est positif et donc g'(x) est positif.

En conséquence, g est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 10

1. $P(x) = 2x^2 - x - 1$

Résolvons l'équation $P(x) = 0$

P est polynôme de second degré, pour trouver les zéros, calculons le discriminant :

$\Delta=(-1)^2-4x2(-1)=1+8=9$

Donc P a deux racines distinctes qui sont

$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$.

$S_{IR} = \left\{\left(-\frac{1}{2};1\right)\right\}$

Etudions le signe de P(x).

Comme P est un polynôme de degré 2, pour $x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$, P(x) a le signe de 2,

c'est-à-dire P(x) est positif ;

et pour $x \in \left]-\frac{1}{2};1\right[$, P(x) est du signe contraire de 2, c'est-à-dire P(x) est négatif.

2. $f(x) = \sin(2x) - 2\sin(x)$.

a) Justifions qu'il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$

$f(x+2\pi) = \sin(2(x+2\pi)) - 2\sin(x+2\pi) = \sin(2x+4\pi) - 2\sin(x) = \sin(2x)-2\sin(x) = f(x)$.

Donc f est périodique de période 2π. Nous pouvons alors étudier f sur $[-\pi ; \pi]$.

Df=IR et pour tout nombre réel $x \in Df$, $-x \in Df$. En plus $f(-x) = \sin(-2x) - 2\sin(-x)$

$f(-x) = -\sin(2x)-(-2\sin(x)) = -\sin(2x) + 2\sin(x) = -f(x)$.

Donc f est impaire. Donc on peut étudier f sur $[0 ; \pi]$.

b) Calculons $f'(x)$.

$f'(x) = (\sin(2x) - 2\sin(x))' = 2\cos(2x) - 2\cos(x) = 2(\cos^2x-\sin^2x) - 2\cos(x)$

$f'(x) = 2(\cos^2x-(1-\cos^2x))-2\cos(x) = 2(\cos^2x-1+\cos^2x) - 2\cos(x) = 2(2\cos^2x - 1) - 2\cos(x)$

$f'(x)=4\cos^2x - 2\cos x - 2$.

c) Etudions les variations de f sur $[0 ; \pi]$.

$f'(x) = 2(2\cos^2x-\cos x-1)$. Le signe de f'(x) est celui de $2\cos^2x - \cos x - 1$.

Posons $X = \cos x$; on a $f'(x) = 2x^2 - x - 1$ avec $-1 \leq X \leq 1$.

Donc $f'(x) = 0$ pour $\cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1$.

$\cos x = \cos(\frac{2\pi}{3})$ revient à dire que $x = \frac{2\pi}{3}$ dans $[0 ; \pi]$.

$\cos x = \cos(0)$ donne $x = 0$ sur $[0 ; \pi]$.

$f'(x) = 4(\cos x+\frac{1}{2})(\cos x-1)$

Pour x dans $[0 ; \pi]$, $\cos x-1 \leq 0$, donc f' a le signe contraire de $\cos x+\frac{1}{2}$.

Pour x dans $[0 ; \frac{2\pi}{3}]$, $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$ et $0 \leq \cos x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$ et en ce moment f '(x) est négatif.

Pour x dans $\left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$, $-1 \leq \cos x \leq -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \leq \cos x + \frac{1}{2} \leq 0$ et en ce moment f'(x) est positif.

En conclusion, f est décroissante sur $[0 ; \frac{2\pi}{3}]$ et croissante sur $[\frac{2\pi}{3} ; \pi]$.

3) Traçons la courbe sur $[-\pi ; \pi]$.

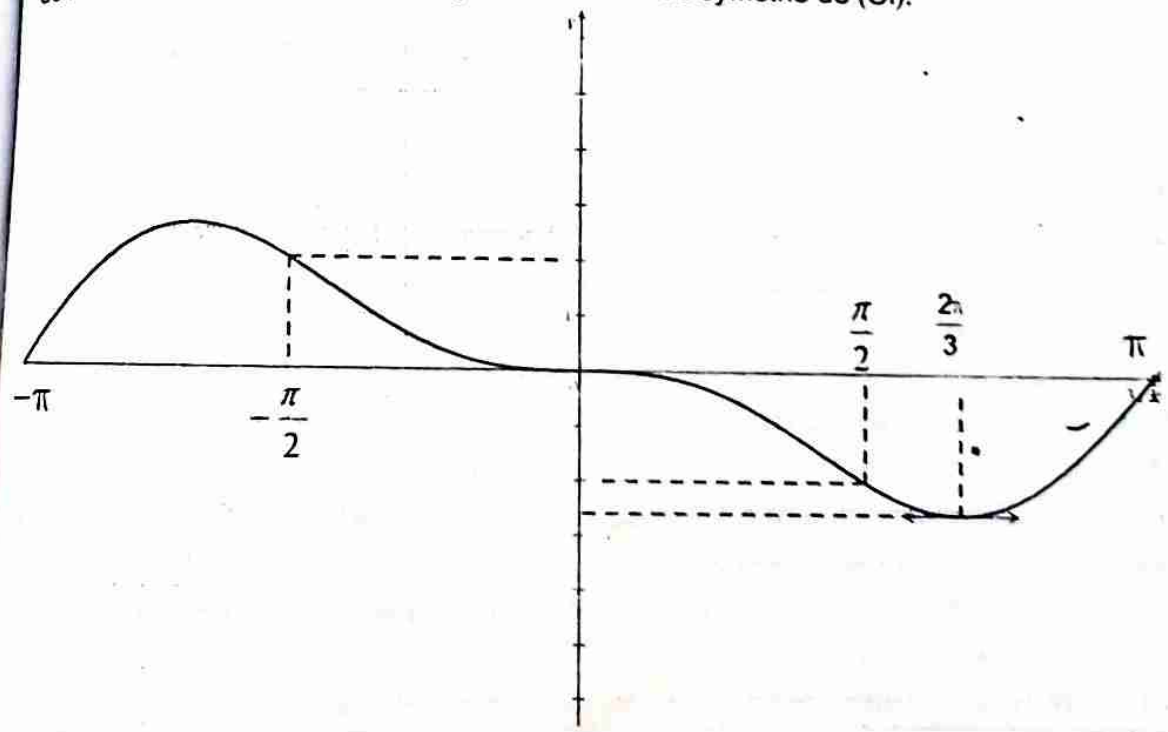
Dressons le tableau de variation

x	0		$\frac{3\pi}{2}$		π
f'(x)	0	-	0	+	
f(x)	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0

Tableau de valeurs

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
f(x)	$1-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-2

Comme f est impaire, l'origine du repère est centre de symétrie de (Cf).



SUITES NUMERIQUES



Jules Henri **Poincaré** est né le 29 avril 1854 à Nancy.

Henri **Poincaré** fut le plus grand homme de sciences de France de la fin du XIXè et du début du XXè. Mathématicien hors pair, touche à tout, il est aussi connu des physiciens pour ses ***études sur la stabilité du système solaire***, mais aussi des cercles philosophiques pour ses ***réflexions sur les fondements des sciences***.

Sa famille appartient à l'élite intellectuelle de la ville de Nancy: son père est neurologue et professeur à la faculté de Médecine, son cousin, Raymond, sera Président de la République de 1913 à 1920.

Les études de **Poincaré** sont brillantes : plusieurs fois premier prix au Concours Général, bachelier ès lettres, bachelier ès sciences. Reçu à l'Ecole Normale Supérieure, et à l'Ecole Polytechnique, il opte pour cette dernière. Il y aura pour professeur Hermite.

Sorti ingénieur des Mines, **Poincaré** se consacre toutefois à la rédaction d'une thèse de doctorat qu'il défend le 1er octobre 1879.

Enseignant à la Sorbonne, ses travaux changeront totalement le paysage mathématique de son époque. Il crée notamment de toutes pièces la théorie des fonctions fuchsiennes, révolutionne l'étude des équations différentielles par ses études qualitatives de solutions.

C'est en 1889 que le nom d'Henri **Poincaré** devient célèbre.

Il reçoit en effet le prix du roi Oscar de Norvège et de Suède pour un brillant mémoire sur le problème des 3 corps. Pourtant, ce mémoire comportait une erreur dont la correction permit à Poincaré d'ouvrir la porte de ***la théorie du chaos***.

Poincaré était également un philosophe des sciences reconnu.

Dans ***La Science et l'hypothèse***, publiée en 1902, il affirme le rôle essentiel du principe de récurrence.

Le 28 juin 1909, il entre à l'Académie Française, privilège rare pour un scientifique.

Il décède le 17 juillet 1912 d'une hypertrophie de la prostate.

FICHE DE COURS

GENERALITES SUR LES SUITES

1. Suites croissantes, suites décroissantes

Définitions

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout entier n, $U_{n+1} \geq U_n$.

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si pour tout entier n, $U_{n+1} \leq U_n$.

Remarques :

a) Une suite croissante, une suite décroissante sont dites monotones.

b) Il existe des suites ni croissantes, ni décroissantes.

Exemple : La suite (U_n) définie par $U_n = (-1)^n$ est une suite ni croissante, ni décroissante.

Méthode :

Pour étudier le sens de variation d'une suite (U_n) :

a. On étudie le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$.

b. Si tous les termes de la suite (U_n) sont strictement positifs, on compare $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1.

Théorème

Soit (U_n) une suite définie par $U_n = f(n)$, avec f définie sur $[0; +\infty[$

Si f est strictement croissante, alors (U_n) est strictement croissante.

Si f est strictement décroissante, alors (U_n) est strictement décroissante.

Remarque

a. Ce théorème ne s'applique pas si la suite (U_n) est définie par récurrence

b. On dit qu'une suite est stationnaire si elle est constante.

2. Suites périodiques

Une suite (U_n) est periodique s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+k} = U_n$

3. Opérations

Les règles opératoires sur les limites de suites (somme, produit, quotient) sont les mêmes que pour les limites en $+\infty$ d'une fonction.

SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$ r est appelé la raison de la suite	$U_{n+1} = qU_n$ q est appelé la raison de la suite
Expression du terme général	$U_n = U_0 + nr$ $U_n = U_k + (n-k)r$	$U_n = U_0 \times q^n$ $U_n = U_k \times q^{n-k}$
Identification	Etablir que $U_{n+1} - U_n$ est un réel indépendant de n.	Etablir que $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est un réel indépendant de n
Sens de variation	•Si r>0 : U est croissante •Si r<0 : U est décroissante •Si r=0 : U est constante	•Si 0<q<1 : U est décroissante •Si q>1 : U est croissante •Si q=1 : U est constante •Si q<0 : U n'est pas monotone
Limite	•Si r>0 : $\lim U_n = +\infty$ •Si r<0 : $\lim U_n = -\infty$ •Si r=0 : $\lim U_n = U_0$	•Si q<-1: pas de limite •Si -1<q<1 : $\lim U_n = 0$ •Si q=1 : $\lim U_n = U_0$ •Si q>1 : $U_0 > 0$ alors $\lim U_n = +\infty$ $U_0 < 0$ alors $\lim U_n = -\infty$
Convergence	U_n converge si r = 0	U_n converge si -1 < q < 1 ou si q = 1
Somme de termes consécutifs	La somme des n termes consécutifs est égale au produit par n de la demi somme des termes extrêmes	$S = 1^{er}$ terme $\times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

EXERCICES RESOLUS

GENERALITES

EXERCICE 1

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{n-1}{n^2+1}$

Calculer U_0, U_1, U_2, U_3, U_7 et U_{172}

EXERCICE 2

Calculer les termes d'indices 1, 2, 3, 4 et 5 de chacune des suites numériques suivantes, définies par une formule de récurrence .

$$\begin{cases} Uo = -1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{1}{3} + Un \end{cases} \qquad \begin{cases} V1 = 1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ V_{n+1} = \frac{1}{n} + V_n. \end{cases}$$

EXERCICE 3

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $Un = (-1)^n . \frac{1}{2}$

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), représenter (U_n) dans le plan et sur la droite (OI).

EXERCICE 4

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), représenter sur la droite (OI), et sans les calculer, les termes d'indices 0 à 5 de chacune des suites numériques ci-dessous :

$$\begin{cases} Uo = 6 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{1}{2} Un \end{cases} \qquad \begin{cases} Vo = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = -2V_n + 5. \end{cases}$$

EXERCICE 5

Les suites ci-dessous sont-elles positives, négatives ? Justifier.

(1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_n = n^2 - n$. (2) $\begin{cases} Uo = -1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{-U_n + 5}{Un}. \end{cases}$

EXERCICE 6

La suite ci-dessous est-elle majorée, minorée, bornées? Justifier.

$$Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ Un = \frac{n}{n+1}$$

EXERCICE 7

Les suites ci-dessous sont-elles croissantes, décroissantes ? Justifier.

(1) $Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ Un = n^2 - 2n + 5$; (2) $Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ Un = n^3 - n^2 + n$

(3) $\begin{cases} Uo = -1 \\ Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 4Un \end{cases}$

EXERCICE 8

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} Uo = 1 \\ Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 4Un \end{cases}$

1. Calculer les 3 premiers termes de la suite (U_n).
2. Faire une conjecture sur une formule explicite de (U_n).
3. Démontrer que cette formule explicite est vraie pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

SUITES ARITHMETIQUES

EXERCICE 9

Parmi les suites définies ci-après, quelles sont celles qui sont des suites arithmétiques ?

(a). $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} + U_n = 1 \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$ (b). $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_n - U_{n+1} = 4 \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$

EXERCICE 10

Dans cet exercice, (U_n) désigne une suite arithmétique de raison r.

a. $U_0 = -6$; r = 4. Calculer U_7; U_{12} et U_{20}.

b. $U_0 = 2$; $U_{13} = 67$. Calculer r.

c. $U_5 = 3$; $U_{15} = -27$. Calculer r et U_0 ;

d. $U_{20} = -52$ $U_{51} = -145$. Expliciter le terme général U_n.

EXERCICE 11

(U_n) est une suite arithmétique.

On désigne par S_n la somme $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$.

1. Le premier terme est $U_0 = -4$, la raison est égale à 3. Calculer S_8; S_{12} et S_{20}.

2. On donne $U_{10} = 10$ et $U_{100} = 10000$. Calculer S_{100}.

EXERCICE 12

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = -4n + 7$.

1. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

2. En déduire les variations et la limite de (U_n).

3. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

EXERCICE 13

On s'aperçoit que $1=1^2$, $1+3=4=2^2$, $1+3+5 = 9 = 3^2$, $1+3+5+7=16 = 4^2$ et on désire généraliser cette jolie chose.

On nomme donc (U_n) la suite des entiers naturels impairs.

1) Démontrer que c'est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme U_0 et la raison.

2) En déduire l'expression de Un en fonction de n.

3) On nomme enfin Sn=U0+U1+ .. +Un Donner l'expression de Sn en fonction de n, et Conclure.

SUITES GEOMETRIQUES

EXERCICE 14

Parmi les suites définies ci-après, quelles sont celles qui sont des suites géométriques ?

(a). $\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = (U_n)^2 \end{cases}$ pour $n \geq 0$ (b). $\begin{cases} U_0 = 100 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{6}{100} U_n \end{cases}$ pour $n \geq 0$

EXERCICE 15

Montrer que chacune des suites ci-après est géométrique, et préciser sa raison :

a. $U_n = (-4)^{2n+1}$ b. $U_n = 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ c. $U_n = (-1)^n \times (2)^{3n+1}$

EXERCICE 16

Une suite géométrique a pour premier terme $U_0 = -9$ et pour raison $\frac{1}{3}$.

Calculer $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$, lorsque n = 5, puis n = 10.

EXERCICE 17

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$

1. On pose, pour tout entier n : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$.

Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

2. Exprimer V_n, puis U_n, en fonction de n.

EXERCICE 18

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 5^n \times (-7)$.

1. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

2. En déduire les variations et la limite de (U_n).

3. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

EXERCICE 19

Montrer que chacune des suites ci-après est géométrique, et préciser sa raison :

a. $U_n = (-4)^{2n+1}$ b. $U_n = 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ c. $U_n = (-1)^n \times (2)^{3n+1}$

EXERCICES DE SYNTHESE

EXERCICE 20

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 8 \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$$

1. Calculer a_1 et b_1.

2. Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = b_n - a_n$

a. Démontrer que (d_n) est une suite géométrique.

Déterminer le premier terme d_0 et la raison q.

b. En déduire une expression de d_n en fonction de n.

Puis en déduire que : $Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ dn > 0.$

c. Calculer la limite de la suite (d_n).

3. a. Démontrer que, $Par\ tout\ n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \dfrac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = -\dfrac{d_n}{4}$

En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n).

b. Démontrer que $Pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_n < a_n < b_n < b_n$

c. Déduire des questions 3.a et 3.b que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

4. a. Déduire de la question 3.a. que : $Pour\ tout\ n>1,\ a_n - a_0 = \dfrac{1}{3}(d_0 + d_1 + ... + d_{n-1})$.

b. Déduire la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n).

EXERCICE 21

Aux entreprises MAHO, les employés ont le choix entre deux contrats : le salaire initial est toujours de 100 000 CFA par mois, puis une augmentation de 1000 CFA tous les mois pour le contrat A, et une augmentation de 0,5% tous les mois pour le contrat B.

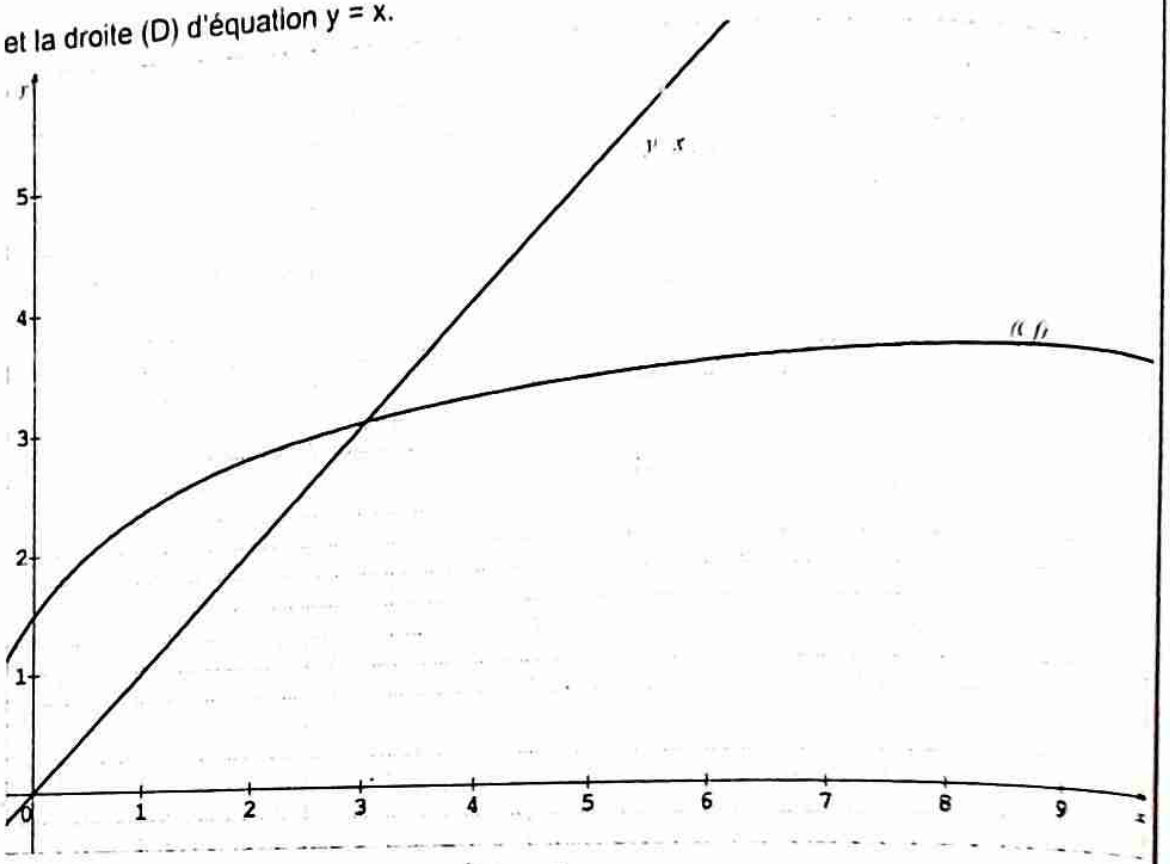
1) On appelle a_n le salaire mensuel d'un employé au bout de n mois avec le contrat A, b_n avec le contrat B. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

2) SRI est en CDD de 18 mois. Quel contrat doit-il choisir ?

3) Roméo K. et Alexise Y. ont passé 40 ans dans l'entreprise, mais Roméo avait le contrat A et Alexise le contrat B. Quelles sommes ont-ils gagnées en tout ?

EXERCICE 22

Ce graphique présente la représentation graphique de la fonction f telle que $f(x)=\frac{4x+3}{x+2}$ et la droite (D) d'équation y = x.



On appelle (Un) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 2} \end{cases}$

1) Calculer U1 et U2.

2) La suite (Un) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

3) Représenter les premiers termes de la suite (Un) à l'aide du graphique ci-dessus.

4) Quel semble être le sens de variation de (Un)? Quelle semble être sa limite ?

5) Pour tout entier n, on pose $Vn=\frac{Un+1}{3-Un}$. Calcule V_0, V_1, V_2.

6) Démontre que (Vn) est une suite géométrique de raison 5.

7) En déduire l'expression de Vn et de Un en fonction de n.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

Les suites ci-dessous sont –elles positives, négatives ? Justifier.

(1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Un = 1 - n^2$; (2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $Un = \dfrac{n}{n+1} - n + 1$

EXERCICE 2

Les suites ci-dessous sont-elles majorées, minorées, bornées ? Justifier.

(1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Un = (n-1)^2 - 2$; (2) $\begin{cases} U0 = -3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, Un+1 = \dfrac{-1}{3} Un \end{cases}$

EXERCICE 3

Les suites ci-dessous sont-elles croissantes, décroissantes ? Justifier.

(1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Un = \dfrac{2n-1;}{n+1}$ (2) $\begin{cases} U0 = -1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, Un+1 = \dfrac{3}{2} Un \end{cases}$

EXERCICE 4

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U0 = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*) \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{Un} \end{cases}$.

1. Etudier, selon les valeurs de n, le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Supposons que n = 3 et posons *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - 1$

a. Exprimer $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ en fonction de U_n. En déduire que *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} < \dfrac{1}{2}$.

b. Démontrer que : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $V_n < 3\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$

En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

EXERCICE 5

Trouver une formule explicite de (U_n) dans chacun des cas suivants

(a). $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{1+U_n} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_{n-1} \end{cases}$

EXERCICE 6

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2+(U_n)^2} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$

1. Montrer que la suite (V_n), définie par $V_n = (U_n)^2$, est une suite arithmétique.
2. En déduire une expression de U_n en fonction de n.

EXERCICE 7

1. Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 3n + 1$.

a. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b. En déduire les variations et la limite de (U_n).

c. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

2. Répondre aux mêmes questions précédentes avec la suite définie par $V_n = -4n + 1$

3. Répondre aux mêmes questions précédentes avec la suite définie par $W_n = \frac{3}{2}n - 5$

EXERCICE 8

Soit la suite arithmétique (u_n) de raison -2 et telle que $u_{10} = 25$.

Calculer u_{50} et S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

EXERCICE 9

Soit la suite arithmétique (u_n) telle que : $u_{12} = 13$ et $u_{20} = 25$.

1. Calculer la raison r et le premier terme et u_0
2. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

EXERCICE 10

Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{3n}\right) U_n \quad \text{pour} \quad n \geq 0 \end{cases}$

1. Calculer U_2; U_3; U_4; U_5 et U_6.
2. Montrer que la suite de terme général $V_n = \frac{U_n}{n}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de V_n en fonction de n, puis celle de U_n.

EXERCICE 11

1. Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 2^n \times 5$.

a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer le premier terme et la raison.

b. En déduire les variations et la limite de (U_n).

c. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

2. Repondre aux questions précédentes avec la suite définie par $V_n = \left[\frac{1}{3}\right]^n \times (-5)$

3. Répondre aux questions précédentes avec la suite définie par $W_n = 5^n$

EXERCICE 12

Soit la suite géométrique (v_n) de raison $\frac{1}{2}$ et telle que $V_8 = \frac{3}{8}$.

Calculer v_{20} et S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

EXERCICE 13

Soit la suite arithmétique (u_n) telle que : $u_3 = 3$ et $u_8 = \frac{3}{32}$.

1. Calculer la raison q et le premier terme et u_0
2. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

EXERCICE 14

Soit la suite arithmétique (u_n) dont les termes vérifient : $u_1 = 54$ et $u_4 = 16$

1. Calculer la raison q
2. Calculer S_6 la somme de ses six premiers termes.

EXERCICE 15

Les calculs seront arrondis à leur partie entière.

Une librairie ouvre sa boutique en 1992 avec 1500 livres dans ses rayons.

Elle augmentera son stock de 10% chaque année par rapport au stock de l'année précédente.

1. En appelant S_n démontrer le stock de cette librairie la n-ième après l'ouverture,que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison q.

2. Calculer le stock S_6 de cette librairie la sixième, après l'ouverture.

EXERCICE 16

On considère la suite (U_n) définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 2Un - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. a. Calculer U_1

b. Vérifier que $U_2 = 3$.

2. On donne la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1$ pour tout entier naturel n.

a. Calculer V_0, V_1 et V_2.

b. Démontrer que V_n est une suite géométrique de raison 2.

c. Pour tout entier naturel n, justifier que $V_n = 2^{n-1}$.

3. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_n = 1 + 2^{n-1}$.

EXERCICE 17

Le tableau ci-dessous représente la production en tonnes de cacao de Monsieur Yapi.

Année	1994	1995	1996
Production en tonnes	2,8	3,1	3,4

1. Démontrer que pendant ces 3 années, l'augmentation de la production a été constante.

2. On suppose que l'augmentation de la production reste constante.

On note :

U_0 la production de cacao en 1994 ; U_1 la production de cacao après une année.

U_n la production de cacao après n années.

Justifier que : $U_n = 2,8 + 0,3n$.

3. Quelle sera la production de cacao de Monsieur Yapi :

a. en 1997

b. après 9 années (en l'an 2003) ?

EXERCICE 18

Pendant la journée de l'arbre, un chercheur participant à cette journée plante une bouture d'acacia majob de hauteur h_0(en cm).

Il décide de suivre l'évolution de son plant en relevant chaque mois, sa hauteur en centimètres.

On désigne par h_1 la hauteur du plant au premier mois et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h_n la hauteur du plant au $n^{ième}$ mois.

Il constate que les hauteurs h_n du plant évoluent en progression géométrique de raison q, $(q \in \mathbb{R}^*)$.

Sur les relevés du chercheur, on note $h_2 = 27\,cm$ et $h_3 = 32,4\,cm$.

1. Justifier que q est égale à 1,2.

2. Calculer h_0.

3. Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N},\ h_n = 18,75.(1,2)^n$

CORRECTION DES EXERCICES

GENERALITES

EXERCICE 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$

Calculons U_0, U_1, U_2, U_3, U_7, U_{172}.

$U_0 = \dfrac{0-1}{0^2+1} = \dfrac{-1}{1} = -1$ $\quad U_1 = \dfrac{1-1}{1^2+1} = \dfrac{0}{2} = 0$ $\quad U_2 = \dfrac{2-1}{2^2+1} = \dfrac{1}{5}$

$U_3 = \dfrac{3-1}{3^2+1} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ $\quad U_7 = \dfrac{7-1}{7^2+1} = \dfrac{6}{50} = \dfrac{3}{25}$ $\quad U_{172} = \dfrac{172-1}{172^2+1} = \dfrac{171}{30585} = \dfrac{57}{10195}$

EXERCICE 2

a) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3} + U_n \end{cases}$

Calculons U_1, U_2, U_3, U_4, U_5

$U_1 = \dfrac{1}{3} + U_0 = \dfrac{1}{3} + (-1) = \dfrac{1-3}{3} = \dfrac{-2}{3}$ $\quad U_2 = \dfrac{1}{3} + U_1 = \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{-2}{3}\right) = \dfrac{1-2}{3} = \dfrac{-1}{3}$

$U_3 = \dfrac{1}{3} + U_2 = \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{-1}{3}\right) = \dfrac{1-1}{3} = 0$ $\quad U_4 = \dfrac{1}{3} + U_3 = \dfrac{1}{3} + 0 = \dfrac{1}{3}$

$U_5 = \dfrac{1}{3} + U_4 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1+1}{3} = \dfrac{2}{3}$

b) $\begin{cases} V_1 = 1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ V_{n+1} = \dfrac{1}{n} + V_n \end{cases}$

Calculons V_2, V_3, V_4, V_5

$V_2 = \dfrac{1}{1} + V_1 = 1 + 1 = 2$ $\quad V_3 = \dfrac{1}{2} + V_2 = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$

$V_4 = \dfrac{1}{3} + V_3 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{2+15}{6} = \dfrac{17}{6}$ $\quad V_5 = \dfrac{1}{4} + V_4 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{17}{6} = \dfrac{3+34}{12} = \dfrac{37}{12}$

EXERCICE 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Un = (-1)^n . \frac{1}{2}$

Représentation des termes de la suite (U_n) sur la droite (OI)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Un = (-1)^n . \frac{1}{2} = 0,5$ *si* n *est pair*

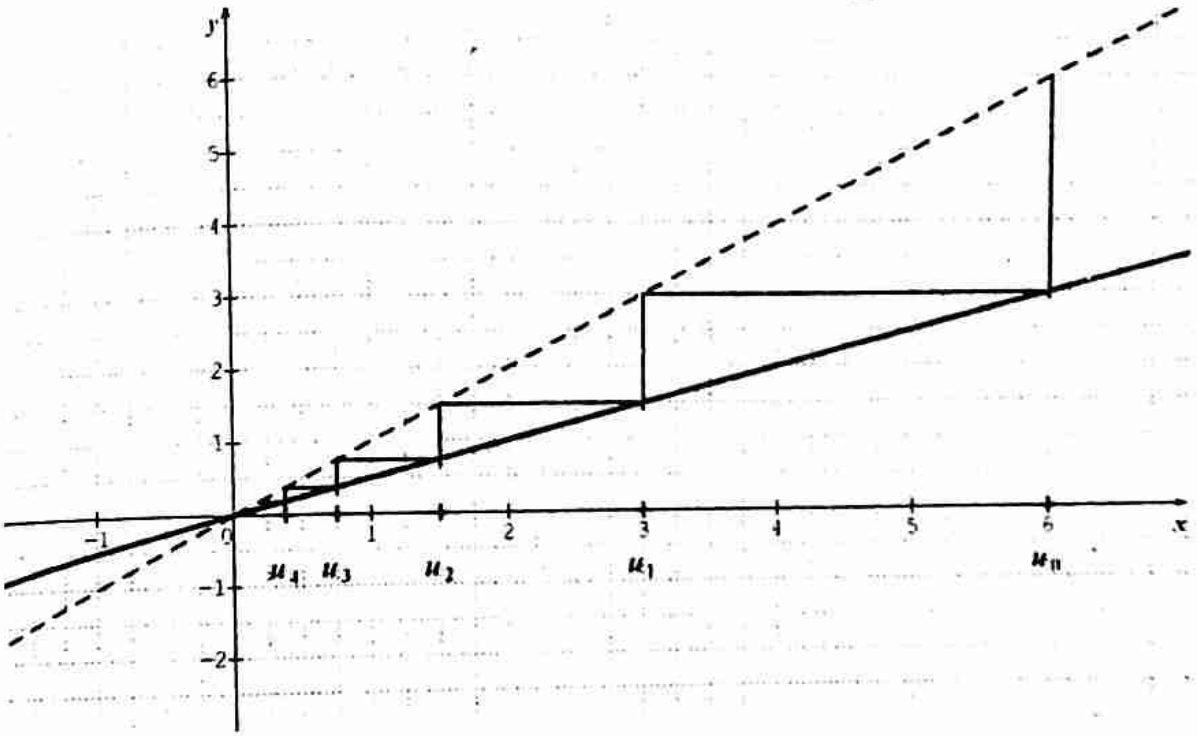
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Un = (-1)^n . \frac{1}{2} = -0,5$ *si* n *est impair*

(U_n) prend donc alternativement les valeurs 0,5 et -0,5.

EXERCICE 4 Représentation des termes

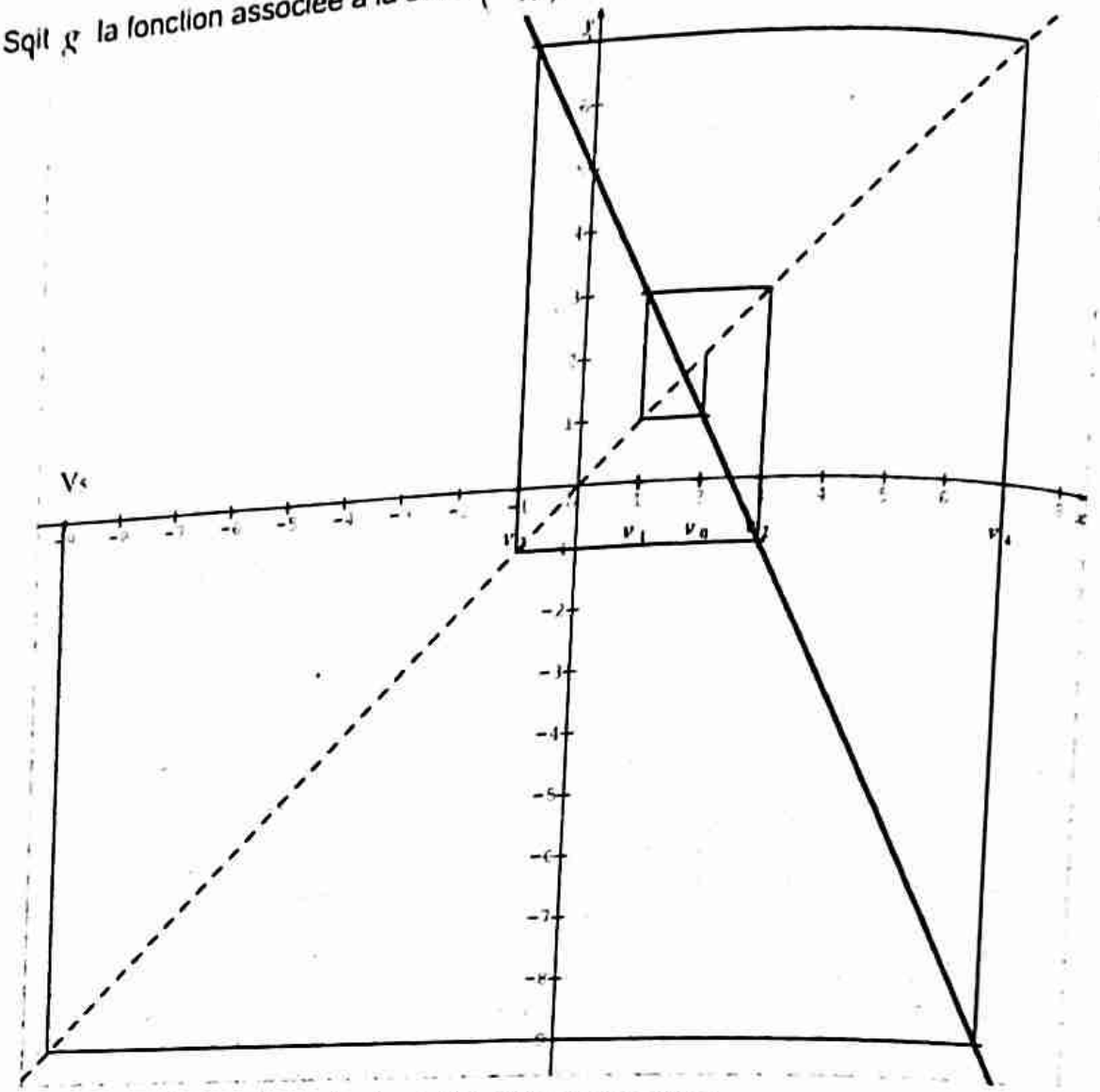
a) $\begin{cases} Uo = 6 \\ Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{1}{2} Un\ . \end{cases}$

Soit f la fonction associée à la suite (U_n) définie par $f(x) = \frac{1}{2}x$



b) $\begin{cases} V_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = -2V_n + 5. \end{cases}$

Soit g la fonction associée à la suite (V_n) définie par $g(x) = -2x + 5$



EXERCICE 5 Déterminons le signe des suites suivantes :

(1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N},\ U_n = n^2 - n.$

Etudions le signe de la suite (U_n).

$Un = n^2 - n = n(n-1)$

$Un - 0$ *équivaut à* $n(n-1) = 0$ *c'est-à-dire* $n = 0$ *ou* $n - 1 = 0$. *Donc* $n = 0$ *ou* $n = 1$



Donc *Pour tout* $n > 1$, Un > 0 et pour tout n $\in \{0;1\}$, $Un = 0$.

(2) $\begin{cases} Uo = -1 \\ Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{-U_n + 5}{Un} \end{cases}$.

Calculons les premiers termes de la suite.

$U_0 = -1$; $U_1 = -2$; $U_2 = -\frac{3}{2}$; $U_3 = -\frac{5}{3}$

On remarque que les premiers termes de la suite sont négatifs.

Montrons par un raisonnement par récurrence que : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Un < 0$.

•$U_0 = -1$ donc $U_0 < 0$. Par conséquent, la propriété est vraie pour n = 0.

•Supposons que Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Un < 0$. et montrons que Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} < 0$.

$$U_{n+1} = \frac{-U_n + 1}{U_n} = \frac{-U_n}{U_n} + \frac{1}{U_n} = -1 + \frac{1}{U_n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} < 0$ *équivaut à* $\frac{1}{Un} < 0$. *Donc* $-1 + \frac{1}{Un} < -1$ *c'est – à – dire* $U_{n+1} < -1$

Donc Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Un+1 < 0$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < 0$. donc la suite (U_n) est négative.

EXERCICE 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Un = \dfrac{n}{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ *équivaut à* $n+1 \geq 1$. *Donc* $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$ *et donc* $-1 \leq -\frac{1}{n+1} \leq 0$.

En ajoutant 1 à chaque membre de l'inégalité, on a $0 \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq Un \leq 1$.

Donc la suite (U_n) est minorée par 0 et majorée par 1.

Par conséquent la suite (U_n) est bornée par 0 et 1.

EXERCICE 7

Etudions les variations des suites suivantes :

(1)*Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Un = n^2 - 2n + 5$;

Etudions le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \left[(n+1)^2 - 2(n+1) + 5\right] - (n^2 - 2n + 5) = 2n - 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = 2n - 1 > 0$ *Donc* $Un + 1 - Un > 0$

Donc la suite (U_n) est une suite croissante.

(2) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Un = n^3 - n^2 + n$

Etudions le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \left[(n+1)^3 - (n+1)^2 + (n+1)\right] - (n^3 - n^2 + n) = 3n^2 + n + 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = 3n^2 + n + 1 > 0$ *Donc* $Un+1 - Un > 0$

Par conséquent, la suite (U_n) est croissante.

$$(3)\begin{cases} Uo = -1 \\ Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 4Un \end{cases}$$

Etudions le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n^2 + 1}{U_n} - U_n = \frac{U_n^2 + 1 - U_n^2}{U_n} = \frac{1}{U_n} < 0$$ car U_n est une suite à valeurs négatives.

Par conséquent, la suite (U_n) est décroissante.

EXERCICE 8

$$\begin{cases} Uo = 1 \\ Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 4Un \end{cases}$$

1) Calculons les premiers termes de la suite (U_n)

$U_0 = 1$ $\qquad$ $U_2 = 4\ U_1$ *donc* $U_2 = 16 = 4^2$

$U_1 = 4\ U_0$ *donc* $U_1 = 4 = 4^1$ $\qquad$ $U_3 = 4\ U_2$ *donc* $U_3 = 64 = 4^3$

2) Formule explicite de (U_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Un = 4^n$

3) Démontrons par récurrence que *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Un = 4^n$

$U_0 = 4^0 = 1$. La propriété est vraie pour n = 0.

Supposons que *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Un = 4^n$, montrons que *Pour tout* $U_{n+1} = 4^{n+1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 4Un = 4 \times 4^n = 4^{n+1}$

Conclusion : *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Un = 4^n$

SUITES ARITHMETIQUES

EXERCICE 9

La suite (U_n) est une suite arithmétique si et seulement si $U_{n+1} - U_n$ est constante.

(a) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} + U_n = 1 \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} + U_n = 1 \end{cases}$ *équivaut à* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} - 1 = U_n \end{cases}$. *ce qui donne* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} - U_n = 1 - 2U_n \end{cases}$

$U_{n+1} - U_n$ dépend de U_n donc la suite (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

(b). $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_n - U_{n+1} = 4 \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_n - U_{n+1} = 4 \end{cases}$ *équivaut à* $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} - U_n = -4 \end{cases}$

$U_{n+1} - U_n = -4$ qui est une constante donc la suite (U_n) est une suite arithmétique.

EXERCICE 10

(U_n) est une suite arithmétique de raison r.

a) $U_0 = -6$; r = 4.

Calcul de U_7; U_{12} et U_{20}.

La formule explicite d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0 est :

$U_n = U_0 + nr$

D'où : $U_7 = U_0 + 7r = -6 + 7 \times 4 = -6 + 28 = 22$

$U_{12} = U_0 + 12r = -6 + 12 \times 4 = -6 + 48 = 42$

$U_{20} = U_0 + 20r = -6 + 20 \times 4 = -6 + 80 = 74$

b) $U_0 = 2$; $U_{13} = 67$. Calcul de r.

$U_{13} = U_0 + 13r = 2 + 13r$

$U_{13} = 67$ *équivaut à* $2 + 13r = 67$. *Donc* $13r = 67 - 2 = 65$. *Donc* $r = \frac{65}{13} = 5$

c) $U_5 = 3$; $U_{15} = -27$. Calcul de r et U_0

$U_n = U_k + (n-k)r$. *Ce qui donne* $U_{15} = U_5 + (15-5)r$. *Ce qui donne* $U_{15} = U_5 + 10r$

Donc $U_{15} - U_5 = 10r$. *Et on a* $r = \frac{U_{15} - U_5}{10} = \frac{-27-3}{10} = \frac{-30}{10} = -3$.

$U_n = U_0 + nr$. *Ce qui équivaut à* $U_0 = U_n - nr = U_5 - 5r = 3 - 5 \times (-3) = 18$.

d) $U_{20} = -52$, $U_{51} = -145$. Déterminer la formule explicite de (U_n)

Pour déterminer la formule explicite de (U_n), il nous faut déterminer son premier terme U_0 et sa raison r.

$U_n = U_k + (n-k)r$. *Ce qui donne* $U_{51} = U_{20} + (51-20)r$. *Ce qui donne*

$U_{51} = U_{20} + 31r$. *Donc* $U_{51} - U_{20} = 31r$. *Et on a* $r = \frac{U_{51} - U_{20}}{31}$

$$r = \frac{-145-(52)}{31} = \frac{-145+52}{31} = \frac{-93}{31} = -3.$$

$U_n = U_0 + nr$. *Ce qui équivaut à* $U_0 = U_n - nr = U_{20} - 20r = -52 - 20 \times (-3) = 8$.

Et $Un = 8 - 3n$.

EXERCICE 11 (U_n) est une suite arithmétique.

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = (n+1) \times \frac{U_0 + U_n}{2}$$

$$S_n = (n+1) \times \frac{U_0 + (U_0 + nr)}{2} = (n+1) \times \frac{2U_0 + nr}{2}$$

1) $U_0 = -4$ et r = 3 ; calculons S_8 ; S_{12} et S_{20}.

$$S_8 = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_8 = (8+1) \times \frac{U_0 + U_8}{2} = 9 \times \frac{2U_0 + 8r}{2}$$

$$S_8 = 9 \times (U_0 + 4r) = 9 \times (-4 + 4 \times 3) = 9 \times 8 = 72$$

De même: $S_{12} = 13 \times (U_0 + 6r) = 13 \times (-4 + 6 \times 3) = 13 \times 14 = 182$

De même : $S_{20} = 21 \times (U_0 + 10r) = 21 \times (-4 + 10 \times 3) = 21 \times 26 = 546$

2) $U_{10} = 10$ et $U_{100} = 10000$. Calculons S_{100}.

$$S_{100} = \frac{(100-10+1) \times (U_{10} + U_{100})}{2} = \frac{91 \times (10 + 10.000)}{2} = 455.455$$

EXERCICE 12

1. **Montrons que (U_n) est une suite arithmétique.**

$U_{n+1} = -4(n+1)+7 = -4n-4+7 = -4n+3$

$U_{n+1} - U_n = -4n+3-(-4n+7) = -4n+3+4n-7 = -4$

$U_{n+1} - U_n = -4$ qui est une constante indépendante de n.

(U_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = -4$

et de premier terme $U_0 = -4\times 0+7 = 7$

2. **En déduisons les variations et la limite de (U_n).**

(Un) est une suite arithmétique

$r = -4 < 0$ *donc (un) est strictement décroissante.*

$r = -4$ *donc* $\lim Un = -\infty$.

3. **Calcul de S_{10} la somme des 10 premiers termes.**

S_n = nombre de termes × demie somme des termes extrêmes

$$\text{Donc } S_{10} = 10\times\frac{U_0+U_9}{2} = 10\times\frac{7+(-29)}{2} = 10\times\frac{-22}{2} = -110$$

EXERCICE 13

1) Démontrons que (Un) est une suite arithmétique.

Les nombres impairs sont : 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

Deux nombres impairs consécutifs s'écrivent sous la forme 2n-1 et 2n+1, n étant un entier naturel. (2n+1)-(2n-1)=2n+1-2n+1=2. Donc la raison est 2.

On peut donc conclure que le premier terme de la suite est 1 et la raison est 2.

2) Donnons l'expression de Un

$U_n = U_0+nr = 1+2n$.

3) Donnons l'expression de Sn en fonction de n.

$$S_n = U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n = (n+1)\times\frac{U_0+U_n}{2}$$

$$Sn = (n+1)\frac{1+1+2n}{2} = (n+1)\times\frac{2+2n}{2} = (n+1)\times\frac{2(1+n)}{2} = (n+1)^2$$

En conclusion, on peut généraliser la trouvaille comme suit : la somme des n premiers nombres entiers naturels impairs est égale à n^2.

SUITES GEOMETRIQUES

EXERCICE 14

La suite (U_n) est une suite géométrique si et seulement si $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est une constante.

(a). $\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = (U_n)^2 \end{cases}$ pour $n \geq 0$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(U_n)^2}{U_n} = U_n$ donc la suite (U_n) n'est pas une suite géométrique.

(b). $\begin{cases} U_0 = 100 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{6}{100} U_n \end{cases}$ pour $n \geq 0$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n + \frac{6}{100} U_n}{U_n} = \frac{\frac{106}{100} U_n}{U_n} = \frac{106}{100} = 1{,}06$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1{,}06$ est constante donc la suite (U_n) est une suite géométrique.

EXERCICE 15 Montrons que les suites suivantes sont géométriques :

a) $U_n = (-4)^{2n+1}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-4)^{2(n+1)+1}}{(-4)^{2n+1}} = \frac{(-4)^{2n+2+1}}{(-4)^{2n+1}} = \frac{(-4)^{2n+3}}{(-4)^{2n+1}} = (-4)^{(2n+3)-(2n+1)} = (-4)^2 = 16$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 16$ qui est constant donc la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 16.

b) $U_n = 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)+1}}{2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = \frac{2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = 2^{n+1-n} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+2)-(n+1)}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2}{3}$ donc la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

c) $U_n = (-1)^n \times (2)^{3n+1}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-1)^{n+1} \times (2)^{3(n+1)+1}}{(-1)^n \times (2)^{3n+1}} = \frac{(-1)^{n+1} \times (2)^{3n+4}}{(-1)^n \times (2)^{3n+1}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \times \frac{(2)^{3n+4}}{(2)^{3n+1}} = (-1)^{(n+1)-n} \times (2)^{(3n+4)-(3n+1)} = (-1) \times (2)^3$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = -2^3$ donc la suite (U_n) est une suite géométrique de raison -2^3.

EXERCICE 16

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = -9$ et de raison $q = \frac{1}{3}$

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- $S_5 = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = U_0 \times \frac{1 - q^{5+1}}{1 - q}$

$$S_5 = -9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6}{1 - \frac{1}{3}} = -9 \times \frac{1 - \frac{1}{729}}{\frac{2}{3}} = -9 \times \frac{\frac{729 - 1}{729}}{\frac{2}{3}} = -9 \times \frac{\frac{728}{729}}{\frac{2}{3}}$$

$$S_5 = -9 \times \frac{728}{729} \times \frac{3}{2} = -\frac{728}{729} \times \frac{27}{2} = -\frac{364}{27}$$

- $S_{10} = -9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-29.524}{2.187}$

EXERCICE 17

$U_0 \quad 0$

$U_{n+1} \quad \dfrac{2U_n+3}{U_n+4}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{U_n-1}{U_n+3}$

1) Montrons que (V_n) est une suite géométrique.

Exprimons V_{n+1} en fonction de V_n.

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3} = \frac{\frac{2U_n+3}{U_n+4}-1}{\frac{2U_n+3}{U_n+4}+3} = \frac{2U_n+3-U_n-4}{2U_n+3+3U_n+12} = \frac{U_n-1}{5U_n+15}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n-1}{U_n+4} \times \frac{U_n+4}{5U_n+15} = \frac{U_n-1}{5(U_n+3)} = \frac{1}{5} \times \frac{U_n-1}{(U_n+3)} = \frac{1}{5} \times V_n$$

D'où $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{1}{5}$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$

2) Exprimons V_n en fonction de n.

$$q = \frac{1}{5}; V_0 = \frac{U_0-1}{U_0+3} = \frac{0-1}{0+3} = -\frac{1}{3}, \text{ donc, } V_n = V_0 \times q^n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Exprimons U_n en fonction de n.

$$V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3} \text{ donc } U_n - 1 = V_n(U_n+3) \text{ C'est-à-dire } U_n - 1 = Vn \times Un + 3 \times V_n$$

Donc $Un - Vn \times Un = 3 \times Vn + 1$. C'est-à-dire $U_n(1-V_n) = 3V_n + 1$.

On a alors, $Un = \dfrac{3V_n+1}{1-V_n}$.

$$Or, V_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n, \text{ donc } U_n = \frac{3V_n+1}{1-V_n} = \frac{3\left(-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+1}{1-\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)} = \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^n+1}{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$U_n = \frac{\frac{-1}{5^n}+1}{1+\frac{1}{3\times 5^n}} = \frac{\frac{-1}{5^n}+1}{\frac{1+3\times 5^n}{3\times 5^n}} = \frac{-1+5^n}{5^n} \times \frac{3\times 5^n}{1+3\times 5^n} = 3\times\frac{-1+5^n}{1+3\times 5^n}$$

EXERCICE 18

1. Montrons que (U_n) est une suite géométrique.

$U_{n+1} = 5^{n+1} \times (-7) = 5 \times 5^n \times (-7)$

$\frac{U_{n+1}}{U_{n+1}} = \frac{5 \times 5^n \times (-7)}{5^n \times (-7)} = 5$ qui est une constante indépendante de n.

(U_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 5$

et de premier terme $U_0 = 5^0 \times (-7) = 1 \times (-7) = -7$

2. En déduisons les variations et la limite de (U_n).

(U_n) est une suite géométrique.

$q = 5 > 1$ et $U_0 = -7 < 0 \Rightarrow (U_n)$ est strictement décroissante.

$q > 1$ et $U_0 < 0 \Rightarrow \lim U_n = -\infty$

3. Calcul de S_{10} la somme des 10 premiers termes.

$S_n = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$

Donc $S_{10} = U_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = -7 \times \frac{1 - 5^{10}}{1 - 5} = -7 \times \frac{-9765624}{-4} = -17089842$

EXERCICE 19

Montrons que les suites suivantes sont géométriques :

a. $U_n = (-4)^{2n+1}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-4)^{2n+1+1}}{(-4)^{2n+1}} = \frac{(-4)^{2n+2+1}}{(-4)^{2n+1}} = \frac{(-4)^{2n+3}}{(-4)^{2n+1}} = (-4)^{(2n+3)-(2n+1)} = (-4)^2 = 16$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 16$ qui est une constante indépendante de n donc (U_n) est une suite géométrique de raison 16.

b. $U_n = 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)+1}}{2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = \frac{2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = 2^{n+1-n} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+2)-(n+1)}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2\times\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ qui est une constante indépendante de n donc (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

c. $U_n = (-1)^n \times (2)^{3n+1}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-1)^{n+1}\times(2)^{3|n+1|+1}}{(-1)^n\times(2)^{3n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}\times(2)^{3n+4}}{(-1)^n\times(2)^{3n+1}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\times\frac{(2)^{3n+4}}{(2)^{3n+1}} = (-1)^{|n+1|-n}\times(2)^{|3n+4|-|3n+1|} = (-1)\times(2)^3$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = -\left(2^3\right)$ qui est une constante indépendante de n donc (U_n) est une suite géométrique de raison $-\left(2^3\right) = -8$.

EXERCICES DE SYNTHESE

EXERCICE 20

1. $a_1 = \frac{2a_0 + b_0}{3} = \frac{2\times 1 + 8}{3} = \frac{10}{3}$ et $b_1 = \frac{a_0 + 3b_0}{4} = \frac{1 + 3\times 8}{4} = \frac{25}{4}$.

2. a. Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = b_n - a_n$

$$\Rightarrow d_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} = \frac{3a_n + 9b_n}{12} - \frac{8a_n + 4b_n}{12}$$

$$= \frac{3a_n + 9b_n - 8a_n - 4b_n}{12} = \frac{-5a_n + 5b_n}{12} = \frac{5b_n - 5a_n}{12} = \frac{5(b_n - a_n)}{12}$$

$$= \frac{5}{12}(b_n - a_n) = \frac{5}{12}d_n$$

Donc (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = b_0 - a_0 = 8 - 1 = 7$ et de raison $q = \frac{5}{12}$.

b. (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 7$ et de raison $q = \frac{5}{12}$

$$\Rightarrow d_n = q^n \times d_0 = \left(\frac{5}{12}\right)^n \times 7$$

$$d_n = \left(\frac{5}{12}\right)^n \times 7 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad car \quad 7 > 0 \quad et \quad \left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$$

$-1 < q = \frac{5}{12} < 1 \Rightarrow \lim d_n = 0.$

$u_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{2a_n + b_n - 3a_n}{3} = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{d_n}{3}$

$b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \Rightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + 3b_n}{4} - b_n = \frac{a_n + 3b_n - 4b_n}{4} = \frac{-b_n + a_n}{4} = \frac{-d_n}{4}$

Déduisons les variations des suites (a_n) et (b_n).

$a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$. Or, on a montré que $d_n > 0$, donc $a_{n+1} - a_n > 0$ pour tout n ∈ IN.

$a_{n+1} - a_n > 0$ donc la suite (a_n) est strictement croissante.

$a_{n+1} - a_n = -\frac{d_n}{3}$. Or, on a montré que $d_n > 0$, donc $a_{n+1} - a_n < 0$ pour tout n ∈ IN.

$a_{n+1} - a_n < 0$ donc la suite (a_n) est strictement décroissante.

b. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 < a_n < b_n < b_0$.

(a_n) est strictement croissante, donc pour tout entier naturel n, $a_0 < a_n$. (1).

(b_n) est strictement décroissante, donc pour tout entier naturel n, $b_n < b_0$. (2)

Pour tout entier naturel n, $d_n > 0$, donc $b_n - a_n > 0$ c'est-à-dire $b_n > a_n$. (3).

(1), (2) et (3) nous donnent, $a_0 < a_n < b_n < b_0$.

c. Déduisons de 3-a. et 3-b. que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

$a_n < a_n < b_n < b_0$ donc $a_n < b_n$. Donc (a_n) est majoré par b_n.

De plus (a_n) est strictement croissante. Donc (a_n) est convergente.

$a_0 < a_n < b_n < b_0$ donc $a_n < b_n$. Donc (b_n) est minoré par a_n.

De plus (b_n) est strictement décroissante. Donc (b_n) est convergente.

4.a. Déduisons de la question 3-a. que : $\forall n > 1,\ a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1})$

$$a_1 - a_0 = \frac{d_0}{3}$$
$$+$$
$$a_2 - a_1 = \frac{d_1}{3}$$
$$+$$
$$a_3 - a_2 = \frac{d_2}{3}$$
$$+$$
$$a_n - a_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{3}$$

$$a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1})$$

b. Déduisons la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n).

(d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 7$ et de raison $q = \frac{5}{12}$

$$d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} = d_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}}$$
$$= 7 \times \frac{5}{3} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = \frac{35}{3} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$

$$a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1})$$

$$Donc\ a_n = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1}) + a_0 = \frac{1}{3} \times \frac{35}{3} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + a_0$$

$$a_n = \frac{35}{9} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + 1$$

$$\lim a_n = \lim \frac{35}{9} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + 1 = \frac{35}{9} + 1 = \frac{35 + 9}{9} = \frac{44}{9}\ car\ \lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0.$$

$On\ a\ d_n = b_n - a_n\ donc\ b_n = d_n + a_n.$

$\lim b_n = \lim d_n + \lim a_n.\ Or, \lim d_n = 0.\ Donc\ \lim b_n = \lim a_n = \frac{44}{9}$

EXERCICE 21

1) Exprimons a_n et b_n en fonction de n.

$a_n = 100\,000 + 1000 \times n = 100\,000 + 1000n$.

$b_1 = 100\,000 + 100\,000 \times \frac{0,5}{100} = 100\,000 + 100\,000 \times 0,005$

$b_1 = 100\,000(1 + 0,005) = 1,005 \times 100\,000$

$b_2 = b_1 + b_1 \times \frac{0,5}{100} = b_1(1+0,005) = 1,005b_1 = 1,005 \times 1,005 \times 100\,000 = 1,005^2 \times 100\,000$

Démontrons que pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$,

$b_n = (1,005)^n \times 100\,000$

Démontrons par récurrence :

$(Pn) : b_n = (1,005)^n \times 100\,000$

(P1) est vraie. $b_1 = (1,005) \times 100\,000$

Supposons la proposition vraie à l'ordre n : et démontrons qu'elle reste vraie à l'ordre n+1.

$b_{n+1} = b_n + b_n \times \frac{0,5}{100} = b_n(1 + 0,005) = 1,005b_n$

$b_{n+1} = 1,005 \times 1,005^n \times 100\,000 = (1,005)^{n+1} \times 100\,000$

La proposition reste vraie à l'ordre n+1.

Nous avons ainsi démontré que pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$

$b_n = (1,005)^n \times 100\,000$

2) Cherchons le contrat qui est avantageux pour SRI.

Comparons les sommes des 18 termes consécutifs des deux suites.

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{18} = 18 \times \frac{a_1 + a_{18}}{2} = 18 \times \frac{(100\,000 + 1000) + (100\,000 + 18\,000)}{2} = 1\,971\,000$

$b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{18} = b_1 \times \frac{1 - (1,005)^{18}}{1 - 1,005} = 1,005 \times 100000 \times \frac{1 - (1,005)^{18}}{1 - 1,005} = 1\,887\,971$

Pour SRI, le contrat A est avantageux.

3) calculons l'argent gagné par Roméo et Alexise après 40 ans passés dans l'entreprise.

40 ans correspondent à 40×12 mois soit 480 mois. La somme gagnée par chacun des employés est la somme des 480 termes consécutifs des suites (a_n) et (b_n).

Pour Roméo :

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{480}$

$= 480 \times \frac{a_1 + a_{480}}{2} = 480 \times \frac{(100\,000 + 1000) + (100\,000 + 480000)}{2} = 163\,440\,000$

Pour Alexise .

$b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{480} = b_1 \times \frac{1 - (1,005)^{480}}{1 - 1,005} = 1,005 \times 100000 \times \frac{1 - (1,005)^{480}}{1 - 1,005} = 200\,144\,818$

Alexise a eu plus d'argent que Roméo au terme du contrat.

EXERCICE 22

1) Calculons U1, U2.

$$U_1=\frac{4U_0+3}{U_0+2}=\frac{4\times\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{2}+2}=\frac{6+3}{\frac{3}{2}+\frac{4}{2}}=\frac{9}{\frac{7}{2}}=9\times\frac{2}{7}=\frac{18}{7}$$

2) Nature de la suite (U_n).

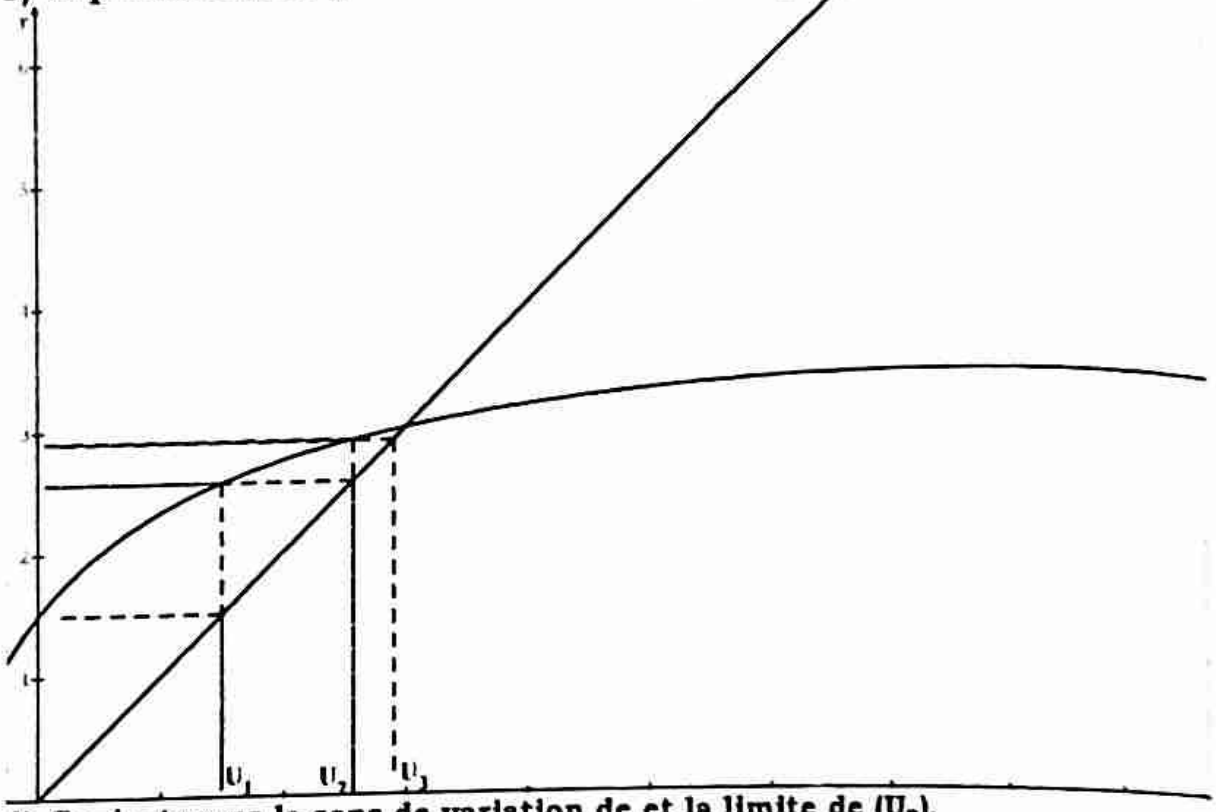
$U_1-U_0=\frac{3}{2}$; $U2-U1=\frac{18}{7}-\frac{3}{2}=\frac{36-21}{14}=\frac{15}{14}$.

La suite n'est pas arithmétique, car $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$

La suite n'est pas géométrique sinon on aurait $U_1 = r^1U_0 = 0$.

La suite (U_n) n'est ni géométrique, ni arithmétique.

3) Représentons les premiers termes de la suite (U_n).



4) Conjecturons le sens de variation de et la limite de (U_n).

En regardant le graphique, on peut dire que la suite (U_n) est croissante et la limite de (U_n) est 3.

5) Calculons V_0, V_1 et V_2.

$$V_n=\frac{U_n+1}{3-U_n}=\frac{1}{3}.$$

$$V1=\frac{U_1+1}{3-U_1}=\frac{\frac{3}{2}+1}{3-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{2}}{\frac{6}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$$

$$V2=\frac{\frac{18}{7}+1}{3-\frac{18}{7}}=\frac{\frac{18+7}{7}}{\frac{21-18}{7}}=\frac{\frac{25}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{25}{3}$$

6) Démontrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 5.

Calculons le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ pour tout n dans IN.

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{U_{n+1}+1}{3-U_{n+1}}\times\frac{3-U_n}{U_n+1}=\frac{\frac{4U_n+3}{U_n+2}+1}{3-\frac{4U_n+3}{U_n+2}}\times\frac{3-U_n}{U_n+1}=\frac{\frac{4U_n+3+U_n+2}{U_n+2}}{\frac{3U_n+6-4U_n-3}{U_n+2}}\times\frac{3-U_n}{U_n+1}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{\frac{5U_n+5}{U_n+2}}{\frac{3-U_n}{U_n+2}}\times\frac{3-U_n}{U_n+1}=\frac{5U_n+5}{3-U_n}\times\frac{3-U_n}{U_n+1}=\frac{5(U_n+1)}{U_n+1}=5$$

Donc la suite (Vn) est une géométrique de raison 5.

7) Trouvons l'expression de V_n et de U_n en fonction de n.

Puisque la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 5 et que $V_0=\frac{1}{3}$, on a $V_n=5^n\times\frac{1}{3}$

$V_n=\frac{5^n}{3}$.

Partant du fait que $V_n=\frac{U_n+1}{3-U_n}$, on a $3V_n - U_nV_n = U_{n+1}$.

Ce qui équivaut à $3V_n-1=U_n+U_nV_n$.

Ce qui s'écrit $3Vn-1=U_n(1+V_n)$ et donc $U_n=\frac{3V_n-1}{1+V_n}$.

Comme $Vn=\frac{5^n}{3}$, alors on a $U_n=\frac{3\times\frac{5^n}{3}-1}{1+\frac{5^n}{3}}=\frac{5^n-1}{\frac{3+5^n}{3}}=\frac{3(5^n-1)}{3+5^n}$

DENOMBREMENT



Blaise PASCAL est né à Clermont-Ferrand le 19 juin 1623 Il est l'un des plus grands génies et des plus remarquables écrivains français du XVIIe siècle.
Son père, Étienne Pascal, Passionné pour les mathématiques, est lié avec des savants avec lesquels il participe à de nombreuses réunions marquées par la présence du petit Blaise.
Dans ce contexte, le jeune **PASCAL** prend rapidement un goût vif pour les mathématiques.

A l'âge de douze ans, avec « des barres et des ronds » et sur une simple définition, il trouve moyen d'arriver seul et sans livre jusqu'à la 32e proposition des ***Eléments d'Euclide***.
A 16 ans, il écrit en latin ***"Essai pour les coniques"***, ou est résumé tout ce qu'on sait sur les coniques.
Un peu après, **PASCAL** conçoit et fait fabriquer une machine arithmétique (appelée ***la Pascaline***) pour la simplification des calculs.

De 1646 à 1648, il fait des expériences barométriques qui confirment les découvertes sur la pesanteur de l'air et le conduisent à prouver l'existence du vide. Il est également à l'origine du ***«principe de PASCAL»*** qui établit qu'un fluide est incompressible. Si on lui fait subir une pression, celle-ci se transmet intégralement sur les parois du récipient qui le contient.
En hommage à ses travaux, son nom sera donné à une unité de pression.

En 1654, il entretient avec Pierre de Fermat des correspondances sur le thème des jeux de hasard qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : ***les calculs de probabilités***.
La même année, il fait la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui ***"triangle de PASCAL"***. Et c'est aussi à l'occasion du ***"Traité sur le triangle arithmétique"*** qu'il énonce pour la première fois **le principe du raisonnement par récurrence.**

Mais le génie de **PASCAL** ne s'arrête pas aux sciences.
Un matin de l'hiver 1654, **PASCAL** connait une illumination religieuse soudaine.
Il se détourne alors des sciences et décide d'entrer au couvent janséniste de Port-Royal. Là, il écrit les "Provinciales" entre janvier 1656 et mars 1657.
Il écrit un second chef d'œuvre de la littérature, ***"Les Pensées"***, qui est une apologie de la religion chrétienne.
Sa mort prématurée l'empêche de le mener à son terme.

En 1658, sa santé, déjà fragile, se détériore et pour se distraire de souffrances physiques insupportables, il se met à étudier les propriétés de la cycloïde ou roulette. Ses souffrances disparaissant aussitôt, il le voit comme un message de Dieu lui autorisant de s'adonner à nouveau à ses deux passions en même temps. **PASCAL** propose et résout lui-même les problèmes les plus difficiles et publie ses résultats dans un ***"Traité général de la roulette"***, 1659.
Il décède le 19 août 1662, à l'âge de 39 ans, sans doute des suites d'un cancer de l'estomac.

FICHE DE COURS

• Si l'énoncé contient le mot ***simultanément***, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance.
Le modèle mathématique est la COMBINAISON.

Le nombre de tirage de p éléments d'un ensemble qui en contient n est alors. C_n^p

• Si l'énoncé contient le mot ***successif***, il faut tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné.
On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé. Il s'agit alors soit d'un arrangement soit d'une *p-liste*.

• Si l'énoncé contient les mots ***successif et avec remise***, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.
Le modèle mathématique est la P - LISTE.

Dans ce cas, le nombre de tirage de p éléments d'un ensemble qui en contient n est : n^p

• Si l'énoncé contient les mots ***successif et sans remise***, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments).
Le modèle mathématique est l'*ARRANGEMENT*.

Le nombre de tirage de p éléments d'un ensemble qui en contient n est alors: A_n^p

Remarque : Dans les calculs :

Le mot «***ET***» renvoie à une **MULTIPLICATION**.

Le mot «***OU***» renvoie à une **ADDITION**.

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1

Ecrire un mot c'est former un p-uplet d'éléments de l'ensemble des lettres de l'alphabet. Ce que l'on appelle « mot » est une suite de lettres qui peut ne pas appartenir à la langue française ni à aucune autre langue connue.

1. Combien peut on former de mots de trois lettres ?
2. Combien peut-on former de mots de trois lettres commençant par une voyelle ?
3. Combien peut-on former de mots de trois lettres ne commençant pas par les deux lettres AB ?

EXERCICE 2

1. Calculer A_1^1 A_2^1; A_2^2; A_5^3; A_8^5
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ les équations suivantes : $A_n^2 = 3n$; $A_n^3 = 5\,n^2$

EXERCICE 3

1. Dix personnes veulent s'asseoir sur un banc de quatre sièges seulement.
De combien de façons différentes les quatre places peuvent-elles être occupées ?
2. Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former avec les neuf chiffres 1, 2, 3,...,9 si
a. les répétitions sont possibles.
b. les répétitions ne sont pas permises (tous les chiffres sont distincts).

EXERCICE 4

Les douze tomes d'une encyclopédie sont placés au hasard.
a. Combien y a-t-il de manières de les classer ?
b. Parmi ces classements, combien y en a – t– il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre ?

EXERCICE 5

Le championnat de football de Côte d'Ivoire regroupe douze équipes, qui doivent se rencontrer deux à deux, chacune des douze équipes devant rencontrer les onze autres.
A combien de rencontres donnera lieu la compétition :
a. dans le cas où deux équipes ne se rencontrent qu'une fois ?
b. dans le cas où la compétition se déroule par matches aller-retour ?

EXERCICE 6

Déterminer toutes les façons de faire la monnaie de 100 F.
1. avec des pièces de 10 F et 25 F
2. avec des pièces de 10F ; 25 F et 50 F

EXERCICE 7

Un jury de cour d'assises est composé de huit jurés désignés par tirage au sort dans une liste de quarante personnes.

Cette liste est composée de vingt-quatre femmes et seize hommes.

1. Combien de jurys différents peut-on former à partir de cette liste ?
2. Combien de jurys composés de cinq femmes et trois hommes peut-on former ?
3. Combien de jurys composés d'un nombre égal d'hommes et de femmes peut-on former ?

EXERCICE 8

Le professeur de musique fait une enquête auprès de 150 élèves d'un lycée.

- 116 aiment la musique de variétés ;
- 52 aiment la musique traditionnelle ;
- 40 aiment la musique de variétés et la musique traditionnelle.

Combien d'élèves n'ont pas donné leur avis ?

EXERCICE 9

Le foyer d'un lycée doit élire son bureau composé d'un président, d'un vice président et d'un trésorier.

Parmi les 20 candidats se trouvent 12 filles dont 5 en terminale et 8 garçons dont 4 en terminale.

On suppose que les candidats ont la même chance d'être élu.

Calculer le nombre de possibilités de réaliser les événements suivants :

A : « Les personnes choisies sont de même sexe. »

B : « Le président est un garçon et les autres sont des filles ».

C : « Le bureau est constitué de deux filles et d'un garçon. »

E : « Le bureau comprend un président et un vice président de sexes différents. »

D : « Le bureau comprend au moins un élève de terminale ».

EXERCICE 10

Une urne contient 3 boules jaunes, cinq boules rouges et deux boules vertes.

A. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Quel est le nombre de tirages unicolores ?
2. Quel est le nombre de tirages comportant exactement deux boules de même couleur ?

B. On tire successivement sans remise trois boules.

Quel est le nombre de tirages comportant des boules rouges uniquement ?

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10.

On tire successivement 3 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

Combien y a-t-il de tirages possibles ?

EXERCICE 2

Déterminer le nombre de façons de composer un code de 3 symboles, sachant que le premier symbole est une lettre et que les deux derniers sont des chiffres.

EXERCICE 3

Les numéros de téléphone du réseau téléphonique ivoirien sont des nombres entiers de 8 chiffres. Quelle est la capacité de ce réseau ?

EXERCICE 4

Une plaque d'immatriculation contient 2 lettres distinctes suivies de 3 chiffres dont le premier est différent de zéro.

Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

EXERCICE 5

La tirelire d'Axel contient 4 pièces de 100F, 3 pièces de 10F et 2 pièces de 5F.

On tire simultanément de la tirelire 3 pièces.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Déterminer le nombre de tirages possibles ?

a. On obtient une somme supérieure ou égale à 200F.

b. On obtient une somme inférieure à 200F.

EXERCICE 6

Une urne contient 9 boules dont 2 rouges, 3 blanches et 4 noires, toutes indiscernables au toucher.

De combien de manières peut-on tirer successivement et sans remise 3 boules de l'urne :

1. Sans aucune autre condition.
2. Si toutes les boules tirées sont noires.
3. Si toutes les boules tirées sont de même couleur.
4. Si le tirage comporte 2 boules blanches et une boule noire, dans cet ordre.

EXERCICE 7

Un club sportif comprend 35 membres.

18 membres pratiquent le football ,16 le basket et 10 les deux sports.

1. Déterminer le nombre de membres du club pratiquant uniquement le football.

2. Déterminer le nombre de membres du club ne pratiquant aucun des deux sports.

EXERCICE 8

Une classe de première comprend 20 filles et 15 garçons.

Pour participer au concours Génie en herbe, on veut former une équipe de 5 élèves.

1. Combien d'équipes peut-on former ?

2. Déterminer le nombre d'équipes comportant :

a. exactement 3 filles

b. aucun garçon

c. au moins un garçon.

EXERCICE 9

On lance trois fois un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et l'on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

1. Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres identiques.

2. Déterminer le nombre de résultats comportant trois chiffres distincts.

3. Déterminer le nombre de résultats comportant exactement deux chiffres identiques.

4. Déterminer le nombre de résultats pour lesquels la somme des chiffres obtenus est égale à 6.

EXERCICE 10

Les 12 délégués des classes de première doivent élire en leur sein un représentant au conseil d'établissement ; il n'y a que deux candidates Diane et Sergiane.

Une candidate est élue si elle obtient la majorité absolue.

Tous les délégués doivent voter pour l'un ou pour l'autre candidat.

1. Déterminer le nombre de votes possibles.

2. Déterminer le nombre de votes possibles :

a. pour que Sergiane soit élue.

b. pour que Diane soit élue.

3. Déterminer le nombre de votes possibles pour qu'il y ait ballottage.

EXERCICE 11

A la fête d'un lycee, on met en vente 300 billets de tombola.

Le tiers des tickets mis en vente est gagnant.

Un élève tire simultanément et au hasard 3 tickets.

Les tickets sont identiques et indiscernables.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. Vérifier qu'il y a 100 tickets gagnants.
2. Vérifier que le nombre de tirages possibles est 4 455 100.
3. Calculer le nombre de possibilité des évènements suivants :

A : « Avoir exactement un ticket gagnant».

B : « Avoir exactement trois tickets gagnants».

C : « N'avoir aucun ticket gagnant».

D : « Avoir au moins un ticket gagnant».

EXERCICE 12

Les codes informatiques de l'entreprise OMEGA sont constitués de trois chiffres distincts suivis d'une lettre de l'alphabet français.

Deux exemples de codes sont 245A et 018Q.

1. Démontrer que le nombre de codes possibles est 18 720.
2. Après avoir codé son système, le chef du service informatique a oublié une partie de son code. Il se souvient seulement que:

- la lettre du code est une voyelle;
- le code contient un seul chiffre pair;
- aucun des chiffres du code n'est nul.

Démontrer que le nombre de codes conformes aux informations précédentes est 1 440.

EXERCICE 13

12 personnes dont **5 femmes** et **7 hommes** sont volontaires pour participer à la formation d'un jury devant comporter 5 personnes.

Combien peut-on former de jurys:

1. de 5 personnes?
2. de 2 femmes et 3 hommes ?
3. constitués uniquement de personnes de même sexe?
4. comportant au moins 3 femmes ?

EXERCICE 14

Les 10 lettres du mot « MUI TIPARES » sont inscrites sur 10 petits cartons rectangulaires. placés dans un sac. Tout alignement de 5 de ces cartons est appelé « mot » qu'il ait une signification au non. On tire au hasard, successivement 5 cartons que l'on aligne dans l'ordre ou ils se présentent.

1. Combien de mots de 5 lettres peut-on former ?
2. Combien peut-on former de mots de 5 lettres
   a. commençant par la lettre A ?
   b. commençant et se terminant par une consonne ?

EXERCICE 15

Aminata revient du marché avec 13 fruits dont 2 ananas, 6 mangues et 5 oranges.

Elle veut offrir à son amie Fatou un panier de 5 fruits choisis parmi ceux qu'elle vient d'acheter.

1. Quel est le nombre total de choix dont elle dispose ?
2. De combien de manières peut-on réaliser les évènements suivants :

A = {Fatou reçoit un panier ne contenant aucune mangue}.

B = {Fatou reçoit un panier contenant uniquement des mangues}.

C = {Fatou reçoit un panier contenant au moins une mangue}.

EXERCICE 16

TANOH écrit les lettres de son nom sur 5 cartons et les met dans un chapeau.

Ensuite, il tire successivement et sans remise 3 cartons du chapeau qu'il dépose devant lui de gauche à droite.

Il obtient alors un mot (ayant un sens ou non).

1. Vérifier que l'on peut ainsi écrire 60 mots différents.
2. Parmi ces mots:
   a. Combien finissent par la lettre T ?
   b. Combien ne comportent aucune voyelle?
   c. Combien commencent par une consonne?
   d. Combien comportent une seule consonne?
3. Combien de mots se terminent par T ?
4. Combien de mots comportent au moins une voyelle ?
5. Combien de mots comportent les lettres O et H ?

EXERCICE 17

Les codes informatiques de l'entreprise OMEGA sont constitués de trois chiffres distincts suivis d'une lettre de l'alphabet français.

Deux exemples de codes sont 245A et 018Q.

1. Démontrer que le nombre de codes possibles est 18 720.

2. Après avoir codé son système, le chef du service informatique a oublié une partie de son code. Il se souvient seulement que :

- la lettre du code est une voyelle ;
- le code contient un seul chiffre pair ;
- aucun des chiffres du code n'est nul.

Démontrer que le nombre de codes conformes aux informations précédentes est 1 440.

EXERCICE 18

PARTIE A.

La carte de séjour d'étranger est caractérisée par un numéro à 10 chiffres.

Exemples : *n° 3711102798*

n° 0962758314

Toutes les cartes ont des numéros distincts.

Les chiffres composant un numéro ont les mêmes chances d'être tirés.

1. Combien peut-on établir de cartes ?
2. Parmi ces cartes, combien y en a-t-il dont le numéro :

a. soit composé de 10 chiffres distincts ?

b. contienne au moins une fois le chiffre « 5 » ?

PARTIE B.

Un numéro à 7 chiffres aurait été suffisant pour établir une carte à chacun des 4 millions d'étrangers.

1. Pourquoi ?
2. Dans ce cas, combien peut-on imprimer de cartes dont le numéro comporte uniquement des chiffres inférieurs ou égaux à 6, le chiffre 0 et le chiffre 2 ne figurant qu'une seule fois ?

EXERCICE 19

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une boite contient 12 gâteaux emballés séparément dans 12 paquets identiques. 5 de ces gâteaux sont parfumés à la vanille, 4 autres au chocolat et les 3 derniers à la banane.

A. Un enfant choisit simultanément 3 gâteaux.

1. Combien y-a-t-il de choix possibles ?
2. De combien de manières peut-il choisir :

a. Un gâteau de chaque sorte ?

b. 3 gâteaux identiques ?

c. Exactement 2 variétés de gâteaux?

B. S'il mangeait un gâteau le matin, un gâteau à midi et un gâteau le soir :

1. Combien aurait-il eu de choix possibles ?
2. De combien de manières aurait-il choisi :

a. un gâteau à la vanille le matin, un gâteau au chocolat à midi, un gâteau à la banane le soir ?

b. Un gâteau de chaque sorte ?

c. deux gâteaux à la banane et un au chocolat ?

EXERCICE 20

Soit K l'ensemble des lettres A, B, C, D, E.

1. Un mot est une succession de lettres distinctes ou non de l'ensemble K.

Exemple : *AAA, ABB, BAC* sont des mots de 3 lettres.

a. Calculer le nombre de mots de 3 lettres que l'on peut former.

b. Calculer le nombre de mots de 3 lettres formés de lettres toutes distinctes.

c. Calculer le nombre de mots de 3 lettres formés de lettres toutes distinctes et terminés par E.

2. On tire au hasard et simultanément 3 lettres de l'ensemble K.

a. Calculer le nombre de manières d'avoir une consonne et 2 voyelles.

b. Calculer le nombre de manières d'avoir 2 consonnes et 1 voyelle.

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1

1) Le nombre de mots formés de 3 lettres

Un mot est un 3-uplet de lettres tirées de l'alphabet qui contient 26 lettres.

Donc le nombre de mots formés de 3 lettres est $26^3 = 17576$

2) L'alphabet comprend 26 LETTRES dont 6 voyelles.

Pour la première lettre du mot on a 6 choix.

Pour la deuxième lettre du mot on a 26 choix.

Et pour la troisième lettre du mot on a aussi 26 choix.

Donc le nombre de mots de trois lettres commençant par une voyelle est $6 \times 26^2 = 4056$

3) Cherchons le nombre de mots commençant par AB.

Les deux premières lettres sont imposées.

Il y a 26 possibilités pour la troisième.

Donc il y a 26 mots de trois lettres commençant par AB.

Nombres de mots ne commençant pas par AB : $17576 - 26 = 17550$

EXERCICE 2

1) Calculons : A_1^1; A_2^1; A_2^2; A_5^3; A_8^5

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

$$A_1^1 = \frac{1!}{(1-1)!} = \frac{1!}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \; ; A_2^1 = \frac{2!}{(2-1)!} = \frac{2!}{1!} = \frac{2}{1} = 2 \; ; A_2^2 = \frac{2!}{(2-2)!} = \frac{2!}{0!} = \frac{2}{1} = 2$$

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$A_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$$

2) Résolution dans $\mathbb{N}^*$ $A_n^2 = 3n$; $A_n^3 = 5\,n^2$

- $A_n^2 = 3n$

Ensemble de validité : $n \geq 2$

$A_n^2 = 3n$ *donc* $n(n-1) = 3n$ *donc* $n^2 - 4n = 0 \Leftrightarrow n(n-4) = 0$ *donc* $n = 0 < 2$ ou $n = 4 > 2$

Donc $S_{\mathbb{N}} = \{4\}$

- $A_n^3 = 5\,n^2$

Ensemble de validité $n \geq 3$

$A_n^3 = 5\,n^2$ *donc* $n(n-1)(n-2) = 5\,n^2$ *donc* $n^3 - 8n^2 + 2n = 0$ *donc* $n(n^2 - 8n + 2) = 0$

donc $n = 0 < 3$ ou $n^2 - 8n + 2 = 0$

Résolvons $n^2 - 8n + 2 = 0$

$\Delta = 56$ d'où $n_1 = 4 - \sqrt{14} \notin \mathbb{N}$. $n_2 = 4 + \sqrt{14} \notin \mathbb{N}$ donc $S_{\mathbb{N}} = \varnothing$

EXERCICE 3

1) C'est faire un arrangement de 4 éléments dans un ensemble à 10 éléments.

$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

2) a) Les répétitions sont possibles, c'est déterminer le nombre de 4-listes pris dans un ensemble à 9 éléments : $9^4 = 6561$

b) Les répétitions ne sont pas permises (tous les chiffres sont distincts). C'est faire un arrangement de 4 éléments dans un ensemble de 9 éléments : $A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

EXERCICE 4

a) Un classement des douze tomes est une permutation de ces douze tomes.

Il y a donc P manières de les classer : P = 12 ! = 479001600

b) La place du tome 2 étant déterminée, il y a onze places possibles pour le tome 1.

Cela étant, les dix autres tomes peuvent être rangés de 10 ! manières.

Au total, il y a 11 x 10 ! classements.

EXERCICE 5

a) Dans le cas où deux équipes ne se rencontrent qu'une fois, il s'agit d'une combinaison de 2 équipes tirées parmi 12 : $N = C_{12}^2 = \frac{A_{12}^2}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 6 \times 11 = 66$ matches.

b) Dans le cas où la compétition se déroule par matches aller-retour, on a 2 fois plus de matches : $N = 2 \times C_{12}^2 = 2 \times 66 = 132$ rencontres.

EXERCICE 6

a) Faire la monnaie de 100F avec des pièces de 10F et 25F.

Soit avec 10 pièces de 10F

Soit avec 4 pièces de 25F

Soit avec 5 pièces de 10F et 2 pièces de 25F.

Au total, 3 façons de faire la monnaie de 100F avec les pièces de 10F et 25F.

b) Faire la monnaie de 100F avec des pièces de 10F, 25F et 50F.

Soit avec 10 pièces de 10F

Soit avec 4 pièces de 25F

Soit avec 2 pièces de 50F

Soit avec 5 pièces de 10F et 2 pièces de 25F

Soit avec 5 pièces de 10F et 1 pièce de 50F

Soit avec 2 pièces de 25F et 1 pièce de 50F

Au total 6 façons de faire la monnaie de 100F avec les pièces de 10F, 25F et 50F.

EXERCICE 7

40 personnes (24 femmes et 16 hommes)

1) Le nombre de jurys differents formés à partir de cette liste

$C^8_{40} = \frac{40!}{8!(40-8)!} = 76\,904\,685$

2) Le nombre de jurys composés de 5 femmes et 3 hommes

$C^5_{24} \times C^3_{16} = 42.504 \times 560 = 23.802.240$

3) Le nombre de jurys composés d'un nombre egal d'hommes et femmes

$C^4_{24} \times C^4_{16} = 10.626 \times 1.820 = 19.339.320$

EXERCICE 8

* Soit A l'ensemble des élèves qui n'ont pas donné leur avis.
* E l'ensemble des élèves du Lycee.
* V l'ensemble des élèves aimant la musique de variété.
* T l'ensemble des élèves aimant la musique traditionnelle.

Card(E) – Card (A) = Card (V) – Card (T) + Card (V∩ T)

Card (A) = Card(E) – Card (V) – Card (T) + Card (V ∩ T) = 150 – 116 – 52 + 40 = 22

Il y a donc 22 élèves qui n'ont pas donne leur avis.

EXERCICE 9

Le nombre total de bureaux que l'on peut former est le nombre d'arrangements de 3 éléments pris parmi 20 ce qui donne $card(\Omega) = A^3_{20} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$

Soit A l'évènement « les personnes choisies sont de même sexe »

On peut donc choisir un bureau compose de 3 filles prises sur 12 filles OU BIEN compose de 3 garçons choisis parmi 8 garçons.

$$card(A) = A^3_{12} + A^3_8 = 12 \times 11 \times 10 + 8 \times 7 \times 6 = 1320 + 336 = 1656$$

B : « le président est un garçon et les autres sont des filles ».

$$card(B) = A^1_8 \times A^2_{12} = 8 \times 12 \times 11 = 8 \times 132 = 1056$$

C : « le bureau est constitué de deux filles et d'un garçon ».

Le garçon est choisi de 8 façons et peut occuper chacun des 3 postes ce qui donne $8 \times 3 = 24$ choix au total.

Les deux filles sont choisies de C^2_{12} façons et peuvent occuper les deux postes restantes de 2! façons soit au total $2! \times C^2_{12} = 2 \times 61 = 132$ cas.

Ainsi : $card(C) = 24 \times 132 = 3168$

D « le bureau comprend au moins un élève de terminale »

$\bar{D}$ « Aucun élève de terminale n'est dans le bureau »

$card(\bar{D}) = A_{11}^3 = 11 \times 10 \times 9 = 990$

$card(D) = card(\Omega) - card(\bar{D}) = A_{20}^3 - A_{11}^3 = 6840 - 990 = 5850$

E « le bureau comprend un président et un vice-président de sexe différent »

Il s'agit de choisir un président parmi les 12 filles, un vice-président parmi les 8 garçons et un secrétaire parmi les 18 qui restent ou vice-versa.

$card(E) = 12 \times 8 \times 18 + 8 \times 12 \times 18 = 2 \times 8 \times 12 \times 18 = 3456$

EXERCICE 10

Une urne contient 3 boules jaunes, 5 boules rouges et 2 boules vertes.

A. On tire simultanément trois boules de l'urne

$card(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

1. Soit A l'évènement « avoir un tirage unicolore »

Il s'agit de tirer trois boules de même couleur.

$card(A) = C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$.

2. Soit B l'évènement « avoir exactement 2 boules de même couleur »

$card(B) = C_3^2 \times C_7^1 + C_5^2 \times C_5^1 + C_2^2 \times C_8^1 = 79$.

B. On lire successivement sans remise trois boules.

Soit C l'évènement « avoir des boules rouges uniquement »

$card(C) = A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

STATISTIQUES



Andreï Andreïevitch Markov

(2 juin 1856 - 20 juillet1922)

Mathématicien russe.

Né en 1856 à Riazan, il étudia à l'Université d'État de Saint-Pétersbourg en 1874 sous la tutelle de Tchebychev et en 1886, il devint membre de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.

Ses travaux sur la théorie des probabilités l'ont amené à mettre au point **les chaînes de Markov** qui l'ont rendu célèbre. Ceux-ci peuvent représenter les prémices de la théorie du calcul stochastique. Il étudia en 1913 la succession des lettres dans le roman *Eugène Onéguine* d'Alexandre Pouchkine. Markov nota que les lettres utilisées (qui se répartissent selon les statistiques spécifiques de l'alphabet russe) suivent en fait des contraintes très précises: chaque lettre dépend étroitement de la précédente. On appela par la suite les groupements dans lesquels une lettre d'un texte dépend de la précédente - avec une certaine probabilité - **une chaîne de Markov.**

FICHE DE COURS

SERIES STATISTIQUES PRESENTANT UN REGROUPEMENT EN CLASSES

Dans cette première partie, on ne considère que les séries statistiques à modalités regroupées en classes. Une telle série, comportant p classes de bornes a_0, a_1, a_2,...,a_p ($a_0<a_1<a_2<...<a_p$), est notée $(([a_{i-1};a_i[,n_i))_{1\leq i\leq p}$, où n_i est l'effectif de la classe $[a_{i-1};a_i[$.

1. Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Pour une série statistique $(([a_{i-1};a_i[,n_i))_{1\leq i\leq p}$:

- L'effectif cumulé croissant de la classe $[a_{k-1};a_k[$ est : $\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + ... + n_k$
- La fréquence culée croissante de la classe $[a_{k-1};a_k[$ est : $\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{N}$, N étant l'effectif total.
- L'effectif cumulé décroissant de la classe $[a_{k-1};a_k[$ est : $\sum_{i=k}^{p} n_i = n_k + n_{k+1} + ... + n_p$
- La fréquence cumulée décroissante de la classe $[a_{k-1};a_k[$ est : $\frac{\sum_{i=k}^{p} n_i}{N}$.

2. Caractéristiques de position

Classe modale

La classe modale est la classe d'effectif maximal.

La médiane

Soit N l'effectif total de la série statistique présentant un regroupement en classes.

La médiane est le nombre réel M tel que le nombre d'individus de modalité supérieure à M et le nombre d'individus de modalité inférieure à M soient tous deux égaux à $\frac{N}{2}$.

On détermine également la médiane à l'aide des polygones des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes. C'est l'abscisse de ces polygones qui a pour ordonnée 50%.

La moyenne

On appelle moyenne de la série statistique $([a_{i-1};a_i[,n_i)_{1\le i\le p}$ la moyenne $\bar{x}$ de la série $(x_i,n_i)_{1\le i\le p}$ où x_i est le centre de la classe $[a_{i-1};a_i[$.

Si N est l'effectif total, on a $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i n_i$.

3. Caractéristiques de dispersion

Soit $([a_{i-1};a_i[,n_i)_{1\le i\le p}$ d'effectif total N et de moyenne $\bar{x}$.

En désignant par x_i est le centre de la classe $[a_{i-1};a_i[$, on a :

- L'écart moyen : $e_m=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i|x_i-\bar{x}|$
- La variance V= $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i-\bar{x})^2=(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2)-\bar{x}^2$
- L'écart type $\sigma=\sqrt{V}$

SERIES STATISTIQUES A DEUX CARACTERES

L'étude porte sur une série statistique à deux caractères quantitatifs.

1. Organisation des données

Point moyen d'un nuage de points

Soit (x_i, y_j, n_{ij}), une série statistique à deux caractères quantitatifs.

Le point moyen du nuage de points est le point de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent les moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j).

2. Ajustement linéaire

$(x_i,y_i)_{1\le i\le N}$ est une série statistique à deux caractères x et y d'effectif N.

Covariance

Cov(x, y)= $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i)-\bar{x}\bar{y}$

La droite de régression de y en x

Lorsque $V(x)\neq 0$, on a :

La droite de régression de y en x passe par le point moyen et a pour coefficient directeur $\frac{Cov(x,y)}{V(x)}$.

Une équation de cette droite est : $y-\bar{y}=\frac{Cov(x,y)}{V(x)}(x-\bar{x})$.

Ou $y = ax + b$ avec $a=\frac{Cov(x,y)}{V(x)}$ et $b=\bar{y}-a\bar{x}$.

La droite de régression de x en y

Lorsque $V(y)\neq 0$, on a :

La droite de régression de x en y passe par le point moyen et a pour équation :

$x-\bar{x}=\frac{Cov(x,y)}{V(y)}(y-\bar{y})$.

Coefficient de corrélation linéaire

Lorsque $V(x)\neq 0$ et $V(y)\neq 0$, le coefficient de corrélation linéaire est le nombre réel r tel que : $r=\frac{Cov(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}}$.

La corrélation entre les deux caractères x et y est d'autant meilleur que |r| est proche de 1.

Si $0,87\leq r\leq 1$, alors il existe une bonne correlation entre les caractères x et y.

EXERCICES RESOLUS

SERIES STATISTIQUES PRESENTANT UN REGROUPEMENT EN CLASSES

EXERCICE 1

Une entreprise de vente de voitures d'occasion a relevé la distance parcourue par 100 de ses véhicules pour estimer leur prix de vente. Le résultat est le suivant .

Distance (en milliers de km)	[77.5 ; 82.5[	[82,5 ; 87,5[	[87.5 ; 92.5[	[92.5 ; 97.5[
Nombre de voitures	4	10	14	17
Distance (en milliers de Km)	[97.5 ; 102,5[	[102,5 ; 107,5[	[107,5 ; 112,5[	[112.5 ; 117,5[
Nombre de voitures	25	16	7	7

1. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
3. Déterminer graphiquement la médiane de la série.
4. Calculer par interprétation linéaire, le nombre de véhicules ayant parcouru au plus 110 mille km.

EXERCICE 2

BOZO est un pêcheur moderne. A la fin de chaque pêche, il classe les poissons par taille. Voici la répartition des 250 poissons qu'il a capturés lors de sa dernière sortie :

Taille (en cm)	[10 ; 20[	[20 ;30[	[30 ; 40[	[40 ;50[	[50 ;60[	[60 ;70[	[70 ;80[
Nombre	16	26	36	52	38	30	20
Taille (en cm)	[80 ; 90[	[90 ;100[	[100 ; 110[	[110 ;120[			
Nombre	12	10	6	4			

1. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Combien de poissons mesurent au moins 60 cm ? au plus 90cm ?
3. Construire le polygone des effectifs cumulés décroissants.
4. Déterminer graphiquement la médiane de la série.
5. Calculer la médiane de la série.
6. Calcule la taille moyenne des poissons.
7. Construis l'histogramme de la série.

EXERCICE 3

Une compétition de course de vitesse de 20 secondes, organisée avec 100 élèves de première a donné les résultats suivants :

Classe (en m)	[0 ; 20[	[20 ;40[	[40 ; 60[	[60 ;80[	[80 ;100[	[100 ;120[
Nombre d'élèves	10	25	35	12	12	6

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ et la médiane de cette série.
2. Calculer l'écart moyen em de cette série.
3. Calculer la variance V et l'écart-type σ de cette série.
4. Calculer le pourcentage de candidats appartenant à l'intervalle $]\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma[$

EXERCICE 4

La village d'ABOBO-DOUME a décidé d'éliminer les souris des habitations.

Pour cela, il a été disséminé des appâts empoisonnés. Pour éviter que les souris ne se méfient, elles ne meurent pas tout de suite après l'ingestion.

Une étude portant sur 200 souris a donné les résultats suivants :

Temps de décès en heures	[0 ; 5[	[5 ;10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[
Nombre de souris	25	40	85	

1) Recopier le tableau, le compléter. Quelle est la classe modale, quelle est l'amplitude ?

2) Quelle est la population étudiée, le caractère, la nature du caractère ?

3) Représenter l'histogramme de cette série.

4) Estimer le temps moyen de décès.

5) Faire le tableau des effectifs cumulés.

Estimer le temps après lequel 80% des souris seront mortes.

SERIES STATISTIQUES A DEUX CARACTERES

EXERCICE 5

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

Dans chacun des cas suivants : Représenter le nuage de points ;Trouver une équation de la droite de régression de Y en fonction de X (X désignant l'abscisse et Y l'ordonnée d'un point). Représenter cette droite

1) M1(1 ;2), M2(1 ; $\frac{5}{2}$), M3(0 ;2), M4(-1 ;0), M6(3 ;4), M6(4 ;3), M7(-2 ;1)

2) M1(0;1), M2(1 ; $\frac{5}{2}$), M3(-1 ;0), M4(3 ; $\frac{7}{2}$), M6($\frac{1}{2}$;2), M6(6 ; $\frac{29}{4}$), M7($-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$)

3) M1(7241;237700), M2(7436 ;238400), M3(7451 ;239400), M4(7466 ;240700), M5(7481 ;241800), M6(7496 ; 243000), M7(7511 ;244000)

EXERCICE 6

Dans une fabrique de briques, le comptable a noté dans le tableau ci-dessous le coût de fabrication en fonction du tonnage de briques produit.

Tonnage (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
Coût (y)	40000	57500	71500	84800	99600	115000	129000	145000

1) Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J), le nuage de point associé à cette série statistique double :

Le tonnage figurant en abscisse ;

Le coût figurant en ordonnée.

2) Trouver une équation de la droite de régression de y en fonction de x associée à ce nuage de points et représenter cette droite.

3) Une brique pèse approximativement 2 Kg.

a) Trouver la série statistique double du prix de revient d'une brique, en fonction du tonnage

b) Représenter le nuage de points associé a cette série statistique double :

Le tonnage figurant en abscisse ;

Le coût figurant en ordonnée.

c) Trouver une équation de la droite de régression de Y en fonction de x.

4) L'entreprise veut faire un bénéfice de 17% sur le prix de fabrication

a) Un client commande 350 briques. Combien doit-il payer ?

b) Un client veux connaître le prix de revient d'une brique lorsqu'il a commandé 3,7 tonnes de briques.

Utiliser l'une des droites de régression pour donner ces deux réponses.

EXERCICE 7

Diverses sociétés de gardiennage pour des immeubles résidentiels proposent différents salaires.

Soit x le salaire proposé et y le nombre de candidats qui se sont présentés à l'embauche pour postuler une place.

Les observations sont donné dans le tableau ci-dessous :

Société	Salaire	Nombre de candidats
1	88000	10
2	90000	13
3	92000	17
4	94000	19
5	96000	21

1) Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal (O.I.J). le nuage de points associé à cette série statistique double :

Le salaire (x) figurant en abscisse ;

Le nombre de candidat (y) en ordonnée

2) Trouver une équation de la droite de régression de y en fonction de x associée à ce nuage de points et représenter cette droite sur le graphique précédant.

3) On a appris qu'une septième société de gardiennage s'était ouverte sur la place et que 30 personnes s'y étaient présentés.

A combien peut-on estimer le salaire que l'on a proposé dans cette nouvelle société ?

EXERCICE 8

On donne la série statistique double de quatre éléments :

X	a	1,3	b	1.6
Y	4	5	5	6

Trouver a et b sachant que la droite de régression de Y en fonction de X a pour équation : $Y = 5X-2$

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

Le tableau suivant donne le pourcentage de la consommation de produits pharmaceutiques par rapport par rapport a la consommation globale pour des familles, pendant 6 années considérées.

Année	Pourcentage
1970	9.4
1975	10,9
1980	11,8
1981	12,1
1982	12,3
1983	12,5

1) En considérant que 1970 est l'origine des années pour l'étude de ce phénomène statistique. on appelle rang d'une année A par rapport à l'année d'origine. le nombre entier naturel n tel que :A=1970+n

Donner le tableau statistique du pourcentage de consommation de produits pharmaceutiques. en fonction du rang de l'année considérée.

2) Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal (O.I.J). avec pour unité graphiques 1 cm sur la droite (OI) et 2 cm sur la droite (OJ). le nuage de points:

Le rang (x) de l'année figurant en abscisse

Le pourcentage (y) figurant en ordonnée

3) Trouver une équation de la droite de régression de y en fonction de x et representer cette droite sur le graphique.

(Les résultats seront donnés avec des arrondis d'ordre 3)

4) En supposant que cet ajustement lineaire reste valable au cours des prochaines annees .

a) Quel sera le pourcentage de consommation en produits pharmaceutiques pour une famille en l'an 2000?

b) A partir de quelle année le pourcentage de consommation en produits pharmaceutiques dépassera-t-il 25% de la consommation globale ?

5) Cet ajustement linéaire peut-il rester valable 400 ans ? (calculer le pourcentage qui serait atteint .. cette datte).

CORRECTION DES EXERCICES

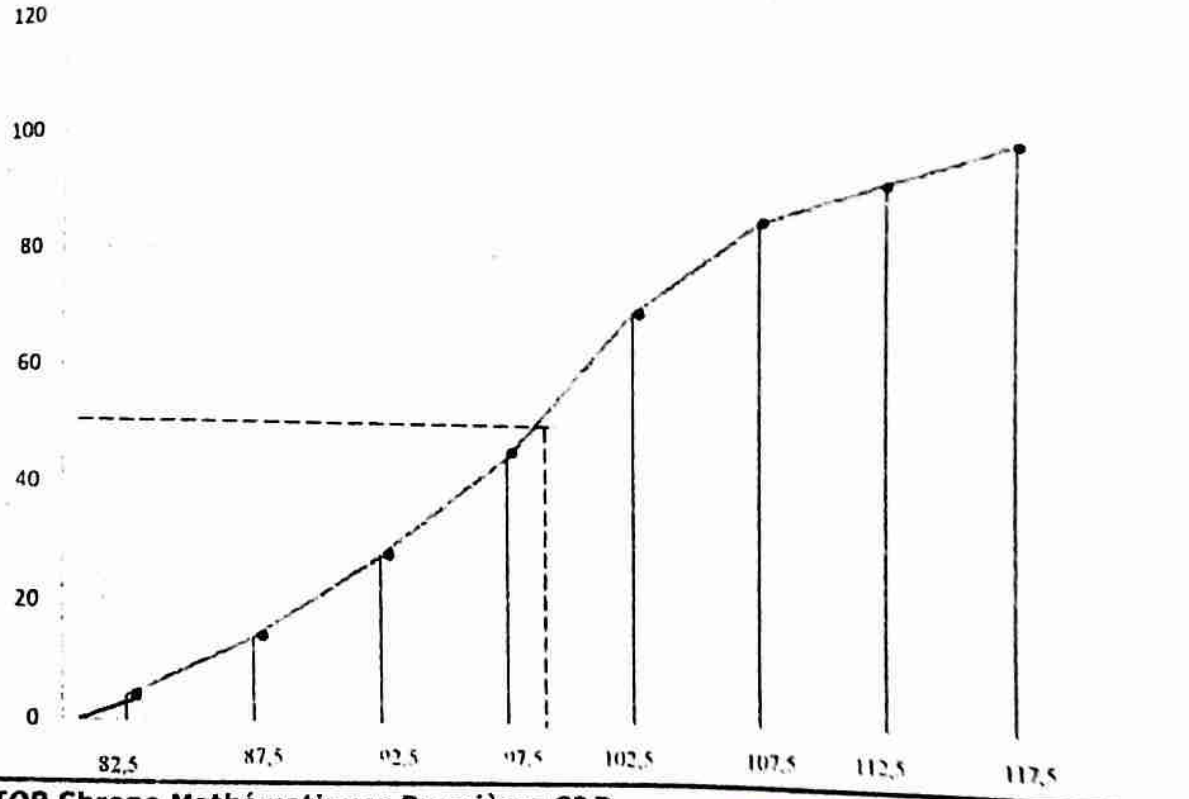
SERIES STATISTIQUES PRESENTANT UN REGROUPEMENT EN CLASSES

EXERCICE 1

1) Tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants

Distance (en milliers de Km)	[77.5 ; 82,5[	[82,5 ; 87,5[	[87,5 ; 92,5[	[92.5 ; 97,5[
Nombre de voitures	4	10	14	17
Effectif cumulé croissant	4	14	28	45
Effectif cumulé décroissant	*100*	*96*	*86*	*72*
Distance (en milliers de Km)	[97.5 ; 102,5[	[102,5 ; 107,5[	[107,5 ; 112,5[	[112,5 ; 117,5[
Nombre de voitures	25	16	7	7
Effectif cumulé croissant	70	86	93	100
Effectif cumulé décroissant	*55*	*30*	*14*	*7*

2) Construisons le polygone des effectifs cumulés croissants.



3. Déterminons graphiquement la médiane.

La médiane est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée la moitié de l'effectif. Ici, c'est l'abscisse du point d'ordonnée 50.

Nous pouvons estimer la médiane à 98,5 km.

4. Déterminons le nombre de véhicules ayant parcouru au plus 110 mille km.

Soit n ce nombre. n est compris entre 86 et 93 comme 110 est compris entre 107,5 et 112,5.

On a : $\frac{n-86}{93-86}=\frac{110-107,5}{112,5-107,5}$. Ce qui équivaut à $\frac{n-86}{7}=\frac{2,5}{5}$

On a : n - 86 = 3,5. C'est-à-dire n=86+3,5=89,5.

Le nombre de voitures ayant parcouru au plus 110 mille km est 89.

EXERCICE 2

1. Dressons le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants :

Taille (en cm)	[10 ; 20[	[20 ;30[	[30 ; 40[	[40 ;50[	[50 ;60[	[60 ;70[	[70 ;80[
Nombre	16	26	36	52	38	30	20
Effectif cumulé croissant	16	42	78	130	168	198	218
Effectif cumulé décroissant	250	234	208	172	120	82	52

Taille (en cm)	[80 ; 90[	[90 ;100[	[100 ; 110[	[110 ;120[
Nombre	12	10	6	4
Effectif cumulé croissant	230	240	246	250
Effectif cumulé décroissant	32	20	10	4

2. Le nombre de poissons qui mesurent au moins 60 cm.

La réponse à cette question est dans l'effectif cumulé décroissant.

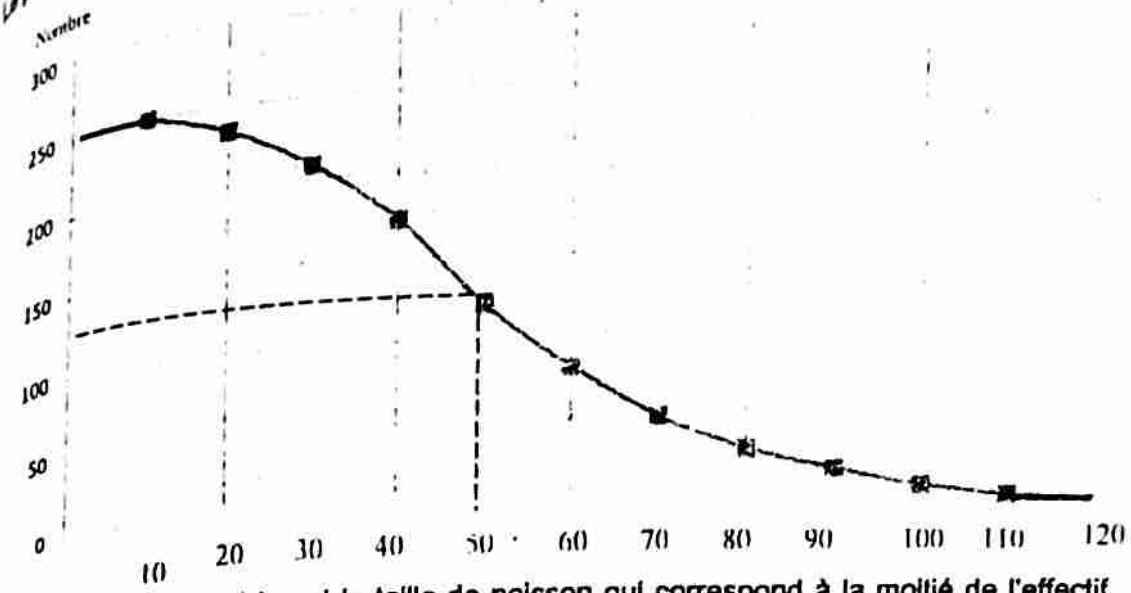
82 poissons mesurent au moins 60 cm.

Le nombre de poissons qui mesurent au plus 90 cm.

La réponse à cette préoccupation se trouve dans l'effectif cumulé croissant.

240 poissons mesurent au plus 90cm.

Le polygone des effectifs cumulés décroissants



La médiane de la série est la taille de poisson qui correspond à la moitié de l'effectif total.

Soit 125 poissons. Et le graphique nous donne 50,5cm.

3. **Calculons la médiane de la série.**

Soit x la taille médiane des poissons. D'après le tableau des effectifs cumulés croissants ou décroissant, x qui correspond à l'effectif de 125, est compris entre 40 et 50 cm.

Et 125 lui est compris entre les effectifs cumulés croissants 78 et 130.

On a par interpolation linéaire : $\frac{x-40}{50-40}=\frac{125-78}{130-78}$.

Ce qui donne $\frac{x-40}{10}=\frac{47}{52}$

Ce qui revient à dire x-40 = 9,03 donc x = 49.03.

La taille médiane des poissons pêchés par BOZO est 49.03cm.

NB : la valeur graphique d'une donnée peut être différente de la valeur calculée, car la valeur graphique est une estimation.

4. **Calculons la taille moyenne $\bar{x}$ des poissons.**

$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i n_i$, où x_i est le centre de l'intervalle et n_i l'effectif.

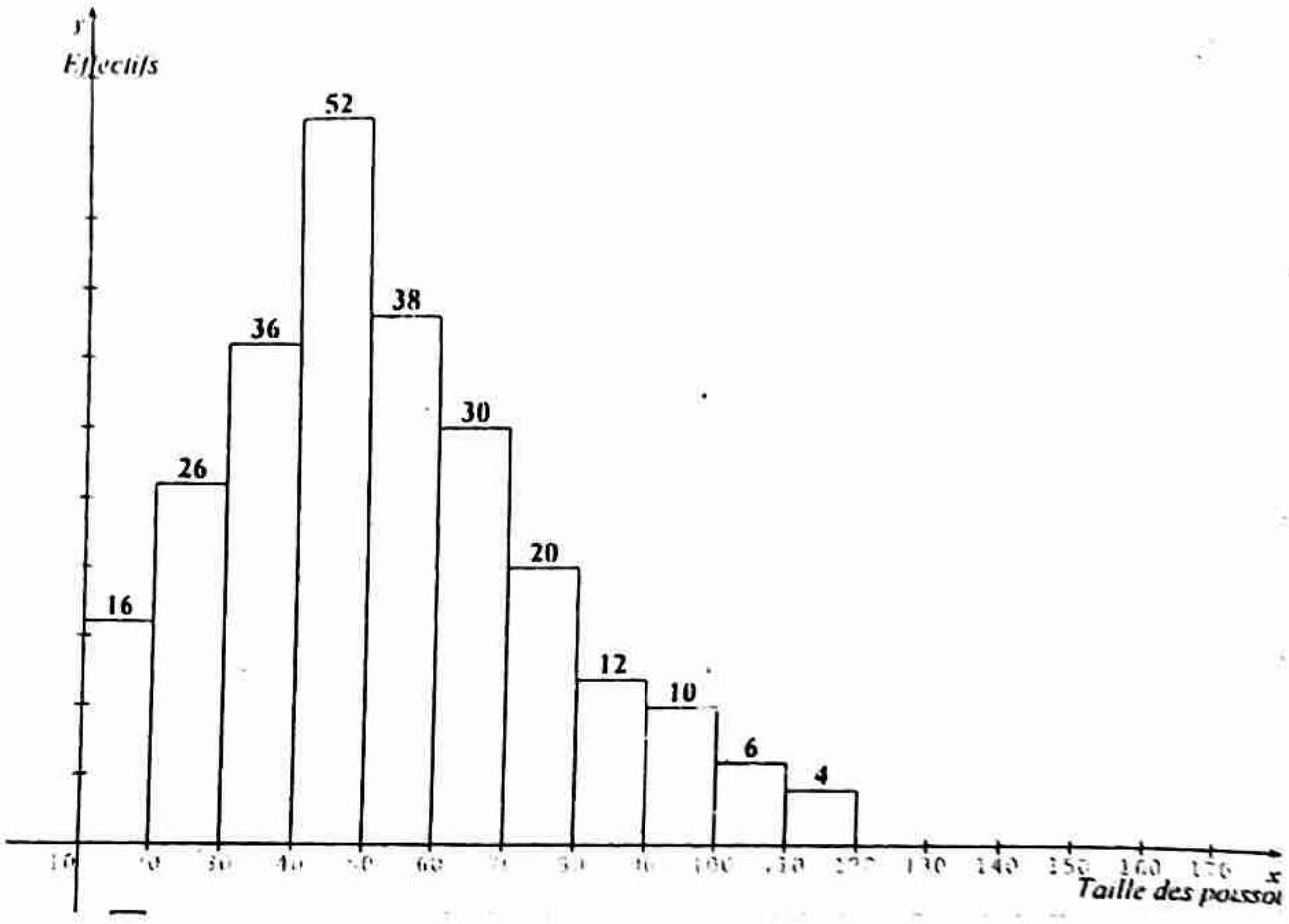
Cela revient à calculer la moyenne de la série suivante :

Centre	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
Effectif	16	26	36	52	38	30	20	12	10	6	4

$$\bar{x}=\frac{15\times16+25\times26+35\times36+45\times52+55\times38+65\times30+75\times20+85\times12+95\times10+105\times6+115\times4}{250}$$

$$\bar{x}=\frac{13090}{250}=52,36_{cm}.$$

5. L'histogramme de la série



EXERCICE 3

1. **Calculons la moyenne de la série.**

La moyenne de la série présentée par classes est égale à la moyenne de la série (xi,ni) où xi est le centre de la classe qui a pour effectif ni.

$$\bar{x}=\frac{10\times10+30\times25+50\times35+70\times12+90\times12+110\times6}{100}=51,8\text{ m}$$

2. Calculons l'écart moyen e_m.

$$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i |x_i - \bar{x}|$$

$$e_m = \frac{10(51,8-10)+25(51,8-30)+35(51,8-50)+12(70-51,8)+12(90-51,8)+6(110-51,8)}{100}$$

$$e_m = \frac{2052}{100} = 20,52$$

3. Calculons la variance V et l'écart-type σ.

4. $V=(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2) - \bar{x}^2$

$$V=\frac{10\times10^2+25(30)^2+35(50)^2+12(70)^2+12(90)^2+6(110)^2}{100}-(51,8)^2$$

V=712,76

L'écart-type $\sigma=\sqrt{V}=\sqrt{712,76}=26,69$.

5. Calculons le pourcentage de candidats appartenant à l'intervalle $]\bar{x}-\sigma ; \bar{x}+\sigma[$

$\bar{x}-\sigma$=51.8-26,69=25,11 et $\bar{x}+\sigma$=78,49

En calculant les fréquences cumulees croissantes, on a :

Classe (en m)	[0 ; 20[	[20 ;40[	[40 ; 60[	[60 ;80[	[80 ;100[	[100 ;120[
Nombre d'élèves	10	25	35	12	12	6
Eff. Cumul. Croiss.	10	35	70	82	94	100
Frequences cumulées Croissantes(%)	10	35	70	82	94	100

Soit f_1 la fréquence cumulée correspondant à 25,11 et f_2 la fréquence cumulée correspondant à 78,49.

Le pourcentage de candidats appartenant à $]\bar{x}-\sigma ; \bar{x}+\sigma[$ est f_2-f_1.

Calculons f_1 et f_2 par interprétation linéaire :

$\frac{f_1-10}{35-10}=\frac{25,11-20}{40-20}$ c'est-à-dire $\frac{f_1-10}{25}=\frac{5,11}{20}$. Donc $f_1=10+\frac{25\times5,11}{20}=16,38$.

$\frac{f_2-70}{82-70}=\frac{78,49-60}{90-60}$ c'est-à-dire $\frac{f_2-70}{8}=\frac{18,49}{20}$. Donc $f_2=70+8\times\frac{18,49}{20}=77,39$

f_2-f_1= 77,39-16,38= 61.

En conclusion, 61% des élèves appartiennent à l'intervalle $]\bar{x}-\sigma ; \bar{x}+\sigma[$.

EXERCICE 4

1. Complétons le tableau

L'étude porte sur 200 souris. Le nombre de souris qui manque est donc 200 - (25+40+85)

Soit 50 souris

Temps de decès en heures	[0 ; 5[	[5 ;10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[
Nobre de souris	25	40	85	50

La classe modale est [10 ; 12[.

L'amplitude de l'étude est 15 -0=15.

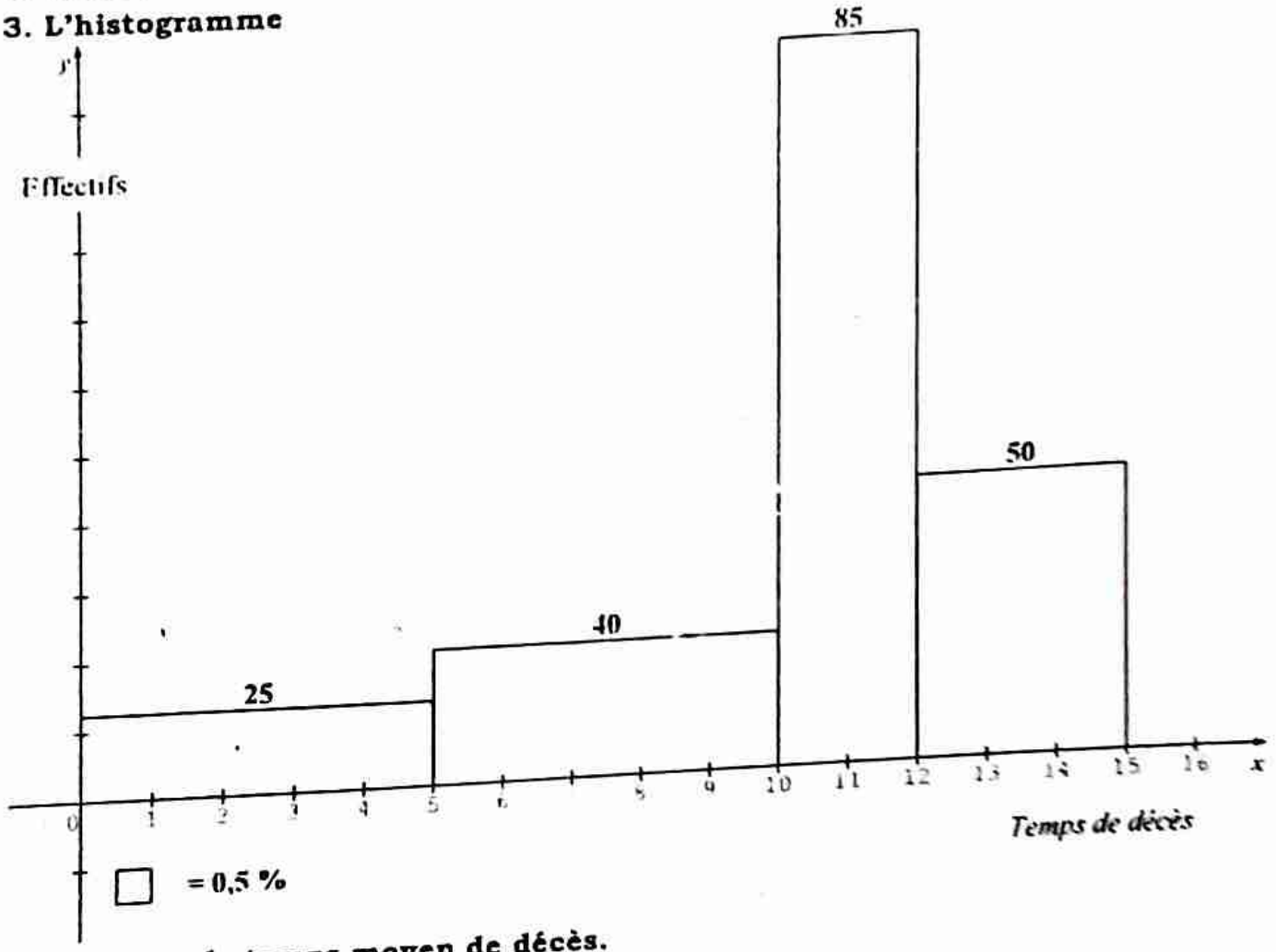
2. Population, Caractère, naturedu caractère.

La population étudiée : 200 souris du village d'Abobo-Doumé.

Le caractère étudié est le temps de décès.

La nature du caractère est quantitatif.

3. L'histogramme



4. Estimons le temps moyen de décès.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i n_i$$

$\bar{x} = \frac{25\times2,5+40\times7,5+85\times11+50\times13,5}{200} = \frac{1972,5}{200} = 9,87$ mn.

6. Tableau des effectifs cumulés croissants.

Temps de décès en heures	[0 ; 5[	[5 ;10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[
Nombre de souris	25	40	85	50
Effect. Cum. Croissants	25	65	150	200

Estimons le temps après lequel 80% des 200 souris sont mortes.

80% des souris correspond à un effectif de 160 souris.

L'effectif cumulé correspondant à 160 est atteint dans l'intervalle [12 ; 15[.

Soit x, le temps correspondant à l'effectif cumulé 160.

On a $\frac{x-12}{160-150} = \frac{15-12}{200-150}$. Soit $\frac{x-12}{10} = \frac{3}{50}$.

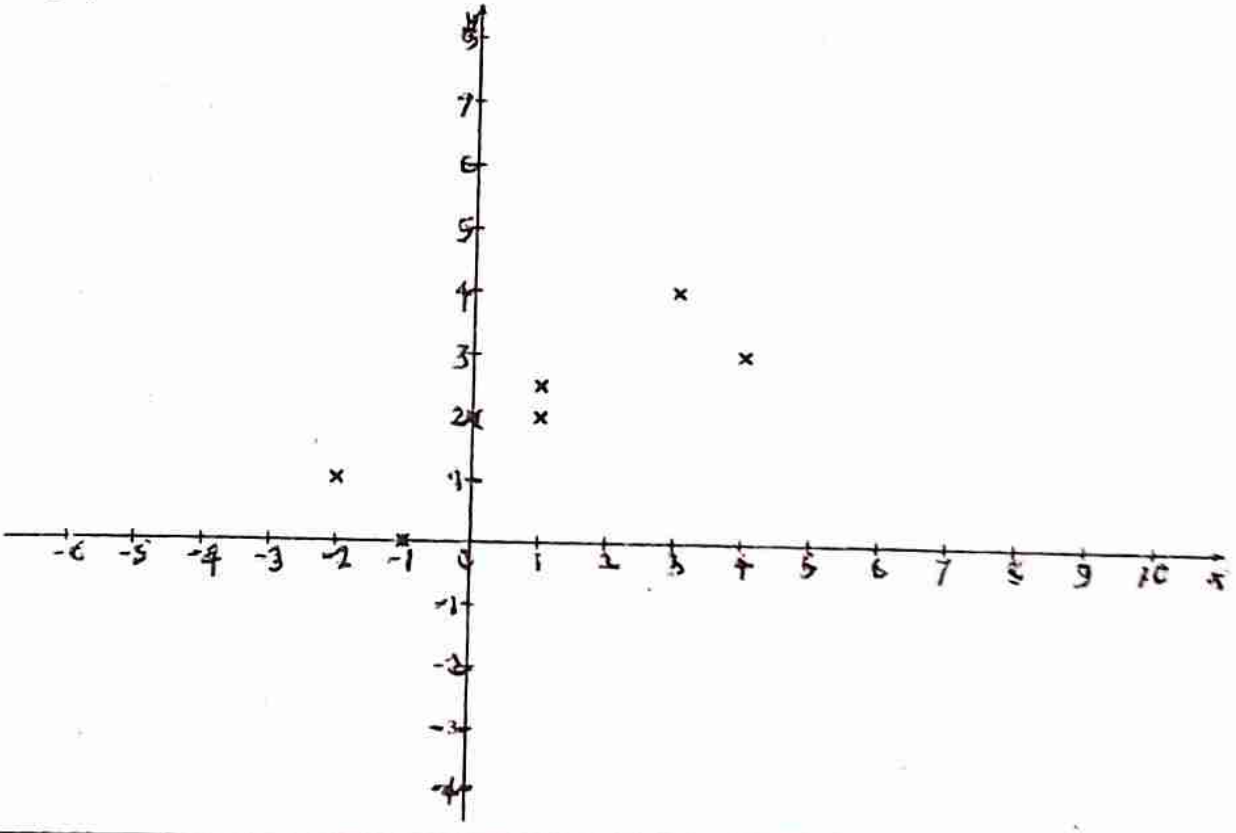
$X = 12+10\times\frac{3}{50} = 12,6$ mn.

SERIES STATISTIQUES A DEUX CARACTERES

EXERCICE 5

1) $M_1(1 ;2)$, $M_2(1 ;\frac{5}{2})$, $M_3(0 ;2)$, $M_4(-1 ;0)$, $M_6(3 ;4)$, $M_5(4 ;3)$, $M_7(-2 ;1)$

• **Représentons le nuage de points.**



• **Une équation de la droite de régression de y en x.**

Une équation de la droite de régression de y en x est : $y-\bar{y}=\frac{Cov(x,y)}{V(x)}(x-\bar{x})$.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{1}^{p}n_i x_i=\frac{1+1+0-1+3+4-2}{7}=\frac{6}{7}=0,85$$

$$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{1}^{p}n_i y_i=\frac{2+2,5+2+0+4+3+1}{7}=\frac{14,5}{7}=2,07$$

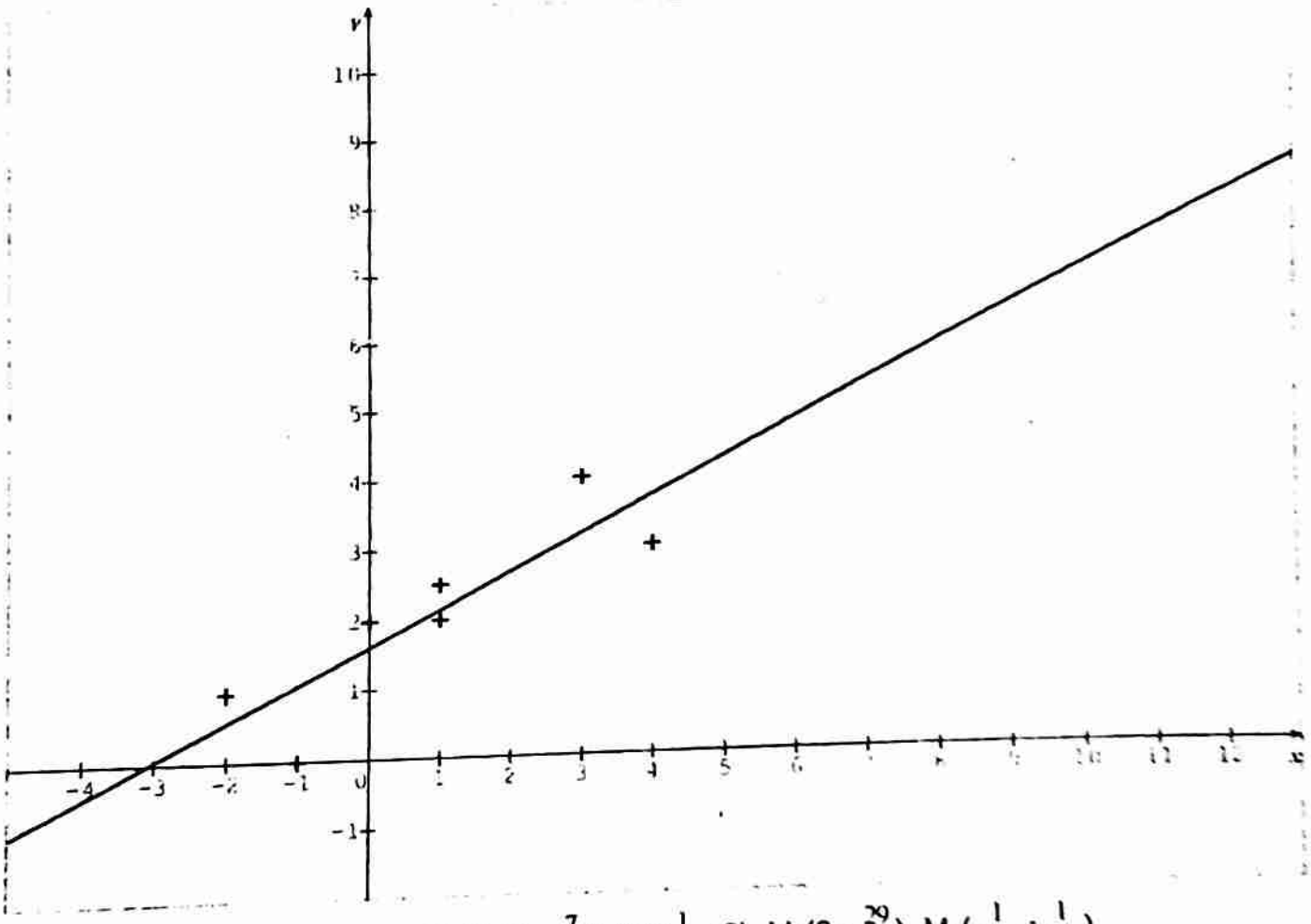
$$V(x)=(\frac{1}{N}\sum_{1}^{n}n_i x_i^2)-\bar{x}^2=\frac{1^2+1^2+0^2+(-1)^2+3^2+4^2+(-2)^2}{7}-(0,85)^2=\frac{32}{7}-0,72=3,85$$

$$Cov(x,y)=(\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}x_i y_i)-\bar{x}\bar{y}=\frac{1\times2+1\times2,5+0\times2+(-1)\times0+3\times4+4\times3+(-2)\times1}{7}-0,85\times2,07=2,02$$

Donc une équation de la droite est $y-2,07=\frac{2,02}{3,85}(x-0,85)$.

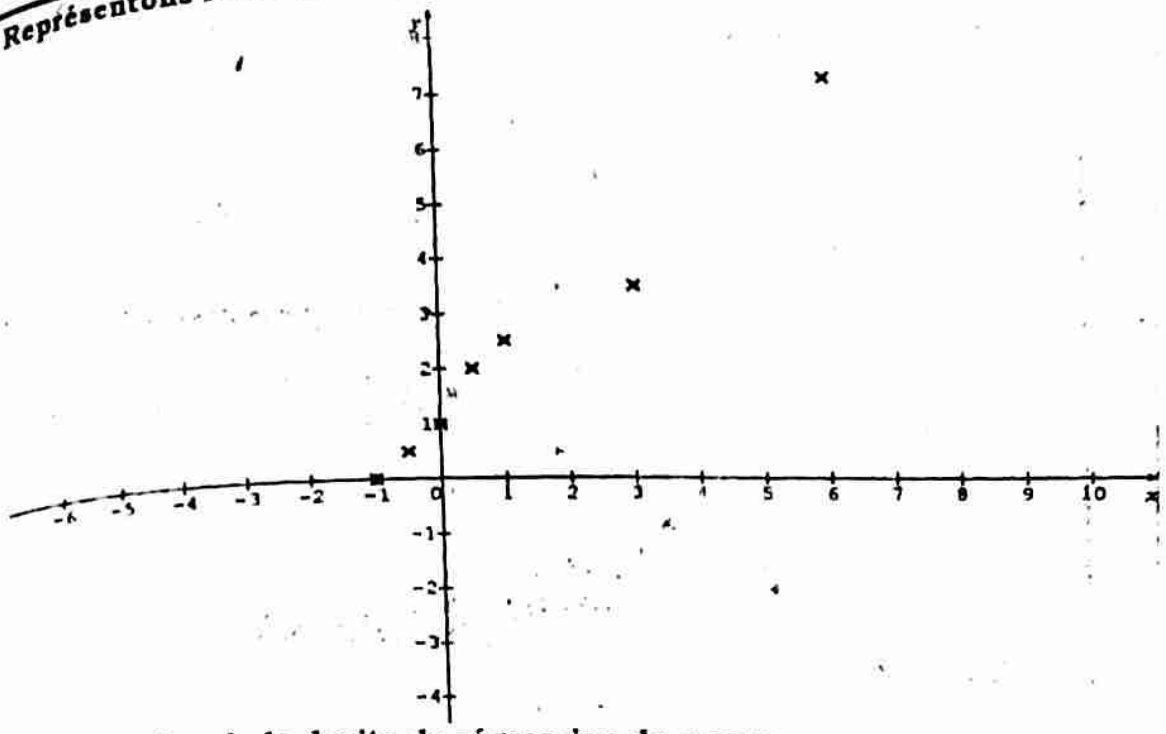
y = 0,52x + 1,62.

• **Représentons la droite de régression de y en x.**



2) $M_1(0;1)$, $M_2(1;\frac{}{2})$, $M_3(-1;0)$, $M_4(3;\frac{7}{2})$, $M_6(\frac{1}{2};2)$, $M_6(6;\frac{29}{4})$, $M_7(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

• Représentons le nuage de points



• **Une équation de la droite de régression de y en x.**

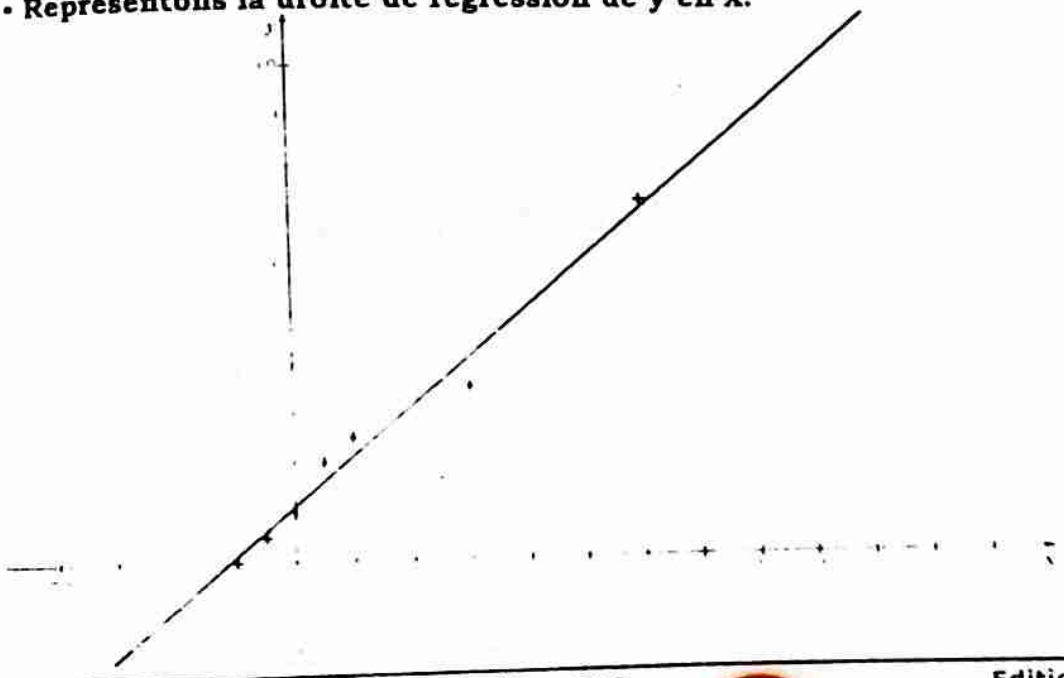
$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{n} n_i x_i = 1{,}29$; $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{n} n_i y_i = 2{,}39$;

$V(x) = \left(\frac{1}{N}\sum_{1}^{n} n_i x_i^2\right) - \bar{x}^2 = 5{,}13$ $\qquad$ $COV(x,y) = \left(\frac{1}{N}\sum_{1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\bar{y} = 5{,}10$

Donc une équation de la droite de régression de y en x est : $y - 2{,}39 = \frac{5{,}10}{5{,}13}(x - 1{,}29)$.

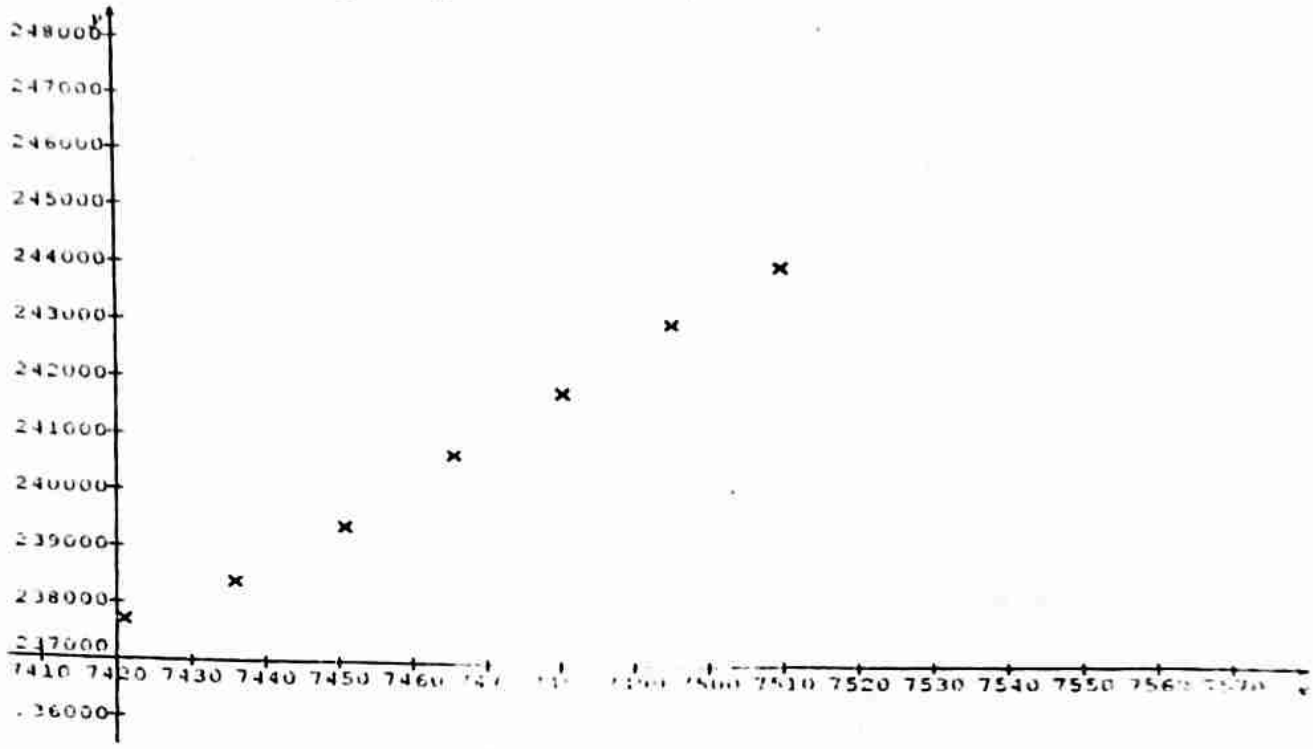
y = 0,99x + 1,11.

• **Représentons la droite de régression de y en x.**



3) $M_1(7421;237700)$, $M_2(7436;238400)$, $M_3(7451;239400)$, $M_4(7466;240700)$, $M_6(7481;241800)$, $M_6(7496;243000)$, $M_7(7511;244000)$

• **Représentons le nuage de points :**



• **Une équation de la droite de régression de y en x.**

Une équation de la droite de régression de y en x est : $y-\bar{y}=\frac{Cov(x,y)}{V(x)}(x-\bar{x})$.

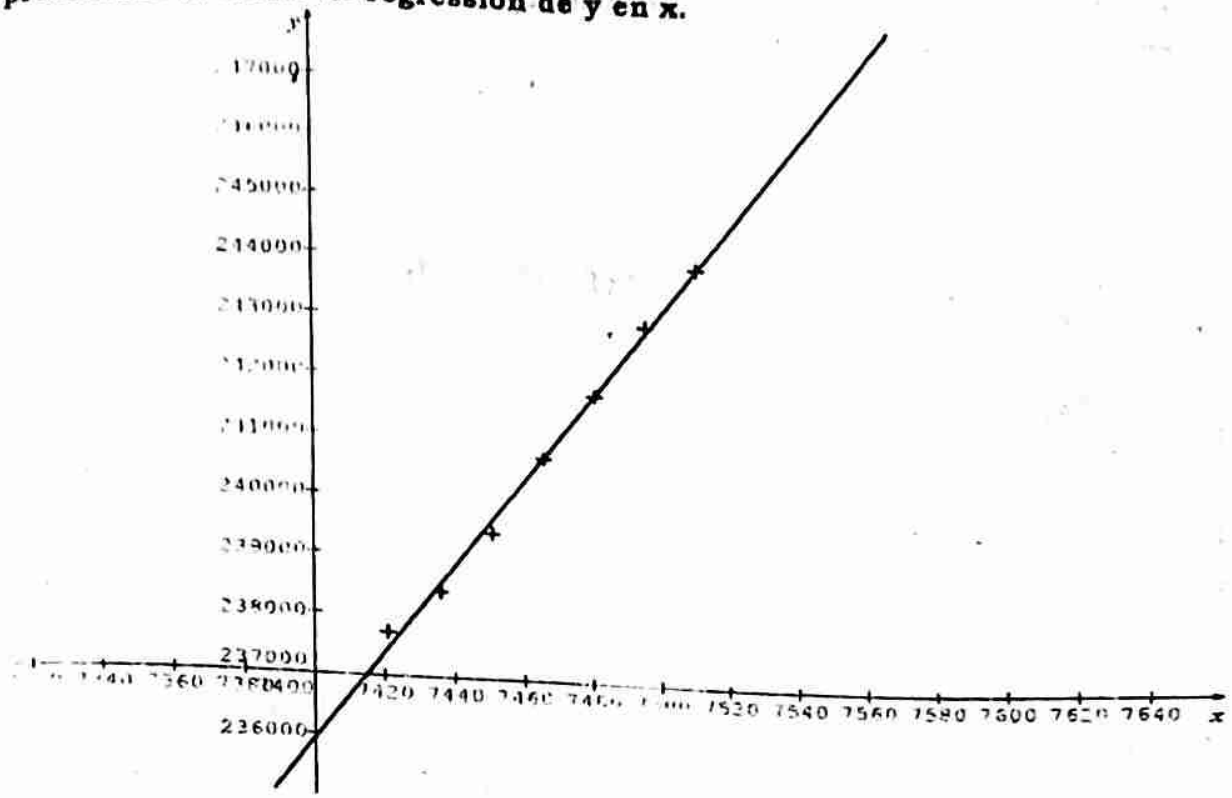
$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_1^p n_i x_i=7466$; $\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_1^p n_i y_i=240714$ $V(x)=(\frac{1}{N}\sum_1^p n_i x_i^2)-\bar{x}^2=900$

$COV(x,y)=(\frac{1}{N}\sum_1^n x_i y_i)-\bar{x}\bar{y}=65357$.

$y-240714=\frac{65357}{900}(x-7466)$; $y-240714=72,62(x-7466)$

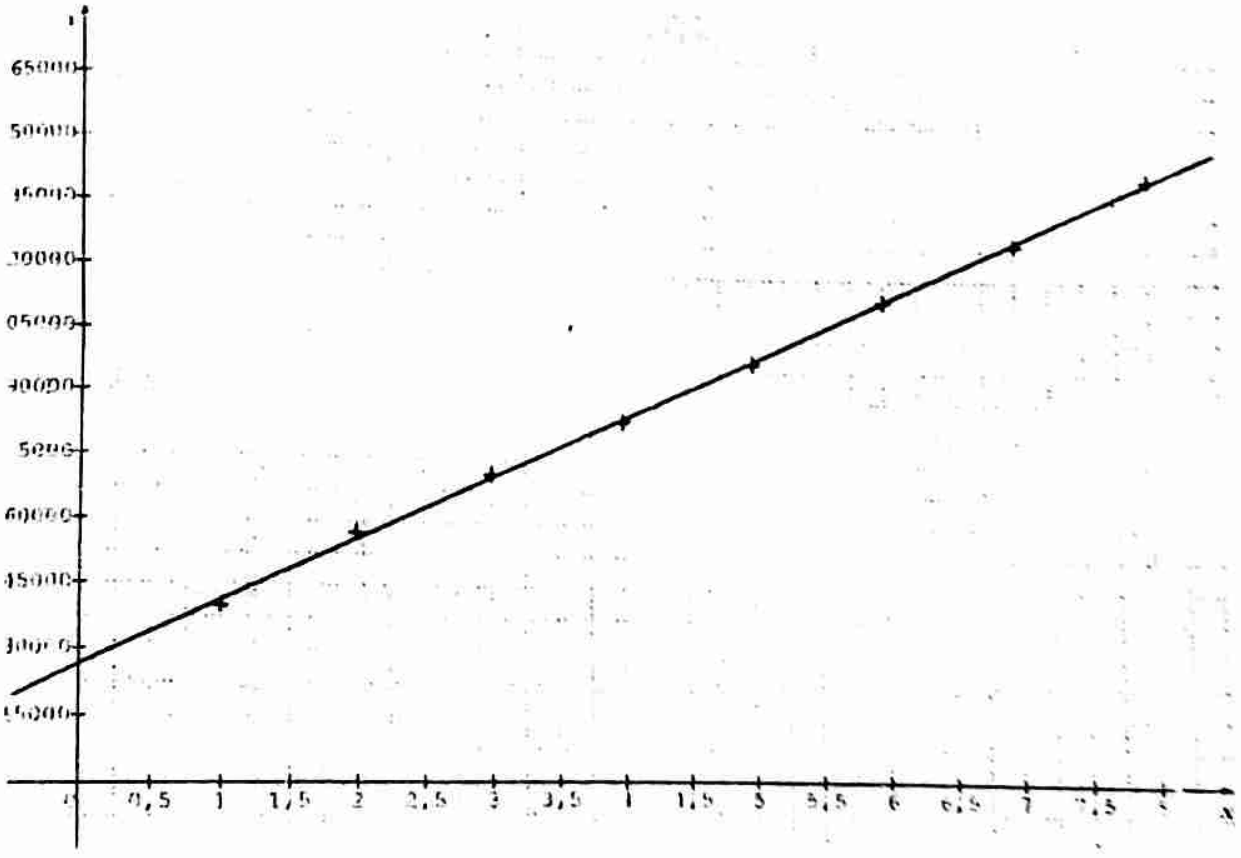
Donc une équation de la droite est **y = 72,62x - 301466,92**

Représentons la droite de régression de y en x.



EXERCICE 6

1. Représentons le nuage de points.



• Trouvons une équation de la droite de régression de y en fonction de x associée à ce nuage de points.

Une équation de la droite de régression de y en x est de la forme : $y-\bar{y}=\frac{Cov(x,y)}{V(x)}(x-\bar{x})$.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{1}^{p}n_i x_i=\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8}=\frac{36}{8}=4,5$$

$$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{1}^{p}n_i y_i=\frac{40000+57500+71500+84800+99600+115000+129000+145000}{8}=\frac{742400}{8}$$

$$\bar{y}=92800$$

$$V(x)=(\frac{1}{N}\sum_{1}^{n}n_i x_i^2)-\bar{x}^2=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2}{8}-(4,5)^2=25,5-20,25=5,25$$

$$COV(x;y)=(\frac{1}{N}\sum_{1}^{n}x_i y_i)-\bar{x}\bar{y}$$

$$COV(x;y)=\frac{1\times40000+2\times57500+3\times71500+4\times84800+5\times99600}{8}$$

$$+\frac{6\times115000+7\times129000+8\times145000}{8}-4,5\times92800=77362,5$$

Donc une équation de la droite est $y-92800=\frac{77362,5}{5,25}(x-4,5)$.

y-92800 = 14735,71(x -4,5)

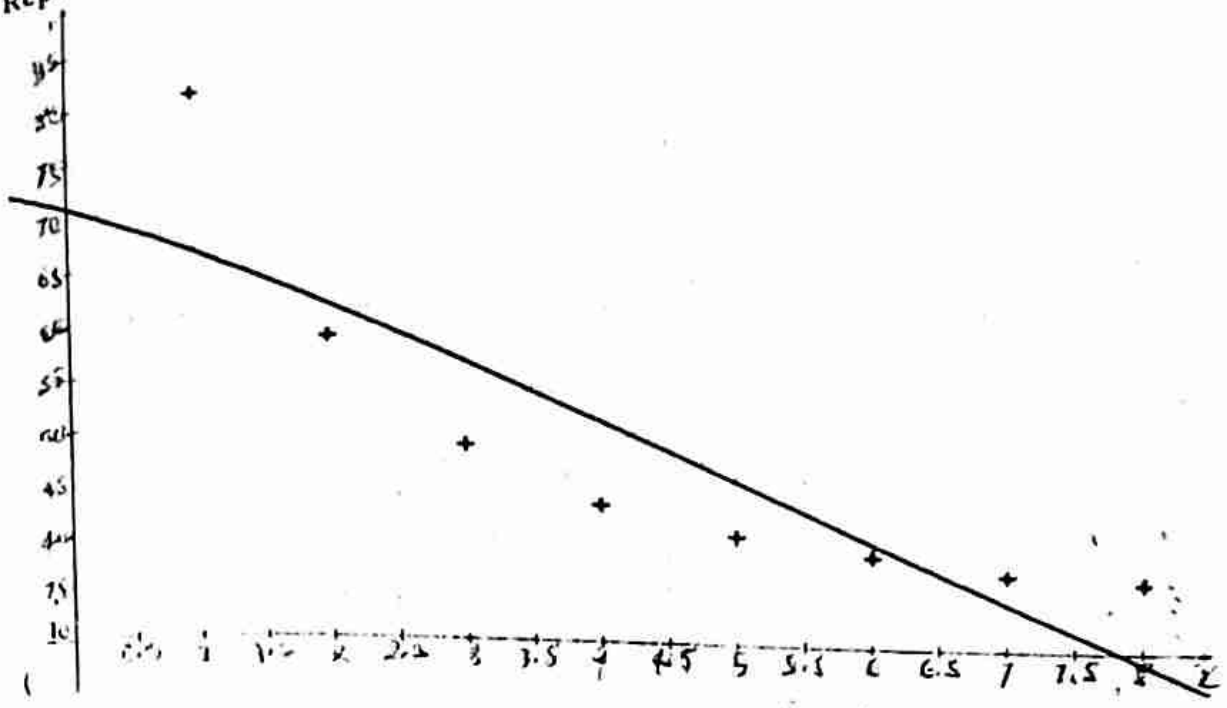
y = 14735,71 x + 26489,31

2. Une brique pèse approximativement 2 Kg.

Trouvons la série statistique double du prix de revient d'une brique, en fonction du tonnage

Tonnage	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de briques	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
Coût d'une brique	80	57,5	47,67	42,4	39,84	38,33	36,85	36,25

Représentons le nuage de points associé à cette série statistique double :



Trouvons une équation de la droite de régression de Y en fonction de x.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{n} n_i x_i = 4{,}5 \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{1}^{n} n_i y_i = 47{,}35 \quad V(x) = \left(\frac{1}{N}\sum_{1}^{n} n_i x_i^2\right) - \bar{x}^2 = 5{,}25$$

$$COV(x,y) = \left(\frac{1}{N}\sum_{1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{xy} = -27{,}51$$

Donc une équation de la droite de régression de y en x est : $y - 47{,}35 = -\frac{27{,}51}{5{,}25}(x - 4{,}5)$.

y = -5,24 x + 70,93.

3. L'entreprise veut faire un bénéfice de 17% sur le prix de fabrication

La deuxième droite de régression n'épouse pas le nuage de point donc nous allons utiliser la première droite de régression pour faire les extrapolations.

Le prix de 350 briques.

350 briques pèsent 0,7 tonne.

En utilisant la première droite de régression du coût de fabrication par tonnage,

on a **y = 14735,71 x + 26489,31.**

Avec x=0,7 : on a : y=14735,71×0,7+26489,31= 36804,307.

Si l'entreprise veut faire un bénéfice de 17%, alors elle doit vendre les 350 briques à 36804,307+0,17 ×36804,307=43061,04.

Lorsqu'un client a commandé 3,7 tonnes de briques.

Le prix de revient de 3,7 tonnes de briques à l'entreprise est donné par l'égalité :

y = 14735,71 x + 26489,31.

Pour x=3,5 ; y=81011,437.

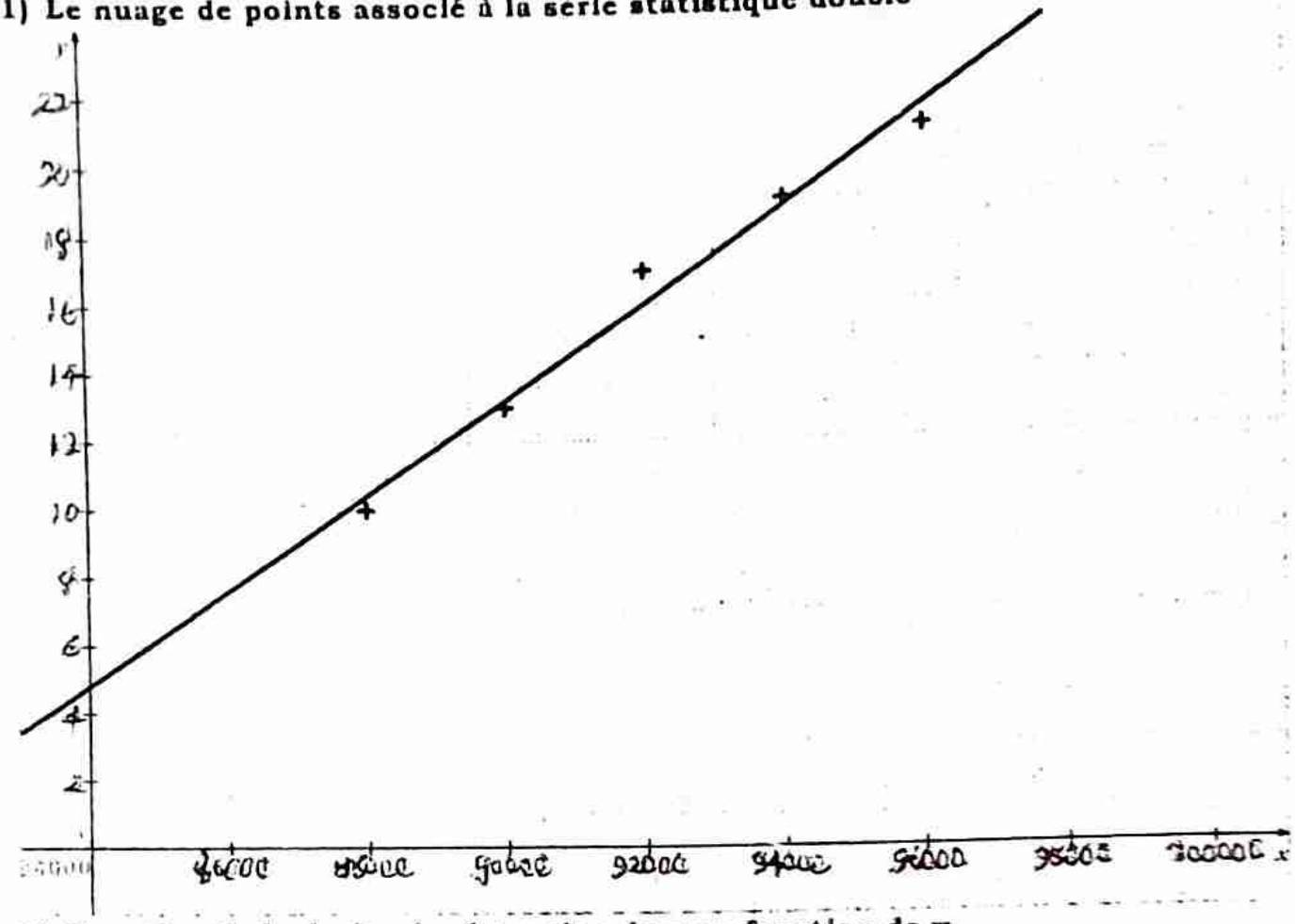
Puisque l'entreprise veut réaliser un bénéfice de 17%, le prix de revient du client sera 81011,437+81011,437×0,17=94 783,38.

Soit 94 783,38 pour les $\frac{3700}{2}$ =1850 briques.

Donc le prix de revient d'une brique pour ce client est de $\frac{94\,783,38}{1850}$ =51,23.

EXERCICE 7

1) Le nuage de points associé à la série statistique double



2) Equation de la droite de régression de y en fonction de x.

Une équation de la droite de régression de y en x est : $y-\bar{y}=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)}(x-\bar{x})$.

$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{1}^{p}n_i x_i=92000$; $\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{1}^{p}n_i y_i=16$; $V(x)=(\frac{1}{N}\sum_{1}^{p}n_i x_i^2)-\bar{x}^2=8000016,26$

$COV(x,y)=(\frac{1}{N}\sum_{1}^{n}x_i y_i)-\overline{xy}=11200$ Donc une équation de la droite de régression de y en x est : $y-16=\frac{11200}{8000016,26}(x-92000)$ ..Donc = **0,0014 x -112,8.**

3) Estimons le salaire proposé.

La droite de régression donne une estimation du nombre de personnes en fonction du salaire proposé. Comme 30 personnes se sont présentées, on posera y=30.

Cherchons x.

On a 30 = 0,0014x-112,8. Ce qui donne x = (30+112,8) : 0,0014 =142,8 :0,0014=102000.

Le salaire proposé est de 102 000.

EXERCICE 8

Trouvons a et b sachant que la droite de régression de Y en fonction de X a pour équation : Y=5X-2

L'équation générale d'une droite de régression est $y=\alpha x+\beta$ avec $\alpha=\frac{Cov(x,y)}{V(x)}$ et $\beta=\bar{y}-\alpha\bar{x}$

1°) Calculons $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

$\bar{x}=\frac{a+1,3+b+1,6}{4}=\frac{a+b+2,9}{4}$ et $\bar{y}=\frac{4+5+5+6}{4}=5$.

Comme $\beta=\bar{y}-\alpha\bar{x}$ avec $\alpha=5$ et $\beta=-2$, on a : $-2=5-5\times\frac{a+b+2,9}{4}$.

Ce qui donne $a+b=\frac{4(-2-5)}{-5}-2,9=2,7$.

2°) Calculons Cov(x,y) et V(x).

$$Cov(x,y)=\frac{4a+1,3\times5+5b+1,6\times6}{4}-5\times\frac{a+b+2,9}{4}=\frac{-a+1,6}{4}$$

$$V(x)=\frac{a^2+1,3^2+b^2+1,6^2}{4}-\left(\frac{a+b+2,9}{4}\right)^2=\frac{a^2+b^2+4,25}{4}-\left(\frac{2,7+2,9}{4}\right)^2$$

$$V(x)=\frac{a^2+b^2+4,5}{4}-1,96=\frac{(a+b)^2-2ab+4,5}{4}-1,96=\frac{2,7^2-2a(2,7-a)+4,5-7,84}{4}$$

$$V(x)=\frac{2a^2-5,4a+3,7}{4}$$

Comme $\alpha=\frac{Cov(x,y)}{V(x)}$: on a $5=\frac{\frac{-a+1,6}{4}}{\frac{2a^2-5,4a+3,7}{4}}=\frac{-a+1,6}{2a^2-5,4a+3,7}$

Ce qui équivaut à : $10a^2 - 27a + 18,5 = - a +1,6$: C'est-à-dire $10a^2 - 26a+16,9 = 0$.

Ou encore $a^2 - 2,6a + 1,69 = 0$. Une équation de second degré en a.

Le discriminant est $\Delta = 2,6^2 - 4\times 1,69 = 6,76 - 6,76 = 0$.

Donc on a une valeur unique de a : 2,6 : 2 = 1,3.

Comme a + b = 2,7 ; alors b = 2,7-1,3 = 1,4.

En conclusion : a = 1,3 et b = 1,4.

TRIGONOMETRIE

Muhammad **ABU'L-WAFA** Ibn Yahya Ibn Ismaïl est né en 940 à Buzjan dans la région de Khorasan. Ce sont ses oncles passionnés par les mathématiques qui l'initieront à cette discipline.

A l'âge de vingt ans, il part pour Bagdad qu'il ne quittera plus.

En se livrant à des observations astronomiques, **ABU'L-WAFA** précise en particulier les différents mouvements de la lune.

Dans son ***Almageste***, il présente des travaux portant sur la **trigonométrie** plane et sphérique. Il corrige les tables de ses prédécesseurs et en apporte de nouvelles. Il conçoit une méthode nouvelle qui lui permet d'établir des tables de sinus.

La valeur de sin (30°) est connue avec une précision de 8 positions décimales d'aujourd'hui (la notation que nous connaissons n'était pas encore en vigueur à cette époque).

ABU'L-WAFA développe également la notion de tangente et de cotangente et en conçoit les tables. Il est le premier à définir la sécante et la cosécante. Il découvre encore les premières relations entre les fonctions trigonométriques utiles pour les progrès des recherches astronomiques.

ABU'L-WAFA s'intéresse aussi à d'autres concepts de la géométrie. Il étudie en particulier les coniques et décrit des constructions à la règle et au compas. Il expose des méthodes de constructions de paraboles point par point, des constructions d'angles droits, des trisections approximatives d'angles, différents moyens d'inscrire des polygones dans un cercle donné, ...

ABU'L-WAFA aurait également commenté les travaux de d'Euclide d'Alexandrie, de Diophante d'Alexandrie (IIIème siècle de notre ère) et de Mohammed AL KHWARIZMI (780 ; 850), mais ses écrits ont été perdus.

Il est encore à noter que **ABU'L-WAFA** est le premier mathématicien à considérer les fractions comme des nombres.

ABU'L-WAFA meurt en 998.

FICHE DE COURS

ANGLES ORIENTES

1. Correspondance degrés – radians

π radians correspondent à 180°. Le coefficient de proportionnalité est de $\frac{\pi}{180}$ pour passer des degrés en radians et de $\frac{180}{\pi}$ pour passer des radians aux degrés.

degrés	360°	180°	90°	60°	45°	30°	0°
radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

2. Angles orientés

Propriété 1 Soit $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ un angle orienté et x une mesure en radians de $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

L'ensemble des mesures de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ est l'ensemble des nombres réels $x + k \times 2\pi$

L'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ a une et une seule mesure dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, cette mesure est appelée mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

Propriété 2

- Pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, on a : $\left(\widehat{\vec{u};\vec{u}}\right) = 0[2\pi]$; $\left(\widehat{\vec{u};-\vec{u}}\right) = \pi[2\pi]$
- Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = -\left(\widehat{\vec{v};\vec{u}}\right)$; $\left(\widehat{-\vec{u};-\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

Et si k et k' sont deux réels strictement positifs alors $\left(\widehat{k\vec{u};k'\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

Propriété 3 (relation de Chasles)

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a : $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) + \left(\widehat{\vec{v};\vec{w}}\right) - \left(\widehat{\vec{u};\vec{w}}\right)$

Propriété 4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens *équivaut à* $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = 0[2\pi]$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire *équivaut à* $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \pi[2\pi]$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *équivaut à* $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = 0[\pi]$

TRIGONOMETRIE

1. Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, si M est le point image du nombre réel x sur le cercle trigonométrique :

- L'abscisse de M est appelée cosinus de x et est notée cos(x) ou cosx
- L'ordonnée de M est appelée sinus de x et est notée sin(x) ou sinx

2. Valeurs particulières

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

3. Formulaire

a. Relations de base

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$\forall\theta \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos \leq 1$ et $-1 \leq \sin \leq 1$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$	$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta$	$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta$

b. Formules d'addition

cos (a - b) = cos a cos b + sin a sin b	sin (a - b) = sin a cos b - cos a sin b
cos (a + b) = cos a cos b - sin a sin b	sin (a + b) = sin a cos b + cos a sin b
$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$	$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

c. Formules de duplication

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

d. Formules de transformation de produit en somme

$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$	$\frac{1}{2}\sin a \cos b = (\sin(a+b) + \sin(a-b))$
$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$	$\frac{1}{2}\cos a \sin b = (\sin(a+b) - \sin(a-b))$

4. Etude des variations des fonctions sinus et cosinus

Propriété 1

• La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est (sinx)' = cosx

Son tableau de variation sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ est :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
cos(x		-	0	+	0	-	
sin(x	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Propriété 2

• La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est (cosx)' = - sinx

Son tableau de variation sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ est :

x	$-\pi$		0		π
-sin(x)		+	0	-	
cos (x	-1	↗	1	↘	-1

Remarque :

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π

5. Résolution d'équations

Propriété 1

L'équation $\cos x = \cos\theta$ où θ est un réel fixé, a pour solutions :

$\theta+2k\pi$ et $-\theta+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Propriété 2

L'équation $\sin x = \sin\theta$ où θ est un réel fixé, a pour solutions :

$\theta+2k\pi$ et $\pi-\theta+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Propriété 3

L'équation tanx =tanθ où θ est un réel fixé, a pour solutions : $\theta+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

NB : Pour toutes autres formes d'équations trigonométriques, se ramener aux trois propriétés précédentes.

EXERCICES RESOLUS

ANGLES ORIENTES

EXERCICE 1

Calculer 5 mesures (certaines positives, certaines négatives) de chacun des angles orientés dont la mesure principale est : $-\frac{\pi}{2}$; 0 ; $\frac{3\pi}{4}$; π.

EXERCICE 2

Calculer la mesure principale des angles orientés de mesures respectives : $\frac{57\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{4}$; 1000 .

Dans le dernier cas, on exprimera en degré la mesure principale de l'angle orienté de mesure 1000, afin de pouvoir utiliser un rapporteur.

EXERCICE 3

On considère la ligne brisée ABCDE telle que : AB=4 ; BC=5 et $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}) = -\frac{\pi}{6}$

CD=3 et $(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{2}$

DE=2 et $(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}}) = \frac{2\pi}{3}$

1. Déterminer la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CD}}\right)$, puis de $\left(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{DE}}\right)$.

2. En déduire que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{DE}$

EXERCICE 4

Soit ABCD un trapèze isocèle convexe de bases $\overline{AB}$ et $\overline{DC}$ tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = -\frac{3\pi}{4}$.

Déterminer la mesure principale des angles orientés : $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$.

EXERCICE 5

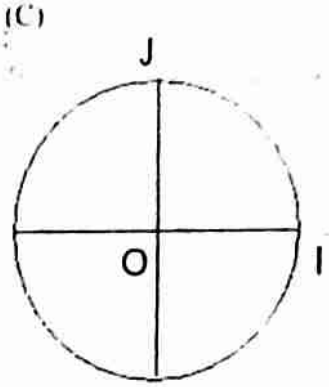
1. Calcule la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est $\frac{-205\pi}{6}$.

2. a)Sur le cercle trigonométrique (C), place les points B et E images respectives des nombres réels $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

b) Calcule une mesure de chacun des angles orientés suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IE}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{EI},\overrightarrow{IB}}\right)$

c) Soit F un point du plan tel que l'une des mesures de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{FI},\overrightarrow{FJ}}\right)$ soit $\frac{7\pi}{4}$.

Démontre que le point F n'est pas sur le cercle (C).



CACULS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE 6

Calculer le sinus et le cosinus des nombres réels : $-\pi$; $-\frac{7\pi}{2}$; 1515π et 1000.

EXERCICE 7

x étant un nombre réel, démontrer les égalités suivantes :

1. $2\sin x.\cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$; 2. $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4\sin x.\cos x$

3. $\sin^4 x + \sin^2 x = \cos^4 x - 3\cos^2 x + 2$; 4. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

EXERCICE 8

x étant un nombre réel, calculer :

1. $A = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$ 2. $B = \cos^4 x + \sin^2 x.\cos^2 x - \cos^2 x$

3. $C = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)$

EXERCICE 9

Simplifier :

$A = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$; $B = \sin(x - y).\cos(x + y) - \sin(x + y).\cos(x - y)$

EXERCICE 10

1. Calculer les cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$, sachant que : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

2. En écrivant 3x = 2x + x, démontrer que :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

EXERCICE 11

1. Transformer en produit : A = sin 2x + sin 6x ; B = cos 5x – cos 4x

2. Transformer en une somme ou une différence :

C = 2 cos x.cos 3x ; D = sin(x + y).cos(x – y) ; $E = \sin(\frac{\pi}{4} - x).\sin(\frac{\pi}{4} + 2x)$.

EXERCICE 12

Montrer que, pour tout réel x :

a. $Cos\,x + Sin\,x = \sqrt{2}\,Cos(x - \frac{\pi}{4})$

b. $Cos\,x - Sin\,x = \sqrt{2}\,Cos(x + \frac{\pi}{4})$

EXERCICE 13

La finalité de cet exercice est de calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$

1) a) Résous dans IR, l'équation (E1) : $4x^2 - 2x - 1 = 0$.

b) Résoudre dans $]-\pi;\pi[$, l'équation (E2) : $\sin x = \sin\frac{2\pi}{5}$, puis représente les points images des solutions sur le cercle trigonométrique à l'aide du rapporteur.

2) En posant $\cos\frac{\pi}{5} = x$ *et* $\sin\frac{\pi}{5} = y$.

a) Démontre que $\cos\frac{2\pi}{5} = 1 - 2y^2$

b) Démontre que $\sin\frac{2\pi}{5} = 2xy$

c) Démontre que $\sin\frac{3\pi}{5} = y(4x^2 - 1)$

d) Sachant que $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5}$, démontre que $4x^2 - 2x - 1 = 0$

e) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$.

EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE 14

Résoudre les équations trigonométriques :

a. $x \in [-2\pi; 2\pi]$. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $x \in \mathbb{R}$. $\sin 2x = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$

c. $x \in [0; 2\pi]$. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $x \in \mathbb{R}$. $\cos\left|2x - \frac{\pi}{4}\right| = -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

EXERCICE 15

1. Résoudre les inéquations trigonométriques :

a. $x \in [0; 2\pi]$. $\sin(2x) + \frac{1}{2} \leq 0$;

b. $x \in [-\pi; \pi]$. $2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$;

c. $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{2}\sin x + 1 \leq 0$

2. Résoudre le système d'inéquations : $x \in [-\pi; \pi]$ $\begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{2} \\ \cos x > 0 \end{cases}$

EXERCICE 16

Résoudre les équations trigonométriques :

a. $x \in \mathbb{R}$, cos x + sin x = $\sqrt{2}$; b. $x \in \mathbb{R}$, cos x – sin x = 1; c. $x \in \mathbb{R}$, cos x + 3 sin x = $\frac{1}{2}$

Pour la dernière équation, on utilisera une table trigonométrique ou une calculatrice.

EXERCICE 17

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

(E_0) : $4x^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$

2. En déduire la résolution sur $[0; 2\pi]$ de l'équation

(E_1) : $4Cos^2 x + 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\cos x - \sqrt{6} = 0$

3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation

(I) : $4Cos^2 x + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})Cosx - \sqrt{6} < 0$

EXERCICE 18

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) : $Cos(x-\frac{\pi}{3}) = Sin\,3x$ $\quad$ (E_2) : $Sin\,2x + Cosx = 0$

2. Résoudre dans $[0;2\pi]$ $\quad$ (E_3) : $-\sqrt{3}\,Cosx + Sinx = -1$

EXERCICE 19

a) Justifie que $\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

b) Résous dans $]-\pi;\pi[$ l'inéquation (I1): $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x \geq 1$.

c) Résous dans $]-\pi;\pi[$ l'inéquation (I): $\sqrt{2}\cos(3x) - \sqrt{2}\sin(3x) \geq 1$.

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE 20

Soit l'application f définie de $]-\pi;\pi]$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x$

1. Etudier le sens de variation de f sur $]-\pi;\pi]$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $]-\pi;\pi]$.
3. Construire f.

EXERCICE 21

Soit l'application f définie de $]-\pi;\pi]$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x$

1. Etudier le sens de variation de f sur $]-\pi;\pi]$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $]-\pi;\pi]$.
3. Construire f.

EXERCICE 22

Soit l'application f définie de $]-\pi;\pi]$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \tan x$

1. Etudier le sens de variation de f sur $]-\pi;\pi]$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $]-\pi;\pi]$.
3. Construire f.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

Calculer les valeurs exactes des sinus et cosinus des nombres réels suivants :

$\frac{37\pi}{3}$; $\frac{-11\pi}{8}$; 151π ; - 1200° ; 2490°.

EXERCICE 2

La tangente d'un nombre réel x tel que cos x ≠ 0 est notée tan x et est définie par : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

1. Montrer que : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

2. Calculer sin x et cos x dans chacun des cas suivants :

(a) $\tan x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ (b) $\tan x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

EXERCICE 3

x étant un nombre réel, exprimer en fonction de sin x et de cos x les nombres suivants :

1. $A = \sin(x - \frac{3\pi}{2}) + \cos(x - \frac{3\pi}{2})$; 2. $B = \sin(x + \frac{5\pi}{2}) + \cos(x + \frac{5\pi}{2})$

3. $C = \sin(x - 5\pi) + \cos(x + 5\pi)$; 4. $D = \frac{\cos^2\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)+\cos^2\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}$

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité : 2 cm)

Soit (C_f) et (C_g) les représentations graphiques des fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ respectivement par : $f(x) = 2\cos x$ et $g(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

1. Construire (C_f) à partir de la courbe de la fonction cosinus.

2. a. g est-elle périodique ? Justifier.

   b. Montrer que (C_g) est l'image de (C_f) par une translation que l'on déterminera.

   c. Construire (C_g) à partir de (C_f).

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) et (C_g).

4. Trouver des centres de symétrie et des axes de symétrie éventuels de (C_g).

EXERCICE 5

Soit l'application f définie de $]-\pi;\pi]$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin x$

1. Etudier le sens de variation de f sur $]-\pi;\pi]$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $]-\pi;\pi]$.
3. Construire $\left(C_f\right)$.

EXERCICE 6

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}$

1. Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?
2. Montrer que : *Pour tout* $x\in Df, f(x)=2$

EXERCICE 7

1. a. Vérifier que $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2X^2+\left(1-\sqrt{2}\right)X-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$, L'inéquation : $2X^2+\left(1-\sqrt{2}\right)X-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$

2. Déduire de la question 1.b la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$2\cos^2 x+\left|1-\sqrt{2}\right|\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette équation.

3. Déduire de la question 1.c la résolution dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ de l'inéquation :

$2\cos^2 x+\left|1-\sqrt{2}\right|\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.

EXERCICE 8

Soient A, B, C et D quatre points d'un cercle.

Montrer que : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)$ ou que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)+\widehat{\pi}$

EXERCICE 9

Résoudre, en utilisant le cercle trigonométrique, les inéquations suivantes

1. Resoudre dans $]-\pi\ ;\pi]$, cos x > $-\frac{1}{2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Résoudre dans [0 ; 2π[, tan x > -1

EXERCICE 10

On donne trois points A, B et C distincts.

Dans chaque cas, quelle propriété géométrique est caractérisée par la relation proposée

a. $2\left|\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}}\right| = 0$

b. $2\left|\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}}\right| = \pi$

EXERCICE 11

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, k et k' sont des nombres réels non nuls.

Exprimer $\left|\widehat{k\vec{u}\,,k'\vec{v}}\right|$ en fonction de $\left|\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\right|$ (On distinguera deux cas : kk'> 0 et kk'< 0).

EXERCICE 12

Calculer sin2x et cos2x sachant que $\sin x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique

a. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

b. $\tan^2 x - 1 = 0$

c. $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$

EXERCICE 14

Résoudre dans D. les inéquations suivantes et représenter les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique :

a. $2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}<0,\quad D=\mathbb{R}$

b. $\sin x-\cos x\geq 0,\quad D=\mathbb{R}$

c. $\begin{cases}\sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 2\sin x+1\geq 0\end{cases}\qquad D=[0;2\pi[$

EXERCICE 15

Calculer : $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

On posera : $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$

EXERCICE 16

1. Sachant que $\cos a=\frac{1}{3}$, calculer cos 2a.

2. Soit x un nombre réel tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

a. Calculer cos 2x et sin 2x

b. Calculer cos 4x et sin 4x

EXERCICE 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\sin 3x=\frac{1}{2}$;

2. $\cos 2x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

3. $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4. $\cos 5x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

5. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=-1$

6. $\sqrt{3}\sin x+3\cos x=1$

CORRECTION DES EXERCICES

ANGLES ORIENTES

EXERCICE 1

Si θ est la mesure principale d'un angle orienté, alors les mesures sont de la forme : $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- $-\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale ; les 5 autres mesures sont : $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{2}$.
- 0 est la mesure principale ; les 5 autres mesures sont : -6π ; -4π ; -2π ; 2π ; 4π.
- $\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale, les 5 autres mesures sont : $\frac{-5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{-13\pi}{4}$; $\frac{19\pi}{4}$ et $\frac{-21\pi}{4}$.
- π est la mesure principale ; les 5 autres mesures sont : -3π ; $-\pi$; 3π ; 5π ; 7π.

EXERCICE 2

Déterminons la mesure principale des angles orientés suivants :

Soit α la mesure principale de θ.

On a : $\alpha = \theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. déterminons k tel que : $-\pi < \alpha \leq \pi$

$-\pi < \theta + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\pi - \theta < 2k\pi \leq \pi - \theta$. C'est-à-dire $-\frac{\pi-\theta}{2\pi} < k \leq \frac{\pi-\theta}{2\pi}$

- Pour $\theta = \frac{57\pi}{2}$

$\frac{-\pi - \frac{57\pi}{2}}{2\pi} < k \leq \frac{\pi - \frac{57\pi}{2}}{2\pi}$ équivaut à $\frac{\frac{-2\pi - 57\pi}{2}}{2\pi} < k \leq \frac{\frac{2\pi - 57\pi}{2}}{2\pi}$

C'est-à-dire $\frac{\frac{-59\pi}{2}}{2\pi} < k \leq \frac{\frac{-55\pi}{2}}{2\pi}$ équivaut à $\frac{-59\pi}{2} \times \frac{1}{2\pi} < k \leq \frac{-55\pi}{2} \times \frac{1}{2\pi}$

$\frac{-59}{4} < k \leq \frac{-55}{4}$ donc $-14,7 < k \leq -13,7$. k =-14.

$\alpha = \theta + 2k\pi = \frac{57\pi}{2} - 28\pi = \frac{57\pi - 56\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Donc la mesure principale de $\theta = \frac{57\pi}{2}$ est $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

- Pour $\theta = \frac{-5\pi}{4}$.

On peut aussi déterminer la mesure principale d'un angle orienté en ajoutant (si θ est négatif) ou en retranchant (si θ est positif), $2k\pi$.

Ici on a : $\alpha = \frac{-5\pi}{4} + 2\pi = \frac{3\pi}{4}$ donc la mesure principale de $\frac{-5\pi}{4}$ est $\frac{3\pi}{4}$

- Pour 1000

Ici on a 1000 = k 360 + α ; α est la mesure principale d'où α = 1000 – 2x360= 280

EXERCICE 3

1. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB}$ étant opposés, $mes\ (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}}) = mes\ (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}) + \pi$.

Donc $mes\ (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}}) = \frac{3\pi}{2}$, sa mesure principale est $-\frac{\pi}{2}$.

De même $mes\ (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}}) = mes\ (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}) + \pi$

donc $mes\ (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}}) = \frac{5\pi}{3}$, sa mesure principale est $-\frac{\pi}{3}$.

2. $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}}) + (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}})$

$$= -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}}) = -\pi$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de sens contraires.

De plus : AB = 2DE donc $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{DE}$.

EXERCICE 4

Comme ABCD est un trapèze convexe, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et de même sens : donc $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AB}})$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont opposés donc $\left(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right) + \pi$.

Comme $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = -(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$, alors $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) = \pi - (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$

Ainsi $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ soit $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) = -\frac{\pi}{4}$ car $\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

Comme $\frac{-\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$; donc la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}})$ est $-\frac{\pi}{4}$.

Soit la droite Δ, médiatrice commune des segments $[AB]$ et $[DC]$.

Par la symétrie S d'axe Δ, A a pour image B, B a pour image A, D a pour image C et C a pour image D.

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$ c'est-à-dire $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \frac{3\pi}{4}$.

La mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ est $\frac{3\pi}{4}$.

De même $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$ est le transformé par la symétrie S de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{CD}})$.

On obtient $\left(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}}\right)=-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}\in\left]-\pi;\pi\right]$.

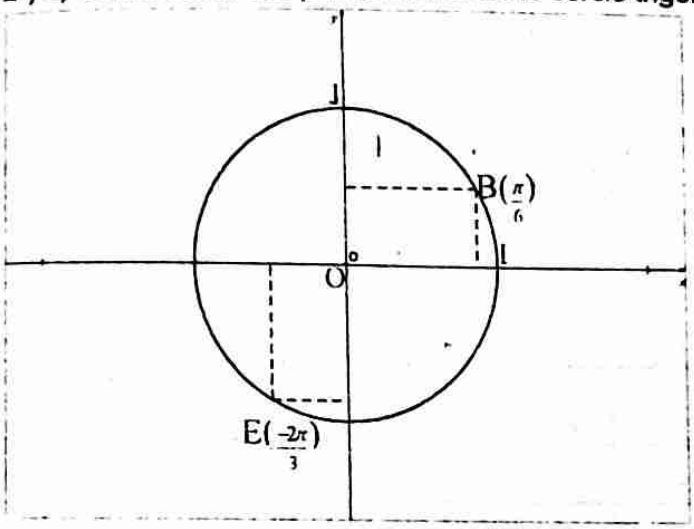
La mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}})$ est $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 5

1°) Calculons la mesure principale de l'angle orienté de mesure $\frac{-205\pi}{6}$.

$\frac{-205\pi}{6}=-34\pi-\frac{\pi}{6}=2\times(-17\pi)-\frac{\pi}{6}$, donc la mesure principale de l'angle est $-\frac{\pi}{6}$

2°) a) Construction des points B et E sur le cercle trigonométrique (C)



b) **Calculons :**

- B et E sont deux points du cercle de centre O, $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}})=e-b=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$;
- I, B et E sont sur le cercle de centre O donc $2(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IE}})=(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}})$.

$(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IE}})=\frac{-5\pi}{12}$ ou $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IE}})=\frac{-5\pi}{12}+\pi$. C'est-à-dire $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IE}})=\frac{-5\pi}{12}$ ou $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IE}})=\frac{7\pi}{12}$

$(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IE}})$ est de sens direct, donc $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IE}})=\frac{7\pi}{12}$.

- $(\widehat{\overrightarrow{FI},\overrightarrow{IB}})=(-\widehat{\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IB}})=(\widehat{\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IB}})+\pi=-(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IE}})+\pi=\frac{7\pi}{12}+\pi=\frac{5\pi}{12}$.

a) **Démontrons que F n'est pas sur le cercle.**

I et J sont deux points du cercle (C) de centre O. F est sur le cercle (C) ssi

$2(\widehat{\overrightarrow{FI},\overrightarrow{FJ}})=(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}})$. C'est-à-dire $(\widehat{\overrightarrow{FI},\overrightarrow{FJ}})=\frac{\pi}{4}$ ou $(\widehat{\overrightarrow{FI},\overrightarrow{FJ}})=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$.

$\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{7\pi}{4}$ n'est ni une mesure de $\frac{\pi}{4}$ ni une mesure de $\frac{\widehat{5\pi}}{4}$ donc F n'est pas sur le cercle (C).

CALCULS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE 6 Calcul de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

- Pour $\theta = -\pi$ $\quad \cos(-\pi) = -1$; $\sin(-\pi) = 0$
- Pour $\theta = \frac{-7\pi}{2}$

Déterminons la mesure principale de $\frac{-7\pi}{2}$

Soit α cette mesure principale, $\alpha = \frac{-7\pi}{2} + 4\pi = \frac{-7\pi + 8\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\cos\left(\frac{-7\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\sin\left(\frac{-7\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

- Pour $\theta = 1515\pi$

La mesure principale de $\theta = 1515\pi$ est $-\pi$ car 1515 est un nombre impair.

D'où $\cos(-\pi) = -1$; $\sin(-\pi) = 0$

- Pour $\theta = 1000$

$\cos(1000) = \cos(280) = 0{,}17$; $\sin(1000) = \sin(280) = -0{,}98$

EXERCICE 7 : Démontrons les égalités suivantes :

1) $2\sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$

$(\cos x + \sin x)^2 - 1 = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x - 1 = 1 + 2\sin x \cos x - 1 = 2\cos x \sin x$

Donc $2\cos x \sin x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$

2) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \sin x \cos x$

$(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = (\cos x + \sin x + \cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - \cos x + \sin x)$

$= 2\cos x \cdot 2\sin x = 4\cos x \sin x$

Donc $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4\cos x \sin x$

3) $\sin^4 x + \sin^2 x = \cos^4 x - 3\cos^2 x + 2$

$\sin^4 x + \sin^2 x = \sin^2 x(\sin^2 x + 1) = (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 x + 1)$

$= (1 - \cos^2 x)(2 - \cos^2 x) = \cos^4 x - 3\cos^2 x + 2$

Donc $\sin^4 x + \sin^2 x = \cos^4 x - 3\cos^2 x + 2$

4) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \sin^2 x \cos^2 x$

On a: $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

Or $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ d'ou $1 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$\Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

Conclusion : $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

EXERCICE 8

Calculons :

1) $A = \cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

$= \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x$

$= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2$ (car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)

$A = 2$

2) $B = \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x - 1) = \cos^2 x(1 - 1) = 0$

$B = 0$

3) $C = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

$C = 0$

EXERCICE 9 Simplifions;

$A = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

$= \sin x + \sin x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x + \sin x \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos x$

$= \sin x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \sin x - \sin x$

$A = 0$

$B = \sin(x - y)\cos(x+y) - \sin(x+y)\cos(x - y) = \sin[x - y - (x+y)]$

$= \sin(x - y - x - y) = \sin(-2y)$

$B = -\sin 2y$

EXERCICE 10

1) Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

On a : $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ car $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ or $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$

Donc. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

De même $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ou $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ or $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$

Donc: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

2) Démontrons que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x$

$= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Démontrons que $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Pour tout $x \in$ IR, $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x$

$= 2\sin x \cos^2 x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2\sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x (1 - 2\sin^2 x)$

$\sin 3x = 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

EXERCICE 11

1) Transformons en produit :

$A = \sin 2x + \sin 6x = 2\sin\left(\frac{2x+6x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-6x}{2}\right) = 2\sin 4x \cos(-2x) = 2\sin 4x \cos 2x$

$B = \cos 5x - \cos 4x = -2\sin\left(\frac{5x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-4x}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{9x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

2) Transformons en une somme ou une différence :

$C = 2\cos x \cos 3x = \cos(x+3x) + \cos(x - 3x) = \cos 4x + \cos(-2x) = \cos 4x + \cos 2x$

$D = \sin(x+y)\cos(x-y) = \frac{1}{2}[\sin((x+y)+(x-y)) + \sin((x+y)-(x-y))] = \frac{1}{2}[\sin 2x + \sin 2y]$

$E = \sin(\frac{\pi}{4} - x)\sin(\frac{\pi}{4} + 2x) = -\frac{1}{2}[\cos((\frac{\pi}{4} - x) + (\frac{\pi}{4} + 2x)) - \cos((\frac{\pi}{4} - x) - (\frac{\pi}{4} + 2x))]$

$E = -\frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{2} + x) - \cos(-3x)] = -\frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{2} + x) - \cos 3x] = -\frac{1}{2}[-\sin x - \cos 3x]$

$E = \frac{1}{2}(\sin x + \cos 3x)$

EXERCICE 12

a. Montrons que, pour tout réel x, $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x + \sin x$

$$\sqrt{2}\,Cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\left[Cos\,x.Cos\frac{\pi}{4} + Sin\,x.Sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}Cos\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}Sin\,x\right]$$

$$= \frac{2}{2}Cosx + \frac{2}{2}Sinx$$

d'où $\sqrt{2}\,Cos(x - \frac{\pi}{4}) = Cosx + Sinx$

b. Montrons que, pour tout réel x, $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x - \sin x$

$$\sqrt{2}\,Cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\left[Cos\,x.Cos\frac{\pi}{4} - Sin\frac{\pi}{4}Sin\,x\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}Cos\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}Sin\,x\right]$$

$$= \frac{2}{2}Cosx - \frac{2}{2}Sinx$$

d'où $\sqrt{2}\,Cos(x + \frac{\pi}{4}) = Cosx - Sinx$

EXERCICE 13

1) a) Résolvons dans IR, l'équation $(E_1) : 4x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(-1x4) = 20$; et $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$. (E_1) a deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. $S_R = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{4}; \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$

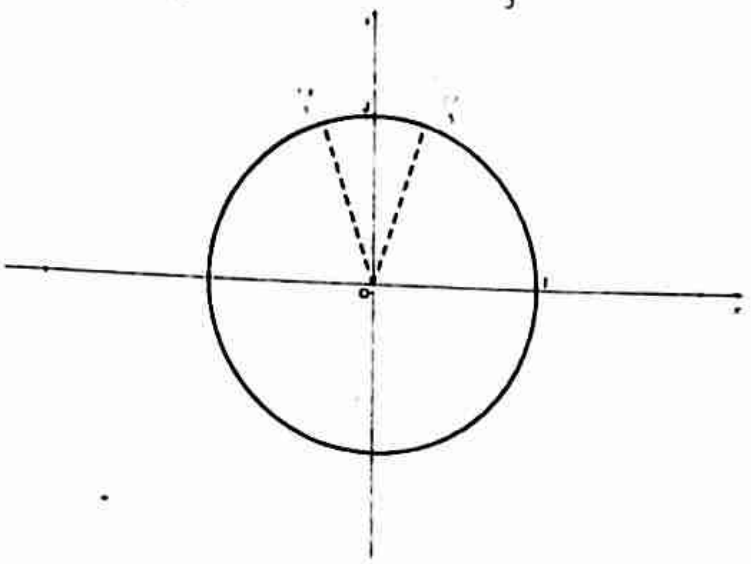
b) Résolvons dans $]-\pi,\pi[$, l'équation (E_2) : $\sin x = \sin\frac{2\pi}{5}$

(E_2) équivaut à $x=\frac{2\pi}{5}+2k\pi ou\ x=\pi-\frac{2\pi}{5}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Et on a

$x=\frac{2\pi}{5}+2k\pi ou\ x=\frac{3\pi}{5}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Dans $]-\pi,\pi[$, on a l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{2\pi}{5};\frac{3\pi}{5}\right\}$.

Représentons les points images des solutions sur le cercle trigonométrique à l'aide du rapporteur. $\frac{2\pi}{5}$ correspond à 72° et $\frac{3\pi}{5}$ correspond à 108°.



2) En posant $\cos\frac{\pi}{5}=x$ *et* $\sin\frac{\pi}{5}=y$.

a) Démontrons que $\cos\frac{2\pi}{5}=1-2y^2$

$\cos\frac{2\pi}{5}=\cos^2\frac{\pi}{5}-\sin^2\frac{\pi}{5}=1-\sin^2\frac{\pi}{5}-\sin^2\frac{\pi}{5}=1-2\sin^2\frac{\pi}{5}=1-2y^2$.

b) Démontrons que $\sin\frac{2\pi}{5}=2xy$

$\sin\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=2xy$

c) Démontrons que $\sin\frac{3\pi}{5} = y(4x^2-1)$.

$\sin\frac{3\pi}{5} = \sin(\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{5}) = \sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} = 2xyx+(1-2y^2)y = y(2x^2+(1-2y^2))$

Comme $\sin^2\frac{\pi}{5} = 1-\cos^2\frac{\pi}{5}$, on a $y^2=1-x^2$ et

$\sin\frac{3\pi}{5} = y(2x^2+(1-2y^2)) = y(2x^2+(1-2(1-x^2))) = y(2x^2+1-2+2x^2) = y(4x^2-1)$

d) Sachant que $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5}$, démontrons que $4x^2-2x-1=0$

$\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5}$ équivaut à $2xy = y(4x^2-1)$. Comme $y\neq 0$, $2xy = y(4x^2-1)$ signifie que $2x = 4x^2-1$; c'est-à-dire $4x^2-2x-1=0$

Calculons la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$

D'après 1) on peut écrire $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Comme $\frac{\pi}{5} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, alors $0 \leq \cos\frac{\pi}{5} \leq 1$, donc $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

(puisque $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$).

Calculons la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{5}$

$\sin^2\frac{\pi}{5} = 1-\cos^2\frac{\pi}{5} = 1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2 = 1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$.

Comme $\sin\frac{\pi}{5} > 0$, alors $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Calculons la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$

$\cos\frac{2\pi}{5} = 1-2y^2 = 1-2\times\frac{10-2\sqrt{5}}{16} = 1-\frac{5-\sqrt{5}}{4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Calculons la valeur exacte de $\sin\frac{2\pi}{5}$

$\sin\frac{2\pi}{5} = 2xy = 2\frac{1+\sqrt{5}}{4}\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$

EQUATIONS ET INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE 14: Résolvons les équations trigonométriques suivantes :

a) $x \in [-2\pi; 2\pi] \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \in [-2\pi; 2\pi], \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *équivaut à* $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

On a $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *ou* $x = \pi - (-\frac{\pi}{4}) + 2k\pi$. *Donc* $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *ou* $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *ou* $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$,.*donc* $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *ou* $x = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

On a soit $-2\pi \le -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le 2\pi$, *soit* $-2\pi \le -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

• $-2\pi \le -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le 2\pi$ *équivaut à* $-2 \le -\frac{1}{4} + 2k \le 2$

équivaut à $-2 + \frac{1}{4} \le 2k \le 2 + \frac{1}{4}$. *Autrement dit* $\frac{-7}{4} \le 2k \le \frac{9}{4}$

c'est – à – dire $\frac{-7}{8} \le k \le \frac{9}{8}$. *On a* $-0,875 \le k \le 1,125$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $k \in \{0;1\}$ .Et $x = -\frac{\pi}{4}$ *ou* $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

• $-2\pi \le -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le 2\pi$ *équivaut à* $-2 \le -\frac{3}{4} + 2k \le 2$

équivaut à $-2 + \frac{3}{4} \le 2k \le 2 + \frac{3}{4}$. *Autrement dit* $\frac{-5}{4} \le 2k \le \frac{11}{4}$

c'est – à – dire $\frac{-5}{8} \le k \le \frac{11}{8}$. *On a* $-0,625 \le k \le 1,375$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $k \in \{0;1\}$ .Et $x = -\frac{3\pi}{4}$ *ou* $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$

Donc $S_{[-2\pi, 2\pi]} = \left\{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

b) $x \in \mathbb{R}$. $\sin 2x = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$

$x \in \mathbb{R}$, $\sin 2x = \sin(-x + \frac{\pi}{4})$ *équivaut à* $2x = -x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ou $2x = \pi - (-x + \frac{\pi}{4}) + 2k\pi$. *C'est-à-dire* $3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ou $2x = \pi + x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. *Autrement dit* $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *ou* $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $x \in [0; 2\pi]$. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *équivaut à* $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{4}$. *Ce qui signifie* $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

ou $2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. *On a* $2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ *ou* $2x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

C'est-à-dire $x = \frac{7\pi}{24} + k\pi$ *ou* $x = \frac{\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$x \in [0; 2\pi]$ *équivaut à* $0 \leq \frac{7\pi}{24} + k\pi \leq 2\pi$ *ou* $0 \leq \frac{\pi}{24} + k\pi \leq 2\pi$

• $0 \leq \frac{7\pi}{24} + k\pi \leq 2\pi$ *équivaut à* $0 \leq \frac{7}{24} + k \leq 2$. *On a* $-\frac{7}{24} \leq k \leq 2 - \frac{7}{24}$.

Donc $-0,29 \leq k \leq 1,71; k \in \mathbb{Z}$. $k \in \{0;1\}$

Si : $k = 0$ **on a:** $x = \frac{7\pi}{24}$

Si : $k = 1$ **on a:** $x = \frac{31\pi}{24}$

• $0 \leq \frac{\pi}{24} + k\pi \leq 2\pi$ *équivaut à* $0 \leq \frac{1}{24} + k \leq 2$. *On a* $-\frac{1}{24} \leq k \leq 2 - \frac{1}{24}$.

Donc $-0,04+ \leq k \leq 1,95; k \in \mathbb{Z}$. $k \in \{0;1\}$

Si : $k = 0$ **on a:** $x = \frac{\pi}{24}$

Si : $k = 1$ **on a:** $x = \frac{25\pi}{24}$

$S_{[0;2\pi]} = \left\{ \frac{7\pi}{24}; \frac{31\pi}{24}; \frac{\pi}{24}; \frac{25\pi}{24} \right\}$

HOT ON P15 DUAL CAMERA

d) $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\cos(2x-\frac{\pi}{4})=-\cos(x+\frac{\pi}{6})$ *équivaut à* $\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(x+\frac{\pi}{6}+\pi)$

équivaut à $2x-\frac{\pi}{4}=x+\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ *ou* $2x-\frac{\pi}{4}=-(x+\frac{7\pi}{6})+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

équivaut à $x=\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ *ou* $2x-\frac{\pi}{4}=-x-\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

équivaut à $x=\frac{3\pi}{12}+\frac{14\pi}{12}+2k\pi$ *ou* $3x=\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}=-\frac{11\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

équivaut à $x=\frac{17\pi}{12}+2k\pi$ *ou* $x=-\frac{11\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

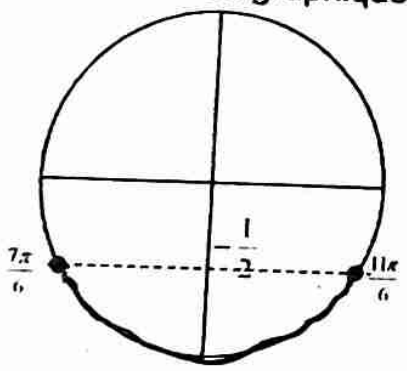
$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{17\pi}{12}+k2\pi;\ \frac{-11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

EXERCICE 15

1) a) $x\in[0;2\pi]$, $\sin(2x)+\frac{1}{2}\leq 0$

$\sin 2x+\frac{1}{2}\leq 0$ *équivaut à* $\sin 2x\leq -\frac{1}{2}$

Par résolution graphique,



On a $\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq 2x\leq\frac{11\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Equivaut à $\frac{7\pi}{12}+k\pi\leq x\leq\frac{11\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

En essayant les valeurs de k, on obtient :

Pour k=0, $\frac{7\pi}{12}\leq x\leq\frac{11\pi}{12}$

Pour k=1, $\frac{7\pi}{12}+\pi\leq x\leq\frac{11\pi}{12}+\pi$

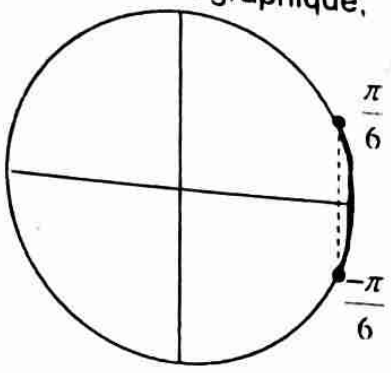
C'est-à-dire $\frac{19\pi}{12}\leq x\leq\frac{23\pi}{12}$

$S_{[0;2\pi]}=\left[\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{19\pi}{12};\frac{23\pi}{12}\right]$

b) $x \in [-\pi;\pi]$. $2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$

$2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$ *équivaut à* $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Par résolution graphique,

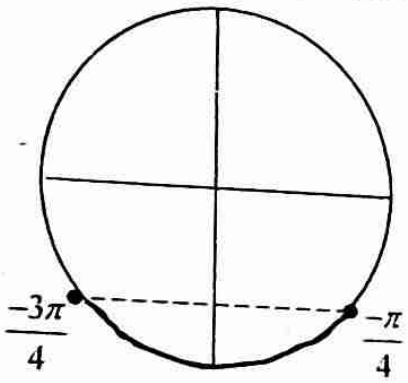


$S_{[-\pi;\pi]} = \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$

c) $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt{2}\sin x + 1 \leq 0$

$\sqrt{2}\sin x + 1 \leq 0$ *équivaut à* $\sin x \leq \frac{-1}{\sqrt{2}}$ *C'est-à-dire* $\sin x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}$

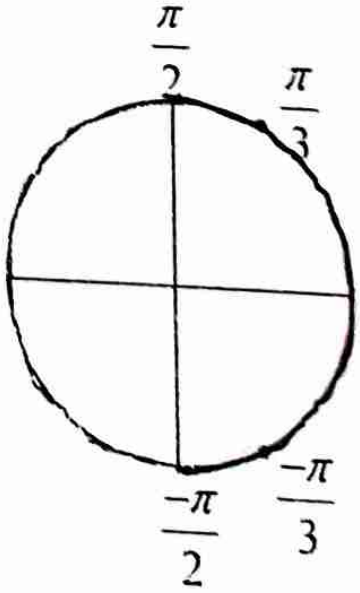
Par résolution graphique,



$S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{-\pi}{4} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$

2) $x \in [-\pi,\pi]$ $\begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{2} & (1) \\ \cos x > 0 & (2) \end{cases}$

Par résolution graphique,



$S_{[-\pi,\pi]} = \left(\left[\frac{\pi}{3};\pi\right] \cup \left[-\pi;\frac{-\pi}{3}\right]\right) \cap \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$S_{[-\pi,\pi]} = \left]\frac{-\pi}{2};\frac{-\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[$

EXERCICE 16 Resolvons les equations trigonometriques

a) $x \in \mathbb{R}$. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$

$x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ *équivaut à* $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

équivaut à $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 1$ *équivaut à* $\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = 1$

équivaut à $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos 0$

Ce qui donne $x - \frac{\pi}{4} = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. $C'est - à - dire\ \ x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) cos x – sin x = 1

$x \in \mathbb{R}$, $\cos x - \sin x = 1$ *équivaut à* $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

équivaut à $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *équivaut à* $\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

équivaut à $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4}$

Ce qui donne $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, ou\ \ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$C'est - à - dire\ \ x = 2k\pi\ ou\ \ x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{-2\pi}{4} + 2k\pi = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$.

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi; 2k\pi\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $x \in \mathbb{R}$. cos x + 3 sin x = $\frac{1}{2}$

$x \in \mathbb{R}$, $\cos x + 3\sin x = \frac{1}{2}$ *équivaut à* $\frac{1}{\sqrt{10}}\cos x + \frac{3}{\sqrt{10}}\sin x = \frac{1}{2\sqrt{10}}$

équivaut à $\cos(1,25)\cos x + \sin(1,25)\sin x = \cos(1,41)$

équivaut à $\cos(x - 1,25) = \cos(1,41)$

Ce qui donne $x - 1,25 = 1,41 + 2k\pi, ou\ \ x - 1,25 = -1,41 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$C'est - à - dire\ \ x = 1,41 + 1,25 + 2k\pi = 2,66 + 2k\pi$

$ou\ \ x = 1,25 - 1,41 + 2k\pi = -0,16 + 2k\pi$.

$S_{\mathbb{R}} = \{-0,16 + 2k\pi; 2,66 + 2k\pi \; k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE 17

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante (E_0):

$(E_0): 4x^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$

$\Delta = 20 + 8\sqrt{6} = 4(5 + 2\sqrt{6}) = 4(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

$x_1 = \dfrac{-2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{8} = \dfrac{-4\sqrt{3}}{8} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = \dfrac{-2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{8}$

$x_2 = \dfrac{-2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{8}$

$x_2 = \dfrac{4\sqrt{2}}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

2. Déduisons-en la résolution sur $[0; 2\pi]$ de l'équation (E_1)

$(E_1): 4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos x - \sqrt{6} = 0$

Posons $x = \cos x$. $(E_1) \Leftrightarrow (E_0)$ *donc on a*

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *ou* $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ *ou* $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$; *ou* $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ *ou* $x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$

$S_{[0;2\pi[} = \left\{\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

3. Résolvons dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation (I)

$(E_1): 4\cos^2 x + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos x - \sqrt{6} < 0$

$4(\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2})(\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}) < 0$

Tableau de signe $4(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2})(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2})$

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}$		−	‖	−	0	+	0	−	‖	−	
$\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}$		−	0	+	‖	+	‖	+	0	−	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

$$S_{[-\pi;\pi[}=\left]\frac{-5\pi}{6};\frac{-\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right[$$

EXERCICE 18

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations *(E₁)* et *(E₂)* :

$(E_1):\cos(x-\frac{\pi}{3})=\sin 3x$

(E_1) *équivaut à* $\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{2}-3x)$

(E_1) *équivaut à* $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ *ou* $x-\frac{\pi}{3}=-(\frac{\pi}{2}-3x)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

(E_1) *équivaut à* $x+3x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-+2k\pi$ *ou* $x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+3x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

(E_1) *équivaut à* $4x=\frac{5\pi}{6}-+2k\pi$ *ou* $x-3x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

(E_1) *équivaut à* $4x=\frac{5\pi}{6}-+2k\pi$ *ou* $-2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

(E_1) *équivaut à* $x=\frac{5\pi}{24}-+\frac{2k\pi}{4}$ *ou* $x=\frac{\pi}{12}-\frac{2k\pi}{-2},\ k\in\mathbb{Z}$

(E_1) *équivaut à* $x=\frac{5\pi}{24}-+\frac{k\pi}{2}$ *ou* $x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{12}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

(E_2) : $\sin 2x + \cos x = 0$

(E_2) *équivaut à* $2\sin x\cos x + \cos x = 0$. *C'est – à – dire* $\cos x(2\sin x + 1) = 0$

(E_2) *équivaut à* $\cos x = 0$ *ou* $(2\sin x + 1) = 0$. *C'est – à – dire* $\cos x = 0$ *ou* $\sin x = -\frac{1}{2}$

(E_2) *équivaut à* $\cos x = \cos\frac{\pi}{2}$ *ou* $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$(E2)$ *équivaut à* $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ *ou* $x = \pi - \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$(E2)$ *équivaut à* $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ *ou* $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$S_R = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. Résolvons dans $[0;2\pi]$ $\quad (E_3) : -\sqrt{3}\,Cosx + Sinx = -1$

$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

(E_3) *équivaut à* $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = -\frac{1}{2}$.

C'est – à – dire $\cos\frac{5\pi}{6}\cos x + \sin\frac{5\pi}{6}\sin x = -\frac{1}{2}$

(E_3) *équivaut à* $\cos(x - \frac{5\pi}{6}) = \cos\frac{2\pi}{3}$

èquivaut à $x - \frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ *ou* $x - \frac{5\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

(E_3) *équivaut à* $x = \frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} + 2k\pi$ *ou* $x = \frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(E_3) *équivaut à* $x = \frac{9\pi}{6} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ *ou* $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(E_3) *équivaut à* $x = \frac{3\pi}{2} - 2\pi + 2k\pi = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ *ou* $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$x \in [0;2\pi]$ équivaut à $0 \le \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \le 2\pi$ ou $0 \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$

• $0 \le \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \le 2\pi$ équivaut à $0 \le \frac{-1}{2} + 2k \le 2$. C'est-à-dire $\frac{1}{2} \le 2k \le \frac{1}{2} + 2$

$\frac{1}{2} \le 2k \le \frac{5}{2}$ équivaut à $\frac{1}{4} \le k \le \frac{5}{4}$ Donc $0,25 \le k \le 1,25$. $k = 1$. et $x = \frac{-\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

• $0 \le \frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$ équivaut à $0 \le \frac{1}{6} + 2k \le 2$. C''est-à-dire $-\frac{1}{6} \le 2k \le \frac{-1}{6} + 2$

$-\frac{1}{6} \le 2k \le \frac{11}{6}$ équivaut à $\frac{-1}{12} \le k \le \frac{11}{12}$ Donc $-0,083 \le k \le 0,92$ $k = 0$. et $x = \frac{\pi}{6}$.

$S_{[0;2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

EXERCICE 19

a) Justifions que $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$.

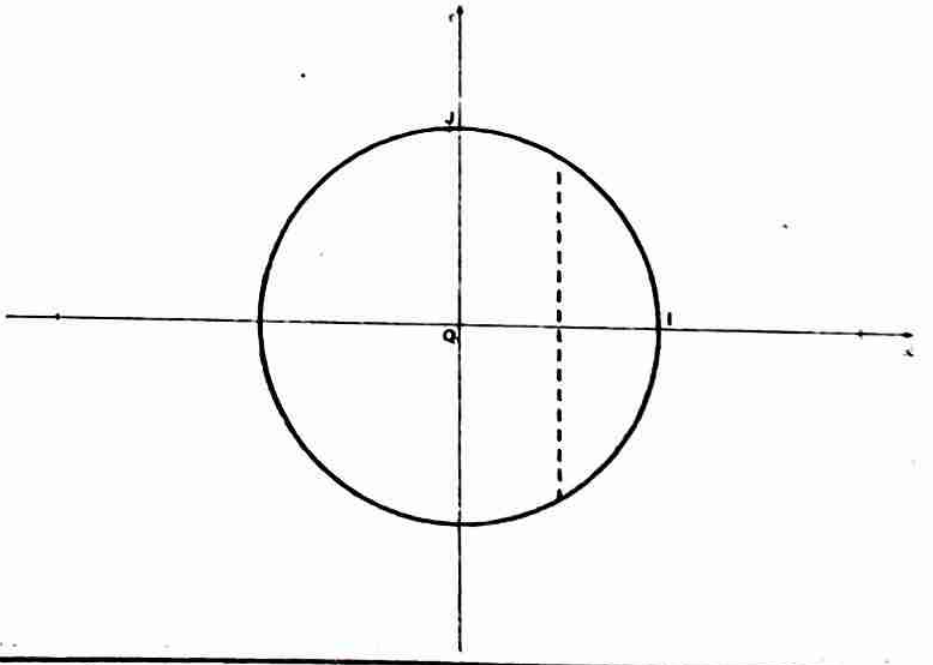
On a $\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \cos x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

b) Résolvons dans $]-\pi; \pi[$ l'inéquation (I_1): $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x \ge 1$

D'après a) $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2\cos(x + \frac{\pi}{4})$.

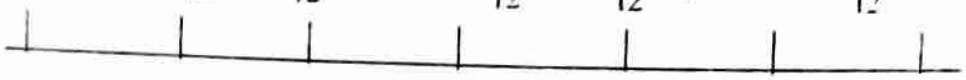
L'inéquation (I1) équivaut à $2\cos(x + \frac{\pi}{4}) \ge 1$, c'est-à-dire $\cos(x + \frac{\pi}{4}) \ge \frac{1}{2}$

En utilisant le cercle trigonométrique,



l'inéquation (I1) équivaut à $-\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Ce qui veut dire $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ $\frac{\pi}{3}$

Pour k=0, on a $-\frac{7\pi}{12}\le x\le\frac{\pi}{12}$; pour k=1, $\frac{17\pi}{12}\le x\le\frac{23\pi}{12}$; pour k=-1, $-\frac{31\pi}{12}\le x\le-\frac{23\pi}{12}$.



$-\frac{31\pi}{12}$ $-\frac{23\pi}{12}$ $-\pi$ $-\frac{7\pi}{12}$ $\frac{\pi}{12}$ π $\frac{17\pi}{12}$

Donc dans $]-\pi;\pi[$, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{7\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right]$

c) Résolvons dans $]-\pi;\pi[$ l'inéquation (I): $\sqrt{2}\cos(3x)-\sqrt{2}\sin(3x)\ge 1$.

En posant X=3x, l'inéquation (I) devient $\sqrt{2}\cos(X)-\sqrt{2}\sin(X)\ge 1$. Et d'après b) on a $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\le X\le\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Ce qui équivaut à $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\le 3x\le\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

C'est-à-dire $-\frac{7\pi}{36}+2k\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{36}+2k\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

Pour k=0, on a $-\frac{7\pi}{36}\le x\le\frac{\pi}{36}$; pour k=1, on a $\frac{17\pi}{36}\le x\le\frac{25\pi}{36}$; pour k=2, on a $\frac{41\pi}{36}\le x\le\frac{49\pi}{36}$;

Pour k=-1, on a $-\frac{31\pi}{36}\le x\le-\frac{23\pi}{36}$; pour k=-2, on a $-\frac{55\pi}{36}\le x\le-\frac{47\pi}{36}$.

Dans $]-\pi;\pi[$, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{31\pi}{36};-\frac{23\pi}{36}\right]\cup\left[-\frac{7\pi}{36};\frac{\pi}{36}\right]\cup\left[\frac{17\pi}{36};\frac{25\pi}{36}\right]$.

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE 20 $f(x)=\cos x$

1) Etude du sens de variation de f sur $]-\pi;\pi]$

$\forall x\in]-\pi;\pi],\ f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=(\cos x)'=-\sin x$

$f'(x)>0\Leftrightarrow-\sin x>0\Leftrightarrow\sin x<0\Leftrightarrow x\in]-\pi;0[$

$\forall x\in]-\pi;0[\ f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]-\pi;0[$

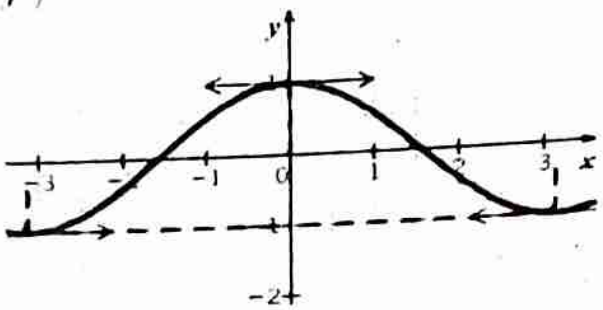
$\forall x\in]0;\pi[\ f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]0;\pi[$

$\forall x\in\{0;\pi\},\ f'(x)=0$ donc f admet deux extremums

2) le tableau de variation de f sur $]-\pi;\pi]$

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖ -1	↗	1	↘	-1

3) Construction de $\left(C_f\right)$



EXERCICE 21

1. Etudions le sens de variation de f

f'(x) = cosx. D'après le cercle trigonométrique, pour $x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, f '(x) est négatif et pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, f'(x) est positif.

Donc f est décroissante sur $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ et f est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2. Tableau de variation de f

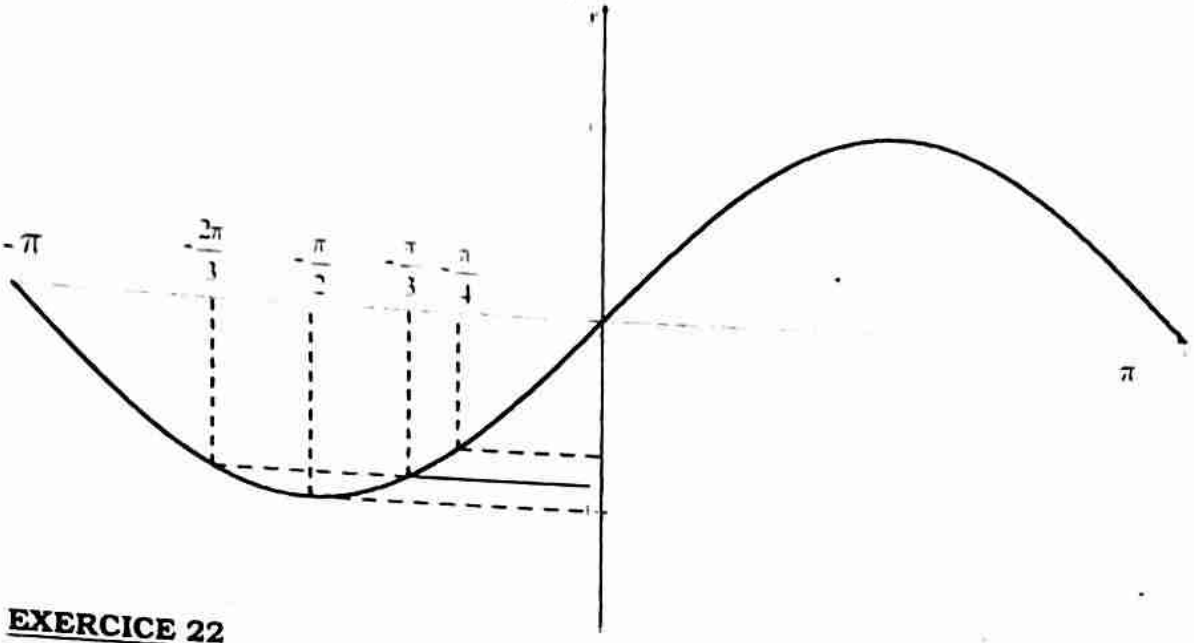
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)	-1	-	0	+	0	-	
f(x)	0	↘	-1	↗	1	↘	0

3. Construisons (Cf) la courbe de f.

Tableau de valeurs

x	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0
f(x)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Sin(-x)=sin(x) et pour $x \in]-\pi,\pi[$, $-x \in]-\pi,\pi[$ et donc f est impaire. En ce cas, l'origine du repère est un centre de symétrie de (Cf).



EXERCICE 22

1. Donnons Df

La fonction tangente est définie pour les réels différents de $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Donc Df = $]-\pi,\pi[-\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$

2. Etudions les variations de f.

Pour $x \in Df$, $f'(x)=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{\sin' x\cos x-\cos' x\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}$

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

1+tan²x est un nombre positif, donc f est croissante sur les intervalles $\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[, \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

3. Tableau de variation

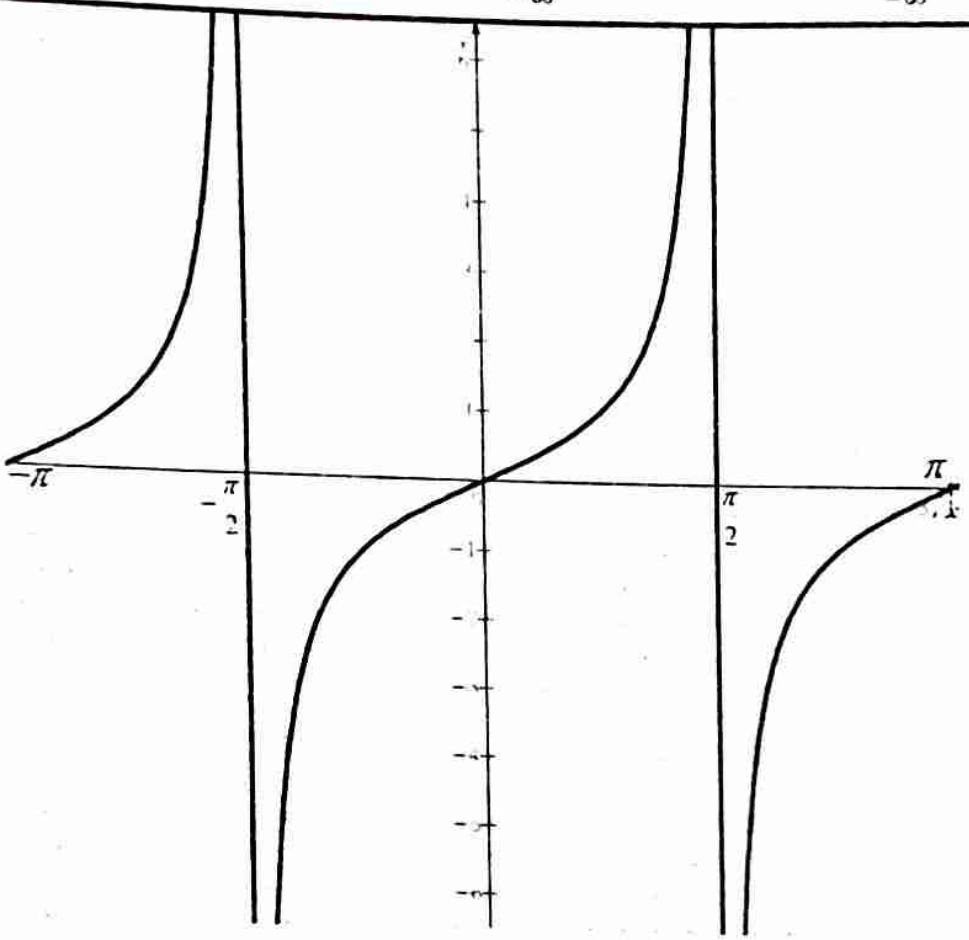
Calculons les limites aux bornes de Df.

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\sin x$ =-1, $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\cos x$ = 0 et pour x< $\frac{\pi}{2}$, cosx< 0. Alors, $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)=-\infty$

De même, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)		+		+		+	
f(x)	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	



BARYCENTRE



ARCHIMEDE, né en 287 avant J.C à **Syracuse** (aujourd'hui en Italie. Sicile), fut certainement le plus grand savant de l'Antiquité.

ARCHIMEDE est reconnu pour avoir donné une approximation très précise du nombre **Pi** (3,14185).

ARCHIMEDE prouve par exemple que l'aire d'une sphère est égale à quatre fois celle de son grand cercle et qu'une boule inscrite dans un cylindre occupe les deux tiers de son volume.

En physique, il étudie la statique, la mécanique, l'hydrostatique et l'optique. Il s'intéresse par exemple aux centres de gravité définis dans son livre sur la mécanique.

Il a découvert la ***poussée d'Archimède*** à qui, il a laissé son nom.

"Tout corps plongé dans un liquide subit de la part de celui-ci, une poussée exercée du bas vers le haut, et égale, en intensité, au poids du liquide déplacé."

L'histoire raconte que le roi Hiéron possède une couronne qui pèse bien le poids d'or qu'il a donné à son bijoutier mais il n'est pas sûr que le bijoutier ne l'ait pas trompé en travaillant la couronne avec d'autres matériaux que de l'or pur

Il demande donc à ***ARCHIMEDE*** de s'assurer de la supercherie sans refondre la couronne. Dans son bain, *Archimède* prend conscience de la poussée de l'eau sur tout corps plongé. Celui-ci est si joyeux d'avoir trouvé la solution qu'il sort de l'eau et traverse la ville de Syracuse, tout nu, en criant ***"Eurêka!"*** (J'ai trouvé!).

Ainsi ***ARCHIMEDE*** pèse de l'or dans l'eau puis hors de l'eau. Il constate que dans l'eau, l'or perd un vingtième de son poids. Il fait la même expérience avec la couronne du roi et s'aperçoit,que dans l'eau la couronne perd plus d'un vingtième de son poids. Donc la couronne n'est pas faite que d'or pur. Le roi a été trompé !

ARCHIMEDE est aussi un fabuleux inventeur de machines de guerre avec lesquelles la ville de Syracuse résistera contre l'envahisseur romain pendant plusieurs années.

Il met au point la **catapulte** qui permet de projeter de lourdes pierres sur les vaisseaux romains, le **miroir parabolique** que les syracusains utiliseront, dit-on, pour mettre le feu aux voiles des navires. Il a également l'idée des **meurtrières**, trous de la largeur d'une main taillés dans la muraille pour permettre aux archers de tirer des flèches tout en se protégeant.

ARCHIMEDE est aussi l'inventeur de la **roue dentée**, de la **poulie** et du **levier**.

En Egypte, ***ARCHIMEDE*** invente encore la **vis sans fin** et la **vis à eau** servant à faire remonter de l'eau que les habitants du bord du Nil utilisent pour arroser leurs terrains agricoles.

Après plusieurs années de siège, les romains réussissent finalement à prendre la ville de Syracuse. ***ARCHIMEDE*** est épargné par le général romain *Marcellus*.



Mais une légende raconte la mort tragique d'***ARCHIMEDE***.

Le savant traçant des figures sur le sol, est troublé par un soldat romain :

"Tu déranges mes cercles", dit-il.

Celui-ci, vexé, tue ***ARCHIMEDE*** d'un coup d'épée.

FICHE DE COURS

BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDERES

1. Propriété - Définition :

Soient A et B deux points et α et β deux réels.

Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Cet unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ est appelé barycentre des points A et B affectés des coefficients α et β.

On note : G = bar {(A, α); (B, β)}

Remarque :

Si $\alpha = \beta$ on dit que G est l'isobarycentre des points distincts A et B.

L'isobarycentre de deux points distincts A et B est le milieu du segment [AB].

2. Théorème :

Soit G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), avec $\alpha + \beta \neq 0$.

Alors, pour tout point M du plan, on a : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

On en déduit :

En appliquant la relation avec M=A : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$

En appliquant la relation avec M=B : $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{BA}$

3. Propriétés :

Si G est le barycentre du système {(A, α); (B, β)} avec $\alpha + \beta \neq 0$ et A et B deux points distincts, alors G appartient à la droite (AB).

Homogénéité

Le barycentre de deux points pondérés ne change pas si l'on multiplie les coefficients par un nombre réel non nul.

Ce qui se traduit par : si G est le barycentre du système {(A, α); (B, β)} avec $\alpha + \beta = 0$, alors G est aussi le barycentre du système {(A, k × α); (B, k × β)} avec k réel non nul.

BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDERES

1. Propriété - Définition :

Soient A, B et C trois points et α, β et γ trois nombres réels.

Si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\alpha GA + \beta GB + \gamma GC = 0$

Cet unique point G tel que $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$ est appelé barycentre des points A, B et C affectés des coefficients α, β et γ.

On note : G = bar {(A, α); (B, β); (C, γ)}

Remarque :

Si $\alpha = \beta = \gamma$, on dit que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

Si ABC est un triangle, l'isobarycentre G est le centre de gravité de ABC.

2. Théorème :

Soit G le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ)} avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Alors, pour tout point M du plan, on a : $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$

En appliquant la relation avec M=A, on en déduit : $\vec{AG} = \dfrac{\beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}}{\alpha+\beta+\gamma}$

3. Propriétés :

• ***homogénéité :***

Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si l'on multiplie les coefficients par un nombre réel non nul.

Ce qui se traduit par : si G= bar {(A, α); (B, β); (C, γ)} avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ alors

G= bar {(A, $k\times\alpha$); (B, $k\times\beta$); (C, $k\times\gamma$)} avec k réel non nul

• ***Théorème du barycentre partiel***

G est le barycentre du système {(A, α); (B, β); (C, γ)}.

Supposons que $\alpha+\beta\neq 0$ et notons H le barycentre de {(A, α); (B, β)}.

Alors G est le barycentre de {(H, $\alpha+\beta$); (C, γ)}

4. Coordonnées du barycentre

Soit G le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ)} avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les coordonnées du point G sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad ; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Remarque :

La notion de barycentre et les propriétés peuvent se généraliser à 4 points et plus.

SHOT ON PL5 Itel DUAL CAMERA

EXERCICES DIVERS

BARYCENTRE DE 2, 3 OU 4 POINTS PONDERES

EXERCICE 1

On donne un triangle equilatéral ABC de 6cm de côté.

a. Déterminer le barycentre D des points pondérés (A , -2), (B ; 1), (C ; 3).

b. O étant le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, déterminer le vecteur : $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$

c. M étant un point quelconque du plan, déterminer le vecteur: $\frac{-2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

EXERCICE 2

Le plan est muni du repère (O; I; J). On donne quatre points A, B, C et D.

Le but de cet exercice est de construire G tel que : $4\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

1.a. Démontrer que pour tout point M du plan, $4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

b. Déterminer AG lorsque M et A sont confondus.

c. En déduire la construction de G.

2.a. Construire les barycentres G_1 de (A ; 4) et (B ; -3) ; G_2 de (C ; 1) et (D ; 2).

b. Trouver deux nombres réels a et b tels que G est barycentre de (G_1, a) et (G_2; b)

EXERCICE 3

Les points A et B sont donnés.

Parmi les points C, D et E définis ci-après, quels sont ceux qui appartiennent au segment [AB] ? Justifier.

a. C est le barycentre de (A; -1) et (B; -4).

b. $2\overrightarrow{DA} + 5\overrightarrow{BD} = \vec{0}$

c. B est le barycentre de (A; 1) et (E; -3).

EXERCICE 4

Dans le plan de repère (O, I, J), on donne les points A, B et C par leurs coordonnées respectives (1; 4), (-2; 3) et (4; 0).

Soit C' $(4; \frac{-5}{2})$ le barycentre de (A; -2) et (B; 1) et G est le barycentre de (C; 3) et (C'; -1)

1. Quelles sont les coordonnées de G ?

2. Déduire les coordonnées du barycentre de (A ; -2) ; (B; 1) et (C; 3).

3. Soit A' barycentre de (B, 1); (C, 3) et B' celui de (A, -2); (C, 3).

Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

EXERCICE 5

Soit le triangle ABC.

1. Construire les points I, J et K définis par :

• I est barycentre de (A, 2) et (C, 1)

• J est barycentre de (A, 1) et (B, 2)

• K est barycentre de (C, 1) et (B, - 4)

2. Démontrer que B est barycentre de (K, 3) et (C, 1)

3. Quel est le barycentre de (A, 2) ; (K, 3) et (C, 1) ?

4. Déduire de 3. que les points I, J et K sont alignés et que J est le milieu de [IK].

5. L étant le milieu de [CI] et M celui de [KC], IJML est un parallélogramme de centre G.

Démontrer que G est l'isobarycentre de A, B, C.

EXERCICE 6

Soit les points A (4, 3) et B (-1, -2).

1. Calculer les coordonnées de G, barycentre de (A, 2) et (B, 3).

2. Montrer que le point C (5, 4) est aligné avec A et B.

3. Trouver deux nombres a et b tels que C soit le barycentre de (A, a) et (B, b)

EXERCICE 7

Soit ABCD un parallélogramme. On définit les points P et Q :

• $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

•Q est le symétrique du milieu de [AD] par rapport à A.

Après avoir exprimé P comme barycentre de A et de B, Q comme barycentre de A et de D et enfin C comme barycentre de A, B et D, montrer que les points P, Q et C sont alignés.

EXERCICE 8

Soit ABC un triangle du plan (P) et soit A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

1. Démontrer qu'il existe un point unique tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2. Démontrer que l'on a : $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BB'} = 3\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

En déduire que les trois médianes du triangle sont concourantes en G.

3. Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

EXERCICE 9

A. Soit ABCD un parallélogramme.

Déterminer trois réels a,b et c tels que le point D soit le barycentre de :

$(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$.

B. Dans un plan, ABCD un quadrilatère.

Le point H est défini par $3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DH}$ (1).

1. Construire le point H en le considérant comme le barycentre de deux points.

2. Le point G est le barycentre de $(C,4)$ et $(H,1)$.

Déterminer trois réels a, b et c tels que le point G soit le barycentre de (A,a), (D,b) et (C,c).

EXERCICE 10

Dans le triangle ABC, les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[IC]$.

Le point K est défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1. Construire les points I, J et K

2. Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AB}$

3. Deduire que les points B, J et K sont alignés.

EXERCICE 11

Soit A et B deux points distincts. Dans chacun des cas suivants, déterminer un couple $(a;b)$ de réels pour que G soit barycentre de (A,a) et (B,b).

1. a) $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$; b) $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GB}$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GB}$

2. a) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GB}$; b) $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} = 0$; c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

EXERCICE 12

Soit ABC, un triangle.

1. Déterminer deux réels a et b tels que le point G défini par : $3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ soit barycentre de $(A;a)$ et $(B;b)$.

2. Soit H défini par : $3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}$.

Déterminer les deux réels m et p tel que H soit le barycentre de $(A;m)$ et $(C;p)$ avec m + p = 1.

EXERCICE 13

Les points A, B, C et D étant donnés, on cherche à construire le point G tel que $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. (1)

1. a. Justifier l'existence de ce point G.

b. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a l'égalité :

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MG} = 6\overrightarrow{MG}$ (2).

c. Lorsque M = G , quelle égalité retrouve-t-on ?

d. Lorsque M = A , déterminer $\overrightarrow{AG}$ et en déduire la construction du point G.

2. a. Construire les barycentres E de $(A;2)$ et $(B;\ 1)$ et F de $(C;2)$ et $(D;3)$

b. En déduire deux réels a et b tels que G est le barycentre de $(E;a)$ et $(F;b)$ et une autre construction possible de G.

EXERCICE 14

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(-3;0)$; $B(0;-2)$; $C(3;0)$ et $D(0;2)$.

1. Calculer les coordonnées de G, barycentre de $(A;\ 2),(B;1),(C;1)$ et $(D;-2)$.

2. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$

Montrer que les points I, J et G sont alignés.

a. En calculant les coordonnées des points I et J.

b. En considérant G comme barycentre de I et J affectés de coefficients que l'on précisera.

LIGNES DE NIVEAU

EXERCICE 15

On donne le segment [AB] tel que : AB = 12.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{AB} = k$, où k est un nombre réel.

(1) k = 36 : (2) k = -12; (3) k = 256; (4) k = -144.

EXERCICE 16

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). On donne le segment [AB] tel que AB=12.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $3\left(\overline{MA}\right)^2 + 2\left(\overline{MB}\right)^2 = 60$.

2. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $2\left(\overline{MA}\right)^2 - \left(\overline{MB}\right)^2 = 0$

EXERCICE17

On donne le segment [AB] tel que AB = 12.

Dans chacun des cas suivants : (1) $k=\frac{4}{3}$; (2) $k=\frac{3}{4}$; (3) $k=2$.

Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que: $\frac{MA}{MB}$ k .

EXERCICE 18

Soit ABCD un quadrilatère et M un point du plan.

1. Le barycentre des points pondérés (A;3) et (B;−2) existe-t-il ?
   En déduire une réduction de $3\overline{MA}-2\overline{MB}$.
2. Le barycentre des points pondérés (C;2) et (D;−2) existe-t-il ?
   Réduire l'expression $2\overline{MC}-2\overline{MD}$.
3. Déterminer l'ensemble (Ɛ) des points M du plan qui vérifient $\left\|3\overline{MA}-2\overline{MB}\right\|=\left\|2\overline{MC}-2\overline{MD}\right\|$.

EXERCICE 19

Soient deux points A et B tels que AB =10

1. Construire C, barycentre du système (A; 2), (B; 3).
2. Construire D, barycentre du système (A; 3), (B; 2).
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\left\|2\overline{MA}+3\overline{MB}\right\|=10$
4. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\left\|2\overline{MA}+3\overline{MB}\right\|=\left\|3\overline{MA}+2\overline{MB}\right\|$.

EXERCICES DE SYNTHESE

EXERCICE 20

Partie A

Soit A, B et C trois points non alignés du plan.

1. Justifier que les systèmes $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$ *et* $\{(A;3),(B;-2),(C;3),(C;-2)\}$ admettent un même barycentre qu'on notera G.
2. Soit I le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BC]$. Montrer que G=bar $\{(I;3),(J;-2)\}$.
3. On note K le milieu de $[AI]$.

Montrer que les droites (BK) et (IJ) se coupent en G, puis placer le point G sur la figure.

4. Montrer que le quadrilatère ABIG est un parallélogramme.

Partie B.

1. a. Soit M un point quelconque du plan. Justifier que le vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant puis montrer que pour tout point M du plan, $\vec{V} = 2\overrightarrow{BI}$.

   b. Déterminer et construire l'ensemble Γ de des points M du plan tels que $\left\|\vec{V}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

2. a. Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

   b. Constuire Δ.

EXERCICE 21

Soit ABC un triangle et G un point vérifiant $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BG}$.

1. Déterminer les réels a, b et c pour que G soit le barycentre du système (A,a), (B,b) et (C,c).

2. Déterminer l'ensemble (D) des points M vérifiant

$$\left\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|(a+b)\overrightarrow{MA} + c\overrightarrow{MB}\right\|$$

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé et on a A(3;4), B(1;2) et C(2;1).

Représenter dans ce repère l'ensemble (D).

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

Soit A, B, C trois points non alignés et G le barycentre de (A,-3), (B, 1), (C, 1)

1. Démontrer que A est le centre de gravité du triangle GBC.
2. En déduire une construction de G.

EXERCICE 2

A, B et C sont trois points quelconques non alignés d'un plan.

On considère les points A', B' et C' respectivement définis par les égalités :

$\overrightarrow{BA'} = \lambda\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB'} = \lambda\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB}$. λ étant un nombre réel non nul.

Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

En déduire que les deux triangles ABC et A'B'C' ont le même centre de gravité.

EXERCICE 3

On donne trois points A, B, C fixes du plan et un point M variable de ce plan.

Montrer que :

1. $2MA \quad MB \quad MC$ est un vecteur constant.
2. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ s'exprime simplement à l'aide de G l'isobarycentre de A, B et C.
3. l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

est le cercle de centre G passant par A.

EXERCICE 4

Soit deux points A et B tels que AB=2 et l'application f définie de P vers $\mathbb{R}$ par:

$f(M) = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM}$

1. Construire les lignes de niveau -1, 0, $\frac{1}{2}$ et 2 de f.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) f (M) = -2 ; b) f (M) < 0 ; c) f (M) ≥ 2 ; d) – 1 ≤ f (M) ≤ 2

EXERCICE 5

Soit deux points A et B tels que AB = 2 et l'application f définie de P vers $\mathbb{R}$ par:

$f(M) = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM}$

1. Construire les lignes de niveau 3 et –1 de f.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que :

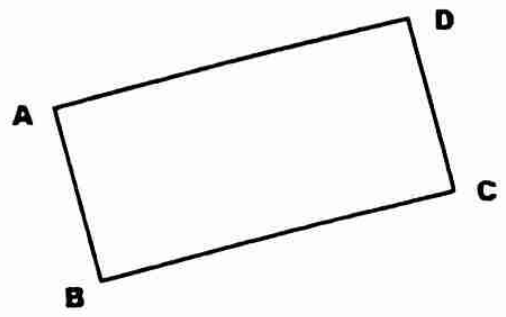
a. f (M) ≤ 3 ; b. f (M) ≥ -1 ; c. -1≤ f (M) ≤ 2

3. Déterminer k pour que la ligne de niveau k de f passe par A.

EXERCICE 6

ABCD est un parallélogramme.

Ecrire D comme barycentre des points A, B et C.



EXERCICE 7

ABC est un triangle. A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

P est un point défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

I est le milieu de [B'C'].

1. Montrer que I, P et C sont alignés.

2. Montrer ensuite que les droites (AA'), (B'C') et (CP) sont concourantes.

EXERCICE 8

Soit un triangle équilatéral ABC de côté de mesure 2.

Soit l'application f définie de P vers $\mathbb{R}$ par : $f(M) = MA^2 + MB^2 - 1$

1. Déterminer k pour que la ligne de niveau k de f passe par C.

2. Etant donné un nombre réel k. déterminer l'ensemble des points M tels que :

$f(M) = k$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.

EXERCICE 9

Soit un carré ABCD de côté de mesure 2.

Soit l'application f définie de P vers $\mathbb{R}$ par: $f(M) = MA^2 - MB^2$

1. Déterminer k pour que la ligne de niveau k de f passe par le barycentre I des points pondérés (A, 1) et (B, -3).

2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Construire la ligne de niveau GB^2 de f.

EXERCICE 10

Soit A et B deux points du plan tels que AB = 6 et f l'application numérique définie dans le plan par $f(M)=MA^2+MB^2$.

1. Déterminer les lignes de niveau 50, 36, 26, 20 de f.
2. Pour quelles valeurs de k la ligne de niveau k de f :
   - est-elle réduite à un point ?
   - passe-t-elle par A ?
   - passe –t– elle par le symétrique de B par rapport à A ?
3. Déterminer l'ensemble les points M du plan tels que : $26 \leq MA^2 + MB^2 \leq 68$.

EXERCICE 11

On donne un segment [AB].

1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 1) et (B, -2).
2. Soit M un point du plan.

a. Démontrer que le vecteur $2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}$ est indépendant de M.

b. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que: $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\|$

EXERCICE 12

On considère les points $A(1\,;2\,;-1)\,;\,B(2\,;3\,;1)$ et $C(-2\,;-3\,;1)$.

Dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de l'espace.

Déterminer les coordonnées de :

- G, barycentre de (A, 3) et (B; 5)
- H, barycentre de (A;-2), (B, 3) et (C; 1)
- K, barycentre de $(A\,;3\sqrt{2})$, $(B\,:-\sqrt{8})$ et $(C\,:-\sqrt{50})$.

EXERCICE 13

Soient A et B deux points distincts et M un point de la droite (AB).

1. Montrer que, si M appartient au segment [AB], alors M = bar {(A, MB) ; (B, MA)}

2. Montrer que, si M est extérieur au segment [AB], alors M = bar {(A, MB) ; (B, - MA)}

EXERCICE 14

Soient A, B et C trois points non alignés et G le barycentre de (A, -3), (B, 1) et (C, 1).

1. Démontrer que A est le centre de gravité de GBC.

2. En déduire une construction de G.

EXERCICE 15

ABC est un triangle tel que : AB = 3, BC = 5 et CA = 4.

Soit A' le barycentre de (B, 4) et (C, 3),

B' le barycentre de (A, 5) et (C, 3) et

C' le barycentre de (A, 5) et (B, 4).

Construire le triangle ABC et les points A', B' et C'.

Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

EXERCICE 16

On donne le segment [AB] tel que AB = 12.

Dans chacun des cas suivants, déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = k$.

(1). $k = \frac{4}{3}$ (2). $k = 0,5$ (3). $k = -1$

EXERCICE 17

On considère les points A (1 ; 2), B (2 ; 1) et C (3 ; -2) du plan.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$

EXERCICE 18

On considère les points A (1 ; -1), B (0 ; 2) et C (-2 ; 2) du plan.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$

EXERCICE 19

On considère les points A (2 ; -1), B (0; 1) et C (3 ; 2) du plan.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) des points M de du plan que : $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

CORRECTION DES EXERCICES

BARYCENTRE DE 2, 3 OU 4 POINTS PONDERES

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle équilatéral de 6 cm de côté.

a) Déterminons le point D barycentre des points pondérés (A ; -2), (B ; 1) et (C ; 3).

$D = bar\{(A;-2);(B;1);(C;3)\}$ équivaut à $-2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

équivaut à $-2\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ équivaut à $2\overrightarrow{DB} = -3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$

$2\overrightarrow{DB} = -3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$ équivaut à $2\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.

b) Déterminons le vecteur $-2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$

$$-2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = -2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}) + 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC})$$
$$= -2\overrightarrow{OD} \underbrace{-2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}}_{\vec{0}} - 2\overrightarrow{OD}$$

c) M étant un point quelconque du plan, déterminons le vecteur $\frac{-2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

$$\frac{-2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\cdot(-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})$$
$$= \frac{1}{3}\cdot(-2\overrightarrow{MD} - 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{DC})$$
$$= \frac{1}{3}\cdot(2\overrightarrow{MD}) = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{MD}$$

EXERCICE 2

1) a) Demontrons que : $4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

$4\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ équivaut à $4\overrightarrow{GM} + 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{GM} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ équivaut à $4\overrightarrow{GM} + 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} - 4\overrightarrow{GM} = 4\overrightarrow{MG}$

b) Déterminons le vecteur $\overrightarrow{AG}$ lorsque M et A sont confondus :

$4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ équivaut à $4\overrightarrow{AA} - 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$

Ce qui signifie $-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2) a) Construction de G_1 et G_2.

$G_1 = bar\{(A;4);(B;-3)\}$ équivaut à $4\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$ équivaut à $4\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

On a $\overrightarrow{G_1A} = 3\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AG_1} = -3\overrightarrow{AB}$

$G_2 = bar\{(C;1);(D;2)\}$ équivaut à $\overrightarrow{CG_2} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

b) Trouvons deux nombres réels a et b tels que G est barycentre de (G_1 ; a) et (G_2 ; b)

$G_1 = bar\{(A,4);(B,-3)\}$ équivaut à $4\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$ (1)

$G_2 = bar\{(C,1);(D,2)\}$ équivaut à $\overrightarrow{G_2C} + 2\overrightarrow{G_2D} = \vec{0}$ (2)

(1)+(2) donne $4\overrightarrow{G_1A} - 3\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_2C} + 2\overrightarrow{G_2D} = \vec{0}$

Ce qui équivaut à $4\overrightarrow{G_1G} + 4\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{G_1G} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G_2G} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{G_2G} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Ce qui équivaut à $\overrightarrow{G_1G} + 3\overrightarrow{G_2G} + 4\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Or $4\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{G_1G} + 3\overrightarrow{G_2G} = \vec{0}$. donc $G = bar\{(G_1,1);(G_2,3)\}$

Par conséquent (3) et (4) implique que : a = 1 et b = 3

EXERCICE 3

a) $C = bar\{(A,-1);(B,-4)\}$

Les coefficients de A et de B sont de même signe donc $C \in [AB]$

b) $2\overrightarrow{DA} + 5\overrightarrow{BD} = \vec{0}$ équivaut à $2\overrightarrow{DA} - 5\overrightarrow{DB} = 0$ Donc $D = bar\{(A,2);(B,-5)\}$.

Les coefficients de A et de B sont de signe contraire donc $D \notin [AB]$

b) $B = bar\{(A,1);(E,-3)\}$ équivaut à $BA - 3BE = 0$. C'est-à-dire $BE + EA - 3BE = 0$

Ce qui équivaut à $-2BE + EA = 0$. Ce qui signifie $2EB + EA = 0$ Donc $E = \{(B,2);(A,1)\}$.

Les coefficients de A et de B sont de même signe donc $E \in [AB]$

EXERCICE 4

1) De manière générale. si $G = bar\{(A,a);(B,b)\}$ alors $\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B}{2} \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B}{2} \end{cases}$

G est le barycentre de (C; 3) et (C'; -1)

Les coordonnées de G sont : $\begin{cases} x_G = \dfrac{3\times x_C + (-1)\times x_{C'}}{2} = \dfrac{3\times 4 + (-1)\times 4}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ y_G = \dfrac{3\times y_C + (-1)\times y_{C'}}{2} = \dfrac{3\times 0 + (-1)\times \frac{-5}{2}}{2} = \dfrac{\frac{5}{2}}{2} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

2) Déterminons les coordonnées du barycentre de (A,-2) ; (B, 1) ; (C, 3)

Or $C' = bar\{(A,-2);(B,1)\}$ donc $bar\{(A,-2);(B,1);(C,3)\} = bar\{(C',-1);(C,3)\} = G$

Conclusion: $G = bar\{(A,-2);(B,1);(C,3)\}$

Donc les coordonnées de $bar\{(A,-2);(B,1);(C,3)\}$ sont $x = 4$ et $y = \dfrac{5}{4}$

3) $G = bar\{(A,-2);(B,1);(C,3)\}$

En utilisant 3 fois le barycentre partiel, on a :

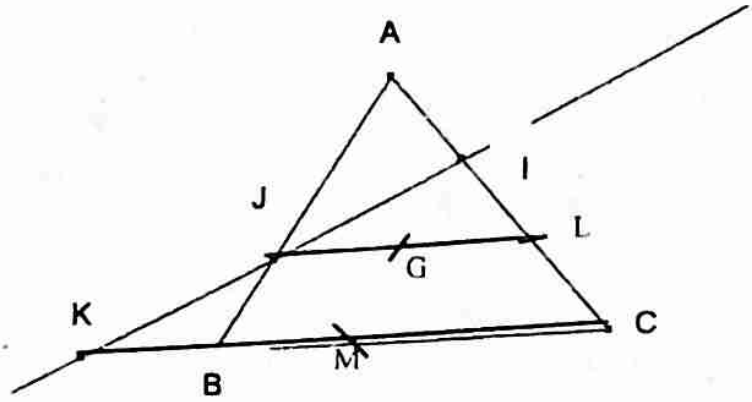
$G = bar\{(A',4);(A,-2)\}$; $G = bar\{(B,1);(B',1)\}$; $G = bar\{(C,3);(C',-1)\}$

Donc les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes au point G.

EXERCICE 5 Soit le triangle ABC.

1) Construction des points I, J et K:

- $I = bar\{(A,2);(C,1)\}$ *équivaut à* $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{1+2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- $J = bar\{(A,1);(B,2)\}$ *équivaut à* $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{1+2}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$
- $K = bar\{(C,1);(B,-4)\}$ *équivaut à* $\overrightarrow{CK} = \frac{-4}{1-4}\overrightarrow{CB} = \frac{-4}{-3}\overrightarrow{CB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$



2) $K = bar\{(C,1);(B,-4)\}$ *équivaut à* $\overrightarrow{CK} - 4\overrightarrow{BK} = \vec{0}$. *C'est – à – dire* $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK} - 4\overrightarrow{BK} = \vec{0}$

$K = bar\{(C,1);(B,-4)\}$ *équivaut à* $\overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{BK} = \vec{0}$. *C'est – à – dire* $\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BK} = \vec{0}$.

Donc $B = bar\{(C,1);(K,3)\}$

3) $bar\{(A,2);(K,3);(C,1)\} = bar\{(A,2);(B,4)\} = bar\{(A,1);(B,2)\} = J$

Donc $bar\{(A,2);(K,3);(C,1)\}$ est le point J.

4) $J = bar\{(A,1);(B,2)\} = bar\{(A,2);(K,3);(C,1)\}$

$= bar\{(A,2);(C,1);(K,3)\} = bar\{(I,3);(K,3)\}$

Alors les points J, I et K sont alignés.

De plus, J est l'isobarycentre des points I et K donc J est le milieu de [IK].

5) G est le centre de IJML donc G est le milieu de [JL].

La droite (AG) passe par le milieu de [BC]

$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AL}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\right] = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc G est isobarycentre de A, B, C.

EXERCICE 6

A (4 ; 3) et B (-1 ; -2)

1) Calculons les coordonnées de G, barycentre de (A, 2) et (B, 3).

$$si\ G = bar\{(A,2);(B,3)\}\ \text{alors}\ \begin{cases} x_G = \dfrac{2x_A + 3x_B}{2} = \dfrac{2\times 4 + 3\times(-1)}{2} = \dfrac{5}{2} \\ y_G = \dfrac{2y_A + 3y_B}{2} = \dfrac{2\times 3 + 3\times(-2)}{2} = 0 \end{cases}$$

2) Montrons que le point C est aligné avec A et B.

$$det(\overline{CA},\overline{CB}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$ donc les points C, A et B sont alignés.

3) Trouvons deux nombres réels a et b tels que $C = bar\{(A,a);(B,b)\}$

$C = bar\{(A,a);(B,b)\}$ *équivaut à* $a\overline{CA} + b\overline{CB} = \vec{0}$

$$a\overline{CA} + b\overline{CB} = 0 \text{ équivaut à } \begin{cases} a(x_A - x_C) + b(x_B - x_C) = 0 \\ a(y_A - y_C) + b(y_B - y_C) = 0 \end{cases} \text{équivaut à } \begin{cases} a(4-5) + b(-1-5) = 0 \\ a(3-4) + b(-2-4) = 0 \end{cases}$$

$$C = bar\{(A,a);(B,b)\} \text{ équivaut à } \begin{cases} -a - 6b = 0 \\ -a - 6b = 0 \end{cases} C'est-à-dire\ -a - 6b = 0.$$

Pour $b = 1$, $a = -6$. *Donc* $C = bar\{(A,-6);(B,1)\}$

EXERCICE 7

- $\overline{AP} = \dfrac{1}{3}\overline{AB}$ *équivaut à* $P = bar\{(A;2);(B,1)\}$

- Q est le symétrique du milieu de [AD] par rapport à A

On a : $\overline{QA} = \dfrac{1}{2}\overline{AD}$ *équivaut à* $2\overline{QA} - \overline{AD} = \vec{0}$. *équivaut à* $2\overline{QA} - \overline{AQ} - \overline{QD} = \vec{0}$

Ce qui équivaut à $3\overline{QA} - \overline{QD} = 0$. *Donc* $Q = bar\{(A,3);(D,-1)\}$

- ABCD est un parallélogramme

On a : $\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA} = \overline{CB} + \overline{CD}$ Car $\overline{BA} = \overline{CD}$

$\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{CD}$ *équivaut à* $\overline{CA} - \overline{CB} - \overline{CD} = 0$. *Donc*, $C = bar\{(A,1);(B,-1);(D,-1)\}$

- Pour montrer que P, Q et C sont alignés, trouvons une relation entre $\overline{CP}$ et $\overline{CQ}$

$$\overline{CA} - \overline{CB} - \overline{CD} = \vec{0} \qquad (1)$$

$\overline{AP} = \dfrac{1}{3}\overline{AB}$ *équivaut à* $3\overline{AP} - \overline{AB} = \vec{0}$.

$$3\overline{AP} - \overline{AB} = 3\overline{AC} + 3\overline{CP} - \overline{AB} = 3\overline{AC} + 3\overline{CP} - \overline{AC} - \overline{CB} = 2\overline{AC} + 3\overline{CP} - \overline{CB} = -2\overline{CA} + 3\overline{CP} - \overline{CB}$$

$\overline{AP} = \dfrac{1}{3}\overline{AB}$ *équivaut à* $-2\overline{CA} + 3\overline{CP} - \overline{CB} = \vec{0}$. (2)

$3\overrightarrow{QA}-\overrightarrow{QD}=3\overrightarrow{QC}+3\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{QC}+3\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{CQ}+3\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}$

$3\overrightarrow{QA}-\overrightarrow{QD}=0$ *équivaut à* $-2\overrightarrow{CQ}+3\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ (3)

(2) + (3) *implique* $-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CQ}+3\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Ce qui équivaut à $3\overrightarrow{CP}-2\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

Ce qui équivaut à $3\overrightarrow{CP}-2\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$

Et on a $2\overrightarrow{CQ}-3\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$ *(d'après (1))*

Ce qui donne $2\overrightarrow{CQ}-3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ *Et on a* $\overrightarrow{CQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CP}$.

$C=bar\{(Q,2);(P,-3)\}$ *donc les points C, P et Q sont alignés.*

EXERCICE 8

1) Déterminons G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Soit O un point quelconque du plan P et quelque soit le point G on a :

$\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}$ (1) . $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}$ (2) . $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}$ (3)

(1) + (2) + (3) *implique* $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OG}$

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ *équivaut à* $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$ *équivaut à* $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$

Donc $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ *c'est-à-dire* $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ (4)

Donc il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

2) Démontrons que : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}=3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

Démontrons que $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$

On a : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. Remplaçons O par A

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ *Or.* $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AA'}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AA'}$

D'où $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ *équivaut à* $3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$. *C'est-à-dire* $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$.

On démontre de même $3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BB'}=\vec{0}$ en remplaçant le point O par le point B dans (4).

Et on démontre de même $3\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ en remplaçant O par C dans (4).

Déduisons que les trois médianes du triangle concourent en G.

$3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$ *équivaut à* $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GA'}=0$. *On a* $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ *donc* $G=bar\{(A,1);(A',2)\}$

$3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BB'}=\vec{0}$ *équivaut à* $3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{GB'}=0$. *On a* $\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ *donc* $G=bar\{(B,1);(B',2)\}$

$3\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ *équivaut à* $3\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{CG}+2\overrightarrow{GC'}=0$. *On a* $\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ *donc* $G=bar\{(C,1);(C',2)\}$

Conclusion : Les médianes (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes au point G.

3) Démontrons que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

On a : $MA = GA - GM$ (1) $MB = GB - GM$ (2) $MC = GC - GM$ (3)

La somme membre à membre des trois relations donne :

$MA + MB + MC = GA - GM + GB - GM + GC - GM = -GA - GB + GC - 3GM$

Or $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ donc $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = -3\vec{GM} \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$

Conclusion : Pour tout point M du plan, on a $MA + MB + MC = 3MG$

EXERCICE 9

A. Comme ABCD est un parallélogramme, on a :

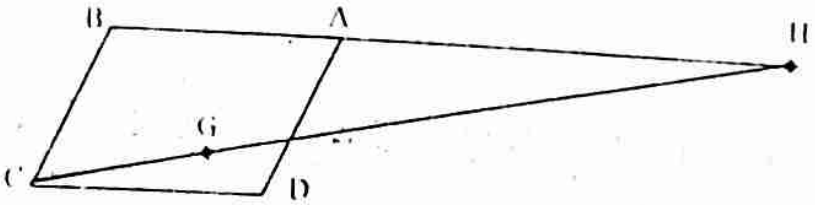
$\vec{BD} = \vec{DA} + \vec{DC}$ équivaut à $\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$.

donc $D = bar\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

1. Construction du point H

L'égalité (1), définissant le point H, s'écrit $3DA - 2DB = (3-2)DH$ d'où H est donc le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, -2)$

On a : $\vec{AH} = -2\vec{AB}$



2. G est le barycentre de $(C, 4)$ et $(H, 1)$.

On en déduit l'égalité vectorielle :

$4\vec{GC} + \vec{GH} = \vec{0}$ équivaut à $4\vec{GD} + \vec{GD} + \vec{DH} = \vec{0}$

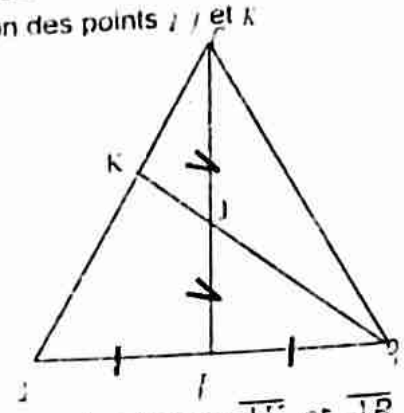
$$5\vec{GC} = -4\vec{DC} - \vec{DH} = 4\vec{DC} + \vec{DH}$$

Or $\vec{DH} = 3\vec{DA} - 2\vec{DB}$, d'où $5\vec{DG} = 4\vec{DC} + 3\vec{DA} - 2\vec{DB}$

G est donc le barycentre de (A, 3) ; (B, -2) et (C, 4).

EXERCICE 10

1. Construction des points I , J et K



2. Exprimons $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Comme J est milieu de $[IC]$; on a : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ or I est milieu de $[AB]$.

donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Comme $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On a : $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AK}$ alors $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$.

3. $4\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AK}$ donc J est le barycentre de (B, 1) et (K, 3).

J appartient à la droite (BK) par conséquent les points B, J et K sont alignés.

EXERCICE 11

1. a) $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ avec $1 + 3 = 4 = 0$ donc G est le barycentre de (A , 1) et (B , 3).

b) $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GB}$ *équivaut à* $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. *Comme* $1 + 2 = 3$ *et* $3 \neq 0$ alors G est le barycentre de (A ; 1) et (B ; 2).

c) $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GB}$ *équivaut à* $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GB}$ *équivaut à* $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GA} = 0$

Ce qui équivaut à $-4\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. *Comme* $-4 + 2 = -2$ *et* $-2 \neq 0$.

Donc G est le barycentre de $(A ; -2)$ et (B ; 1).

2. a) $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{GB}$ *équivaut à* $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GB}$

Ce qui équivaut à $-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. *Comme* $-1 - 1 = -2$ *et* $-2 \neq 0$.

Donc G est le barycentre de $(A ; 1)$ et $(B ; 1)$.

b) $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$ *équivaut à* $3\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$. *C'est-à-dire* $-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

$-2 + 3 = 1 \neq 0$. Donc G est le barycentre de $(A ; -2)$ et (B ; 3).

c) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ *équivaut à* $2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$. *C'est-à-dire* $-\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

$-1 + 3 = 2 \neq 0$. Donc G est le barycentre de $(A ; -1)$ et (B ; 3).

d. Lorsque $M = A$, on a

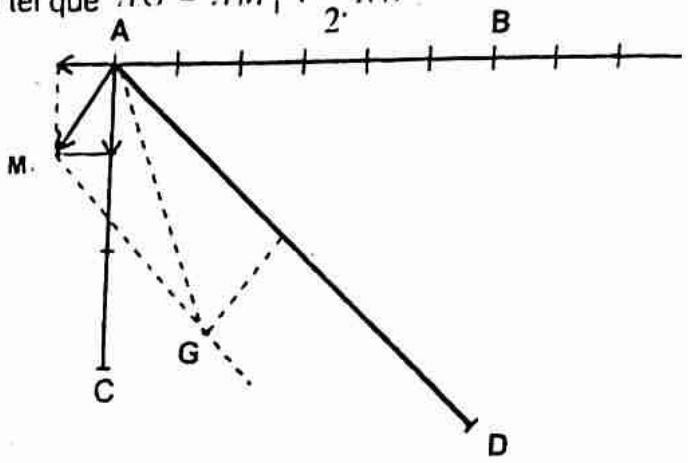
$2\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AG}$

Ce qui équivaut à $-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AG}$

C'est-à-dire $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Construire le point M, tel que $\overrightarrow{AM_1} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Construire le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$



2. a) Construction des :

Barycentre E de (A; 2) et (B;-1) $\overrightarrow{AE} = \frac{-1}{2+(-1)}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$. *Donc* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$

Barycentre F de (C; 2) et (D; 3) $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{CD}$. *Donc* $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$

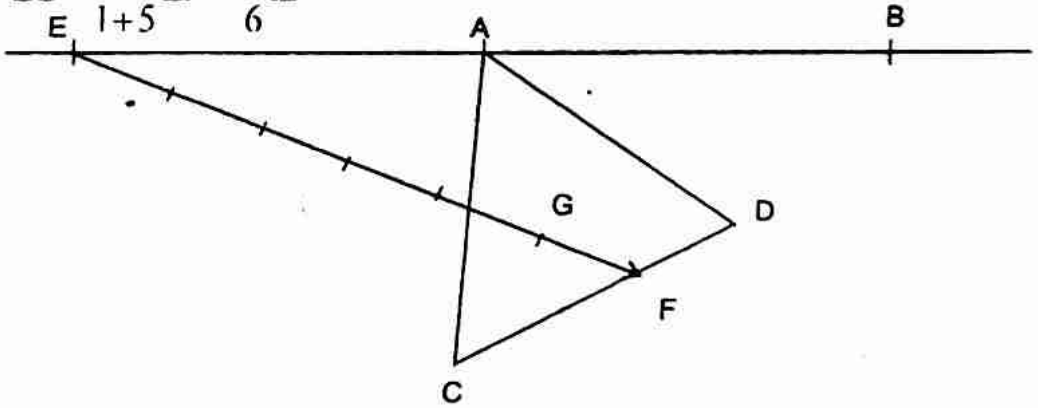
b. G barycentre de (E; a) et (F; b).

G est barycentre de (A; 2), (B; -1), (C; 2), (D; 3). D'après la propriété du barycentre partiel.

G est le barycentre de (E ; 2-1), (F ; 2+3). G est le barycentre du système (E ;1), (F ;5).

Autre construction de G

$\overrightarrow{EG} = \frac{5}{1+5}\overrightarrow{EF} = \frac{5}{6}\overrightarrow{EF}$



EXERCICE 14

1. **Calculons les coordonnées de G**

$-2GA + GB + GC - 2GD = 0$

équivaut à $-2\overrightarrow{GO} - 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{GO} - 2\overrightarrow{OD} = 0$

Ce qui équivaut à $2\overrightarrow{GO} - 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = 0$

C'est-à-dire $\overrightarrow{OG} = -\frac{2}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{2}{2}\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$

Donc $\begin{cases} x_G = -(-3) + \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 3 - 0 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \\ y_G = -0 + \frac{1}{2}\times(-2) + \frac{1}{2}\times 0 - 2 = -1 - 2 = -3 \end{cases}$

Donc $G\left(\frac{9}{2}; -3\right)$

2. I milieu de $[AD]$ et J milieu de $[BC]$

Montrons que les points I, J et G sont alignés :

a. Calculons les coordonnées des points I et J.

Coordonnées du point I : $\begin{cases} x_I = \frac{-3+0}{2} = \frac{-3}{2} \\ y_I = \frac{0+2}{2} = 1 \end{cases}$

Coordonnées du point J : $\begin{cases} x_J = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \\ y_J = \frac{-2+0}{2} = -1 \end{cases}$

Montrons qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IS} = k\overrightarrow{IG}$

$\overrightarrow{IS} = k\overrightarrow{IG}$ *équivaut à* $\begin{cases} \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = k\left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\right) \\ -1 - 1 = k(-3 - 1) \end{cases}$ *c'est-à-dire* $\begin{cases} 3 = 6k \\ -2 = -4k \end{cases}$

Ce qui signifie que $\begin{cases} k = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ k = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\overrightarrow{IS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IG}$, *donc* $G \in (IS)$.

b. En considérant G comme barycentre des points I et J

G= bar

A	B	C	D
-2	1	1	-2

G = bar

A	D	B	C
-2	-2	1	1

G = bar

I	J
-2	1

Donc G est barycentre (I ;-2) et (J, 1) par consequent les points I, J et G sont alignés.

LES LIGNES DE NIVEAUX

EXERCICE 15

Déterminons l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = k$ où $k \in \mathbb{R}$ et AB = 12

On a $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = k$

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

$\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = k$ équivaut à $\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AB} = k$. Donc $\overline{AH} = \dfrac{k}{AB}$

Pour $k = 36$, $\overline{AH} = \dfrac{36}{12} = 3$; Pour $k = -12$, $\overline{AH} = \dfrac{-12}{12} = -1$;

Pour $k = 256$, $\overline{AH} = \dfrac{256}{12} = \dfrac{64}{3}$; Pour $k = -144$, $\overline{AH} = \dfrac{-144}{12} = -12$.

L'ensemble des points M, dans chaque cas, est la perpendiculaire à (AB) passant par H.

EXERCICE 16 : On donne le segment [AB] tel que AB=12

1) Déterminons l'ensemble des points M tels que . $3\left(\overline{MA}\right)^2 + 2\left(\overline{MB}\right)^2 = 60$

Soit G le barycentre des points (A ; 3) et (B ; 2)

$$3MA^2+2MB^2=3\left(\overline{MG}+\overline{GA}\right)^2+2\left(\overline{MG}+\overline{GB}\right)^2$$

$$=3MG^2+3GA^2+6\overline{MG}\cdot\overline{GA}+2MG^2+2GB^2+4\overline{MG}\cdot\overline{GB}$$

$$=5MG^2+3GA^2+2GB^2+2\overline{MG}\cdot\left(3\overline{GA}+2\overline{GB}\right)$$

Or $3\overline{GA}+2\overline{GB}=\vec{0}$, $\overline{GA}=\dfrac{-2}{5}\overline{AB}$ *et* $\overline{GB}=\dfrac{3}{5}\overline{BA}$.

Donc $3MA^2+2MB^2=5MG^2+\dfrac{12}{25}AB^2+\dfrac{18}{25}AB^2+0=5MG^2+\dfrac{30}{25}AB^2$

$$5MG^2+\frac{6}{5}AB^2=5MG^2+\frac{6}{5}\times 144=5MG^2+\frac{864}{5}$$

$3MA^2+2MB^2=60$ *équivaut à* $5MG^2+\dfrac{864}{5}=60$.

C'est-à-dire $5MG^2=60-\dfrac{864}{5}=\dfrac{300-864}{5}=\dfrac{-564}{5}$

$MG^2 < 0$ impossible donc l'ensemble des points M tels que $3\,MA^2 + 2\,MB^2 = 60$ est l'ensemble vide.

2) Déterminons l'ensemble des points M tels que $2\left(\overline{MA}\right)^2-\left(\overline{MB}\right)^2=0$

Soit G le barycentre des points (A ; 2) et (B ; -1)

$$2MA^2-MB^2=2\left(\overline{MG}+\overline{GA}\right)^2-\left(\overline{MG}+\overline{GB}\right)^2=2MG^2+2GA^2+4\overline{MG}\cdot\overline{GA}-MG^2-GB^2-2\overline{MG}\cdot\overline{GB}$$

$$=MG^2+2GA^2-GB^2+2\overline{MG}\cdot\left(2\overline{GA}-\overline{GB}\right)$$

Or $2\overline{GA}-\overline{GB}=\vec{0}$, $\overline{GA}=\overline{AB}$ *et* $\overline{GB}=2\overline{AB}$.

Donc $2MA^2-MB^2=MG^2+2AB^2-4AB^2+0=MG^2-2AB^2$

$2MA^2-MB^2=0$ *équivaut à* $MG^2-2AB^2=0$ *C'est-à-dire* $MG^2=2AB^2$

Autrement dit $MG=\sqrt{2AB^2}=\sqrt{2}AB=12\sqrt{2}$

L'ensemble des points M tels que $2\left(\overline{MA}\right)^2-\left(\overline{MB}\right)^2=0$ est le cercle de centre G et de rayon $12\sqrt{2}$.

EXERCICE 17 :

Déterminons l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB}=k$

$\dfrac{MA}{MB}=k$ *(avec* $k>0$*)* équivaut à $\dfrac{MA^2}{MB^2}=k^2$ *c'est-à-dire* $MA^2=k^2MB^2$.

$MA^2=k^2MB^2$ *équivaut à* $MA^2-k^2MB^2=0$. (1)

Soit $G = bar\{(A,1);(B,-k^2)\}$. On a $\overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Donc $\overrightarrow{GA} = k^2\overrightarrow{GB}$.

$$MA^2 - k^2MB^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 - k^2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA} - k^2MG^2 - k^2GB^2 - 2k^2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}$$

$$= (1-k^2)MG^2 + GA^2 - k^2GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\left(\overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB}\right)$$

Or $\overrightarrow{GA} - k^2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. $GA = k^2GB$

Donc $MA^2 - k^2MB^2 = (1-k^2)MG^2 + k^4GB^2 - k^2GB^2 + 0 = (1-k^2)MG^2 + (k^2-1)k^2GB^2$.

$MA^2 - k^2MB^2 = 0$ équivaut à $(1-k^2)MG^2 + (k^2-1)k^2GB^2 = 0$ c'est-à-dire $(1-k^2)MG^2 = (1-k^2)k^2GB^2$

Comme $1-k^2 \neq 0$, on a $MG^2 = k^2GB^2$. Ce qui équivaut à $MG = kGB$.

L'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$ est le cercle de centre G et de rayon kGB.

- *Pour* $k = \dfrac{4}{3}$ $MG = \dfrac{4}{3}GB$ *et* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{16}{9\left(\frac{16}{9} - 1\right)}\overrightarrow{AB} = \dfrac{16}{7}\overrightarrow{AB}$

L'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{4}{3}$ est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{4}{3}$GB.

- *Pour* $k = \dfrac{3}{4}$ $MG = \dfrac{3}{4}GB$ *et* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{9}{16\left(\frac{9}{16} - 1\right)}\overrightarrow{AB} = -\dfrac{9}{7}\overrightarrow{AB}$

L'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{3}{4}$ est le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{3}{4}GB$

- *Pour* $k = 2$ $MG = 2GB$ *et* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{4}{(4-1)}\overrightarrow{AB} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

L'ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = 2$ est le cercle de centre G et de rayon $2GB$

EXERCICE 18

1. Le barycentre existe-t-il ?

Le barycentre existe lorsque la somme des coefficients n'est pas nulle.

a) Pour les points pondérés (A ;3) et (B ;-2), on a 3 - 2=1.

Donc le barycentre du système {(A ;3) , (B ;-2)} existe.

Ainsi, si on appelle H ce barycentre, on a : $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = (3-2)\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MH}$.

b) Pour les points pondérés (C ;2) et (D ;-2), on a 2-2 = 0.

Donc le barycentre du système {(C ;2) , (D ;-2)} n'existe pas.

$2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MC} - 2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD}) = 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{CD}$. Un vecteur constant.

2. Déterminons l'ensemble (ℰ) des points M du plan qui vérifient

$\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right\|$.

$\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right\|$ équivaut à $\left\|\overrightarrow{MH}\right\| = \left\|2\overrightarrow{CD}\right\|$.(d'après 1.)

Ce qui s'écrit MH = 2CD. Donc l'ensemble (ℰ) est le cercle de centre H et de rayon 2CD.

EXERCICE 19

Les points A et B sont tels que AB =10

1. Construisons C, barycentre du système (A; 2), (B; 3).

C est le barycentre de { (A;2),(B;3)} signifie que $\overline{AC} = \frac{3}{2+3}\overline{AB} = \frac{3}{5}\overline{AB}$.

Comme AB=10, alors AC = 6.

2. Construisons D, barycentre du système (A;3), (B;2).

D est le barycentre de {(A; 3),(B; 2)} signifie que $\overline{AD} = \frac{2}{2+3}\overline{AB} = \frac{2}{5}\overline{AB}$

Comme AB = 10, alors AD = 4.

3. Déterminons l'ensemble de points M tels que : $\left\|2\overline{MA}+3\overline{MB}\right\| = 10$.

Comme C est le barycentre de { (A;2),(B;3)}, alors $2\overline{MA}+3\overline{MB}=(2+3)\overline{MC}=5\overline{MC}$.

$\left\|2\overline{MA}+3\overline{MB}\right\| = 10$ équivaut à $\left\|5\overline{MC}\right\| = 10$. C'est-à-dire MC=2.

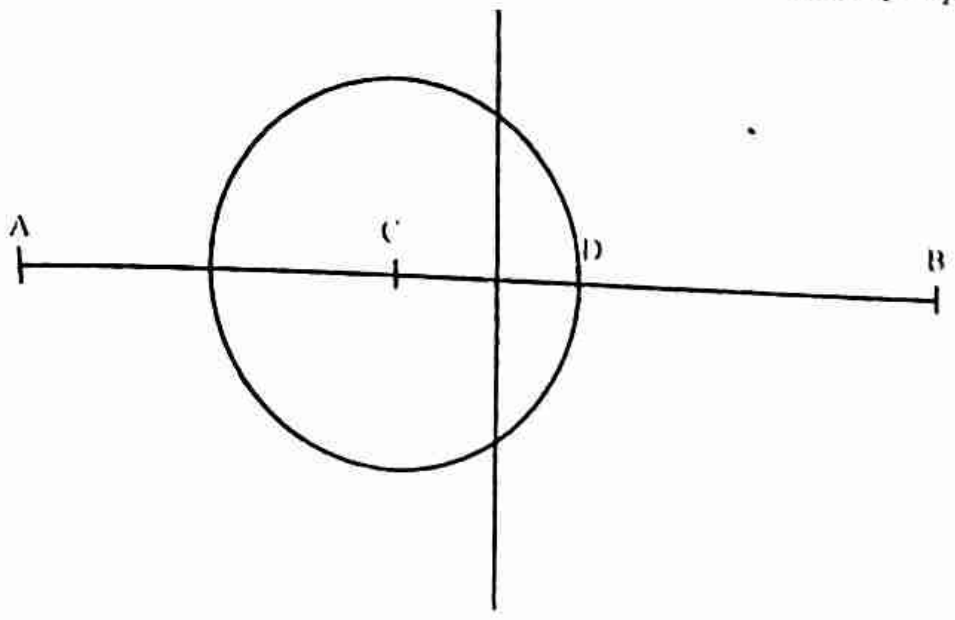
Cet ensemble de points est donc le cercle de centre C et de rayon 2.

4. Déterminons l'ensemble des points M tels que : $\left\|2\overline{MA}+3\overline{MB}\right\| = \left\|3\overline{MA}+2\overline{MB}\right\|$.

$2\overline{MA}+3\overline{MB}=5\overline{MC}$. et $3\overline{MA}+2\overline{MB}=5\overline{MD}$.

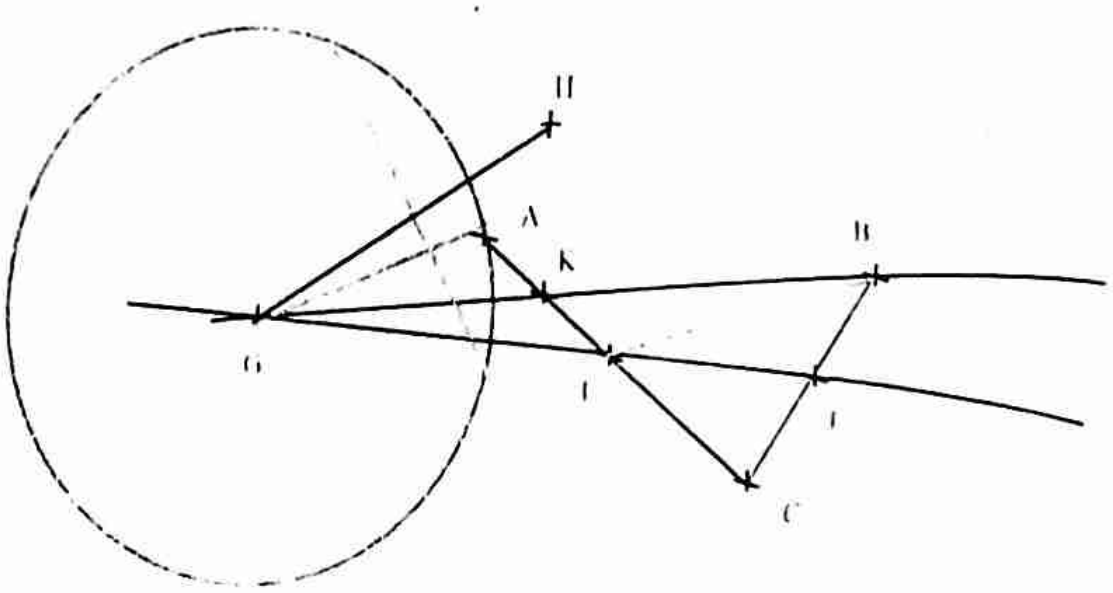
Donc $\left\|2\overline{MA}+3\overline{MB}\right\| = \left\|3\overline{MA}+2\overline{MB}\right\|$ équivaut à $\left\|5\overline{MC}\right\| = \left\|5\overline{MD}\right\|$ c'est à dire MC=MD.

Donc l'ensemble des points recherchés est la médiatrice du segment [CD].



EXERCICES DE SYNTHESE

EXERCICE 20



(Γ)

Partie A

1. Justifions que les systèmes $\{(A,3);(B,-2);(C,1)\}$ et $\{(A,3);(B,-2);(C,3);(C,-2)\}$ admettent un même barycentre qu'on notera G.

3-2+1=2 donc le système $\{(A,3);(B,-2);(C,1)\}$ admet un barycentre

3-2+3-2=2, donc le système $\{(A,3);(B,-2);(C,3);(C,-2)\}$ admet un barycentre.

Soit G=bar$\{(A,3);(B,-2);(C,3);(C,-2)\}$ =bar$\{(A,3);(B,-2);(C,3-2)\}$ (barycentre partiel)

G=bar$\{(A,3);(B,-2);(C,1)\}$

2. Montrons que G=bar $\{(I,3);(J,-2)\}$.

I milieu de [AC] donc I=bar$\{(A,3);(C,3)\}$. De même J=bar$\{(B,-2);(C,-2)\}$

Comme G=bar$\{(A,3);(B,-2);(C,3);(C,-2)\}$ =bar$\{(A,3);(C,3);(B,-2);(C,-2)\}$ donc

G =bar $\begin{vmatrix} I & J \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$ (barycentre partiel) et G = bar $\begin{vmatrix} I & J \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ (homogénéité)

3. Montrons que les droites (BK) et (IJ) se coupent en G.

G=bar $\begin{vmatrix} I & J \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ donc G appartient à la droite (IJ).

K est le milieu de [AI] donc K = bar $\begin{array}{|c|c|}\hline A & I \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$ = bar $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & A & C \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ (barycentre partiel).

Donc K=bar $\begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}$

Comme G=bar $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 3 & -2 & 1 \\ \hline \end{array}$ =bar $\begin{array}{|c|c|}\hline K & B \\ \hline 4 & -2 \\ \hline \end{array}$ (barycentre partiel), donc G est sur la droite (BK).

Ce qui veut dire que les droites (IJ) et (BK) se coupent en G.

4. Montrons que le quadrilatère ABIG est un parallélogramme.

G = bar $\begin{array}{|c|c|}\hline K & B \\ \hline 4 & -2 \\ \hline \end{array}$ donc $4\overrightarrow{GK}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ c'est-à-dire $2\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{GB}$.

Finalement, K est le milieu de [BG].

Dans le quadrilatère ABIG, K est le milieu des diagonales [BG] et [AI], donc le quadrilatère ABIG est un parallélogramme.

Partie B

1.a Justifions que le vecteur $\vec{V}$ - $\overrightarrow{MA}$ - $2\overrightarrow{MB}$ · $\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant.

$\vec{V}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$, comme 1-2+1=0, alors le vecteur $\vec{V}$ est constant.

En remplaçant M par I, on a $\vec{V}=\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{BI}$ car $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b. Déterminons et construisons l'ensemble Γ de des points M du plan tels que $\|\vec{V}\|=\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$.

Comme G=bar $\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 3 & -2 & 1 \\ \hline \end{array}$, alors $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$.

$\|\vec{V}\|=\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$ équivaut à $\|2\overrightarrow{BI}\|=\|2\overrightarrow{MG}\|$ c'est à dire BI=MG.

Γ est le cercle de centre G et de rayon BI.

2.a.Déterminons l'ensemble Δ des points M du plan tels que : $\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$.

Soit H le barycentre de $\{(A,-2),(B,-1),(C,1)\}$ (-2-1+1≠0)

$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MH}$

Et l'égalité devient $\|2\overrightarrow{MG}\|=\|-2\overrightarrow{MH}\|$ c'est à dire MG=MH.

Δ est la médiatrice de [GH].

Construction du point H.

$-2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

$-2\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

EXERCICE 21

ABC est un triangle et G est un point verifiant $4\vec{G}\quad 2\vec{BC}\quad 3\vec{BG}$

1. Déterminons les réels a, b et c. .

On a $4\vec{G}\quad 2\vec{BC}\quad 3\vec{BG}$ C'est -a-dire $4\vec{G}\quad 3\vec{BG}\quad 2\vec{BC}\quad 0$

Avec Chasles on a. $4\vec{G}\quad 4\vec{BG}\quad 2\vec{BG}\quad 2\vec{GC}\quad 0$ Ce qui equivaut à $4\vec{G}\quad 4\vec{BG}\quad 2\vec{GC}\quad 0$.

Comme 1+1+2≠0, alors G est le barycentre du système {(A ;1), (B ;1), (C ;2)}.

2. Déterminons l'ensemble (D) des points M vérifiant

$$\left\|a\vec{MA}+b\vec{MB}+c\vec{MC}\right\|=\left\|(a+b)\vec{MA}+c\vec{MB}\right\|$$

Avec a=1, b=1 et c = 2 , on a $a\vec{MA}+b\vec{MB}+c\vec{MC}=(a+b+c)\vec{MG}=(1+1+2)\vec{MG}=4\vec{MG}$

et $(a+b)\vec{MA}+c\vec{MB}=2\vec{MA}+2\vec{MB}$. Soit K l'isobarycentre de A et B

On a $2\vec{MA}+2\vec{MB}\quad 4\vec{MK}$

Le probleme se résume donc $\left\|4\vec{MG}\right\|=\left\|4\vec{MK}\right\|$ C'est-a-dire MG = MK.

(D) est donc la médiatrice de [GK].

3. Représentons (D) dans le repère (O; I ; J).

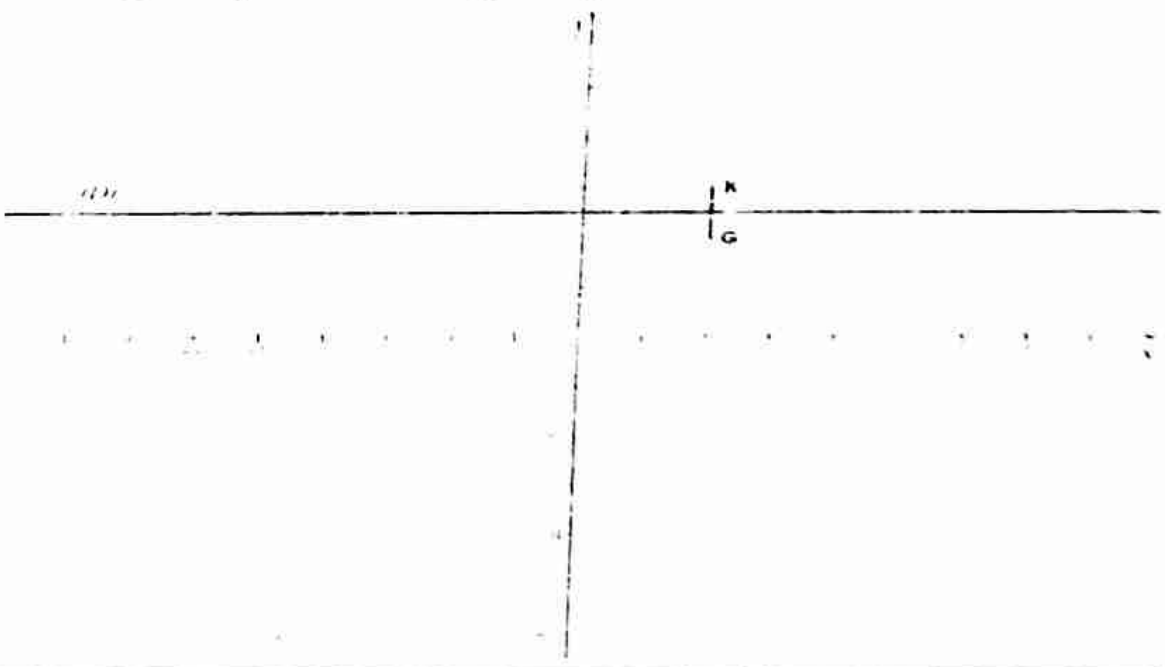
Trouvons les coordonnées des points G et H.

G est le barycentre du système {(A ;1), (B ;1), (C ;2)} donc

$$x_G=\frac{1x_A+1x_B+2x_C}{1+1+2}=\frac{3+1+2\times 2}{4}=2 \quad \text{et} \quad y_G=\frac{1y_A+1y_B+2y_C}{1+1+2}=\frac{-4+2+2\times 1}{4}=-\frac{1}{2}$$

K est l'isobarycentre de { A , B}, c'est-à-dire K est le milieu de [AB].

$$x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3+1}{2}=2 \text{ et } y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-4+2}{2}=-3$$



TRANSFORMATIONS DU PLAN

EUCLIDE d'Alexandrie Grec (-320? -260?)

EUCLIDE est un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité. Il aurait commencé ses études dans l'Académie, l'école d'Athènes fondée par Platon.
Dans la prestigieuse ***Ecole d'Alexandrie***, il dirige une équipe de mathématiciens qui participent à l'écriture de son œuvre. Cette école connaîtra plus tard d'autres savants tels qu'***Archimède de Syracuse*** et ***Apollonius de Perge***

L'œuvre phénoménale, « ***Les éléments*** », que nous laisse **EUCLIDE**, servira de base à toute la géométrie pendant plus de 2000 ans. Une vraie encyclopédie, composée de 13 livres, qui traite des figures géométriques, des polygones inscrits et circonscrits à un cercle, des proportions, de la géométrie dans l'espace ainsi que des nombres. Deux autres livres seront complétés plus tard par ***Archimède*** (cercle, cylindre, Pi) et ***Apollonius*** (cônes, coniques : ellipse, parabole, hyperbole).
Les premières démonstrations rendent cette œuvre novatrice pour l'époque.
EUCLIDE apporte des définitions rigoureuses et démontre les grands théorèmes de ses ancêtres, comme ceux de ***Thalès de Milet*** (-624 ; -548) et ***Pythagore de Samos*** (-569 ; -475) par exemple.
Dans "*Les éléments*", on trouve en particulier les cinq postulats qui fondent les bases de la géométrie.

Postulat 1 : Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.
Postulat 2 : Tout segment est prolongeable en une droite.
Postulat 3 : Deux points distincts étant donnés, il passe un cercle et un seul de centre le premier point et passant par le second.
Postulat 4 : Tous les angles droits sont égaux entre eux.
Postulat 5 : Par un point extérieur à une droite, il passe une droite et une seule parallèle à la droite donnée

Ce dernier postulat aussi appelé ***Postulat d'Euclide*** est le fondement de la géométrie euclidienne.

Les livres VII, VIII et IX parlent d'arithmétique (science des nombres).
EUCLIDE travaille en particulier sur les nombres premiers (nombre ayant aucun diviseur autre que 1 et lui-même) et prouve entre autre que leur nombre est infini.
Il invente aussi un algorithme bien célèbre qui porte aujourd'hui le nom ***d'algorithme d'Euclide*** permettant de calculer le PGCD de deux nombres.
Il utilise aussi cet algorithme pour donner une méthode permettant de vérifier que deux nombres sont premiers entre eux.
Son œuvre ne s'arrête pas aux ***"Eléments"***.
Il énonce 94 propositions sur les figures dans « ***Data*** », il étudie des partages de constructions dans « ***Les divisions*** », il étudie les perspectives dans « ***Optique*** » et dans «***Phénomène***», il traite d'astronomie.

FICHE DE COURS

TRANSLATION, HOMOTHETIE

1. Généralités

Définition 1 : Translation

On appelle translation de vecteur u l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overline{MM'} = u$.

Propriété 1

Soient M' et N' les images respectives par t_u de deux points quelconques M et N

On a $M'N' = MN$

Définition 2 : Homothétie

Soit Ω un point, k un nombre réel non nul

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que $\overline{\Omega M'} = k\overline{\Omega M}$

Propriété 2 :

Un point M, son image M' par une homothétie et le centre Ωde cette homothétie sont alignés.

Propriété 3 :

Soit h une homothétie de rapport k. M' et N' les images respectives par h de deux points quelconques M et N. On a $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$

2. Actions sur les figures élémentaires

Propriété 1 :

Une translation et une homothétie conservent

- L'alignement
- Le barycentre
- Les angles orientés, les angles géométriques, le parallélisme, l'orthogonalité

Propriété 2 :

- Une translation conserve les longueurs, les aires, les volumes.
- Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k^3|$

3. Composée de deux homothéties

Propriété 1 : Homothéties de même centre.

La composée de deux homothéties h_1 et h_2 de même centre O et de rapports respectifs k_1 et k_2 est une homothétie de centre O et de rapport k_1k_2.

Ici, $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$.

Propriété 2 : Homothéties de centres différents.

La compsée de deux homothéties de centres respectifs différents Ω_1 et Ω_2, de rapports respectifs k_1 et k_2 est :

- Une homothétie de rapport k_1k_2 si $k_1k_2 \neq 1$;
- Une translation si $k_1k_2 = 1$.

D'une manière générale dans ce cas, $h_1 \circ h_2 \neq h_2 \circ h_1$.

ROTATION

1. Définition

Soit Ω un point, α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

On appelle rotation de centre Ω et d'angle α l'application $r_{(\Omega,\alpha)}$ du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que :

- Si $M = \Omega$, alors M' = M.
- Si $M \neq \Omega$, alors $\Omega M' = \Omega M$ et $Mes\left(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}\right) = \alpha$

2. Propriétés

Propriété 1 : Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants.

La composé de deux symétries orthogonales $s_{(D1)}$ $s_{(D2)}$ d'axes (D_1) et (D_2) sécants en O est la rotation de centre O et d'angle $2(\vec{d}, \vec{d_1})$ ou $\vec{d_1}$ et $\vec{d}$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (D_1) et (D_2).

Propriété 2 : Propriété fondamentale

Soit r une rotation d'angle α.

A' et B' les images respectives par r de deux points quelconques A et B

On a $A'B' = AB$

et $Mes\left(\overline{AB}, \overline{A'B'}\right) = \alpha$

Propriété 3 :

Une rotation conserve :

- L'alignement et le milieu
- Les angles orientés, le parallélisme, l'orthogonalité
- Une translation conserve les longueurs, les aires, les volumes.

3. Composée de deux rotations

Propriété 1 : Rotations de même centre.

La composée de deux rotations r_1 et r_2 de même centre O et d'angles respectifs α_1 et α_2 est une rotation de centre O et d'angle $\alpha_1+\alpha_2$.

Ici, $r_1 \circ r_2 = r_2 \circ r_1$.

Propriété 2 : Rotation de centres différents.

La compsée de deux rotations de centres respectifs Ω_1 et Ω_2, d'angles respectifs α_1 et α_2 est :

- Une rotation d'angle $\alpha_1+\alpha_2$ si $\widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2} \neq \hat{0}$;
- Une translation si $\widehat{\alpha_1} + \widehat{\alpha_2} = \hat{0}$

D'une manière générale dans ce cas $r_1 \circ r_2 \neq r_2 \circ r_1$.

EXERCICES RESOLUS

HOMOTHETIES-TRANSLATIONS

EXERCICE 1

Montrer que l'application F : $M \mapsto M'$ est une homothétie.

On en précisera le centre et le rapport.

1. Le point A est fixe.

a. M'est le milieu de [AM]

b. M'est le symétrique de A par rapport à M.

2. Les points A et B étant fixés, M'est l'isobarycentre des points A, B et M.

(Faire intervenir le milieu de [AB])

EXERCICE 2

Soit ABCD un trapèze tel que CD = 2AB.

Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie dans les deux cas suivants :

a. A et B ont pour images respectives D et C par h.

b. A et B ont pour images respectives C et D par h

EXERCICE 3

ABC est un triangle.

Soit h et h', les homothéties de centres respectifs B et C, de rapports respectifs $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ Construire l'image E de B par h' ∘ h.

Démontrer que h ∘ h' est une translation puis donne le vecteur de translation.

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Soit h l'homothétie dont l'expression analytique est $\begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - 4 \\ y' = \frac{3}{2}y \end{cases}$

Déterminer les éléments caractéristiques de h.

2) Soit l'homothétie h' d'expression analytique : $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases}$

Démontrer que h' ∘ h et h ∘ h' sont des homothéties dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE 5

Soit OPQ un triangle. On désigne par h l'homothétie de centre P et de rapport 2 et par h' l'homothétie de centre Q et de rapport $-\frac{1}{4}$.

Démontrer que la transformation f = h' ∘ h est une homothétie et préciser son rapport.

Construire le point O' image de O par h' ∘ h, puis construire le centre Ω de l'homothétie f.

EXERCICE 6

ABC est un triangle et M un point extérieur au triangle ABC.

1. Construire le point M' tel que M' = h (A, 2) ^{C} h (A, -1) (M).

2. Soit h = h (B, 2) et h' = h (C, $-\frac{1}{3}$)

Construire A' = h' ^{C} h (A) puis détermine le centre de l'homothétie h' ^{C} h.

3. Soit h = h (B, $\frac{2}{3}$) et h'= h (C, $\frac{3}{2}$). Montrer que h' ^{C} h est une translation.

Construire A'' = h' ^{C} h (A) puis exprimer le vecteur de la translation en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

EXERCICE 7

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC. Soient A'=S_A(B), B'=S_H(B) et C'=S_C(B).

1. Faire une figure.
2. Démontrer que les points A', B', C' et D sont les images respectives des points A, H, C et O par une homothétie h dont on précisera le centre et le rapport.
3. En déduire (en justifiant) que

a) Les points A', B', C' et D sont alignés.

b) D est le milieu du segment [A'C'].

ROTATIONS

EXERCICE 8

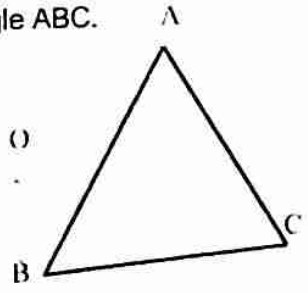
Le carré ABCD est de sens direct et de centre O.

On définit le point E par : $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB}$.

Montrer que E est l'image de A par une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

EXERCICE 9

On donne un point O et le triangle ABC.



Construire l'image A'B'C' de ABC par la rotation de centre O et d'angle orienté a.

Dans chacun des cas suivants : 1. $a = \frac{\pi}{3}$ 2. $a = -\frac{\pi}{4}$

EXERCICE 10

On donne le carre ABCD.

Déterminer une rotation qui laisse le carré ABCD globalement invariant.

On en précisera le centre et l'angle.

EXERCICE 11

On considère le carré ABCD de centre O.

Donne l'angle orienté de chacune des rotations suivantes :

- r_1 : rotation de centre O qui applique A sur B.
- r_2 : rotation de centre O qui applique A sur C.
- r_3 : rotation de centre O qui applique D sur C.

EXERCICE 12

Trouver la transformation f dans chacun des cas suivants :

a. $f = r_2 \circ r_1$ où r_1, r_2 sont des rotations de même centre O et d'angles orientés respectifs $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$.

b. $f = r_1 \circ r_2$ où r_1, r_2 sont des rotations de même centre O et d'angles orientés respectifs $-\frac{\pi}{2}$ et π.

c. $f = r_1 \circ r_2$ où r_1, r_2 sont des rotations de même centre O et d'angles orientés respectifs $-\pi$ et 2π.

EXERCICE 13

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct.

1) Construis le point E image de B par la rotation r de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Demontre rque le triangle BEC est équilatéral.

2) On définit les transformations $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et $g = S_{(BC)} \circ S_{(AB)}$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.

b) Démontrer que $g \circ f$ (A)=E.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ f$.

3) Soit M un point du triangle ABC distinct de C et le point N du plan tel que le triangle CMN soit équilatéral et de sens direct.

Déterminer le lieu du point N lorsque M décrit le triangle ABC.

EXERCICE 14

ABC est un triangle equilatéral de sens direct et de centre O.

1) Détermine la nature et les éléments caractéristiques des transformations $f1=\ldots$ et $f2=\ldots$

2) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $g=\ldots$

3) Soit $f=\ldots$. Démontre que g = f.

EXERCICE 15

Soit ABCD un carre de sens direct et centre O.

Soit $r_1 = r(B, \frac{\pi}{2})$; $r_2=r(A, \frac{\pi}{2})$; $r_3= r(O, -\frac{\pi}{2})$.

Détermine la nature et les éléments caractéristiques des transformations :

$r_2 \circ r_1$; $r_3 \circ r_1$; $r_3 \circ r_2$

EXERCICE 16

ABC est un triangle de sens direct.

On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés BCRS, CAMN et ABPQ de centres respectifs O_1, O_2 et O_3.

On note I le milieu de [AB].

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (AO1), (BO2) et (CO3) sont concourantes.

1. Démontrer que les segments [BN] et [AR] sont perpendiculaires et de même longueur. (On pourra utiliser une rotation de centre C)

2. En déduire que les segments $[IO_1]$ et $[IO_2]$ sont également perpendiculaires et de même longueur. (On pourra utiliser le theorème des milieux)

3. Démontrer que les segments $[AO_1]$ et $[O_2O_3]$ sont perpendiculaires et de même longueur. (On pourra utiliser une rotation de centre I)

4. En déduire que les droites (AO_1), (BO_2) et (CO_3) sont concourantes en l'orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1

On donne le cercle (C) et deux points A et B extérieurs à (C).

C étant un point quelconque de (C), on désigne par D le point tel que ABCD est un parallélogramme.

Trouver l'ensemble décrit par le point D lorsque le point C décrit le cercle (C).

(Utiliser la translation du vecteur $\vec{AB}$)

EXERCICE 2

ABC et ADE sont deux triangles rectangles isocèles en A et orientés dans le même sens.

1. Demontrer que les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que BD = CE.

EXERCICE 3

Soit (D_1), (D_2) et (D_3) trois droits droites distinctes et parallèles.

Construire un triangle équilatéral ABC tel que : $A \in (D_1)$; $B \in (D_2)$ et $C \in (D_3)$

EXERCICE 4

On donne le cercle (C) et un point A de (C).

On désigne par B un point de (C) distinct de A, on construit un carré ABCD, extérieur au cercle (C).

Quel est l'ensemble décrit par le point D lorsque le point B décrit le cercle (C) ?

EXERCICE 5

On donne le cercle (C) et un point A n'appartenant pas à (C).

On désigne par B un point de (C) et I le milieu du segment [AB].

Quel est l'ensemble des points I lorsque le point B décrit le cercle (C) ?

EXERCICE 6

On considère deux cercles (C) et (C') tangents au point P.

Par le point P, on trace deux droites (D_1) et (D_2) qui recoupent (C) et (C').

On pose :

A_1 : point d'intersection de (D_1) avec (C)

B_1 : point d'intersection de (D_1) avec (C')

A_2 : point d'intersection de (D_2) avec (C)

B_2 : point d'intersection de (D_2) avec (C')

Démontrer que les droites (A_1A_2) et (B_1B_2) sont parallèles.

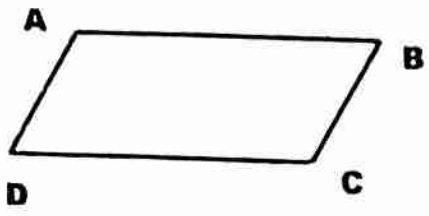
EXERCICE 7

ABCD est un parallélogramme.

a. Déterminer la transformation $t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{DA}}$

b. M étant un point du plan, construire $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{DB}}(M)$, $t_{\overrightarrow{DA}} \circ t_{\overrightarrow{DB}}(M)$.

Puis en déduire que $t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{DB}} = t_{\overrightarrow{DA}} \circ t_{\overrightarrow{DB}}$



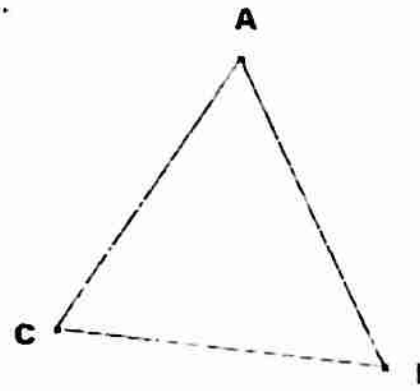
M ×

EXERCICE 8

ABC est un triangle équilatéral, A', B' et C' sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

1. Quelle est la nature de la transformation $S_{(BC)} \circ S_{(B'C')}$?

2. Construire M' = $S_{(AC)} \circ S_{(A'C')}$ (M).



× M

EXERCICE 9

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$S_{(D)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (D) qui transforme M (x, y) en M ' (x', y').

Déterminer l'expression analytique de $S_{(D)}$ dans les cas suivants :

1. (D) est la droite d'équation y = b.

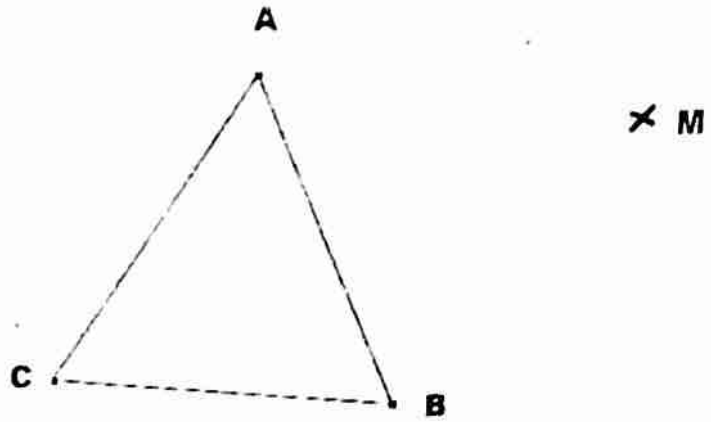
2. (D) est la droite d'équation y = x.

EXERCICE 10

ABC est un triangle équilatéral et M un point du plan.

1. Construis M' = r $(A, \frac{\pi}{3})$ ∘ r $(A, -\frac{2\pi}{3})$ (M).

2. Construis B' = r $(C, \frac{\pi}{2})$ ∘ r $(C, \frac{\pi}{3})$ (B).

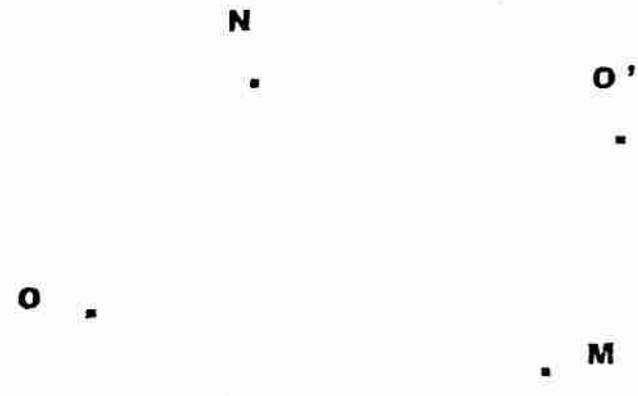


3. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de r $(A, \frac{\pi}{3})$ ∘ r $(A, -\frac{2\pi}{3})$.

EXERCICE 11

O et O' sont deux points distincts du plan. M et N sont deux points distincts de O et O'.

On considère r = r $(O, \frac{\pi}{3})$ et r ' = r $(O', \frac{\pi}{4})$



1. Construis M' = r' ∘ r (M) et N' = r' ∘ r (N).

2. Quelle est la nature de la transformation r' ∘ r.

3. Construis les médiatrices des segments [MM'] et [NN'].

Puis en déduis le centre de la rotation r' ∘ r.

EXERCICE 12

1. Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

k est un nombre réel non nul et $\Omega(a, b)$ un point.

h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k qui transforme tout point M (x, y) en M'(x', y').

Exprimer x', y' en fonction de x, y, a, b et k.

2. Application : On donne k = -2 ; $\Omega(-2, 3)$, M (x, y) en M' (x', y').

EXERCICE 13

ABC est un triangle et M un point extérieur au triangle ABC.

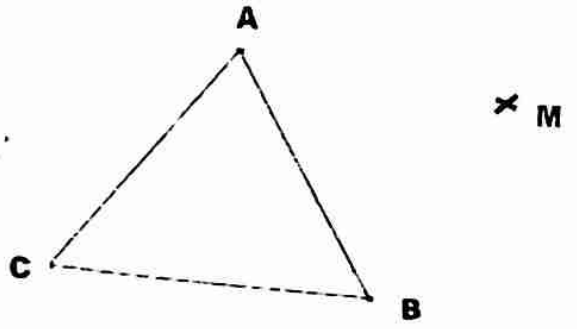
1. Construis le point M' tel que M' = $h_{(A, 2)} \circ h_{(A, -1)}$ (M).

2. Soit h = $h_{(B, 2)}$ et h'= h $(C, -\frac{1}{3})$

Construis A' = h' ∘ h (A) puis détermine le centre de l'homothétie h' ∘ h.

3. Soit h = h $(B, \frac{2}{3})$ et h'= h $(C, \frac{3}{2})$. Montre que h' ∘ h est une translation.

Construis A'' = h' ∘ h (A) puis exprime la translation en fonction de $\overrightarrow{BC}$.



EXERCICE 14

On suppose qu'une homothétie h échange deux points distincts A et B :

h (A) = B et h (B) = A.

Montrer que h est une symétrie centrale dont on précisera le centre.

EXERCICE 15

Le triangle OAB est isocèle en O et ABCD est un parallélogramme.

On désigne par r la rotation de centre O qui transforme A en B et soit E l'image de D par r.

1. Montrer que le triangle BEC est isocèle de sommet B.

2. Etablir que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ en utilisant la propriété caractéristique des rotations.

EXERCICE 16

Montrer que chacune des égalités suivantes signifie que ABCD est un parallélogramme.

1. $t_{\overrightarrow{IB}} \circ t_{\overrightarrow{CI}} = id_P$
2. $t_{\overrightarrow{BD}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{BC}}$

EXERCICE 17

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

Soient h et h' les homothéties dont les expressions analytiques sont respectivement :

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = \frac{3}{2}x - 4 \\ y' = \frac{3}{2}y \end{cases}$$

1. Démontrer que les transformations h' ∘ h et h ∘ h' sont des homothéties et déterminer leurs expressions analytiques dans le repère (O, I, J).
2. Déterminer les coordonnées des centres de ces homothéties.

EXERCICE 18

Soit OPQ un triangle. On désigne par h l'homothétie de centre P et de rapport 2 et par h' l'homothétie de centre Q et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. Démontrer que la transformation f = h' ∘ h est une homothétie et préciser son rapport.
2. Construire le point O' image de O par h' ∘ h.
3. Construis le point E image de P par h' ∘ h.
4. Déduire des questions 2) et 3) une construction du centre Ω de l'homothétie f.
5. Démontrer que $\overrightarrow{Q\Omega} = \frac{1}{4}\overrightarrow{QP}$.

EXERCICE 19

AOB et OCD sont deux triangles équilatéraux de sens direct.

E est le point tel que BOCE soit un parallélogramme.

On veut démontrer que AED est un triangle équilatéral.

1. Soit (D1) la médiatrice du segment BO (D2) la perpendiculaire à (BO) en O.
   Préciser la nature de la transformation t = $S_{(D2)} \circ S_{(D1)}$
2. Préciser la nature de la transformation r = $S_{(OA)} \circ S_{(D2)}$
3. Soit f = rot. Préciser la nature de la transformation f.
   Puis utiliser cette transformation pour démontrer que AED est un triangle équilatéral.

CORRECTION DES EXERCICES

TRANSLATIONS-HOMOTHETIES

EXERCICE 1

Montrons que F : $M \longmapsto M'$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

1. A étant fixe

a) M' est le milieu de [AM] si et seulement si $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$

Donc F est l'homothétie de centre A et de rapport k= $\frac{1}{2}$

c) M' est le symétrique de A par rapport à M signifie que M est le milieu de [AM']. Ce qui signifie $\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}$.

Donc F est l'homothétie de centre A et de rapport k=2.

2) M' est isobarycentre de ABM.

Soit I le milieu du segment [AB] on a : $\overrightarrow{IM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IM}$ donc F est l'homothétie de centre I et de rapport $k = \frac{2}{3}$

EXERCICE 2

Déterminons le centre et le rapport de l'homothétie h

a) A et B ont pour images respectives D et C par h

Soit O le point d'intersection des droites (BC) et (AD).

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles et CD = 2AB

On a donc : $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OA}$

Par conséquent, h est l'homothétie de centre O et de rapport 2.

b) A et B ont pour images respectives C et D par h

De même O' est le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

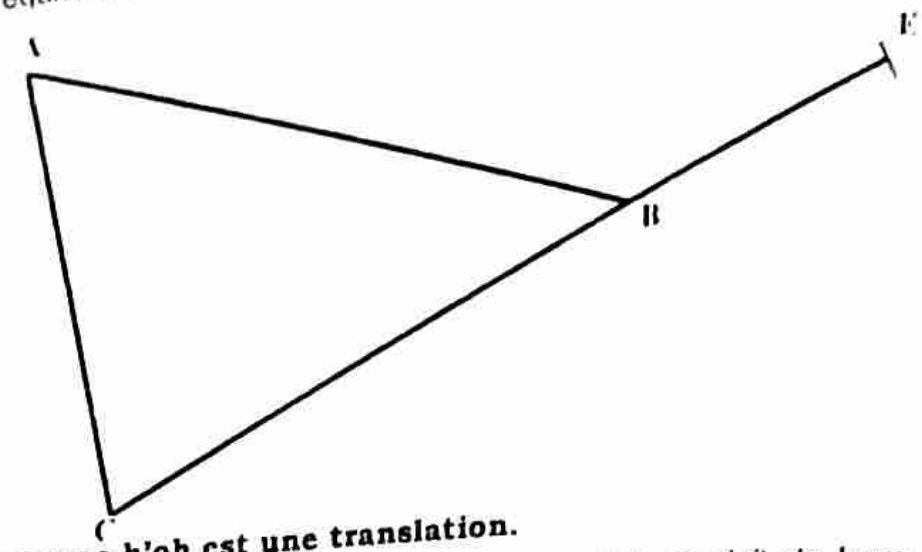
Les droites (BA) et (CD) sont parallèles et on a CD = 2AB d'où $\overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA}$.

Donc h est l'homothétie de centre O' et de rapport -2.

EXERCICE 3

Construisons le point E :

E=h'oh(B) equivaut à E=h'(B) car h(B)=B. Donc on a :



Démontrons que h'oh est une translation.

Les homothéties h et h' sont de centres distincts et le produit de leurs rapports est $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$. Donc h'oh est une translation.

Comme h'oh(B) = E, alors le vecteur de la translation est $\overrightarrow{BE}$.

EXERCICE 4

1. Déterminons les éléments caractéristiques de h.

D'après l'expression analytique, le rapport est $\frac{3}{2}$.

Cherchons les coordonnées du centre.

Soit Ω(x ; y), le centre de h, h(Ω)= Ω.

Ce qui revient à écrire $\begin{cases} x = \frac{3}{2}x - 4 \\ y = \frac{3}{2}y \end{cases}$. Ce qui équivaut à $\begin{cases} \frac{3}{2}x - x = 4 \\ \frac{3}{2}y - y = 0 \end{cases}$.

C'est-à-dire $\begin{cases} (\frac{3}{2} - 1)x = 4 \\ (\frac{3}{2} - 1)y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{2}x = 4 \\ \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases}$.

h est l'homothétie de centre Ω(8 ; 0) et de rapport $\frac{3}{2}$.

3. Démontrons que hoh' et h'oh sont des homothéties.
Cherchons l'expression analytique de h'oh.

Soit un point M(x; y), M1, l'image de M par h et M' l'image de M1 par h'.

h(M) = M1 signifie que M1($\frac{3}{2}x-4$; $\frac{3}{2}y$). M' est l'image de M1 par h' signifie que M' a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = -2(\frac{3}{2}x-4) \\ y' = -2(\frac{3}{2}y) \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} x' = -3x+8 \\ y' = -3y \end{cases}$.

L'expression analytique de h'oh est $\begin{cases} x' = -3x+8 \\ y' = -3y \end{cases}$, celle d'une homothétie de rapport -3.

Cherchons les coordonnées du centre :

Le centre est invariant . Donc on a $\begin{cases} x = -3x+8 \\ y = -3y \end{cases}$.

Ce qui équivaut à $\begin{cases} 4x = 8 \\ 4y = 0 \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$.

h'oh est l'homothétie de centre Ω_1 (2 ; 0) et de rapport -3.

Cherchons l'expression analytique de hoh'.

Soit un point M(x ;y), M1, l'image de M par h' et M' l'image de M1 par h.

h'(M)=M1 signifie que M1($-2x$; $-2y$).·M' est l'image de M1 par h signifie que M' a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = \frac{3}{2}(-2x)-4 \\ y' = \frac{3}{2}(-2y) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x' = -3x-4 \\ y' = -3y \end{cases}$.

L'expression analytique de hoh' est $\begin{cases} x' = -3x-4 \\ y' = -3y \end{cases}$. celle d'une homothétie de rapport -3.

Cherchons les coordonnées du centre :

Le centre est invariant donc on a : $\begin{cases} x = -3x-4 \\ y = -3y \end{cases}$.

Ce qui équivaut à $\begin{cases} 4x = -4 \\ 4y = 0 \end{cases}$. C'est-à-dire $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$.

h'oh est l'homothétie de centre Ω_2(-1 ; 0) et de rapport -3.

EXERCICE 5

1) Démontrons que la transformation f = $h'oh$ est une homothétie.

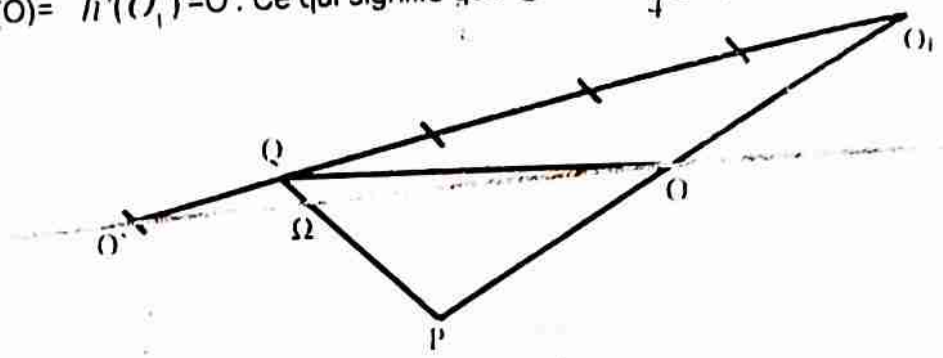
f est la composée de deux homothéties de centres différents et de rapports respectifs 2 et $-\frac{1}{4}$.

Comme $2\times(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} \neq 1$, alors f = $h'oh$ est une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$

2) Construisons le O' image de O par $h'oh$ puis le centre Ω de l'homothétie f.

Soit O_1 l'image de O par h. On a $\overrightarrow{PO_1} = 2\overrightarrow{PO}$.

$h'oh(O) = h'(O_1) = O'$. Ce qui signifie que $\overrightarrow{QO'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{QO_1}$.

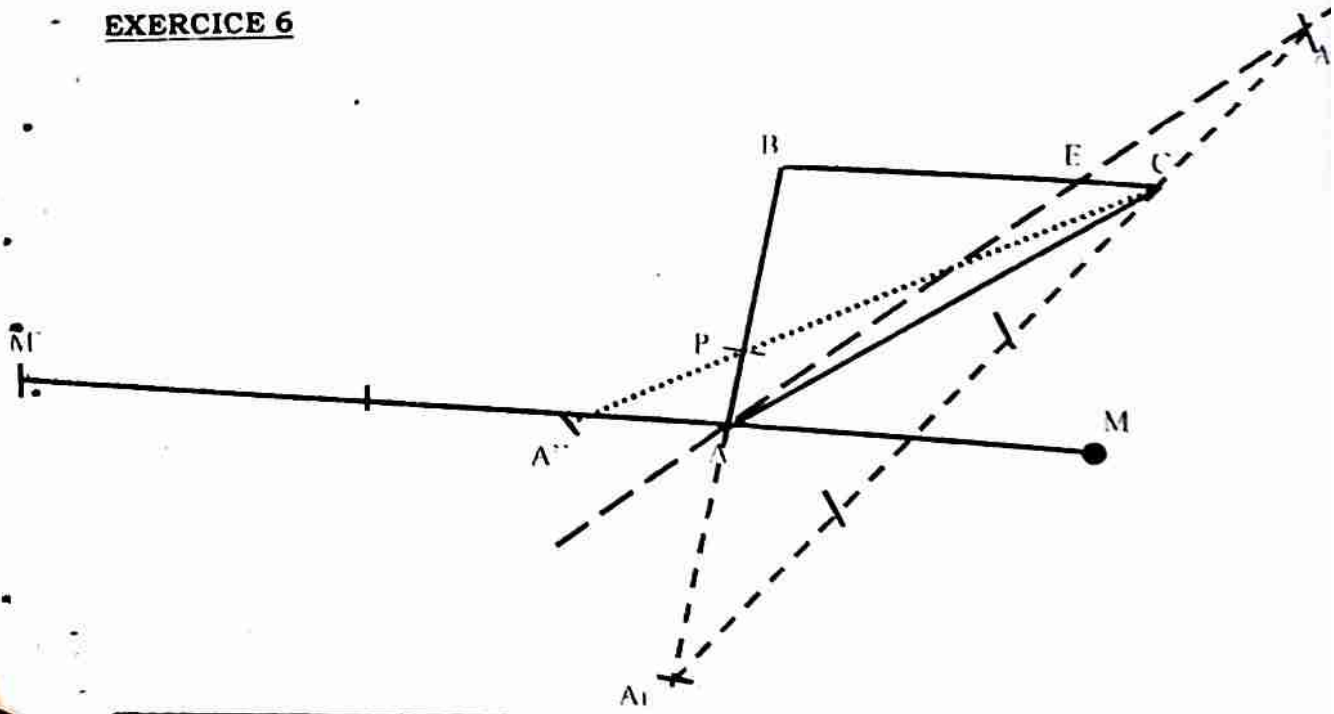


Les homothéties h et h' ont pour centre respectifs P et Q, donc le centre Ω de l'homothétie f est sur la droite (PQ).

En plus f(O) = O', donc Ω est sur la droite (OO').

Donc les droites (PQ) et (OO') se coupent en Ω.

EXERCICE 6



1. **Construisons h(A, 2)oh(A, -1)(M) = M'.**

h(A,2)oh(A,-1)=h(A, 2x(-1))=h(A, -2). Donc on a $\overline{AM'}=-2\overline{AM}$.

2. **Construisons le point A'.**

Soit A_1. tel que $A_1=h(A)$. On a $\overline{BA_1}=2\overline{BA}$. $A'=h'(A_1)$ donc $\overline{CA'}=-\frac{1}{3}\overline{CA_1}$

h'oh est la composée de deux homothéties de centre respectifs B et C. donc le centre de h'oh est sur la droite (CB).

Comme A'=h'oh(A), alors le centre de h'oh est sur la droite (AA').

Soit E le centre de h'oh. E est le point d'intersection des droites (AA') et (BC).

3. **Démontrons que h'oh est une translation.**

La composée de deux homothéties de centres distincts est une translation lorsque le produit des rapports est égal à 1. $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$, donc h'oh est une translation.

Construisons A''=h'oh(A).

Soit P = h(A). on a $\overline{BP}=\frac{2}{3}\overline{BA}$.

En plus, A''=h'(P). Donc $\overline{CA''}=\frac{3}{2}\overline{CP}$.

Exprimons le vecteur de la translation en fonction de $\overline{BC}$.

$\overline{AA'}=\overline{AP}+\overline{PA'}$

Puisque $\overline{BP}=\frac{2}{3}\overline{BA}$, alors $\overline{BA}+\overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{BA}$. Et $\overline{AP}=(\frac{2}{3}-1)\overline{BA}=-\frac{1}{3}\overline{BA}$

Comme $\overline{CA''}=\frac{3}{2}\overline{CP}$, alors $\overline{CP}+\overline{PA''}=\frac{3}{2}\overline{CP}$.

Ce qui donne $\overline{PA''}=(\frac{3}{2}-1)\overline{CP}=\frac{1}{2}\overline{CP}=\frac{1}{2}(\overline{CB}+\overline{BP})=\frac{1}{2}\overline{CB}+\frac{1}{2}\overline{BP}$.

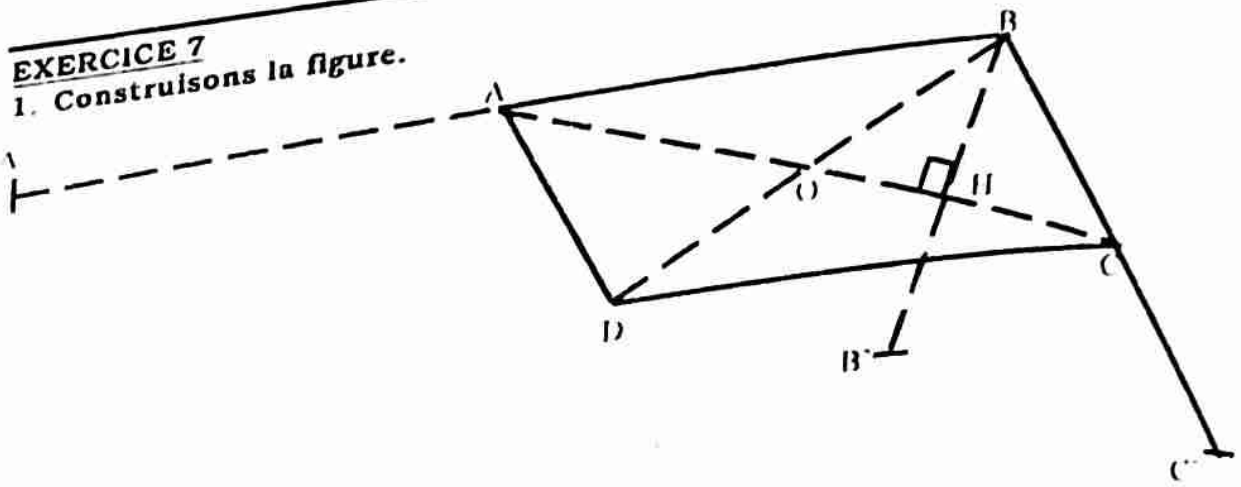
Comme $\overline{BP}=\frac{2}{3}\overline{BA}$, alors $\overline{PA''}=\frac{1}{2}\overline{CB}+\frac{1}{2}(\frac{2}{3}\overline{BA})=\frac{1}{2}\overline{CB}+\frac{1}{3}\overline{BA}$.

Donc $\overline{AA''}=\overline{AP}+\overline{PA''}=-\frac{1}{3}\overline{BA}+\frac{1}{2}\overline{CB}+\frac{1}{3}\overline{BA}=\frac{1}{2}\overline{CB}$.

Comme h'oh(A)= A'', alors le vecteur de la translation est $\overline{AA''}=\frac{1}{2}\overline{CB}$.

EXERCICE 7

1. Construisons la figure.



2. Démontrons que les points A', B', C' et D sont les images respectives des points A, H, C et O par une homothétie h dont on précisera le centre et le rapport.

Les points A, O, H et C sont les milieux respectifs des segments [BA'], [BD], [BB'] et [BC'].

Donc on a $\overline{BA'}=2\overline{BA}$, $\overline{BD}=2\overline{BO}$, $\overline{BB'}=2\overline{BH}$ et $\overline{BC'}=2\overline{BC}$.

Les points A', B', C' et D sont alors les images respectives des points A, H, C et O par l'homothétie h de centre B et de rapport 2.

3. a) Justifions que les points A', D, B' et C' sont alignés.

Les images par une homothétie de points alignés sont alignés.

Comme les points A, O, H et C sont alignés, alors leurs images par l'homothétie de centre B et de rapport 2 sont aussi alignés. Donc les points A', D, B' et C' sont alignés.

b) Justifions que D est le milieu du segment [A'C'].

L'image du milieu d'un segment par une homothétie est le milieu de l'image de ce segment. L'image du segment [AC] par l'homothétie de centre B et de rapport 2 est [A'C'].

O est le milieu de [AC] et l'image de O est D. Donc D est le milieu de [A'C'].

ROTATIONS

EXERCICE 8

Montrons que E est l'image de A par une rotation dont on précisera le centre et l'angle orienté.

On a $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB}$ or $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

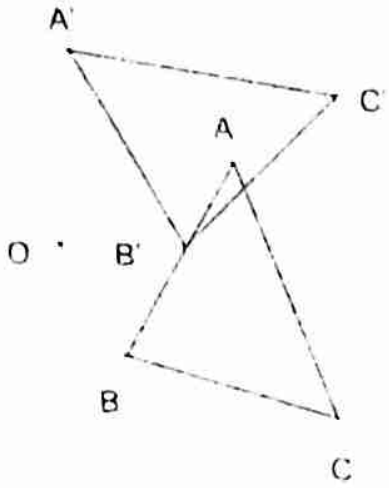
D'où $\overrightarrow{OE}=\cos\frac{\pi}{3}.\overrightarrow{OA}+\sin\frac{\pi}{3}.\overrightarrow{OB}$ Donc OE = OA et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OA}}\right)=\frac{\pi}{3}$

Par conséquent E est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

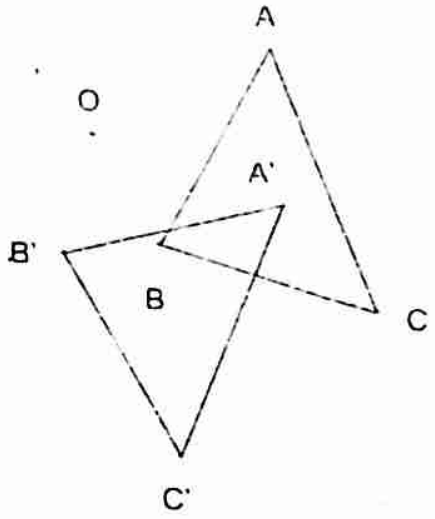
EXERCICE 9

Construction de l'image A'B'C' de ABC par la rotation de centre O d'angle orienté a

a) $a = \frac{\pi}{3}$



b) $a = -\frac{\pi}{4}$



EXERCICE 10

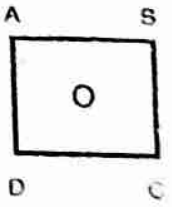
Soit O l'isobarycentre de ABCD.

L'image de A par la rotation de centre O et d'angle oriente $\frac{\pi}{2}$ est D.

L'image de D par la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$ est C.

L'image de C par la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$ est B.

L'image de B par la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$ est A.



Donc l'image du carré ABCD par la rotation de centre O et d'angle oriente $\frac{\pi}{2}$ est le carre ABCD. Par conséquent, la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$ laisse le carré ABCD globalement invariant.

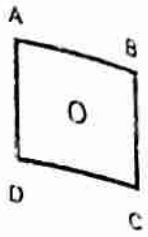
EXERCICE 11

Donnons l'angle orienté dans chacune des rotations suivantes .

a) la rotation de centre O qui applique A sur B a pour angle orienté $-\frac{\pi}{2}$

b) la rotation de centre O qui applique A sur C a pour angle orienté $-\pi$

c) la rotation de centre O qui applique D sur C a pour angle orienté $\frac{\pi}{2}$



EXERCICE 12

Trouvons la transformation f dans chacun des cas suivants .

a) $f = r_2 \circ r_1$ Déterminons l'angle orienté θ de f .

On a $\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ Donc f est la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{5\pi}{6}$

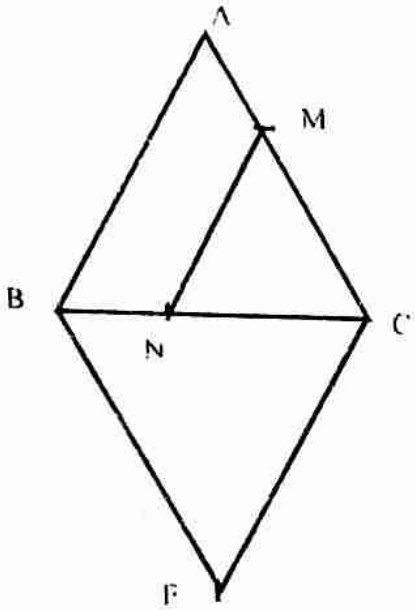
b) $f = r_1 \circ r_2$ Déterminons l'angle orienté θ de f .

On a $\theta = -\frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$ Donc f est la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$

c) $f = r_1 \circ r_2$ Déterminons l'angle orienté θ de f .

On a $\theta = -\pi + 2\pi - \pi$ Donc f est la rotation de centre O et d'angle orienté π c'est aussi la symétrie centrale de centre O.

EXERCICE 13



Démontrons que le triangle BEC est équilatéral.

E est l'image de A par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, signifie que CB=CE et $Mes(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}}) = \frac{\pi}{3}$.

Le triangle CEB est isocèle et a un angle de 60°, donc c'est un triangle équilatéral.

2. a) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f et g

les droites (AC) et (AB) sont sécantes en A donc S(AC) ∘ S(AB) est une rotation de centre A et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ est de sens direct donc $Mes2(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{2\pi}{3}$.

$f = r(A, \frac{2\pi}{3})$. De même g est rotation de centre B et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$, $g = r(B, -\frac{2\pi}{3})$.

b) Démontrons que $g \circ f(A)=E$

$g \circ f(A)=g(f(A))$. $f(A)=A$ puisque A est le centre de la rotation f. Ensuite $g \circ f(A)=g(A)$.

Les triangles ABC et BEC sont equilatéraux donc Mes $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}})=-\frac{2\pi}{3}$ et BA=BE.

On a donc $g(A)=E$. Ce qui signifie que $g \circ f(A)=E$

c) Déterminons la nature et les caractéristiques de $g \circ f$

g et f sont des rotations de centres distincts donc $g \circ f$ est soit une rotation soit une translation. Comme $-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=0$, alors $g \circ f$ est une translation.

Puisque $g \circ f(A)=E$, alors le vecteur de cette translation est $\overrightarrow{AE}$.

3) Déterminons le lieu du point N lorsque M décrit le triangle ABC

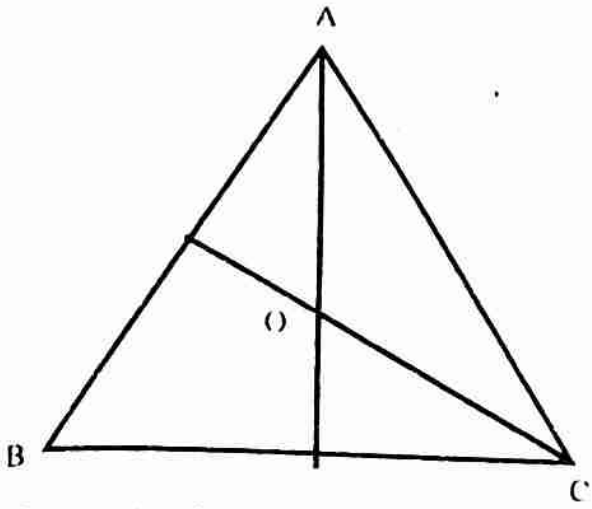
Les points M et N sont tels que le triangle MNC est équilatéral et de sens direct ce qui veut dire que CM=CN et Mes $(\widehat{\overrightarrow{CM};\overrightarrow{CN}})=\frac{\pi}{3}$. C'est-à-dire que N=r(M).

Donc, lorsque M décrit le triangle ABC, N décrit l'image du triangle ABC par r.

r(A)=B, r(B)=E et r(C)=C ; donc l'image du triangle ABC par r est le triangle EBC.

En conclusion, lorsque M décrit le triangle ABC, N décrit le triangle EBC.

EXERCICE 14



1. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f_1 et f_2.

$f_1=S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$. Comme les droites (AB) et (AC) sont sécantes en A, alors f_1 est une rotation de centre A et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}})$.

Comme ABC est équilatéral, Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}})=-\frac{\pi}{3}$.

Donc $f_1=r(A;-\frac{2\pi}{3})$. $f_2=S_{(AO)} \circ S_{(BC)}$.

Comme les droites (OA) et (BC) sont sécantes, alors f_2 est une rotation.

Soit I le milieu de [BC], f_2 est la rotation de centre I et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}})$.

Mes $(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}})=\frac{\pi}{2}$. Donc $f_2=r(I;\pi)$.

2. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de g.

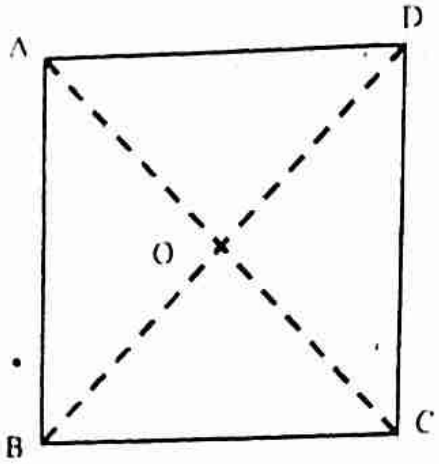
Les droites (OA) et (OB) sont sécantes en O, donc g est la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$. Mes$(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) = -\frac{2\pi}{3}$, donc mes$2(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) = -\frac{4\pi}{3}$.

Et on a : Mes$2(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}) = -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = -\frac{4\pi}{3} + 6\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Donc g = r(O ; $\frac{2\pi}{3}$).

3. Démontrons que f = g.

f = r(O ;$2(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})$). $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$, donc f = g.

EXERCICE 15



La composée de deux rotations de centres distincts est une rotation si la somme des mesures des angles n'est pas 0 ou une translation si cette somme est 0.

Nature et éléments caractéristiques de $r_2 \circ r_1$.

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Donc r2or1 est une rotation d'angle π.

C'est dire que r2or1 est une symétrie centrale.

Cherchons le centre.

$r_2 or_1(B) = r_2(B) = D$. Comme O est le milieu de [BD], alors $r_2 or_1$ est la symétrie de centre O.

Nature et éléments caractéristiques de $r_3 or_1$.

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Donc $r_3 or_1$ est une translation.

Cherchons le vecteur de la translation.

$r_3 or_1(B) = r_3(B) = A$. Donc le vecteur de la translation est $\overrightarrow{BA}$.

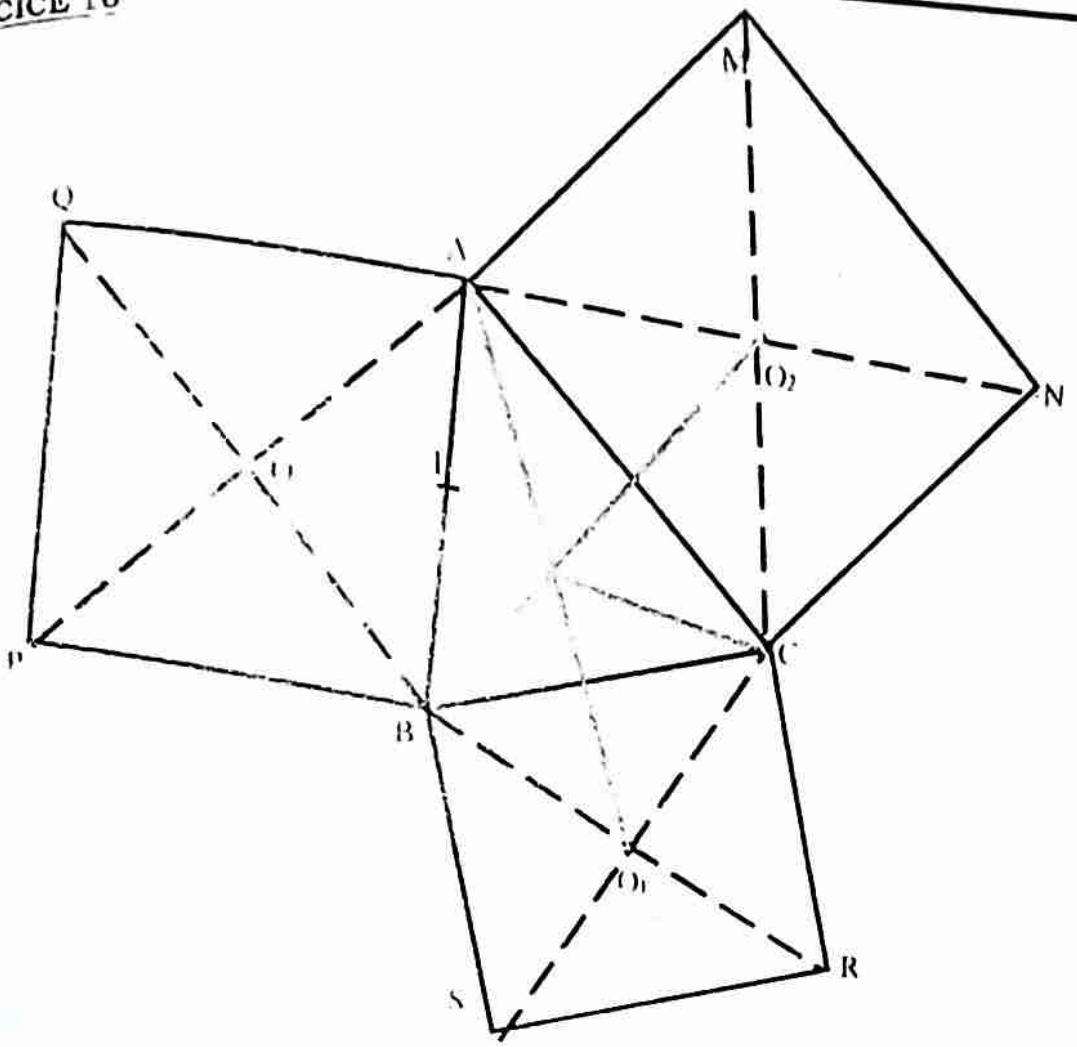
Nature et éléments caractéristiques de $r_3 or_2$.

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$. Donc $r_3 or_2$ est une translation.

Cherchons le vecteur de la translation :

$r_3 or_2(A) = r_3(A) = D$. Donc le vecteur de la translation est $\overrightarrow{AD}$

EXERCICE 16



1. Démontrons que [BN] et [AR] sont perpendiculaires et de même longueur.

Par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, l'image de N est A et l'image de B est R.

Donc l'image du segment [BN] est le segment [AR].

La rotation conserve la distance, donc BN = AR.

En plus on a Mes$(\overrightarrow{BN}; \overrightarrow{AR}) = \frac{\pi}{2}$. Donc les droites (BN) et (AR) sont perpendiculaires.

2. Démontrons que les segments [IO_1] et [IO_2] sont également perpendiculaires et de même longueur.

Dans le triangle BAR, I est le milieu de [BA] et O_1 est le milieu de [BR].

D'après la propriété de la droite des milieux, $IO_1 = \frac{1}{2}$ BR et les droites (IO_1) et (BR) sont parallèles.

Dans le triangle ABN, I est le milieu de [BA] et O_2 est le milieu de [AN].

D'après la propriété de la droite des milieux, $IO_2 = \frac{1}{2}$ AN et les droites (IO_2) et (AN) sont parallèles. Comme AN=BR, alors, $IO_1 = IO_2$. Comme les droites (BR) et (AN) sont perpendiculaires, les droites (IO_1) et (IO_2) sont aussi perpendiculaires.

3. Démontrons que les segments $[AO_1]$ et $[O_2O_3]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

Soit la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

D'après la question2), $IO_1=IO_2$ et $(IO_1)\perp(IO_2)$. On a mes$(\widehat{\overrightarrow{IO_1},\overrightarrow{IO_2}})=\frac{\pi}{2}$.

Donc l'image de O_1 par cette rotation est O_2.

Comme ABPQ est un carré de centre O_3. et I étant le milieu du côté [AB], l'image de A par la rotation est O_3.

Donc l'image du segment $[AO_1]$ est le segment $[O_2O_3]$. Et donc les segments $[AO_1]$ et $[O_2O_3]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

4. Démontrons que les droites (AO_1), (BO_2) et (CO_3) sont concourantes.

On a démontré que (AO_1) et (O_2O_3) sont perpendiculaires.

De même, en considérant la rotation de centre le milieu de [BC] et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on démontre que les segments $[BO_2]$ et $[O_1O_3]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

(AO_1) et $(O1O_3)$ sont perpendiculaires.

En considérant la rotation de centre le milieu de [AC] et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on démontre que les segments $[CO_3]$ et $[O_2O_1]$ sont perpendiculaires et de même longueur.

(CO_3) et (O_2O_1) sont perpendiculaires.

Donc les droites (CO_3), (BO_2) et (AO_1) sont les hauteurs du triangle $O_1O_2O_3$.

Donc ces trois droites sont concourantes en l'orthocentre du triangle $O_1O_2O_3$.

GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN



Joseph Louis, comte de Lagrange (en italien Giuseppe Lodovico de Lagrangia), né à Turin le 25 janvier 1736 et mort à Paris le 10 avril 1813 (à 77 ans), est un mathématicien, mécanicien et astronome. Italien

Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, il démontre **le théorème de Wilson sur les nombres premiers** et la conjecture de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. Son nom figure partout en mathématiques. On lui doit un cas particulier du théorème auquel on donnera son nom en théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, **l'équation différentielle de Lagrange**.

En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 1756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 1788, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie, un de ses résultats étant la mise en évidence des points de libration (dits points de Lagrange) (1772).

Il élabore le système métrique avec Lavoisier pendant la Révolution. Il est membre fondateur du Bureau des longitudes (1795) avec, entre autres, Laplace et Jean-Dominique Cassini (Cassini IV). Il participe à l'enseignement de mathématiques de l'École normale de l'an III avec Joseph Lakanal, de l'École polytechnique (1794) avec Monge et Fourcroy, où il enseigne dès 1797. Il est aussi le fondateur de l'Académie de Turin (1758).

En mécanique des fluides, il introduisit le concept de potentiel de vitesse en 1781, bien en avance sur son temps. Il démontra que le potentiel de vitesse existe pour tout écoulement de fluide réel, pour lequel la résultante des forces dérive d'un potentiel. Dans le même mémoire de 1781, il introduisit, en plus, deux notions fondamentales : le concept de la fonction de courant, pour un fluide incompressible, et le calcul de la célérité d'une petite onde dans un canal peu profond. Rétrospectivement, cet ouvrage marqua une étape décisive dans le développement de la mécanique des fluides moderne.

FICHE DE COURS

VECTEUR NORMAL A UNE DROITE

Définition

On appelle vecteur normal à une droite (D) tout vecteur non nul dont la direction est perpendiculaire à celle de (D).

Propriétés 1

Soit (D) et (D') deux droites ayant respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ pour vecteurs normaux.

On a les propriétés suivantes :

1. (D)//(D') $\Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires.
2. (D) $\perp$ (D') $\Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$.

Propriété 2

Pour tout point A et tout vecteur $\vec{n}$ non nul,

Il existe une et une seule droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriété 3

Soit (D) une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal à (D) et A un point de (D).

Pour tout point M du plan, on a : $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$

Pour la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

ORTHOGONALITE ET DROITES DU PLAN

Droite définie par un point et un vecteur normal

Propriétés 1

Soit a et b deux nombres réels tels que (a, b) ≠(0, 0)

Pour tout nombre réel c, la droite d'équation cartésienne **ax + by + c = 0** admet $\vec{n}(a;b)$ pour vecteur normal

Réciproquement, toute droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ admet une équation cartésienne de la forme **ax + by + c = 0**, où $c \in \mathbb{R}$.

Propriétés 2

Soit (D) et (D') deux droites d'équations cartésiennes respectives **ax + by + c = 0** et **a'x + b'y + c' = 0.**

1. (D)//(D') équivaut à ab' – a'b = 0 ;
2. (D) $\perp$ (D') équivaut à aa' – bb' = 0

Equation normale d'une droite

Propriété

Soit (D) une droite. $\vec{n}$ un vecteur normal à (D) et θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{i};\vec{n})$.

(D) admet une equation cartésienne de la forme : x cosθ+ y sinθ+k = 0.

Cette équation est appelée équation normale de la droite (D).

Pour avoir une équation normale d'une droite ayant pour équation ax+by+c=0, il suffit de diviser les deux membres de l'egalite par la norme du vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Distance d'un point à une droite

Propriété 1

Soit A(x_0 ; y_0) un point du plan et (D) une droite d'équation normale x cosθ+ y sinθ+k = 0.

On a d(A, D) = $|x\cos\theta + y\sin\theta + k|$

Propriété 2

Soit A(x_0 ; y_0) un point du plan et (D) une droite d'équation normale ax+ by +c = 0.

On a : d(A, D) = $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

CARACTERISATION D'UN CERCLE

Caractérisation par le diamètre

Propriété

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

Caractérisation par le centre et le rayon

Propriété

Une équation d'un cercle de centre Ω(x_0 ;y_0) et de rayon r est $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$.

Représentation paramétrique d'un cercle

Définitions

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r.

Le système $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, (\theta \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de (C) dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Soit (C) un cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon r.

Le système $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}, (\theta \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de (C) dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

EXERCICES RESOLUS

Pour tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; ;).

EQUATION CARTESIENNE D'UNE DROITE ET VECTEUR NORMAL

EXERCICE 1

1. Trouver les coordonnées d'un vecteur normal à chacune des droites (D1):−3x +2y +3 = 0; (D2): x +3y +2 = 0 et (D3). -2x -6y +22 = 0.
2. Les droites (D1) et (D2) sot-elles perpendiculaires ?
3. Les droites (D2) et (D3) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 2

1. Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Combien de droites admettent le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal ?

2. Trouver une équation cartésienne de la droite (T) passant par A(0 ;2) et qui admet $\vec{n}$ comme vecteur normal.

EXERCICE 3

1. Soit la droite (T) d'équation **x-2y +4 = 0**.
2. Déterminer une équation de la droite (D) passant par E(1 ;-3) et perpendiculaire à la droite (T).

EXERCICE 4

1. Soit (D1) la droite d'équation **3x+4y+2 = 0**.

Montrer qu'il existe exactement deux vecteurs unitaires normaux à (D1) et préciser les coordonnées.

2. Montrer qu'il existe deux vecteurs unitaires normaux à la droite (D) d'equation : **ax+by+c = 0.**

Préciser les coordonnées de ces vecteurs.

EXERCICE 5

Soit ABC un triangle tel que A(1 ;3), B(0 ;2) et C(-1 ;-2).

Le but de cet exercice est de calculer les coordonnees de l'orthocentre du triangle ABC.

1. Soit un vecteur $\vec{n}(r;s)$ et un point P(a ;b).

Démontrer qu'une équation de la droite passant par P dont $\vec{n}$ est un vecteur normal est **rx+sy-ra-sb=0.**

2. Ecrire une équation de la hauteur passant par A du triangle ABC.

Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Calculer les coordonnées de H.

EXERCICE 6

Soit OPQ un triangle tel que P(2 ;4) et Q(-1 ;2).

Le but de cet exercice est de calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle OPQ.

1. Sachant que le vecteur $\vec{OP}$ est normal à la médiatrice du segment [OP], écrire une équation de la médiatrice de [OP].
2. Calculer les coordonnées du point E, centre du cercle circonscrit au triangle OPQ.

EQUATION NORMALE D'UNE DROITE

EXERCICE 7

Trouver une équation normale de chacune des droites suivantes :

(D1) : 2x-3y+ 3=0 : (D2) : x-5y+1=0.

EXERCICE 8

Soit les points A(1; 2) et B(-3; 0). Ecrire une équation normale de la droite (AB).

DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE.

EXERCICE 9

Calculer la distance du point A à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

1. (D) : 3x-y+5=0 et A(1 ;2).
2. (D) : x-4y+7 = 0 et A(0 ;-3).
3. (D) : y=3 et A(-1 ;-2).

EXERCICE 10

Soit la droite (L) d'équation - x+ 2y-3 = 0.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que d(M, L)=1.

EXERCICE 11

Soit les droites (D) : -x + 2y + 3 = 0 et (T) : -3x -2y+1 = 0.

1. Démontrer que l'ensemble des points M du plan équidistants des droites (D) et (T) est la réunion de deux droites (D1) et (D2).
2. Justifier que (D1) et (D2) sont perpendiculaires.

EXERCICE12

Soit les droites (D) : -x + 2y + 3 = 0 et (T) : 3x -6y+1 = 0.

1. Démontrer que l'ensemble des points M du plan équidistants des droites (D) et (T) est une droite (L).
2. Montrer que (L) est parallèle à (D).

CARACTERISATION D'UN CERCLE

EXERCICE 13

Donner une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre [AB] sachant que A(1 ; 2) et B(3 ; 4).

EXERCICE14

Soit un point Ω(-2;0).

Donner une équation cartésienne d'un cercle (C) de centre Ω et de rayon 3.

EXERCICE 15

Donner une représentation paramétrique du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

1. (C) est de centre O et de rayon 2.
2. (C) est de centre Ω(1;2) et de rayon 3.
3. (C) est de centre Ω(-1 ;-3) et de rayon 5.

EXERCICE 16

Soit ABC est un triangle tel que A(-1 ; 0), B(1 ; 2) et C(-2 ; 1).

Le but de l'exercice est d'écrire une représentation paramétrique du cercle (C) inscrit dans le triangle ABC.

1. Ecrire l'équation de la bissectrice du triangle qui passe par le sommet A.
2. Déterminer les coordonnées du point E, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.
3. Déterminer le rayon du cercle (C).
4. En déduire une équation de (C).

EXERCICE 17

Soit le cercle (C) d'équation $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4}$.

1. Caractériser le cercle (C).
2. Existe-t-il un réel b pour que le point E(a ;b) soit sur le cercle (C) dans chacun des cas : 1°) a=0 ; 2°) a=4 ; 3°) a = -3.
3. Vérifier que le point P(2 ; $2-2\sqrt{2}$) est sur le cercle (C) .
4. Ecrire une équation de la tangente (T) au cercle (C) passant par le point P.

CORRECTION DES EXERCICES

EQUATION CARTESIENNE D'UNE DROITE ET VECTEUR NORMAL

EXERCICE 1

1. Les coordonnées d'un vecteur normal à la droite (D1) : $-3x + 2y + 3 = 0$;

Le vecteur $\vec{u}(-3;2)$ est normal à la droite (D1).

Le vecteur $\vec{v}(1;3)$ est normal à la droite (D2) d'équation $x + 3y + 2 = 0$.

Le vecteur $\vec{w}(-2;-6)$ est normal à la droite (D3) d'équation $-2x - 6y + 22 = 0$.

2. Vérifions si les droites (D1) et (D2) sont perpendiculaires.

(D1) et (D2) sont perpendiculaires équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Calculons le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = -3 \times 1 + 2 \times 3 = -3 + 6 = 3$.

Comme $\vec{u} \cdot \vec{v}$ n'est pas 0, alors les droites (D1) et (D2) ne sont pas perpendiculaires

3. Vérifions si les droites (D2) et (D3) sont parallèles.

(D2) et (D3) sont parallèles équivaut à $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Calculons le déterminant des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$\det(\vec{v};\vec{w}) = xy' - x'y = -6 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 = -6 + 6 = 0$.

Puisque $\det(\vec{v};\vec{w}) = 0$, alors les droites (D2) et (D3) sont parallèles.

EXERCICE 2

1. Nombre de droites admettant $\vec{u}$ comme vecteur normal.

Une équation d'une telle droite est $-x + 3y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Donc il y a autant de droites que de réels c dans $\mathbb{R}$; c'est-à-dire une infinité de droites.

2. Ecrivons une équation cartésienne de (T).

Une équation de (T) est de la forme $-x + 3y + c = 0$.

Comme $A(0; 2) \in (T)$, alors on a : $-0 + 3 \times 2 + c = 0$. Ce qui équivaut à $c = -6$.

Une équation de (T) est : $-x + 3y - 6 = 0$.

EXERCICE 3

Déterminons une équation de la droite (D).

Soit $\vec{n}(1;-2)$ un vecteur normal à (T), $\vec{n}(1;-2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) puisque (T) et (D) sont perpendiculaires. Donc une équation de la droite (D) est de la forme $-2x - y + c = 0$. Comme E(1 ;-3) appartient à (D), alors on a $-2 \cdot 1 - (-3) + c = 0$.

C'est-à-dire $c = -1$.

Une équation de (D) est $-2x - y - 1 = 0$.

EXERCICE 4

1. Montrons qu'il existe exactement deux vecteurs unitaires normaux à (D1).

Le vecteur $n(3;4)$ est normal à (D1). La norme de $n(3;4)$, $\|n\|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

Donc les vecteurs $n_1\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ et $n_2\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$ sont deux vecteurs unitaires normaux à (D1).

Tous les autres vecteurs normaux à (D1) sont colinéaires à $n(3;4)$. Donc ils s'écrivent sous la forme kn, $k\in\mathbb{R}$. Donc les autres vecteurs unitaires normaux à (D1) sont de la forme $\frac{kn}{\|kn\|}=\frac{k}{|k|\|n\|}n=\pm\frac{n}{\|n\|}$. Donc les seuls vecteurs unitaires normaux à (D1) sont n_1 et n_2.

2. Montrons qu'il existe deux vecteurs unitaires normaux à la droite (D) d'équation ax+by+c = 0.

Le vecteur $n(a;b)$ est normal à (D). Et tous les autres vecteurs normaux à (D) sont de la forme kn, $k\in\mathbb{R}$. Comme n n'est pas nul, alors les autres vecteurs unitaires normaux à (D1) sont de la forme $\frac{kn}{\|kn\|}=\frac{k}{|k|\|n\|}n=\pm\frac{n}{\|n\|}$.

Ces vecteurs sont donc $n_1\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ et $n_2\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

EXERCICE 5

On a ABC un triangle tel que A(1 ;3), B(0 ;2) et C(-1 ;-2).

1. Démontrons qu'une équation de la droite passant par P dont n est un vecteur normal est $rx+sy-ra-sb=0$.

Soit (T) cette droite. Une équation de (T) est de la forme $rx+sy+c=0$.

Comme (T) passe par P, alors on a ra+sb+c=0. C'est-à-dire c=-ra-sb.

Donc une équation de (T) est $rx+sy-ra-sb=0$.

2. Ecrivons une équation de la hauteur passant par A du triangle ABC.

Soit (D1) la hauteur passant par A du triangle ABC. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est normal à la droite (D1). $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-0\\-2-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ et A(1 ; 3), d'après 1) une équation de (D1) est $-x-4y-(-1)\times1-(-4)\times3=0$. Ce qui donne $-x-4y+1+12=0$.

Une équation de (D1) est $-x-4y+13=0$.

Calculons les coordonnées de H

H est le point de concours des hauteurs du triangle ABC.

Soit (D2) la hauteur passant par le sommet B. H est le point d'intersection des droites (D1) et (D2).

Cherchons une équation de (D2).

(D2) passe par B(0; 2) et admet le vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\-2-3\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Une équation de (D2) est $-2x-5y-(-2)\times0-(-5)\times2=0$. (D2) : $-2x-5y+10=0$.

Nous pouvons alors calculer les coordonnées de H en résolvant le système suivant

$\begin{cases} -x-4y+13=0 \quad (\times -2) \\ -2x-5y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+8y-26=0 \\ -2x-5y+10=0 \end{cases}$

Ce qui donne 3y-16=0 et $y=\frac{16}{3}$. Comme -x-4y+13=0, on a $x=-4\times\frac{16}{3}+13=\frac{-64+39}{3}$

$x=-\frac{25}{3}$. $H(-\frac{25}{3};\frac{16}{3})$.

EXERCICE 6

OPQ est un triangle tel que P(2 ;4) et Q(-1 ;2).

1. Ecrivons une équation de la médiatrice de [OP].

La médiatrice de [OP] admet $\overrightarrow{OP}$ comme vecteur normal et passe par le milieu de [OP].

$\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix} x_P-x_O \\ y_P-y_O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Et le milieu de [OP] a pour coordonnées (1 ;2).

Une équation cette droite est de la forme 2x+4y+c=0. Comme la médiatrice passe par le milieu de [OP] de coordonnées (1 ;2), alors on a $2.1+4.2+c=0$. Donc c=-10.

Une équation de la médiatrice de [OP] est $2x+4y-10=0$.

2. Calculons les coordonnées du point E, centre du cercle circonscrit au triangle OPQ.

E est le point de concours des médiatrices des côtés du triangle OPQ.

Cherchons une équation de la médiatrice de [OQ].

La médiatrice de [OQ] admet $\overrightarrow{OQ}$ comme vecteur normal et passe par le milieu de [OQ].

$\overrightarrow{OQ}\begin{pmatrix} x_Q-x_O \\ y_Q-y_O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Et le milieu de [OQ] a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}$;1).

Une équation cette droite est de la forme -x+2y+c=0.

Comme la mediatrice passe par le milieu de [OQ], alors on a $-(-\frac{1}{2})+2.1+c=0$. Donc $c=\frac{5}{2}$.

Une équation de la médiatrice de OQ est $-x+2y+\frac{5}{2}=0$.

On trouve les coordonnées du point E en résolvant le système

$\begin{cases} 2x+4y-10=0 \\ -x+2y+\frac{5}{2}=0 \quad (\times 2) \end{cases}$ *équivaut à* $\begin{cases} 2x+4y-10=0 \\ -2x+4y+5=0 \end{cases}$

Ce qui donne 8y-5=0, c'est-à-dire $y=\frac{5}{8}$. Puisque $-x+2y+\frac{5}{2}=0$ on a $x=2.\frac{5}{8}+\frac{5}{2}=\frac{18}{4}$

$E(\frac{18}{4};\frac{5}{8})$.

EQUATION NORMALE D'UNE DROITE

EXERCICE 7

Trouvons une equation normale de chacune des droites:

(D1) $2x-3y+3=0$.

Pour ecrire l'équation normale de la droite (D1), il suffit de diviser chaque membre de l'egalite par la norme du vecteur normal $\vec{n}(2;-3)$. $\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$

L'équation normale de (D1) est $\frac{2x-3y+3}{\sqrt{13}}=0$. C'est-a dire $\frac{2\sqrt{13}x}{13} + -3\frac{\sqrt{13}}{13}y + 3\frac{\sqrt{13}}{13}=0$

(D2) : $x-5y+1=0$.

Le vecteur $\vec{n}(1;-5)$ est normal à (D2). $\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2+(-5)^2} = \sqrt{26}$.

L'equation normale de(D2) est $\frac{\sqrt{26}}{26}x - \frac{5\sqrt{26}}{26}y + \frac{\sqrt{26}}{26}=0$

EXERCICE 8

Soit les points A(1; 2) et B(-3; 0).

Ecrire une équation normale de la droite (AB).

Ecrivons d'abord une équation cartésienne de (AB).

M(x ;y) appartient à (AB) équivaut à $\overline{AB}$ et $\overline{AM}$ sont colinéaires. $\overline{AB}\begin{pmatrix}-3-1\\0-2\end{pmatrix} = \overline{AB}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

$\overline{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$. On a -2(x-1)-(-4)(y-2)=0. C'est-à-dire -2x+4y -6=0.

Le vecteur de coordonnées $\vec{v}$ (- 2;4) est normal a (AB).

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Donc une équation normale de (AB) est : $\frac{-2}{2\sqrt{5}}x + \frac{4}{2\sqrt{5}}y - \frac{6}{2\sqrt{5}}=0$

$-\frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{3\sqrt{5}}{5}=0$

DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

EXERCICE 9

Calculons la distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$.

$d(A ; \mathcal{D}) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

1) (D) : $3x-y+5=0$ et A(1 ;2).

$d(A ; \mathcal{D}) = \frac{|3\times1-2+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

2) $(\mathcal{D})$: x-4y+7 = 0 et A(0 ;-3).

$$d(A ; \mathcal{D})= \frac{|1\times 0-4\times(-3)+7|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{19}{\sqrt{17}}=\frac{19\sqrt{17}}{17}.$$

3) $(\mathcal{D})$: y-3 et A(-1 ;-2).

L'équation équivaut à cette autre équation : 0x+y-3=0.

$$d(A ; \mathcal{D})= \frac{|0\times(-1)+1\times(-2)-3|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|-5|}{1}=5.$$

EXERCICE 10

Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que d(M, $\mathcal{L}$)=1.

Soit M(x ;y) un point du plan. d(M, $\mathcal{L}$)=1 équivaut à $\frac{|-x+2y-3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=1$.

Ce qui revient à dire $\frac{|-x+2y-3|}{\sqrt{5}}=1$. Ce qui équivaut à $|-x+2y-3|=\sqrt{5}$.

C'est-à-dire $-x+2y-3=\sqrt{5}$ ou $-x+2y-3=-\sqrt{5}$.

L'ensemble des points M tels que d(M, $\mathcal{L}$)=1 est la réunion des deux droites d'équations -x+2y-3- $\sqrt{5}$ = 0 et -x+2y-3+ $\sqrt{5}$ = 0

EXERCICE 11

1. Déterminons l'ensemble des points M du plan équidistants des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{T})$.

Soit M(x ;y) un point du plan, d(M, $\mathcal{D}$)=d(M, $\mathcal{T}$) équivaut à $\frac{|-x+2y+3|}{\sqrt{5}}=\frac{|-3x-2y+1|}{\sqrt{13}}$.

Ce qui revient à $\frac{-x+2y+3}{\sqrt{5}}=\frac{-3x-2y+1}{\sqrt{13}}$ ou $\frac{-x+2y+3}{\sqrt{5}}=\frac{-3x-2y+1}{\sqrt{13}}$.

Et on a $\frac{-x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{-3x}{\sqrt{13}}+\frac{-2y}{\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}}$ ou $\frac{-x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3x}{\sqrt{13}}+\frac{2y}{\sqrt{13}}\frac{1}{\sqrt{13}}$

Ce qui donne $(\frac{-1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{13}})x+(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{13}})y+\frac{3}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{13}}=0$ ou

$(\frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{13}})x+(\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{13}})y+\frac{3}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{13}}=0$.

L'ensemble des points M équidistants des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{T})$ est la réunion des droites

(D1) d'équation $(\frac{-1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{13}})x+(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{13}})y+\frac{3}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{13}}=0$ et

(D2) d'équation $(\frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{13}})x+(\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{13}})y+\frac{3}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{13}}=0$.

2. Justifions que (D1) et (D2) sont perpendiculaires.

Le vecteur $\vec{n}(\frac{-1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{13}})$ est normal à (D1) et $\vec{m}(\frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{13}})$ est normal à (D2).

Les droites (D1) et (D2) sont perpendiculaires lorsque $\vec{n}\cdot\vec{m}=0$.

$\vec{n}\cdot\vec{m}=(\frac{-1}{\sqrt{5}}+\frac{3}{\sqrt{13}})(\frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{13}})+(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{13}})(\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{13}})=(\frac{-1}{\sqrt{5}})^2-(\frac{3}{\sqrt{13}})^2+(\frac{2}{\sqrt{5}})^2-(\frac{2}{\sqrt{13}})^2$

$\vec{n}\cdot\vec{m}=\frac{1}{5}-\frac{9}{13}+\frac{4}{5}-\frac{4}{13}=\frac{5}{5}-\frac{13}{13}=0$. Donc les droites (D1) et (D2) sont perpendiculaires.

EXERCICE12

1. Déterminons l'ensemble des points M du plan équidistants des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{T})$.

d(M, $\mathcal{D}$)=d(M, $\mathcal{T}$) équivaut à $\frac{|-x+2y+3|}{\sqrt{5}}=\frac{|3x-6y+1|}{\sqrt{45}}$.

d(M, $\mathcal{D}$)=d(M, $\mathcal{T}$) équivaut à $\frac{-x+2y+3}{\sqrt{5}}=\frac{3x-6y+1}{\sqrt{45}}$ ou $\frac{-x+2y+3}{\sqrt{5}}=\frac{-3x+6y-1}{\sqrt{45}}$.

Ce qui signifie $\frac{-x+2y+3}{\sqrt{5}}=\frac{3x-6y+1}{3\sqrt{5}}$ ou $\frac{-x+2y+3}{\sqrt{5}}=\frac{-3x+6y-1}{3\sqrt{5}}$

C'est-à-dire $-x+2y+3=\frac{3x-6y+1}{3}$ ou $-x+2y+3=\frac{-3x+6y-1}{3}$.

Cela s'écrit $-x+2y+3=x-2y+\frac{1}{3}$ ou $-x+2y+3=-x+2y-\frac{1}{3}$.

C'est-à-dire $-2x+4y+\frac{8}{3}=0$ ou $3=\frac{-1}{3}$.

Comme $3\neq\frac{-1}{3}$, alors $-2x+4y+\frac{8}{3}=0$.

L'ensemble des points M du plan équidistants des droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{T})$ est la droite (L) d'équation $-2x+4y+\frac{8}{3}=0$.

2. Montrons que (L) est parallèle à $(\mathcal{D})$.

Les droites (L) et $(\mathcal{D})$ sont parallèles car le vecteur $\vec{u}$ (-1 ; 2) normal à $(\mathcal{D})$ et le vecteur $\vec{v}$ (-2 ;4) normal à (L) sont colinéaires.

CARACTERISATION D'UN CERCLE

EXERCICE 13

Donnons une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre [AB].

Sachant que A(1 ; 2) et B(3 ; 4).

Pour tout M du plan, M est sur $(\mathcal{C})$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ équivaut à $(x-1)(x-3)+(y-2)(y-4)=0$.

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour équation $x^2+y^2-4x-6y+11=0$.

EXERCICE 14

Donnons une équation cartésienne d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω et de rayon 3.

Une équation du cercle $(\mathcal{C})$ est de la forme $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$.

$(x-(-2))^2 + (y-0)^2 = 3^2$ équivaut à $(x+2)^2+y^2 = 9$.

Une équation du cercle $(\mathcal{C})$ est : $x^2+y^2+4x-5=0$.

EXERCICE 15

Donnons une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$ dans chacun des cas :

1) $(\mathcal{C})$ est de centre O et de rayon 2.

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$$

2) $(\mathcal{C})$ est de centre Ω(1 : 2) et de rayon 3.

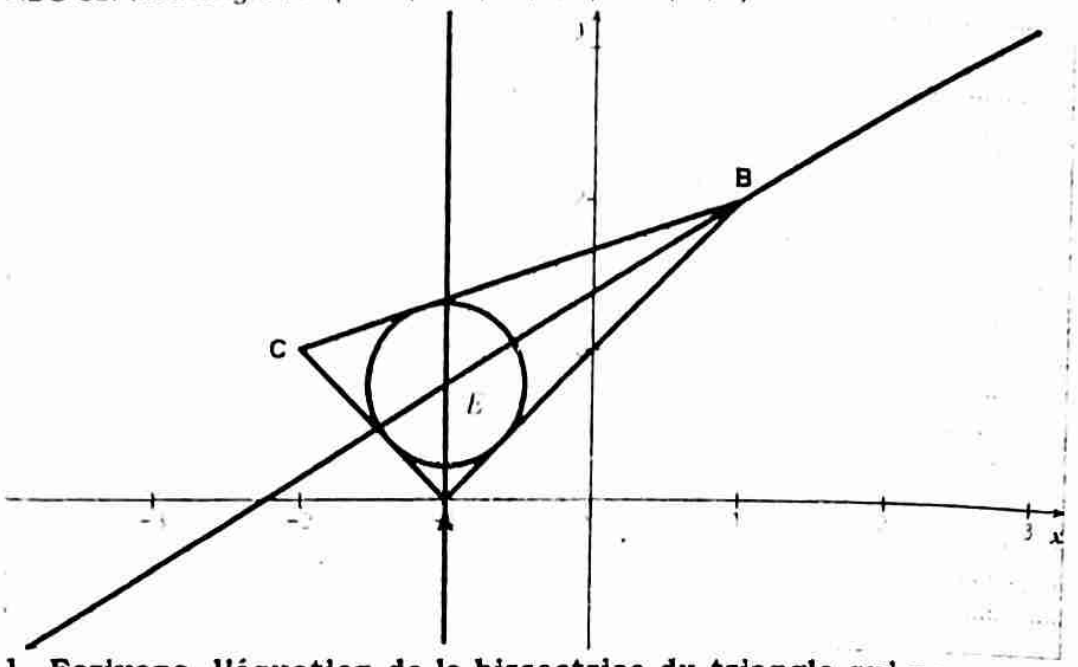
$$\begin{cases} x = 1+3\cos\theta \\ y = 2+3\sin\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$$

3) $(\mathcal{C})$ est de centre Ω(-1 ; -3) et de rayon 5.

$$\begin{cases} x = -1+5\cos\theta \\ y = -3+5\sin\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 16

ABC est un triangle tel que A(-1; 0), B(1; 2) et C(-2; 1).



1. Ecrivons l'équation de la bissectrice du triangle qui passe par le sommet A.

Soit (D1) la bissectrice du triangle ABC passant par A.

La bissectrice (D1) fait partie de l'ensemble des points équidistants des droites (AB) et (AC). Soit M(x ;y) un point de la droite (D1), d(M,(AB)) = d(M,(AC)).

Ecrivons les équations des droites (AB) et (AC).

(AB) : y = ax + b. Avec, 0=-a+b et 2=a+b.

$\begin{cases} -a+b=0 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 2a=2 \end{cases}$, donc a = b = 1.

Donc (AB) a pour équation x-y +1=0.

(AC) : y = ax + b. Avec, 0= -a+b et 1= - 2a + b.

$\begin{cases} -a+b=0 \\ -2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ -a=1 \end{cases}$, donc a =b= -1.

(AC) a pour équation x+y+1=0.

d(M,(AB))= $\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$ et d(M, (AC))= $\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}$

d(M,(AB)) = d(M,(AC)) équivaut à |x-y+1 |= |x+y+1|.

Ce qui signifie x-y+1=x+y+1 ou x-y+1=-x-y-1.

C'est-à-dire y=0 ou x=-1.

La droite d'équation y=0 est en hors du triangle ABC, donc la bissectrice passant par A a pour équation x=-1.

2. Déterminons les coordonnées du point E, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

E est le point d'intersection de deux bissectrices.

Cherchons l'équation de la bissectrice passant par B.

(AB) : x-y+1=0.

(BC) : y=ax+b. Avec 2=a+b et 1=-2a+b.

$\begin{cases} a+b=2 \quad (\times 2) \\ -2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b=4 \\ -2a+b=1 \end{cases}$, ce qui donne 3b=5 c'est-à-dire b= $\frac{5}{3}$

Comme a = 2 - b, alors a = 2- $\frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

Donc (BC) a pour équation : y = $\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ ou x-3y+5=0.

Soit M(x; y) du plan. d(M,(BC))= $\frac{|x-3y+5|}{\sqrt{10}}$

d(M,(BC)) = d(M,(AB)) équivaut à $\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x-3y+5|}{\sqrt{10}}$

Ce qui signifie que $x-y+1 = \frac{x-3y+5}{\sqrt{5}}$ ou $x-y+1 = -\frac{x-3y+5}{\sqrt{5}}$.

C'est-à-dire $x-\frac{x}{\sqrt{5}}-y+\frac{3y}{\sqrt{5}}+1-\sqrt{5}=0$ ou $x+\frac{x}{\sqrt{5}}-y-\frac{3y}{\sqrt{5}}+1+\sqrt{5}=0$

L'équation de la bissectrice passant par C est $(\frac{5-\sqrt{5}}{5})x+(\frac{-5+3\sqrt{5}}{5})y+1-\sqrt{5}=0$ ou

$(\frac{5+\sqrt{5}}{5})x-(\frac{5+3\sqrt{5}}{5})y+1+\sqrt{5}=0$.

A l'aide du graphique, on a l'équation de la bissectrice passant par B : $(\frac{5+\sqrt{5}}{5})x-(\frac{5+3\sqrt{5}}{5})y+1+\sqrt{5}=0$. (l'autre droite est extérieur au triangle)

Le couple de coordonnées de E est solution du système :

$\begin{cases} \left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right)x+\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{5}\right)y+1+\sqrt{5}=0 \\ x=-1 \end{cases}$ *alors* $1-\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{5}\right)y+1+\sqrt{5}=0$

$(\frac{5+3\sqrt{5}}{5})y=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}$ équivaut à $(\frac{5+3\sqrt{5}}{5})y=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ donc $y=\frac{4\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}$

Le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC est le point E(-1 ; $\frac{4\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}$).

3. **Déterminer le rayon du cercle ($\mathcal{C}$).**

Le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC est la distance du centre à l'un des côtés du triangle.

$d(E, (AB)) = \dfrac{\left|-1 - \dfrac{4\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} + 1\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+3\sqrt{10}}$ Donc le rayon du cercle est $\dfrac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+3\sqrt{10}}$

4. En déduire une équation de $(\mathcal{C})$.

Une equation parametrée du cercle $(\mathcal{C})$ est : $\begin{cases} x = -1 + \dfrac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+3\sqrt{10}}\cos\theta \\ y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} + \dfrac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+3\sqrt{10}}\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 17

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour équation $x^2+y^2-2x-4y=4$.

1. Trouvons les caractéristiques du cercle $(\mathcal{C})$.

L'équation cartésienne d'un cercle de centre (a; b) et de rayon r est de la forme $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$. Ce qui signifie $x^2-2ax+a^2+y^2-2bx+b^2 = r^2$.

Ce qu'on écrit $x^2 + y^2 - 2ax - 2bx = r^2-a^2-b^2$.

Donc on a a = 1. b=2 et $r^2-1-4 = 4$. $r^2 = 9$ donc r = 3.

$(\mathcal{C})$ Est donc le cercle de centre Q(1; 2) et de rayon 3.

2. Cherchons b pour que le point E(a; b) soit sur le cercle (C).

Le point E est sur le cercle lorsque ses coordonnées vérifient l'équation de $(\mathcal{C})$

$a^2+b^2-2a-4b=4$.

1°) a=0 ; on a $b^2-4b-4=0$. Une équation de second degré d'inconnu b.

Le discriminant est $\Delta = (-4)^2-4\times1\times(-4) = 16+16=32$.

Donc les solutions sont $b_1 = \dfrac{4+\sqrt{32}}{2}$ et $b_2 = \dfrac{4-\sqrt{32}}{2}$. $b_1 = 2+2\sqrt{2}$ et $b_2 = 2-2\sqrt{2}$.

La droite d'équation x = 0 est secante au cercle.

2°) a=4 ; on a : $16+b^2-8-4b-4 = 0$. C'est-à-dire $b^2-4b+4=0$.

Ce qui équivaut à $(b-2)^2=0$. C'est dire que b=2.

La droite d'équation x=4 est tangente au cercle.

3°) a=-3. On a $9+b^2+6-4b=4$. C'est-à-dire $b^2-4b+11=0$.

Une autre équation du second degré. $\Delta=16-44=-28$.

Le discriminant est négatif donc b n'existe pas.

La droite d'équation x=-3 et le cercle sont disjoints.

3. Vérifions que le point P(2; 2-2√2) est sur le cercle $(\mathcal{C})$.

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour équation $x^2+y^2-2x-4y = 4$.

$2^2+(2-2\sqrt{2})^2-2\times2-4\times(2-2\sqrt{2})=4+4-8\sqrt{2}+8-4-8+8\sqrt{2}=8-4=4$.

Donc le point P est sur le cercle, puisque ses coordonnées vérifient l'équation du cercle.

4. Ecrivons une équation de la tangente (T) au cercle ($\mathcal{C}$) passant par le point P.

La tangente (T) est perpendiculaire au rayon (QP).

La droite (T) admet pour vecteur normal $\overrightarrow{PQ}$ et elle passe par P.

$\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-2+2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Donc une équation de (T) est de la forme $-x+2\sqrt{2}\,y+c=0$.

Comme le point P$(2\,;2-2\sqrt{2})$ est sur la droite (T), alors nous déterminerons c en résolvant l'équation : $-2+2\sqrt{2}\,(2-2\sqrt{2})+c=0$. C'est-à-dire $4\sqrt{2}-10+c=0$ et $c = 10-4\sqrt{2}$.

Une équation de la tangente (T) est $-x+2\sqrt{2}\,y+10-4\sqrt{2}=0$.