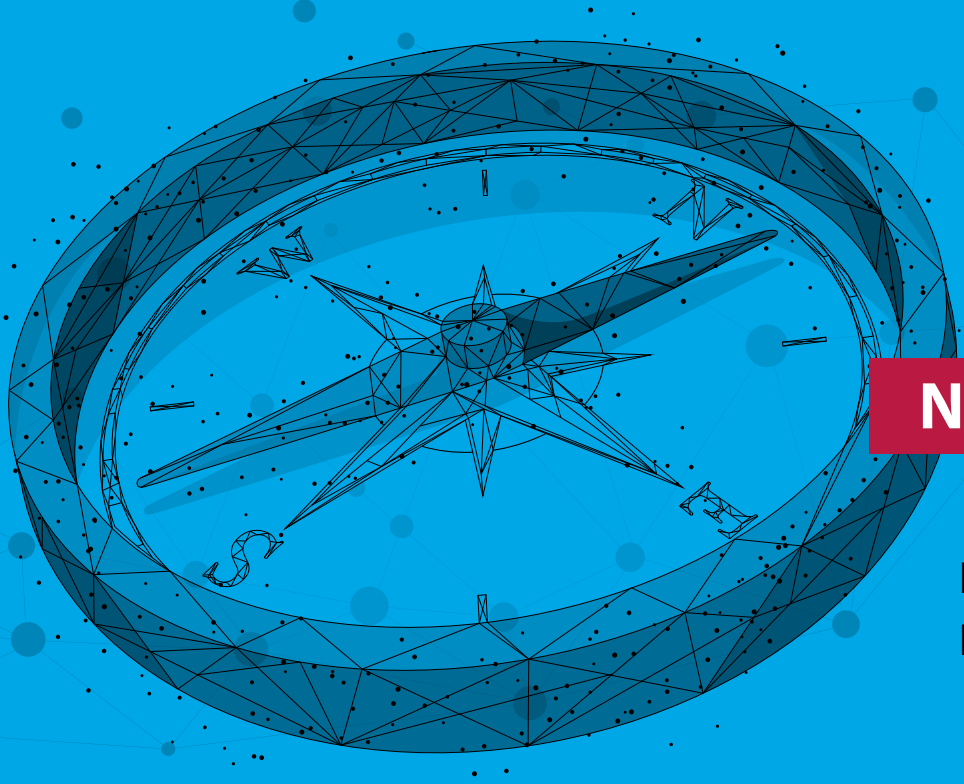


Niveau 1re

Éric Dubon
Francisco del Rey

# Mathématiques d'excellence

## Cours pour lycéens très motivés

ellipses

# Mathématiques d'excellence

## Cours pour lycéens très motivés

**Niveau 1re**



# Mathématiques d'excellence

## Cours pour lycéens très motivés

**Niveau 1re**

Éric Dubon
Francisco del Rey

ellipses

**Des mêmes auteurs, chez le même éditeur**

*Mathématiques d'excellence – Cours pour lycéens très motivés* – Niveau Seconde, 480 pages.

*Mathématiques d'excellence – Cours pour lycéens très motivés* – Niveau Terminale, 498 pages.

ISBN 9782340-048034
© Ellipses Édition Marketing S.A., 2021
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris




Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

# Avant-propos

Sans technique un don n'est rien
qu'une sale manie.
*Georges Brassens.*

Le présent ouvrage s'adresse en particulier aux élèves de Première afin qu'ils puissent acquérir les bases nécessaires pour le cycle Terminal.

Nous partons du constat qu'au cours de ces 30 dernières années les différentes réformes éducatives ont fait que le programme de mathématiques promulgué aux élèves a beaucoup souffert tant dans son contenu que dans la façon de l'enseigner.

Le changement de paradigme a fait qu'une grande partie des étudiants entrant, à l'heure actuelle, dans le Supérieur manquent sérieusement de connaissances et d'outils afin de réussir leur insertion dans le Post-Bac.

Viennent alors soit de nombreux abandons soit une désaffection importante et dangereuse à long terme pour les études scientifiques en général et pour les mathématiques en particulier.

C'est pour ces raisons que nous avons souhaité écrire ces trois livres, proposer des infrastructures, afin que le lecteur puisse apprendre ou ré-apprendre les mathématiques élémentaires. Nous avons ainsi souhaité proposer un projet alternatif aux programmes de mathématiques des lycées et voilà pourquoi les trois tomes, qu'il faut aborder comme un tout, ne suivent donc pas à la lettre le programme officiel des classes de lycées et encore moins l'esprit.

Même si la plupart des objets mathématiques sont entièrement définis (ou redéfinis), le lecteur est supposé familier avec les notions de base et le vocabulaire de la géométrie de collège et une certaine aisance avec le calcul algébrique.

Les nombres réels n'ont pas fait l'objet d'une construction dans le Tome 1, laquelle n'est plus au programme du concours de l'agrégation. De ce fait, la propriété de la borne supérieure n'est pas évoquée. Il a donc fallu admettre le théorème de convergence des suites monotones bornées.

Bien que ce livre se veuille avant tout destiné aux élèves de Première mais aussi à tout curieux désireux d'apprendre de « belles » mathématiques, il servira aussi à ceux qui sont intéressés par l'enseignement. C'est ainsi que ces trois livres peuvent être lus tels qu'ils sont présentés mais ils peuvent aussi être abordés suivant un certain ordre en fonction du but cherché. On peut ainsi regrouper les chapitres par thèmes : algèbre, géométrie, analyse et probabilité que nous résumons dans ce tableau :

| | cours de seconde | cours de première | cours de terminale |
|---|---|---|---|
| Algèbre : | 3 - 5 - 7 | 5 - 9 - 13 | 2 |
| Géométrie : | 6 - 11 | 6 - 7 - 8 | 1 - 7 - 8 |
| Analyse : | 9 - 10 | 1 - 2 - 3 - 4 - 12 | 3 - 4 - 5 - 6 - 9 |
| Probabilités : | 4 - 8 - 12 | 10 - 11 | |

Enfin nous avons pris le parti de ne pas développer l'histoire des mathématiques dans ces livres. Néanmoins, il nous semble plus qu'important de savoir à quelle époque les concepts présentés dans cet ouvrage ont pu voir le jour et quels mathématiciens en sont à l'origine.

Nous pensons que tout étudiant en mathématiques – tant au secondaire que dans le supérieur – doit acquérir un peu de l'histoire de cette science.

Pour cela nous vous proposons une liste non exhaustive de livres :

Hauchecorne Bertrand, Suratteau Daniel, *Des mathématiciens de A à Z* - $3^e$ édition entièrement refondue, Ellipses 2008.

Thirion Maurice, *Les mathématiques et le réel*, Ellipses 1999.

Nous terminons par quelques remarques pratiques.



Ce panneau signale un risque de dérapage fréquemment observé chez les lecteurs un peu rapides.

Le carré blanc à la fin de la dernière ligne d'une démonstration signale... la fin de la démonstration, que les auteurs n'iront pas plus loin ! C'est en somme une abréviation pour « la proposition en résulte » ou « ce qu'il fallait démontrer ». Il se présente sous cette forme : □

Enfin, une place a été laissée à la programmation et notre choix a porté sur le langage `python` car c'est celui qui est le plus utilisé dans les lycées et dans le Supérieur.

Nous ne pouvons conclure cet avant-propos sans remercier Jean-Pierre Demailly pour son soutien et son apport. La rédaction de l'intégrale de Kurzweil-Henstock est la sienne. Nous sommes redevables à Emmanuel Vieillard-Baron car le chapitre sur les coniques et une bonne partie de l'arithmétique lui doivent beaucoup ainsi que son site « les mathématiques.net » qui fut une bonne source d'inspiration. Merci à Loïc Terrier pour ses graphiques et ses exercices. Merci aussi à Clémence Labrousse et à Philippe Colliard pour un soutien constant et précieux.

# Table des matières


**1 Récurrence** **1**

1.1 La chasse aux petits points . . . 2
1.2 La théorie des dominos . . . 2
1.3 Variantes . . . 7
1.4 Démonstrations . . . 10
1.5 Quelques définitions . . . 13
1.6 Exercices . . . 14
1.7 Solutions . . . 22
1.8 Problème . . . 38
1.9 Correction . . . 39

**2 Limites des suites** **41**

2.1 Notion de limite . . . 42
2.2 Majoration et minoration d'une suite . . . 44
2.3 Limites des suites . . . 45
2.4 Opérations et limites . . . 54
2.5 Théorème de convergence . . . 59
2.6 Exemples . . . 63
2.7 Vrai ou faux? . . . 68
2.8 QCM . . . 71
2.9 Exercices . . . 71
2.10 Solutions . . . 78
2.11 Travaux dirigés . . . 90
2.12 Problèmes . . . 91

**3 Limites, continuité** **95**

3.1 Approche intuitive . . . 96
3.2 Définitions . . . 98
3.3 Opérations . . . 108
3.4 Compositions . . . 109
3.5 Continuité . . . 111
3.6 Continuité sur une réunion d'intervalles . . . 112
3.7 Suites récurrentes . . . 116
3.8 Exercices . . . 118

3.9 Solutions . . . 120
3.10 Problèmes . . . 125
3.11 Correction . . . 126
**4 Dérivation 129**
4.1 Définitions . . . 131
4.2 Opérations . . . 134
4.3 Composition . . . 138
4.4 Accroissements finis . . . 139
4.5 Variations des fonctions . . . 142
4.6 Théorème de la bijection . . . 143
4.7 Quiz . . . 147
4.8 Exercices . . . 148
4.9 Solutions . . . 152
4.10 Problèmes . . . 161
4.11 Corrigés . . . 164
**5 Second degré 171**
5.1 Fonction polynôme du second degré . . . 172
5.2 Résolution d'une équation du second degré . . . 177
5.3 Factorisation et application à l'étude du signe . . . 180
5.4 Programmation . . . 181
5.5 Somme et produit des racines . . . 182
5.6 Fiche cuisine : le second degré . . . 184
5.7 Exercices . . . 185
5.8 Solutions . . . 193
5.9 Problème . . . 206
5.10 Corrigé . . . 207
**6 Trigonométrie 211**
6.1 Enroulement de la droite des réels . . . 212
6.2 Cosinus et sinus d'un réel t . . . 216
6.3 Lien avec la trigonométrie du triangle . . . 219
6.4 Formules de trigonométrie . . . 221
6.5 Fonctions trigonométriques . . . 224
6.6 Équations trigonométriques . . . 230
6.7 Fonction arctangente . . . 234
6.8 Méthodes . . . 235
6.9 Exercices . . . 240
6.10 Solutions . . . 248
6.11 Problèmes . . . 261
6.12 Corrigés . . . 263

**7 Produit scalaire 269**
7.1 Activités . . . 271
7.2 Calculs avec le produit scalaire . . . 273
7.3 Un peu de géométrie . . . 275
7.4 Équations cartésiennes de droites et de cercles . . . 277
7.5 Relations métriques dans le triangle . . . 280
7.6 Formules de trigonométrie . . . 282
7.7 Lignes de niveau . . . 283
7.8 Puissance d'un point par rapport à un cercle . . . 285
7.9 Exercices . . . 287
7.10 Solutions . . . 296
7.11 Problèmes . . . 308
7.12 Corrigés . . . 311
**8 Géométrie dans l'espace 315**
8.1 Solides de référence . . . 315
8.2 Caractérisation des droites et plans de l'espace . . . 318
8.3 Positions relatives dans l'espace . . . 320
8.4 Vecteurs de l'espace . . . 323
8.5 Coordonnées dans l'espace . . . 330
8.6 Produit scalaire . . . 331
8.7 Plans et droites perpendiculaires . . . 336
8.8 Équation de plan . . . 339
8.9 Produit vectoriel . . . 340
8.10 Sphères . . . 347
8.11 Méthodes . . . 350
8.12 Quiz . . . 362
8.13 Vrai ou faux . . . 363
8.14 Exercices . . . 365
8.15 Solutions . . . 379
**9 Polynômes 397**
9.1 Fonction polynôme . . . 398
9.2 Racines d'un polynôme . . . 402
9.3 Schéma de Horner . . . 404
9.4 Exercices . . . 406
9.5 Solutions . . . 407
9.6 Travaux dirigés . . . 410
9.7 Problèmes . . . 412

**10 Loi binomiale 419**
10.1 Variable aléatoire réelle . . . 420
10.2 Paramètres d'une variable aléatoire . . . 421
10.3 Épreuve de Bernoulli. Loi binomiale . . . 426
10.4 Fluctuation; prise de décision . . . 435
10.5 Exercices . . . 436
10.6 Solutions . . . 447
10.7 Problèmes . . . 464
**11 Dénombrement 469**
11.1 Principes de dénombrement . . . 470
11.2 Nombre de combinaisons . . . 470
11.3 Nombre d'arrangements . . . 474
11.4 Exercices . . . 475
11.5 Solutions . . . 478
11.6 Problèmes . . . 482
11.7 Correction . . . 483
**12 Nombres complexes 491**
12.1 Activité . . . 492
12.2 Définition . . . 492
12.3 Module . . . 496
12.4 Écriture trigonométrique . . . 501
12.5 Dictionnaire bilingue géométrico-complexe . . . 508
12.6 Exercices . . . 518
12.7 Solutions . . . 528
12.8 Exercices supplémentaires . . . 551
12.9 Problème . . . 565
12.10 Corrigé . . . 566
**13 Matrices 573**
13.1 Définitions . . . 573
13.2 Opérations . . . 576
13.3 Géométrie . . . 586
13.4 Exercices . . . 588
13.5 Solutions . . . 593
13.6 Problème . . . 602
13.7 Corrigé . . . 603
**Table des matières du cours de seconde 605**
**Table des matières du cours de terminale 609**
**Index 612**

# Chapitre 1

# Récurrence

## Sommaire


| | | |
|---|---|---|
| 1.1 | La chasse aux petits points | 2 |
| 1.2 | La théorie des dominos | 2 |
| 1.3 | Variantes | 7 |
| 1.4 | Démonstrations | 10 |
| 1.5 | Quelques définitions | 13 |
| 1.6 | Exercices | 14 |
| 1.7 | Solutions | 22 |
| 1.8 | Problème | 38 |
| 1.9 | Correction | 39 |

## 1.1 La chasse aux petits points

Dans le chapitre consacré aux suites (chapitre 9 du cours de seconde), nous avons rencontré des difficultés à démontrer des théorèmes sur les suites, en particulier le théorème 6 page 322. Pourquoi ? La faute aux petits points !

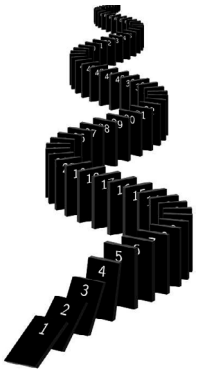
Par exemple, lorsqu'on écrit

$$\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

que se passe-t-il à la place des ... ? Est-ce que $n$ est nécessairement supérieur à 3 ?

Il est toujours possible de remplacer $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ par la somme symbolique $\sum_{k=1}^{n} k$ ce qui est plus rigoureux mais ne dissipe pas tous les problèmes.

## 1.2 La théorie des dominos



Les dominos sont positionnés de telle façon que, si un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant.
Si le premier domino tombe, alors tous les dominos suivants tombent.
Si le premier domino ne tombe pas, alors rien ne se passe. À moins qu'un domino ne tombe plus loin, entraînant avec lui tous les dominos suivants.

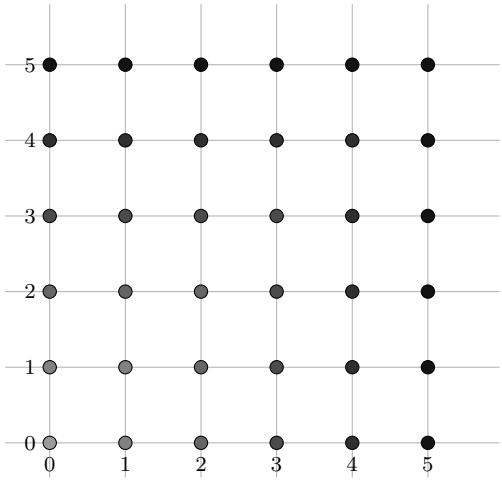
**Exercice 1.**

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$ et la relation valable pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

1. Calculer $u_2$, $u_3$, $u_4$.
2. Quelle conjecture peut on faire sur l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ ? On veut prouver cette conjecture, voici un nouveau type de raisonnement :
3. Prouver que si pour un certain $k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) on a bien $u_k = k^2$, alors $u_{k+1} = (k+1)^2$. On dit que la propriété est « héréditaire ».
4. Conclure et calculer : $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2019$

**Solution 1**




Un calcul, un dessin permettent de conjecturer que pour tout entier $k$,
$u_k = k^2$.
On sait que pour tout entier $k$,
$u_{k+1} = u_k + 2k + 1$. Donc à supposer que $u_k = k^2$, on en déduit que
$u_{k+1} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.
Autrement dit, chaque fois qu'on a un entier $k$ pour lequel la proposition $\mathscr{P}(k) : u_k = k^2$ prend la valeur VRAI, alors cette proposition prend encore la valeur VRAI pour l'entier suivant.
Comme on a $\mathscr{P}(1)$ ( puisque $u_1 = 1$ ) on a $\mathscr{P}(2)$, donc $\mathscr{P}(3)$, ..., donc $\mathscr{P}(n)$, et ce pour tout entier $n$.
On remarque le retour de ces fichus ....
Pour finir $\sum_{k=0}^{1009}(2k+1) = 1010^2 = 1020100$ (il y a 1010 termes).

Principe du raisonnement par récurrence

On vient d'utiliser un raisonnement par récurrence (on dit aussi par induction). C'est un **principe** de raisonnement (comme le raisonnement par l'absurde) qui sert à établir une proposition valable pour tous les entiers naturels à partir d'un certain rang. Ce raisonnement comporte quatre étapes : La rédaction de la proposition, l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

Soit $I = [\ n_0\ ,\ +\infty\ [ \cap \mathbb{N}$ un intervalle non majoré de $\mathbb{N}$.

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel $n$ dont on veut prouver qu'elle est vraie pour tout $n$ dans $I$ (c'est-à-dire pour tout $n \geqslant n_0$).

**Théorème 1 (de récurrence)**
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{P}$ une proposition dépendant d'une lettre $n \in I = [n_0, +\infty[ \cap \mathbb{N}$.

$$\text{Si } \begin{cases} \mathscr{P}(n_0) \\ \forall k \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n).$$

On en déduit la méthode suivante.

**Méthode 1.**

**Écriture de la proposition.** C'est une étape importante qui demande du soin. Il faut faire attention à la quantification.
**Initialisation.** On vérifie que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. (ou $\mathscr{P}(n_0)$)
**Hérédité.** On fixe un entier $k \in I$ et on montre que

$$\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)$$

et ce quel que soit l'entier $k \in I$. Autrement dit, en supposant $\mathscr{P}(k)$ on démontre $\mathscr{P}(k+1)$.
**Conclusion.** Alors, d'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.


L'initialisation est nécessaire :

**Exemple 1**
La « proposition » $\mathscr{P}(n)$ : « $2^n$ est divisible par 3 » est héréditaire.
Elle prend la valeur FAUX pour tout entier $n$.

**Démonstration 1**
Par contraposée. Soit $n$ un entier pour lequel on n'a pas $\mathscr{P}(n)$. Cela veut dire que l'ensemble $J$ des entiers $n$ pour lesquels on n'a pas $\mathscr{P}(n)$ n'est pas la partie vide. Donc $J$ possède un plus petit élément $n_1$ d'après l'axiome 1 page 64 du cours de seconde. Cet entier $n_1$ est caractérisé par

$$\begin{cases} \text{non } \mathscr{P}(n_1) \\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n_0 \leqslant k < n_1,\ \mathscr{P}(k) \end{cases} \qquad (\star)$$

On sait que $n_1 \neq n_0$ puisque, d'après l'initialisation, $\mathscr{P}(n_0)$. Donc $n_1 > n_0$. Donc $n_2 \geqslant n_0$. D'après $(\star)$ on a $\mathscr{P}(n_2)$. D'après l'hérédité appliquée à $k = n_2 = n_1 - 1$ on a $\mathscr{P}(n_2 + 1)$ c'est-à-dire $\mathscr{P}(n_1)$ ce qui est exclus. □

Alors ? Principe ou théorème ? Un principe est un axiome. Il ne se démontre pas. Un théorème se démontre. Pas nécessairement dans ce manuel, mais il se démontre. Ici, on aurait un principe qui se démontrerait ?

En fait, la « démonstration » ci-dessus présuppose que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Cela peut se démontrer ... par récurrence.

Pour couper court à une histoire longue, ces deux propositions sont équivalentes et il est nécessaire d'en admettre une pour démontrer l'autre.

**Exercice 2.**

Prouver par récurrence que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, l'entier $8^n - 1$ est divisible par 7.

**Solution 2**
**Écriture de la proposition :** Soit la proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$ : $8^n - 1$ est divisible par 7.
**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $8^n - 1 = 8^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ qui est bien divisible par 7. On a donc bien $\mathscr{P}(0)$.
**Hérédité :** Soit $k$ un entier naturel. On suppose $\mathscr{P}(k)$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $8^k - 1 = 7p$. En multipliant les deux membres par 8 on en déduit que $8^{k+1} - 8 = 7 \times 8p$ donc $8^{k+1} - 1 = 7 \times 8p - 7 = 7(8p - 1)$ est aussi un multiple de 7. C'est $\mathscr{P}(k+1)$. On a bien démontré

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)$$

**Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$, ce qu'il fallait démontrer.

**Exercice 3.**

Prouver par récurrence que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ :

$$\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

voir le théorème 3 page 320 du cours de seconde.

**Solution 3**
**Écriture de la proposition.** Soit la proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On commence par définir la suite $\sigma$ par récurrence. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma_{n+1} = \sigma_n + n + 1.$$

**Initialisation.** $\sigma_1 = 1$ et pour $n = 1$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ vaut $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$. Donc on a $\mathscr{P}(1)$.
**Hérédité.** Soit $k$ un entier naturel. On suppose $\mathscr{P}(k)$, c'est-à-dire que $\sigma_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et on veut démontrer que $\sigma_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or $\sigma_{k+1} = \sigma_k + (k+1)$. D'après $\mathscr{P}(k)$, on en déduit :

$$\sigma_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)(1 + \frac{k}{2}) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ainsi on a bien $\mathscr{P}(k+1)$.
**Conclusion.** En résumé, on a $\mathcal{P}(1)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$, donc, d'après le théorème de récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k)$, ce qu'il fallait démontrer.

**Exercice 4.**

1. Justifier que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt{n^2+n} \geqslant n$
2. En déduire la preuve par récurrence que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}.$$

Voir aussi l'exercice 8 page 329 du cours de seconde.

**Solution 4**

1. Grâce à l'expression conjuguée, (voir paragraphe 5.9.3 page 90 du cours de seconde) on a

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n} - n &= \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \geqslant 0\end{aligned}$$

2. Soit la proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}.$$

La suite $S$ est définie par récurrence par $S_1 = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on a $\mathscr{P}(k)$, c'est-à-dire $S_k \geqslant \sqrt{k}$, on en déduit

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &\geqslant \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \qquad \text{d'après } \mathscr{P}(k) \\ &\geqslant \frac{\sqrt{k}\times\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} \\ &\geqslant \frac{k+1}{\sqrt{k+1}}, \qquad \text{d'après la première question,} \\ &\geqslant k+1.\end{aligned}$$

On a donc bien $\mathscr{P}(k+1)$.

**Conclusion :** En résumé, on a $\mathcal{P}(1)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$, donc, d'après le théorème de récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k)$, ce qu'il fallait démontrer.

**Exercice 5.**

D'après l'inégalité triangulaire (théorème 16 page 71 du cours de seconde)

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\forall x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

**Solution 5**
**Écriture de la proposition :** Soit la proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \geqslant 2$ :

$$\forall x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

**Initialisation :** Pour $n = 2$, le théorème 16 page 71 du cours de seconde est exactement $\mathscr{P}(2)$.
**Hérédité :** Soit $k \geqslant 2$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}(k)$. On cherche à établir $\mathscr{P}(k+1)$. Pour cela on se donne $k+1$ réels $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k+1}$. On pose $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ et $y = x_{k+1}$. D'après $\mathscr{P}(2)$, on a $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ soit

$$\left|\sum_{p=1}^{k+1} x_p\right| \leqslant \left|\sum_{p=1}^{k} x_p\right| + |x_{k+1}|$$

Maintenant, d'après $\mathscr{P}(k)$, on peut majorer $\left|\sum_{p=1}^{k} x_p\right|$ par $\sum_{p=1}^{k} |x_p|$.

Finalement on a bien

$$\left|\sum_{p=1}^{k+1} x_p\right| \leqslant \sum_{p=1}^{k+1} |x_p|$$

et ce pour tous réels $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k+1}$. On a bien $\mathscr{P}(k+1)$.

**Conclusion :** $\forall n \geqslant 2,\ \mathscr{P}(n)$, ce qu'il fallait démontrer.

## 1.3 Variantes

Ce sont deux déclinaisons classiques du théorème de récurrence.

### 1.3.1 Récurrence à deux pas

La **récurrence à deux pas** est aussi appelée **récurrence double**.

**Théorème 2**
Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Si } \begin{cases} \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}) \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+2} \end{cases} \quad \text{alors } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n.$$

**Démonstration 2**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $\mathcal{H}_n \Longleftrightarrow (\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1})$.

On a $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ c'est-à-dire $\mathcal{H}_0$.

Par ailleurs, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n \Longleftrightarrow \mathcal{P}_{n+2}$. Or on a clairement $\mathcal{P}_{n+1} \Longleftrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Donc on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n \Longleftrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$.

D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n$. *A fortiori* on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$ □

**Exemple 2 (Formule de Binet)**

Soit la suite $(F_n)$ définie par : $\begin{cases} F_0 = 0 \quad ; \quad F_1 = 1 \\ F_{n+2} \quad = \quad F_n + F_{n+1} \end{cases}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{P}_n \ :\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n), \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

On a clairement $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \varphi'^0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 = F_0$ soit $\mathcal{P}_0$.

De même, $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \varphi'^1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 = F_1$ soit $\mathcal{P}_1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$. On a alors

$$\begin{aligned} F_{n+2} = F_n + F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n + \varphi^{n+1}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi'^n + \varphi'^{n+1}) \\ &= \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}(1+\varphi) - \frac{\varphi'^n}{\sqrt{5}}(1+\varphi') \\ &= \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}(\varphi^2) - \frac{\varphi'^n}{\sqrt{5}}(\varphi'^2), \end{aligned}$$

car $\varphi$ et $\varphi'$ sont solutions de $1 + x = x^2$. On a donc bien

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}),$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+2}$.

Par récurrence à deux pas, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n).$$

### 1.3.2 Récurrence forte

**Théorème 3**
Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall k < n,\ \mathcal{P}_k) \Longrightarrow \mathcal{P}_n$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

**Démonstration 3**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $\mathcal{H}_n \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n)$.

La proposition $\mathcal{H}_0$ prend la valeur logique VRAI puisqu'il n'existe pas d'entier naturel $k < n$, donc pas de contrexemple ! Autrement dit une récurrence forte ne nécessite pas d'initialisation.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a $\mathcal{H}_n$. On a alors $\mathcal{P}_n$. Comme on a déjà $\forall k < n,\ \mathcal{P}_k$, on a donc $\forall k < n+1,\ \mathcal{P}_k$, c'est-à-dire $\mathcal{H}_{n+1}$.

D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n$. *A fortiori* on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_{n-1}$. □

**Exemple 3**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$. On se propose de démontrer que $\forall n \geqslant 2,\ H_n \notin \mathbb{N}$ :

Soit $n \geqslant 2$. On considère la proposition $\mathcal{P}_n$ : il existe un entier pair $p_n$ et un entier impair $i_n$ tels que $H_n = \dfrac{i_n}{p_n}$.

On a clairement $\mathcal{P}_2$ avec $i_2 = 3$ et $p_2 = 2$.

Soit $n \geqslant 3$ un entier pour lequel on a $\forall k < n,\ \mathcal{P}_n$.

► Si $n$ est impair, alors

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{i_{n-1}}{p_{n-1}} + \frac{1}{n} = \frac{n i_{n-1} + p_{n-1}}{n p_{n-1}} = \frac{i_n}{p_n},$$

en posant $i_n := n i_{n-1} + p_{n-1}$ qui est impair et $p_n := n p_{n-1}$ qui est pair.

► Si $n$ est pair, alors $n \geqslant 4$ et $n = 2q$ avec $q \geqslant 2$. En séparant les termes d'indice pair et les termes d'indice impair,

$$H_n = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2} H_q.$$

On réduit la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k-1} = \frac{m}{i}$ où l'entier impair $i$ est le produit de tous les nombres impairs inférieurs à $n$. Donc d'après $\mathcal{P}_q$, on a

$$H_n = \frac{m}{i} + \frac{i_q}{2p_q} = \frac{2mp_q + i i_q}{2 i p_q} = \frac{i_n}{p_n},$$

en posant $i_n := 2mp_q + i i_q$ qui est impair et $p_n := 2 i p_q$ qui est pair.

On a bien $\mathcal{P}_n$ dans les deux cas.

On a démontré par récurrence forte que $\forall n \geqslant 2,\ P_n$. En particulier on a $H_n \notin \mathbb{N}$.

## 1.4 Démonstrations

Où l'on va régler le sort des démonstrations laissées en souffrance dans le chapitre 9 du cours de seconde consacré aux suites.

Tout d'abord, les suites de l'exemple 2 page 316 du cours de seconde sont bien définies. Ce n'est pas tout à fait évident. C'est une application du principe de récurrence.

On va démontrer proprement le théorème 2 page 319 du cours de seconde.

**Démonstration 4**

Soit $(u_n)_{n\in I}$ (avec $I = [\ n_0\ ,\ +\infty\ [ \cap \mathbb{N}$) une suite vérifiant

$$\forall n \in I,\ u_{n+1} - u_n = r.$$

**Écriture de la proposition :** Soit $n \geqslant n_0$ un entier, on considère $\mathscr{P}(n)$ : $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.

**Initialisation :** Pour $n = n_0$, la proposition $\mathscr{P}(n_0)$ est clairement vraie.

**Hérédité :** Soit $k \geqslant n_0$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}(k)$. On cherche à établir $\mathscr{P}(k+1)$.

D'après $\mathscr{P}(k)$, on a $u_k = u_{n_0} + (k - n_0)r$. Maintenant

$$\begin{array}{rcccl} u_{k+1} & = & u_{k+1} - u_k & + & u_k \\ & = & r & + & u_{n_0} + (k - n_0)r \\ & = & u_{n_0} + (k + 1 - n_0)r & & \end{array}$$

c'est-à-dire exactement $\mathscr{P}(k+1)$.

**Conclusion :** En résumé, on a $\mathcal{P}(n_0)$ et $\forall k \geqslant n_0,\ \mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$, donc, d'après le théorème de récurrence, on a $\forall k \geqslant n_0,\ \mathcal{P}(n)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Certes la démonstration est plus propre (pas de petits points) mais plus obscure. **Dans ce cas précis**, une rédaction comme « Par une récurrence immédiate ... » n'est pas blâmable.

On va démontrer proprement le théorème 6 page 322 du cours de seconde.

**Démonstration 5**

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in I}$ (avec $I = [\ n_0\ ,\ +\infty\ [ \cap \mathbb{N}$) une suite vérifiant

$$\forall n \in I,\ u_{n+1} = qu_n.$$

**Écriture de la proposition :** On démontre par récurrence la proposition $\mathscr{P}(n)$

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0},$$

pour tout $n \geqslant n_0$.

**Initialisation :** Pour $n = n_0$, la proposition $\mathscr{P}(n_0)$ est clairement vraie.

**Hérédité :** Soit $k \geqslant n_0$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}(k)$. On cherche à établir $\mathscr{P}(k+1)$.

D'après $\mathscr{P}(k)$, on a $u_k = u_{n_0} q^{k-n_0}$ Donc $u_{k+1} = qu_k = qu_{n_0} q^{k-n_0} = u_{n_0} q^{k+1-n_0}$, c'est-à-dire exactement $\mathscr{P}(k+1)$.

**Conclusion :** $\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n)$, ce qu'il fallait démontrer. □

C'est le tour de la somme des (premiers) termes d'une suite géométrique (théorème 7 page 322 du cours de seconde)

**Démonstration 6**

Soit $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n := 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i.$$

**Écriture de la proposition :** On démontre par récurrence la proposition $\mathscr{P}(n)$

$$(1-q)S_n = 1-q^{n+1}.$$

**Initialisation :** Pour $n=0$, la proposition $\mathscr{P}(0)$ est clairement vraie.

**Hérédité :** Soit $k \geqslant 0$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}(k)$. On cherche à établir $\mathscr{P}(k+1)$. Or $S_{k+1} = S_k + q^{k+1}$, donc

$$\begin{aligned}(1-q)S_{k+1} &= (1-q)\left(S_k + q^{k+1}\right)\\ &= (1-q)S_k + (1-q)q^{k+1}\\ &= \underbrace{1-q^{k+1}}_{\mathscr{P}(k)} + q^{k+1} - q^{k+2}\\ &= 1-q^{k+2},\end{aligned}$$

c'est-à-dire exactement $\mathscr{P}(k+1)$.

**Conclusion :** $\forall n \geqslant 0,\ \mathscr{P}(n)$, ce qu'il fallait démontrer. □

La démonstration du théorème 9 page 325 du cours de seconde n'est pas exempte de reproche : il y a des petits points !

**Démonstration 7**

**Écriture de la proposition :** Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite. Soit $m \in I$. On va démontrer par récurrence la proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'indice $n \geqslant m$ :

$$u_n - u_m = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_{m+1} - u_m) = \sum_{p=0}^{n-m-1} (u_{m+p+1} - u_{m+p}).$$

**Initialisation :** Pour $n = m+1$, la proposition $\mathscr{P}(m+1)$ est clairement vraie.

**Hérédité :** Soit $k \geqslant m+1$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}(k)$. On cherche à établir $\mathscr{P}(k+1)$.

D'après $\mathscr{P}(k)$, on a $u_k - u_m = \sum_{p=0}^{k-m-1} (u_{m+p+1} - u_{m+p})$. De ce fait,

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{(k+1)-m-1} (u_{m+p+1} - u_{m+p}) &= \underbrace{\left(u_{m+(k-m)+1} - u_{m+(k-m)}\right)}_{p=(k+1)-m-1=k-m} + \underbrace{\sum_{p=0}^{k-m-1} (u_{m+p+1} - u_{m+p})}_{=u_k-u_m \text{ d'après } \mathscr{P}(k)}\\ &= (u_{k+1} - u_k) + u_k - u_m\\ &= u_{k+1} - u_m\end{aligned}$$

c'est-à-dire exactement $\mathscr{P}(k+1)$.

**Conclusion :** $\forall n \geqslant m+1,\ \mathscr{P}(n)$, ce qu'il fallait démontrer. □

**Remarque 1.**

- Là encore, rigueur n'est pas synonyme de lisibilité.
- Les symboles de sommation $\Sigma$ sont définis eux aussi par récurrence.
- Si on va par là, tout ce qui touche aux nombres entiers doit être défini par récurrence, y compris l'addition, la multiplication, la comparaison ($<$), etc.
- Le lecteur qui commencerait à voir des récurrences partout, qui penserait à une récurrence chaque fois qu'il voit ... y compris chez Alexandre Dumas, serait bien avisé de laisser ce manuel pour prendre un peu de vacances, ne serait-ce que pour (re)lire *Le Comte de Monte-Cristo*.

On reprend l'exemple 6 page 325 du cours de seconde.

**Exemple 4**
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{1+2v_n}$.

On va démontrer que la suite $v$ est croissante, et pour cela démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)\ : v_{n+1} - v_n \geqslant 0.$$

**Initialisation :** On a $v_1 - v_0 = \sqrt{3} - 1 \geqslant 0$ donc on a $\mathscr{P}(0)$.
**Hérédité :** Soit $k \geqslant 0$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}(k)$. On cherche à établir $\mathscr{P}(k+1)$.
On a

$$\begin{aligned} v_{k+2} - v_{k+1} &= \sqrt{1+2v_{k+1}} - \sqrt{1+2v_k} \\ &= \frac{1+2v_{k+1} - (1+2v_k)}{\sqrt{1+2v_{k+1}} + \sqrt{1+2v_k}} \\ &= 2\frac{v_{k+1} - v_k}{\sqrt{1+2v_{k+1}} + \sqrt{1+2v_k}} \\ &\geqslant 0 \quad \text{d'après } \mathscr{P}(k) \end{aligned}$$

c'est exactement $\mathscr{P}(k+1)$.
**Conclusion :** $\forall n \geqslant m+1,\ \mathscr{P}(n)$, ce qu'il fallait démontrer. De ce fait la suite $v$ est effectivement croissante.

**Exemple 5**
Soit $n$ un entier naturel. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0 + 1 + 4 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Première méthode : Récurrence**
Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On a clairement $S_0 = 0 = \dfrac{0 \times 1 \times 1}{6}$ soit $\mathscr{P}(0)$.

Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel on a $\mathscr{P}(n)$.
On a d'une part $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$ et d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

On a bien $\mathscr{P}(n+1)$. Reste à conclure via le théorème de récurrence.

**Deuxième méthode : Télescopage**

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
On calcule

$$\begin{aligned}u_n - u_{n-1} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n[(n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 2n + 1 - (2n^2 - n - 2n + 1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[6n]}{6} \\ &= n^2.\end{aligned}$$

Par télescopage,

$$u_n = u_n - u_0 = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

## 1.5 Quelques définitions

### 1.5.1 Puissances

Les puissances ont déjà été définies au 5.7.4 page 82 dans le cours de seconde. Nous allons en donner une définition par récurrence.

**Définition 1.**

Soit $a$ un nombre réel et $k$ un entier naturel. On définit $a^k$ comme étant
- 1 lorsque $k = 0$.
- Pour tout entier naturel $k$, $a^{k+1} = a \cdot a^k$.
- Lorsque $a \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N},\ a^k \neq 0$ (démonstration par récurrence !) et $\dfrac{1}{a^m}$ où $m = -k$ désigne l'opposé de $k$ lorsque $k$ est strictement négatif.

### 1.5.2 Factorielle

On définit – par récurrence bien sûr – une nouvelle suite :

**Définition 2.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle « factorielle $n$ » et on note $n!$ le nombre entier naturel :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1) \times n! \end{cases}$$

**Remarque 2** (Avec des . . . ).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Calculette TI-83. Pour calculer 8! on tape [8] [math] > > > PROB [4] [entrer]
En `Python`

```
from math import factorial
print (factorial(50))
```

> > > (executing lines 1 to 2 of "factorielle.py")
30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000
On peut aussi programmer soi-même la suite (par une boucle ou par récursivité).

## 1.6 Exercices

**Exercice 6.**

Prouver que la suite de terme général $\dfrac{2^n}{n!}$ est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

**Exercice 7.**

Écrire le produit des $n$ premiers entiers pairs (non nuls) avec la notation factorielle.

$$2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 2n = ?$$

**Exercice 8.**

Prouver par récurrence que pour $n$ entier assez grand, $2^n \geqslant n^2$.

**Exercice 9.**

Soit $n$ un entier naturel et $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$.
Démontrer que $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n-1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n).$$

Conclusion.

**Exercice 10** (À la hongroise)**.**

Soit $n \geqslant 1$. On pose

$$u_n := 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}; \quad v_n := 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2; \quad q_n := \frac{v_n}{u_n}.$$

1. Écrire un programme qui calcule pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad v_n$ et $q_n$.
   Écrire un programme qui calcule pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad q_{n+1} - q_n$.
2. Faire tourner ce programme pour diverses valeurs de $n$. Que constate-t-on ?
3. En supposant que la constatation soit générale, qu'en déduit-on concernant la suite $(q_n)$ ? et pour la suite $(v_n)$ ?
4. Démontrer par récurrence la véracité de la forme explicite trouvée pour la suite $(v_n)$ à la question précédente.

**Exercice 11.**

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

**Exercice 12.**

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

**Exercice 13.**

1. Développer, pour tous réels $a$ et $b$, $(a+b)^3$ et $(a+b)^4$.
2. On pose $S_n := 1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3$ pour tout entier $n \geqslant 1$
   (a) Calculer $S_1$, $S_2$, $S_3$.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = 2n^4 - n^2$.

**Exercice 14.**

On se propose de démontrer que pour tout entier $p \geqslant 1$ :

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (2p-3) - (2p-2) + (2p-1) - 2p = -p.$$

1. Première méthode :
   Utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer cette propriété.
2. Deuxième méthode :
   Démontrer cette propriété en regroupant deux par deux les termes du membre de gauche de l'égalité.

**Exercice 15.**

Selon le cas, faire le travail demandé soit en utilisant un raisonnement par récurrence, soit en procédant autrement.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $(n+1)^2 \geqslant 2n+6$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n^2+n+2$ est un nombre pair.
3. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 3$, $(x-1)^2 \geqslant x+1$.

**Exercice 16** (Pour se mettre en confiance...).

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.

**Exercice 17** (Limite de validité).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante :

$$P_n : \ 2^n > n^2.$$

1. Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie pour $n \geqslant 3$.
2. Pour quelles valeurs de $n$ la propriété $P_n$ est vraie ?

**Exercice 18.**

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{4u_n + 1} \end{cases}$.

Montrer que $u_n \neq \dfrac{1}{2}$ pour tout $n$.

**Exercice 19** (Décomposition du nombre 1).

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, on peut trouver n entiers strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, deux à deux distincts, tels que

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

**Exercice 20** (Récurrence double)**.**

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}. \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

**Exercice 21** (Simple ou double ?)**.**

On considère la suite $(F_n)$ (suite de Fibonacci) définie par $F_0 = 0$; $F_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Démontrer que la suite $(F_n)_n$ vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N},\ F_n \geqslant n-1$ ;
2. pour tout $n \in \mathbb{N},\ F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
3. pour tout $n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \leqslant n,\ F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1} F_k^2$.

Avez-vous utilisé une récurrence simple ou une récurrence double ?

**Exercice 22** (Partage de carrés)**.**

1. Démontrer qu'on peut partager un carré en 4 carrés, puis en 6 carrés, en 7 carrés, en 8 carrés.
2. Démontrer que si on peut partager un carré en $n$ carrés, alors on peut le partager en $n+3$ carrés.
3. Démontrer qu'on ne peut pas partager un carré en 2 carrés, en 3 carrés, en 5 carrés.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de $n$ peut-on partager un carré en $n$ carrés ?

**Exercice 23** (Somme de tous les termes précédents)**.**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1, u_n = 2^{n-1}$.

**Exercice 24** (Une décomposition des entiers)**.**

Démontrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ où $(p, q) \in \mathbb{N}$.

**Exercice 25** (Une décomposition des entiers)**.**

Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

**Exercice 26** (Récurrence un peu plus compliquée)**.**

Soit $A$ une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :
- $1 \in A$ ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \in A \implies 2n \in A$ ;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in A \implies n \in A$.

Démontrer que $A = \mathbb{N}^*$.

**Exercice 27.**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } \ n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1. (a) Calculer $u_1$.
   (b) Les valeurs de $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à : 45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
   À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = u_{n+1} - u_n.$$
2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$. Justifier que la somme des $n$ premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
4. Valider la conjecture émise à la question 1b.

**Exercice 28.**

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}.$$

**Exercice 29.**

Soit $n \geqslant 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$. Démontrer que

$$\frac{x_1}{1 + x_2.x_3.\ldots.x_n} + \frac{x_2}{1 + x_1.x_3.\ldots.x_n} + \ldots + \frac{x_n}{1 + x_1.x_2.\ldots.x_{n-1}} \leqslant n - 1.$$

**Exercice 30** (Une identité de François Nicole (1727))**.**

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $z, z_1, \ldots, z_n$ strictement positifs, on a

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_1 \ldots z_{k-1}}{(z+z_1)\ldots(z+z_k)} + \frac{z_1 \ldots z_n}{z(z+z_1)\ldots(z+z_n)}.$$

**Exercice 31.**

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $x \in ]0,1[$,

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

### 1.6.1 Suites récurrentes et fonctions

**Exercice 32.**

Soit une fonction $f$ définie et croissant sur $\mathbb{R}$. Soit une suite $(u_n)$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est monotone.

**Exercice 33** (Suite logistique. Inde, Avril 2003)**.**

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \quad \text{et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

où $a$ est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$.
   (a) Calculer $u_1$ et $u_2$.
   (b) Dans un repère orthonormal (unité graphique 5 cm), tracer, sur l'intervalle $[0\,,\,2]$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{P}$ représentative de la fonction $f$ : $x \mapsto x(2 - x)$.
   (c) Utiliser $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ pour construire sur l'axe des abscisses les points $A_1$, $A_2$, $A_3$ d'abscisses respectives $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. On suppose dans cette question que $a$ est un réel quelconque de l'intervalle $]0\,,\,1[$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n$, $0 < u_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$. On considère la suite numérique $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - u_n.$$
   (a) Exprimer, pour tout entier $n$, $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.
   (b) En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 34** (La suite qui se prenait pour une fonction)**.**

Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n+1) > f(f(n))$.
On se propose de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = n$.

1. Démontrer que $f(1)$ est le minimum de $f$ sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer $\mathcal{H}_n$ : $\forall m > n,\ f(1) < f(2) < \ldots < f(n-1) < f(n) < f(m)$.
3. Conclure en démontrant que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = n$.

**Exercice 35** (Composées).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit $f^{\circ k}$ la composée de $f$ par elle-même $k$ fois, c'est-à-dire que $f^{\circ 0}$ est l'identité de $R$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{\circ(k+1)} = f^{\circ k} \circ f = f \circ f^{\circ k}$.

1. Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ démontrer que $f^{\circ n}(x) = a^n x + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b$.
2. Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + 2bx + c$ avec $a \neq 0$ et $c = \dfrac{b^2 - b}{a}$,
   démontrer que $f^{\circ n}(x) = \dfrac{(ax+b)^{2^n} - b}{a}$.

## 1.7 Solutions

**Solution 6**
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n := \frac{2^n}{n!}.$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \neq 0$ et

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} \\ &= \frac{2}{n+1} \leqslant 1.\end{aligned}$$

De ce fait la suite $(u_n)$, à termes strictement positifs, est bien décroissante.

**Solution 7**
En mettant 2 en facteur $n$ fois, on a

$$2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \cdots \times 2n = 2^n\, n!.$$

**Solution 8**
On commence par chercher à la main ou avec une calculette un rang à partir duquel la propriété semble vraie. On pense à $n = 4$. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $2^n \geqslant n^2$.

**Écriture de la proposition.** On veut prouver qu'elle est vraie pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 4.

**Initialisation.** On a $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$ donc $2^4 \geqslant 4^2$. Donc $\mathscr{P}(4)$ est vraie.

**Hérédité.** Soit $k \geqslant 4$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}(k)$. On cherche à établir $\mathscr{P}(k+1)$. On veut établir que $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$.

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \geqslant 2k^2$$

Il suffit donc de prouver que pour $k \geqslant 4$ on a $2k^2 \geqslant (k+1)^2$. Les deux membres sont positifs, cette égalité est équivalente à $\sqrt{2}k \geqslant k+1$ soit $k \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, ou encore $k \geqslant \sqrt{2}+1$. Or $\sqrt{2}+1 \leqslant 4$. Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence, on a prouvé que pour tout entier $n$ supérieur à 4, $2^n \geqslant n^2$.

**Solution 9**
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2}\left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2 + n = \dfrac{1}{2}\left(n^2 - n + \dfrac{1}{4}\right) + n = \dfrac{1}{2}\left(n^2 + n + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2$.

$\mathscr{P}(n)$ est héréditaire. La proposition $\mathscr{P}(0)$ est clairement fausse.

Imaginons que $\mathscr{P}(n)$ prenne la valeur VRAI pour un certain entier $n$, alors on aurait $\mathscr{P}(m)$ pour tout entier $m > n$.

**Remarque 3.**

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, on a $2S_n = n^2 + n + \frac{1}{4} \notin \mathbb{N}$. A fortiori, $S_n \notin \mathbb{N}$. Or $\sum_{k=0}^{n} k$ est un entier naturel – ce qui peut se démontrer par récurrence si on a du temps à perdre – donc $\mathscr{P}(n)$ prend la valeur FAUX.
De ce fait, l'implication $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ prend la valeur VRAI : $\mathscr{P}(n)$ est héréditaire.

**Solution 10 (À la hongroise)**

1.
```
def U(n):
    return n*(n+1)//2

def  V(n):
    s=0
    for k in range(n+1):
        s=s+k*k
    return s

def Q(n):
    return V(n)/U(n)

def Delta(n):
    return (Q(n+1)-Q(n))

for k in range(100,110):
    print(Delta(k))
```

2. On constate que pour les valeurs de $n$ trouvées, $\Delta_n := q_{n+1} - q_n$ égale $\frac{2}{3}$ aux erreurs d'arrondi près.
3. À supposer qu'on ait $\forall \geqslant 1$, $q_{n+1} - q_n = \frac{2}{3}$ la suite $(q_n)$ serait arithmétique de raison $\frac{2}{3}$. Comme $u_1 = v_1 = q_1 = 1$ on en déduit qu'on aurait alors $q_n = \frac{2}{3}(n-1) + 1 = \frac{2n+1}{3}$. Cela aurait pour conséquence que $\forall \geqslant 1$, $v_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. **Écriture de la proposition.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété qui dépend de l'entier $n \geqslant 1$ :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Initialisation.** On a $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2$ et $\frac{1 \times (1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ donc on a $\mathscr{P}_1$.

Solutions

**Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}_n$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{d'après } \mathscr{P}_n, \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) \\ &= (n+1)\,\frac{2n^2+n+6n+6}{6} \\ &= (n+1)\,\frac{(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathscr{P}_{n+1}$.

**Conclusion.** On a $\mathscr{P}_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1})$. Donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n$, ce qu'il fallait démontrer.

**Solution 11**

**Écriture de la proposition.** Soit pour $n \geqslant 1$, $S_n := 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$ et $u_n := \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété qui dépend de l'entier $n \geqslant 1$ :

$$S_n = u_n.$$

**Initialisation.** On a clairement $S_1 = 1$ et $u_1 = \left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2 = 1$. On a donc $\mathscr{P}_1$.

**Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}_n$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} - u_{n+1} &= S_n + (n+1)^3 - u_n - \left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}^2 + \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \\ &= (n+1)^3 - \left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}^2 + \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \qquad \text{d'après } \mathscr{P}_n \\ &= (n+1)^3 + (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} - \frac{(n+2)^2}{4}\right) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left(4(n+1) + (n-(n+2))(n-(n+2))\right) = 0 \end{aligned}$$

On a donc bien $\mathscr{P}_{n+1}$.

**Conclusion.** On a $\mathscr{P}_1$ et $\forall n \geqslant 1,\ \mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$.

D'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \geqslant 1,\ \mathscr{P}_n$.

**Solution 12**

**Écriture de la proposition.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété qui dépend de l'entier $n \geqslant 1$ :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

**Initialisation.** On a $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1\times(1+1)} = \frac{1}{2}$ donc on a $\mathscr{P}_1$.

**Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}_n$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad \text{d'après } \mathscr{P}_n, \\ &= \frac{1}{n+1}\left(n + \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\,\frac{n(n+2)+1}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+1}\,\frac{(n+1)^2}{n+2} \\ &= \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathscr{P}_{n+1}$.

**Conclusion.** On a $\mathscr{P}_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1})$. Donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n$, ce qu'il fallait démontrer.

**Solution 13**

1. Pour tous réels $a$ et $b$,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad \text{et} \qquad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

2. (a) On a $S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + 27 = 28, \quad S_3 = 28 + 625 = 653.$

   (b) **Écriture de la proposition.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété qui dépend de l'entier $n \geqslant 1$ :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = 1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2.$$

**Initialisation.** On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} (2k-1)^3 = 1^3 = 1$ et $2 \times 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

donc on a $\mathscr{P}_1$.

**Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}_n$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (2n+1)^3 \\ &= 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 \quad \text{d'après } \mathscr{P}_n, \\ &= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \\ &= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \\ &= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 + n^2 + 2n + 1 - (n+1)^2 \\ &= 2n^4 + 8n^3 + 12n^2 + 8n + 2 - (n+1)^2 \\ &= 2(n+1)^4 - (n+1)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathscr{P}_{n+1}$.

**Conclusion.** On a $\mathscr{P}_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1})$. Donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n$, ce qu'il fallait démontrer.

**Solution 14**
Soit $p \geqslant 1$, on pose

$$S_p := 1-2+3-4+\ldots+(2p-3)-(2p-2)+(2p-1)-2p = \sum_{k=1}^{p}[(2k-1)-2k] = \sum_{m=1}^{2p}(-1)^{m+1}m.$$

1. Première méthode :
   **Écriture de la proposition.** Soit $\mathscr{H}_p$ la proposition qui dépend de l'entier $p \geqslant 1$, $\quad S_p = -p$.
   **Initialisation.** On a clairement $S_1 = 1-2 = -1$ donc $\mathscr{H}_1$.
   **Hérédité.** Soit $p \geqslant 1$ un entier pour lequel on a $\mathscr{H}_p$. On a alors

$$\begin{aligned} S_{p+1} &= S_p + (2p+1) - (2p+2) \\ &= -p + (2p+1) - (2p+2) \qquad \text{d'après } \mathscr{H}_p \\ &= -p + (-1) \\ &= -(p+1) \end{aligned}$$

   c'est-à-dire $\mathscr{H}_{p+1}$.
   **Conclusion.** On a
   $\left.\begin{array}{r} \mathscr{H}_1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ (\mathscr{H}_p \Longrightarrow \mathscr{H}_{p+1}) \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}_p$ ce qu'il fallait démontrer.
2. Deuxième méthode :
   Avec des petits points, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_p &= \underbrace{1-2}_{=-1} + \underbrace{3-4}_{=-1} + \ldots + \underbrace{(2p-3)-(2p-2)}_{=-1} + \underbrace{(2p-1)-2p}_{=-1} \\ &= \underbrace{-1+(-1)+\ldots+(-1)}_{p \text{ fois}} \\ &= -p. \end{aligned}$$

   Sans les petits points, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{k=1}^{p}[(2k-1)-2k] \\ &= \sum_{k=1}^{p}(-1) \\ &= -p. \end{aligned}$$

**Solution 15**
1. Pour $n \geqslant 3$, $(n+1)^2-(2n+6) = n^2-5 \geqslant 9-5 \geqslant 0$. Donc $(n+1)^2 \geqslant 2n+6$.
   Pas besoin de récurrence.
2. **Par disjonction de cas** :
   Si $n$ est pair alors, il existe un entier $p$ tel que $n = 2p$. Dans ces conditions, on a $n^2+n+2 = 4p^2+2p+2 = 2(2p^2+p+1)$. Puisque $2p^2+p+1$ est un entier, c'est que $n^2+n+2$ est un nombre pair.

Si $n$ est impair alors, il existe un entier $p$ tel que $n = 2p+1$. Dans ces conditions, on a $n^2+n+2 = 4p^2+4p+1+2p+1+2 = 2(2p^2+3p+2)$. Puisque $2p^2+3p+2$ est un entier, c'est que $n^2+n+2$ est un nombre pair.

**Par récurrence** :

**Écriture de la proposition.** Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}$ : $n^2+n+2$ est un nombre pair.

**Initialisation.** Pour $n = 0$, on a clairement, $n^2+n+2 = 0$ est un nombre pair. C'est $\mathscr{P}_0$.

**Hérédité.** Soit $n$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}_n$. On a $(n+1)^2+(n+1)+2 = n^2+2n+1+n+1+2 = (n^2+n+2)+2(n+1)$. Or d'après $\mathscr{P}_n$, $n^2+n+2$ est un nombre pair, donc $(n+1)^2+(n+1)+2$ est la somme de deux nombres pairs, à savoir $n^2+n+2$ et $2(n+1)$, c'est donc un nombre pair. On a donc $\mathscr{P}_{n+1}$.

**Conclusion.** On a $\left.\begin{array}{r}\mathscr{P}_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1})\end{array}\right\}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$ ce qu'il fallait démontrer.

Sans récurrence ?

On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n(n+1)}{2} = 1+2+\ldots+n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ donc $S_n := \dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier et $n^2+n+2 = 2(S_n+1)$ est un entier pair.

3. On ne risque pas d'y arriver par récurrence sur un ensemble de nombres **réels**. En revanche pour tout réel $x \geqslant 3$, $(x-1)^2-(x+1) = x^2-3x = x(x-3)$ est le produit de deux nombres positifs ou nuls, donc est lui-même positif ou nul.

**Solution 16**

On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

**Écriture de la proposition.** On considère la propriété $\mathscr{P}(n)$ : $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.

**Initialisation.** $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée, puisque $2^0 = 1! = 1^1 = 1$.

**Hérédité.** Supposons maintenant que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et prouvons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On commence par prouver l'inégalité de gauche. On remarque d'abord que, puisque $n \geqslant 1$, on a $2 \leqslant n+1$ d'où l'on déduit

$$2^n = 2 \times 2^{n-1} \leqslant 2 \times n! \leqslant (n+1) \times n! \leqslant (n+1)!$$

Pour l'inégalité de droite, on part de l'hypothèse de récurrence et on multiplie par $n+1$, pour obtenir

$$(n+1)! \leqslant (n+1)n^n.$$

Or, $n \leqslant n+1$ et donc $n^n \leqslant (n+1)^n$. On en déduit que

$$(n+1)! \leqslant (n+1) \times (n+1)^n = (n+1)^{n+1}.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

**Conclusion.** On a $\left.\begin{array}{r}\mathscr{P}(1) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1))\end{array}\right\}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n)$ ) ce qui démontre l'inégalité voulue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Solution 17 (Limite de validité)**

1. Soit $n \geq 3$ tel que $P_n$ est vraie. On a alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geqslant 2n^2.$$

Il suffit donc de montrer que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$ c'est-à-dire $n^2-2n-1 \geqslant 0$.

Or $n^2-2n-1 = (n-1)^2-2 \geqslant (3-1)^2-2 \geqslant 2$. On a donc bien $P_{n+1}$.

2. Il faut faire attention, car $P_3$ est fausse ! On ne peut donc pas en déduire que $P_n$ est vraie pour $n \geqslant 3$. D'ailleurs, $P_4$ est fausse, mais $P_5$ est vraie. Par le principe de récurrence, $P_n$ est vraie pour $n \geqslant 5$. Pour les premières valeurs de $n$, on constate également que $P_0$ et $P_1$ sont vraies.

**Solution 18**

Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \neq \dfrac{1}{2}$.

On a clairement $\mathscr{P}_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}$. On a donc $2(5u_n - 1) = 4u_n + 1$ soit $10u_n - 2 = 4u_n + 1$ soit $6u_n = 3$ soit $u_n = \dfrac{1}{2}$. On a donc démontré $(u_{n+1} = \dfrac{1}{2}) \Longrightarrow (u_n = \dfrac{1}{2})$.

Par contraposée, on a $\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En résumé, on a $\left.\begin{array}{l} \mathscr{P}_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1} \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$, ce qu'il fallait démontrer.

**Solution 19 (Décomposition du nombre 1)**

**Écriture de la proposition.** Pour $n \geqslant 3$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante : « Il existe $n$ entiers strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, deux à deux distincts, tels que $\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} = 1$ ». Prouvons par récurrence que pour tout $n \geq 3, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

**Initialisation.** On a

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

**Hérédité.** Soit $n \geqslant 3$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Il existe des entiers strictement positifs et deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

On peut toujours supposer que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Il est alors facile de remarquer que l'on a nécessairement $x_1 \geqslant 2$ (puisque $\dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} > 0$, $x_1$ ne peut pas être égal à 1). On écrit alors

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + \cdots + \frac{1}{2x_n} \\ &= \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \cdots + \frac{1}{y_{n+1}} \end{aligned}$$

en ayant posé $y_1 = 2$ et $y_k = 2x_{k-1}$ pour $k = 2, \ldots, n+1$. On a alors

$$y_1 = 2 < 4 \leqslant 2x_1 = y_2 < y_3 < \cdots < y_{n+1}.$$

La propriété est donc démontrée au rang $n+1$.

**Conclusion.** On a $\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}(3) \\ \forall n \geqslant 3,\ (\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)) \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ ce qu'il fallait démontrer.

**Solution 20 (Récurrence double)**
On va procéder par récurrence double.

**Écriture de la proposition.** Posons, pour $n \geqslant 1$, la propriété $P_n$ suivante :

$$P_n : \ 1 \leq a_n \leqslant n^2 \text{ et } 1 \leqslant a_{n+1} \leqslant (n+1)^2.$$

**Initialisation.** La proposition $P_1$ est VRAIE. En effet, on a $1 \leqslant a_1 = 1 \leqslant 1^2$ et, puisque $a_2 = a_0 + a_1 = 2$, on a aussi $1 \leqslant a_2 \leqslant 2^2$.

**Hérédité.** Soit $n \geqslant 2$ un entier tel que $P_n$ est VRAIE, et démontrons $P_{n+1}$. On a déjà $1 \leqslant a_{n+1} \leqslant (n+1)^2$. D'autre part, on a

$$a_{n+2} \geqslant a_{n+1} \geqslant 1$$

et

$$a_{n+2} \leqslant (n+1)^2 + \frac{2}{n+2}n^2 = \frac{(n+1)^2(n+2)+2n^2}{n+2} = \frac{n^3+6n^2+5n+2}{n+2}.$$

Mais,

$$(n+2)^2 = \frac{(n+2)^3}{n+2} = \frac{n^3+6n^2+12n+8}{n+2} \geqslant \frac{n^3+6n^2+5n+2}{n+2}.$$

On a bien prouvé que $P_{n+1}$ est vraie.

**Conclusion.** Par récurrence double, $P_n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$1 \leqslant a_n \leqslant n^2.$$

**Solution 21 (Simple ou double ?)**

1. On va procéder par récurrence double.

   **Écriture de la proposition.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $F_n \geqslant n-1$ ».

   **Initialisation.** $F_0 = 0 \geqslant -1$ et $F_1 = 1 \geqslant 1$ : les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.

   **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vérifiées. Prouvons alors que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Pour cela, on remarque que

   $$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geqslant n + n - 1 \geqslant n + 1,$$

   à condition que $n \geqslant 1$ et non $n \in \mathbb{N}$.

   Pour ne pas faire d'erreurs, il faut donc ici initialiser la propriété jusque $\mathcal{P}(2)$, puis faire l'étape d'hérédité à partir de $n \geqslant 1$. Reprenons donc une rédaction correcte.

   **Initialisation.** $F_0 = 1 \geqslant 0, F_1 = 1 \geqslant 1, F_2 = 1+1 = 2 \geqslant 2$ : les propriétés $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vérifiées.

   **Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vérifiées. Prouvons alors que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Pour cela, on remarque que

   $$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geqslant n + n - 1 \geqslant n + 1.$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vérifiée.

   **Conclusion.** On a $\left.\begin{array}{r} \mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1) \text{ et } \mathcal{P}(2) \\ \forall n \geqslant 3,\ (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+2)) \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème de récurrence double, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ ce qu'il fallait démontrer.

2. Ici, une récurrence simple suffit !

   **Écriture de la proposition.** Notons, pour $n \in \mathbb{N}$,

   $$\mathcal{Q}(n) \ : \ F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$$

**Initialisation.**

$$F_0F_2 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^{0+1},$$

donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. On a, en remplaçant $F_{n+3}$ et un des termes de $F_{n+2}$ par leur expression utilisant la formule de récurrence de $(F_n)$,

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}^2 &= F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+2}(F_{n+1} + F_n) \\ &= F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} \\ &= -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} \end{aligned}$$

On a bien démontré $\mathcal{Q}(n+1)$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

**Conclusion.** On a $\left.\begin{array}{r} \mathcal{Q}(0) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{Q}(n) \Longrightarrow \mathcal{Q}(n+1)) \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{Q}(n)$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Récurrence simple : Notons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}(n)\ :\ S_n := \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}.$$

$\mathcal{H}(0)$ est claire. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}(n)$ est vraie. On a alors $S_{n+1} = S_n + F_{n+1}^2 = F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2$ d'après $\mathcal{R}(n)$. Donc $S_{n+1} = F_{n+1}\left(F_n + F_{n+1}\right) = F_{n+1}F_{n+2}$. Donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

4. Pas de récurrence ! On va se servir de la formule de Binet (exemple 2 page 8) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 &= \frac{1}{5}\left(\varphi^{n+k} - \varphi'^{n+k}\right)\left(\varphi^{n-k} - \varphi'^{n-k}\right) - \frac{1}{5}\left(\varphi^{2n} + \varphi'^{2n} - 2(\varphi\varphi')^n\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\varphi^{2n} - (-1)^n\frac{\varphi^k}{\varphi'^k} - (-1)^n\frac{\varphi'^k}{\varphi^k} + \varphi'^{2n} - \varphi^{2n} - \varphi'^{2n} + 2(-1)^n\right) \\ &= -\frac{1}{5}\left((-1)^n\left(-\varphi^2\right)^k + (-1)^n\left(-\varphi'^2\right)^k - 2(-1)^n\right) \\ &= -\frac{(-1)^n}{5}\left((-1)^k\left(\varphi^2\right)^k + (-1)^k\left(\varphi'^2\right)^k - 2\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+k+1}}{5}\left(\left(\varphi^2\right)^k + \left(\varphi'^2\right)^k - 2(-1)^k\right) \\ &= (-1)^{n+k+1}F_k^2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé à profusion $\varphi\varphi' = -1$ et $\dfrac{\varphi}{\varphi'} = -\varphi^2$.

**Remarque 4.**

La récurrence est partie se cacher dans la démonstration de la formule de Binet. La question 2 qui est un cas particulier ($k = 1$) aurait pu être résolue de la même façon.

**Solution 22 (Partage de carrés)**

1. Pour $n = 4$, c'est très facile ! Pour $n = 6$, on considère un sommet du carré (de côté $a$). On construit à partir de ce sommet sur chaque côté issu de ce sommet trois carrés de longueur $a/3$. On obtient 5 carrés (un des carrés est commun). La surface restant est un carré, de côté $2a/3$. Pour $n = 7$, on part d'un découpage en 4 carrés, puis on coupe l'un des carrés en 4 : on obtient bien 7 carrés. Pour $n = 8$, on procède comme pour $n = 6$, mais en considérant des carrés de côté $a/4$ désormais.
2. Le passage est similaire à celui de 4 carrés à 7 carrés. Parmi les $n$ carrés, on en choisit un que l'on découpe en 4.
3. Pour $n = 2$ et $n = 3$, c'est clair : dès qu'on trace un trait de séparation, on devra tracer au moins un trait perpendiculaire et l'on obtiendra au moins quatre carrés. Pour $n = 5$, on peut considérer les 4 carrés au sommet du carré. S'ils ont tous pour côté $a/2$, alors on n'obtient que 4 carrés. Sinon, on doit au moins avoir 6 carrés. . . .
4. Démontrons par récurrence triple( !) que, pour tout $n \geqslant 6$, on peut partager un carré en $n$ carrés.
   **Initialisation.** Cette proposition est vraie pour $n = 6$, $n = 7$ et $n = 8$.
   **Hérédité.** Soit $n \geq 6$ et supposons que la propriété est vraie pour $n$, $n + 1$ et $n + 2$. Alors d'après la question 2, elle est aussi vraie pour $n + 3$.
   **Conclusion.** On en déduit que, pour tout $n \geqslant 6$, on peut partager un carré en $n$ carrés.
   Finalement, on a démontré que l'on peut partager un carré en $n$ carrés si et seulement si $n = 4$ ou $n \geqslant 6$.

**Solution 23 (Somme de tous les termes précédents)**

**Écriture de la proposition.** On va démontrer par récurrence forte sur $n \geqslant 1$ la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante : $u_n = 2^{n-1}$.

**Initialisation.** D'après la formule de récurrence, $u_1 = u_0 = 1 = 2^{1-1}$. On a donc $\mathcal{P}(1)$.

**Hérédité.** Soit $n \geqslant 1$. Supposons la proposition $\mathcal{P}(k)$ vraie pour tous les $k$ compris entre 1 et $n$. On a, appliquant d'abord la définition de $u_{n+1}$, puis $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots \mathcal{P}(n)$, :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= 1 + 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

D'après la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, on déduit que

$$u_{n+1} = 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 1 + 2^n - 1 = 2^{(n+1)-1}.$$

Donc la proposition $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

**Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (\forall k \leqslant n,\ \mathcal{P}(k)) \implies \mathcal{P}(n + 1)$ d'après le théorème de récurrence forte $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$.

**Solution 24 (Une décomposition des entiers)**

On va prouver l'existence par récurrence **forte**. Le résultat est en effet vrai pour $n = 1$, il suffit de prendre $p = q = 0$. Supposons maintenant que **tout entier inférieur ou égal à** $n - 1$ vérifie cette propriété, et prouvons qu'elle est encore vérifiée pour $n$. On distingue alors deux cas :

- ou bien $n$ est pair : dans ce cas, $n = 2m$, et $m \in \{1, \dots, n\}$. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, et donc $m$ s'écrit $m = 2^a(2b + 1)$, avec $a, b \in \mathbb{N}$. Mais alors $n = 2^{a+1}(2b + 1)$, et donc l'existence est démontrée avec $p = a + 1$ et $q = b$ ;
- ou bien $n$ est impair : alors $n = 2m + 1 = 2^0(2m + 1)$, et la proposition est démontrée pour $p = 0$ et $q = m$.

Ainsi, l'existence de la décomposition est établie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Prouvons désormais l'unicité. Supposons que $n = 2^p(2q+1) = 2^a(2b+1)$. Si $p \geqslant a$, alors $2^{p-a}(2q+1) = 2b+1$ et le terme de droite est impair. Celui de gauche l'est aussi, et donc $p = a$. On en déduit donc que $q = b$ également, ce qui prouve l'unicité.

**Solution 25 (Une décomposition des entiers)**
On va démontrer par récurrence forte la proposition

$$\mathscr{H}_n : \ \exists p \in \mathbb{N},\ q_1 < \ldots < q_p \in \mathbb{N}^p,\ n = \sum_{k=1}^{p} 2^{q_k}.$$

On a clairement $\mathscr{H}_1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall m \in [\![1, n-1]\!],\ \mathscr{H}_m$.

- Si $n$ est pair, on pose $m := \dfrac{n}{2}$. D'après $\mathscr{H}_m$, $\exists p \in \mathbb{N},\ q_1 < \ldots < q_p \in \mathbb{N}^p,\ m = \sum_{k=1}^{p} 2^{q_k}$. Donc $n = 2m = \sum_{k=1}^{p} 2^{q_k+1}$ et on a bien $\mathscr{H}_n$.
- Si $n$ est impair, on pose $m := \dfrac{n-1}{2}$. D'après $\mathscr{H}_m$, $\exists p \in \mathbb{N},\ q_1 < \ldots < q_p \in \mathbb{N}^p,\ m = \sum_{k=1}^{p} 2^{q_k}$. Donc $n = 2m+1 = 2^0 + \sum_{k=1}^{p} 2^{q_k+1}$ et on a bien $\mathscr{H}_n$.

Par récurrence forte, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{H}_n$.

**Solution 26 (Récurrence un peu plus compliquée)**
Remarquons d'abord que si $p \in A$, alors tout l'intervalle $\{1, \ldots, p\}$ est contenu dans $A$ à cause de la propriété 3 : en effet, si on applique la propriété 3 avec $n = p-1$, on obtient que $p-1 \in A$, puis $p-2 \in A$. Il faut faire une récurrence (décroissante) finie pour prouver que tout l'intervalle $\{1, \ldots, p\}$ est inclus dans $A$. Supposons ensuite que $A \neq \mathbb{N}^*$, et notons $p$ le plus petit entier de $\mathbb{N}^*$ qui n'est pas dans $A$. Alors, $p > 1$, et donc $p - 1 \geqslant 1$. Or, $p-1 \in A$ et donc $2(p-1) \in A$. Mais $2(p-1) \geqslant p$ puisque $p \geqslant 2$. Par la remarque faite au début, on en déduit que $p \in A$, une contradiction.

**Solution 27**

1. (a) $\begin{aligned} u_1 &= \left(1 + \frac{2}{1}\right) u_0 + \frac{6}{1} \\ &= 3 \times 5 + 6 \\ &= 21. \end{aligned}$

   (b) On obtient : $d_0 = u_1 - u_0 = 16$, $d_1 = u_2 - u_1 = 24$, puis $d_2 = 32$ $d_3 = 40$, $d_4 = 48\ldots$ On peut donc conjecturer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $d_0 = 16$.

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   On sait que, pour tout entier naturel $n$, $v_n = 16 + 8n = 8(n+2)$.
   La somme $S_n$ des $n$ premiers termes est :
   $$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} \\ &= n \times v_0 + 8 + 2 \times 8 + \cdots + (n-1) \times 8 \\ &= 16n + 8 \times \frac{n(n-1)}{2} \\ &= 16n + 4n(n-1) \\ &= 4n^2 + 12n. \end{aligned}$$

3. Démonstration par récurrence :
   – Initialisation : $u_0 = 5$ : vrai

– Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

Alors $u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) u_n + \frac{6}{n+1}$

$= \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \left(4n^2 + 12n + 5\right) + \frac{6}{n+1}.$

Or $4n^2 + 12n + 5 = 4(n+1)^2 - 8n - 4 + 12n + 5$

$= 4(n+1)^2 + 4n + 1$

$= 4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3.$

En reportant dans $u_{n+1}$ au-dessus, on obtient :

$u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \left[4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3\right] + \frac{6}{n+1}$

$= 4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3 + 8(n+1) + 8 - \frac{6}{n+1} + \frac{6}{n+1}$

$= 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5.$

La relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : on vient de démontrer par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après les questions précédentes, on déduit que :

$d_n = u_{n+1} - u_n$

$= 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5 - \left(4n^2 + 12n + 5\right)$

$= 4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 - 4n^2 - 12n - 5$

$= 8n + 16$

$= v_n.$

Conclusion : la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $d_0 = 16$.

**Solution 28**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ et $S_n := (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!}$.
On a, en factorisant au maximum.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= (-1)^{n+1} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)(x-n-1)}{(n+1)!} - (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)(x-n-1)}{(n+1)!} \left(1 + \frac{n+1}{x-n-1}\right) \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)(x-n-1)}{(n+1)!} \times \frac{x-n-1+n+1}{x-n-1} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)(x-n-1)}{(n+1)!} \times \frac{x}{x-n-1} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{(n+1)!} \\
&= u_{n+1}.
\end{aligned}$$

Par télescopage, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} = \sum_{h=1}^{n} u_h = \sum_{k=0}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) = S_n - S_0.$$

Comme $S_0 = 1 = u_0$ on a bien

$$S_n = \sum_{h=0}^{n} u_h,$$

ce qu'il fallait vérifier.

**Solution 29**
On pose

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1}{1 + x_2.x_3.\ldots.x_n} + \frac{x_2}{1 + x_1.x_3.\ldots.x_n} + \ldots + \frac{x_n}{1 + x_1.x_2.\ldots.x_{n-1}}.$$

Comme $x_1 \leqslant 1$ on a $x_1.x_2.x_3.\ldots.x_n \leqslant x_2.x_3.\ldots.x_n$
donc $\frac{x_1}{1 + x_2.x_3.\ldots.x_n} \leqslant \frac{x_1}{1 + x_1.x_2.x_3.\ldots.x_n}$. De même pour les autres quotients et on a alors

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{1 + x_1.x_2.x_3.\ldots.x_n}.$$

**Écriture de la proposition.** Soit pour tout entier $n \geqslant 2$, la proposition $H_n$ : pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$ , $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant (n-1)(1 + x_1x_2 \ldots x_n)$.

**Initialisation.** La propriété est vraie pour $n = 2$ :
$(1 - x_1)(1 - x_2) \geqslant 0$, soit $1 - x_1 - x_2 + x_1x_2 \geqslant 0$ soit $1 + x_1x_2 \geqslant x_1 + x_2$.

**Hérédité.** Soit $n \geqslant 3$ un entier pour lequel on a $H_{n-1}$. On fixe $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in [0,1]$, et on considère la fonction affine

$$G(x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (n-1)(1 + x_1x_2 \ldots x_n).$$

Elle prend son maximum sur $[0,1]$ en 0 ou en 1.
Or $G(0) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - (n-1) \leqslant 0$ et

$$\begin{aligned} G(1) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + 1 - (n-1)(1 + x_1x_2 \ldots x_{n-1}) \\ &\leqslant \underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - (n-2)(1 + x_1x_2 \ldots x_{n-1})}_{\leqslant 0 \ (H_{n-1})} + 1 - (1 + x_1x_2 \ldots x_{n-1}) \\ &\leqslant 0 + 1 - 1 - x_1x_2 \ldots x_{n-1} \\ &\leqslant -x_1x_2 \ldots x_{n-1} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

donc pour tout $x_n \in [0,1]$, $G(x_n) \leqslant 0$. On a bien $H_n$.

**Conclusion.** On a $H_2$ et $\forall n \geqslant 3$, $(H_{n-1} \Longrightarrow H_n)$. Donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour finir, on obtient, en divisant par $1 + x_1x_2 \ldots x_n > 0$, que

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{1 + x_1.x_2.x_3.\ldots.x_n} \leqslant n - 1.$$

Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \ \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^k}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

On a clairement $\mathcal{P}_0$ :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \ \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pour lequel on a $\mathcal{P}_n$. Soit $x \in ]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \cdots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} + \frac{2^{n+1}}{1+x^{2^{n+1}}} &= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} + \frac{2^{n+1}}{1+x^{2^{n+1}}} \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+2}}{1-x^{2^{n+2}}}. \end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{P}_{n+1}$.

Par récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$.

**Solution 30 (Une identité de François Nicole (1727))**
Soit $z \in \mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := -\dfrac{z_1 \dots z_{n-1}}{(z+z_1)\dots(z+z_n)}$ et $S_n := \dfrac{z_1 \dots z_n}{z(z+z_1)\dots(z+z_n)}$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \frac{z_1 \dots z_n}{z(z+z_1)\dots(z+z_n)} \left( \frac{z_{n+1}}{z+z_{n+1}} - 1 \right) \\ &= \frac{z_1 \dots z_n}{z(z+z_1)\dots(z+z_n)} \left( -\frac{z}{z+z_{n+1}} \right) \\ &= -\frac{z_1 \dots z_n}{(z+z_1)\dots(z+z_n)(z+z_{n+1})} \\ &= u_{n+1}. \end{aligned}$$

Par télescopage, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} = \sum_{h=1}^{n} u_h = \sum_{k=0}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) = S_n - S_0.$$

Comme $S_0 = \dfrac{1}{z}$ on a bien

$$S_n - \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{n} u_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{z_1 \dots z_{k-1}}{(z+z_1)\dots(z+z_k)},$$

ce qu'il fallait vérifier.

**Solution 31**
Soit $x \in ]0,1[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := \dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}$ et $S_n := \dfrac{2^n}{1-x^{2^n}}$. On a $x^{2^{n+1}} = \left(x^{2^n}\right)^2$, donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} - \frac{2^n}{1-x^{2^n}} \\ &= \frac{2^n}{1-x^{2^n}} \left( \frac{2}{1+x^{2^n}} - 1 \right) \\ &= \frac{2^n}{1-x^{2^n}} \frac{2-1-x^{2^n}}{1+x^{2^n}} \\ &= \frac{2^n}{1-x^{2^n}} \frac{1-x^{2^n}}{1+x^{2^n}} \\ &= \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = u_n. \end{aligned}$$

Par télescopage, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (S_{k+1} - S_k) = S_{n+1} - S_0.$$

Or $-S_0 = -\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x-1}$. On obtient bien le résultat demandé.

### 1.7.1 Suites récurrentes et fonctions

**Solution 32**

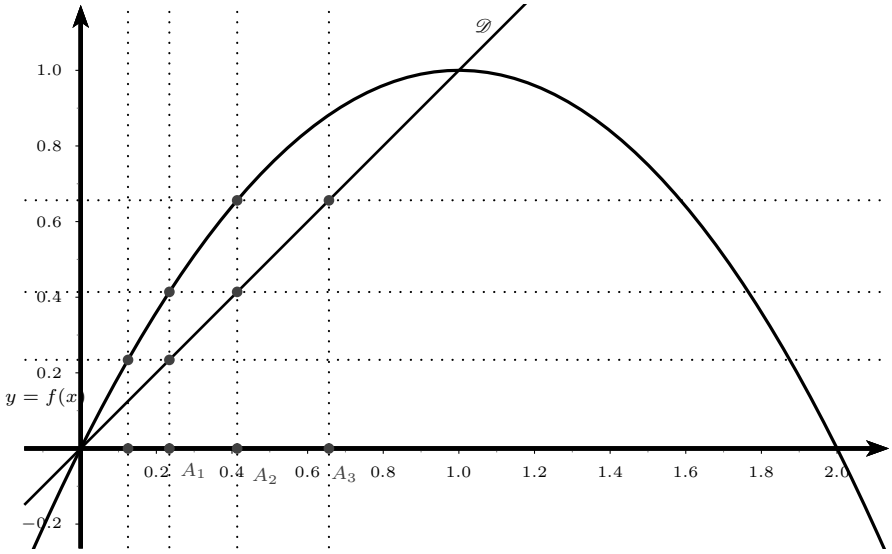
► Si $u_0 \leqslant u_1$, on considère pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathscr{P}_n : u_n \leqslant u_{n+1}$.
On a $\mathscr{P}_0$.
Soit $n$ un entier pour lequel on a $\mathscr{P}_n$. On a donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. Par croissance de $f$, on a donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ par définition de la suite $(u_n)$, soit $\mathscr{P}_{n+1}$.
D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$. C'est bien dire que la suite $(u_n)$ est croissante.

► Si $u_0 \geqslant u_1$, on démontre de même (par récurrence) la proposition $\mathscr{Q}_n : u_n \geqslant u_{n+1}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

**Solution 33 (Suite logistique. Inde, Avril 2003)**

1. (a) On trouve $u_1 = \dfrac{15}{64}$ et $u_1 = \dfrac{1695}{4096}$.

(b)




2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{P}_n$ la proposition : $0 < u_n < 1$. On a clairement $\mathscr{P}_0$ puisque $a \in ]0\,,\,1[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a $\mathscr{P}_n$. $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$ peut s'écrire comme le produit de deux nombres strictement positifs : $u_n$ et $2 - u_n$ donc $u_{n+1} > 0$. De plus $u_{n+1} - 1 = -(u_n - 1)^2 < 0$ puisque $u_n \neq 1$. Donc $0 < u_{n+1} < 1$ et on a bien $\mathscr{P}_{n+1}$.
D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_n^2 - u_n = u_n(1 - u_n) > 0$. La suite $(u_n)$ est donc strictement croissante.

3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$. On considère la suite numérique $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - u_n.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - 2u_n + u_n^2 = (1 - u_n)^2 = v_n^2.$$

(b) On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^n} = (1 - a)^{2^n} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$ puis $u_n = 1 - v_n = 1 - \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

**Solution 34 (La suite qui se prenait pour une fonction)**

1. L'ensemble image $f(\mathbb{N}^*) = \{m \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ m = f(n)\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide. Elle admet donc un plus petit élément qui est le minimum de $f$ sur $\mathbb{N}^*$.

   On a pour tout $n > 1$, $\quad f(n) > f(f(n-1))$ donc $n$ ne réalise pas le minimum de $f$ sur $\mathbb{N}^*$.

   Donc $f(1)$ est le minimum de $f$ sur $\mathbb{N}^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un entier pour lequel on a $\mathcal{H}_n$. On a clairement en spécifiant $m = n+1$ :
   $f(1) < f(2) < \ldots < f(n-1) < f(n) < f(n+1)$.

   L'ensemble image $f(\mathbb{N}^* \cap ]n\ ,\ +\infty[) = \{m \in \mathbb{N}^*,\ \exists k > n,\ m = f(k)\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide. Elle admet donc un plus petit élément $f(k)$ qui est le minimum de $f$ sur $\mathbb{N}^* \cap ]n, +\infty[$.

   Supposons l'espace d'un instant que $k > n+1$, on aurait $f(k) > f(f(k-1))$ avec $k-1 > n$ donc $f(k-1) > n$ d'après $\mathcal{H}_n$. Donc $k$ ne réalise pas le minimum de $f$ sur $\mathbb{N}^* \cap ]n, +\infty[$. Donc ce minimum est $f(n+1)$. C'est bien $\mathcal{H}_{n+1}$.

   D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}_n$. En particulier $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$. De ce fait, on a – via une récurrence sans problème – $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) \geqslant n$.

3. Par l'absurde, supposons l'espace d'un instant, $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) > n$ on a donc $f(n) \geqslant n+1$, puis par croissance de $f$, $\quad f(f(n)) \geqslant f(n+1)$ en contradiction avec $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n+1) > f(f(n))$.

**Solution 35 (Composées)**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{H}_n$ la proposition : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{\circ n}(x) = a^n x + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b$.

   La proposition $\mathcal{H}_0$ est claire dans la mesure où $a^0 = 1$ et où la somme vide $\displaystyle\sum_{i=0}^{-1} a^i b$ est nulle.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a $\mathcal{H}_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f^{\circ(n+1)}(x) &= \left(f \circ f^{\circ n}\right)(x) \\ &= f\left(f^{\circ n}(x)\right) \\ &= a f^{\circ n}(x) + b \\ &= a\left(a^n x + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b\right) + b \\ &= a^{n+1} x + \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} b + b \\ &= a^{n+1} x + \sum_{j=1}^{n} a^j b + \underbrace{b}_{j=0} \\ &= a^{n+1} x + \sum_{j=0}^{n} a^j b. \end{aligned}$$

   ce qu'il fallait vérifier pour obtenir $\mathcal{H}_{n+1}$.

   D'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n$.
   Voir aussi l'exercice 16 page 593.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{H}_n$ la proposition : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{\circ n}(x) = \dfrac{(ax+b)^{2^n} - b}{a}$.

   La proposition $\mathcal{H}_0$ est claire dans la mesure où $2^0 = 1$ et $(ax+b)^{2^0} - b = ax$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a $\mathcal{H}_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f^{\circ(n+1)}(x) = f\left(\circ f^{\circ n}(x)\right) &= a\left(\circ f^{\circ n}(x)\right)^2 + 2b\left(\circ f^{\circ n}\right) + \frac{b^2 - b}{a} \\ &= a\left(\frac{(ax+b)^{2^n} - b}{a}\right)^2 + 2b\left(\frac{(ax+b)^{2^n} - b}{a}\right) + \frac{b^2 - b}{a} \\ &= \frac{1}{a}\left[\left((ax+b)^{2^n}\right)^2 - 2b(ax+b)^{2^n} + b^2 + 2b(ax+b)^{2^n} - 2b^2 + b^2 - b\right] \\ &= \frac{1}{a}\left[(ax+b)^{2^{n+1}} - b\right], \end{aligned}$$

   ce qu'il fallait vérifier pour obtenir $\mathcal{H}_{n+1}$.

   D'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n$.

## 1.8 Problème

**Problème 1**

On considère la suite $(p_n)_n$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*,\ p_n := \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdots \dfrac{2n-1}{2n}$.

1. Donner une définition par récurrence de la suite $(p_n)_n$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.
3. Étudier le signe des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} - \dfrac{3n}{3(n+1)}$ et $v_n := \dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} - \dfrac{3n+1}{3n+4}$.

   **Indication 1.**

   On pourra s'aider de `Xcas`.

4. Démontrer par récurrence **au choix** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$ **ou** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

## 1.9 Correction

**Correction 1**

1. La suite $(p_n)_n$ est définie par récurrence par $p_1 = \dfrac{1}{2}$
   et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = p_{n-1} \times \dfrac{2n-1}{2n}$.

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n := \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$. On a $q_1 = \dfrac{2!}{2^2(1!)^2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
   De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} q_{n-1} \times \frac{2n-1}{2n} &= \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1!)^2} \times \frac{2n-1}{2n} \\ &= \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1!)^2 \times n} \\ &= \frac{(2n-1)! \times 2n}{2^{2n-1}(n-1!)^2 \times n \times 2n} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = q_n. \end{aligned}$$

   Les suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ ont la même définition par récurrence. Elles sont donc égales, ce qu'il fallait démontrer.

3. Sur le site https ://www.xcasenligne.fr, `Xcas` calcule gracieusement :

**Xcas en ligne**. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

D:=(2*n+1)^2/(2*n+2)^2-(3*n)/(3*n+3)

$$\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} - \frac{3n}{3n+3}$$

simplify(D)

$$\frac{1}{4n^2+8n+4}$$

F:=(2*n+1)^2/(2*n+2)^2-(3*n+1)/(3*n+4)

$$\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} - \frac{3n+1}{3n+4}$$

simplify(F)

$$\frac{-n}{12n^3+40n^2+44n+16}$$

factor(F)

$$\frac{-n}{4(n+1)^2(3n+4)}$$

   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{4(n+1)^2} > 0$ et $v_n = -\dfrac{n}{4(n+1)^2(3n+4)} < 0$.

4. **Écriture de la proposition.** Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$.
   **Initialisation.** On a clairement $\mathscr{P}(1)$ puisque $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Solutions

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on a $\mathscr{P}(n)$, donc $p_n^2 \leqslant \dfrac{1}{3n}$. On a alors

$$\begin{aligned} p_{n+1}^2 &\leqslant \frac{1}{3n} \times \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \\ &\leqslant \frac{1}{3n}\left(\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} - \frac{3n}{3(n+1)}\right) + \frac{1}{3(n+1)} \\ &\leqslant u_n + \frac{1}{3(n+1)}. \end{aligned}$$

Comme $u_n > 0$, on ne peut pas conclure.

**Écriture de la proposition.** Soit $\mathscr{Q}(n)$ la proposition qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

**Initialisation.** On a clairement $\mathscr{Q}(1)$ puisque $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{4}}$.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on a $\mathscr{Q}(n)$, donc $p_n^2 \leqslant \dfrac{1}{3n+1}$. On a alors

$$\begin{aligned} p_{n+1}^2 &\leqslant \frac{1}{3n+1} \times \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \\ &\leqslant \frac{1}{3n+1}\left(\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} - \frac{3n}{3(n+1)+1}\right) + \frac{1}{3n+4)} \\ &\leqslant v_n + \frac{1}{3n+4}. \end{aligned}$$

Or – cette fois – $v_n < 0$, donc $p_{n+1}^2 \leqslant \dfrac{1}{3n+4}$ et $p_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+4}}$, c'est-à-dire $\mathscr{Q}(n+1)$. On a bien hérédité de $\mathscr{Q}(n)$.

**Conclusion.** On a $\mathscr{Q}(1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\mathscr{Q}(n) \Longrightarrow \mathscr{Q}(n+1))$. Donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{Q}(n)$, ce qu'il fallait démontrer.

**Remarque 5.**

Maintenant on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n)$. En particulier, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$, puisque à la fois $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ prennent la valeur logique VRAI. Autrement dit, on a bien hérédité de $\mathscr{P}(n)$. Simplement, on ne peut pas le démontrer directement. D'où l'importance de rédiger soigneusement la proposition de récurrence.

# Chapitre 2

# Limites des suites

## Sommaire


| | | |
|---|---|---|
| **2.1** | **Notion de limite** | **42** |
| **2.2** | **Majoration et minoration d'une suite** | **44** |
| **2.3** | **Limites des suites** | **45** |
| **2.4** | **Opérations et limites** | **54** |
| **2.5** | **Théorème de convergence** | **59** |
| **2.6** | **Exemples** | **63** |
| **2.7** | **Vrai ou faux ?** | **68** |
| **2.8** | **QCM** | **71** |
| **2.9** | **Exercices** | **71** |
| **2.10** | **Solutions** | **78** |
| **2.11** | **Travaux dirigés** | **90** |
| **2.12** | **Problèmes** | **91** |

Pourquoi peut-on dire que

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} ?$$

Nous aurons une réponse à la fin de ce chapitre.

# 2.1 Notion de limite

Sauf mention contraire, les suites qui seront définies dans ce chapitre, le seront sur un intervalle $I$ de $\mathbb{N}$, non borné.

## 2.1.1 Exemple d'une stabilisation

On reprend à nouveau l'exemple 6 page 325 déjà vu dans le cours de seconde.

On imagine que $v_n$ désigne la valeur d'une grandeur physique à un instant $n$. Une interprétation de ce graphique est :

« Après une phase transitoire, la grandeur $v$ se **stabilise** autour d'une valeur proche de $1,4$ unité. »

Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 3, 25 |
| 2 | 3, 8125 |
| 3 | 3, 953125 |
| 4 | 3, 98828125 |
| 5 | 3, 9970703125 |
| 6 | 3, 9992675781 |
| 7 | 3, 9998168945 |
| 8 | 3, 9999542236 |
| 9 | 3, 9999885559 |
| 10 | 3, 999997139 |
| 11 | 3, 9999992847 |
| 12 | 3, 9999998212 |
| 13 | 3, 9999999553 |
| 14 | 3, 9999999888 |
| 15 | 3, 9999999972 |
| 16 | 3, 9999999993 |
| 17 | 3, 9999999998 |
| 18 | 4 |
| 19 | 4 |
| 20 | 4 |

Le tableau ci-contre présente des valeurs arrondies des premiers termes de $(u_n)$ telles que calculées par un tableur.

Dans la case `A2` on rentre la formule $=$ `A1` $+$ `1` dans la case `B2` on rentre la formule $=$ `.25` $*$ `B1` $+$ `3` et on copie ces formules dans les cases au-dessous.

Les termes de la suite semblent se rapprocher de 4 lorsque $n$ croît.

On a envie de dire que les termes de la suite $u$ se stabilisent autour de 4, que 4 est la **limite** de la suite $u$, que la suite $u$ **converge** vers 4.

À partir de $n = 18$, la machine n'est plus capable de distinguer – en ce qui concerne l'affichage – entre les termes de la suite et la valeur **limite**, à savoir 4.

Il reste à définir **mathématiquement** ces notions à partir de ces observations.

## 2.1.2 La lamentable histoire de Murphy le moustique

Murphy est très très fort. Il vole très très vite, à 150 km/h. Murphy est très très joueur.

À midi – au moment où l'express démarre à 100 km de là – Murphy part de la gare d'arrivée de l'express dans sa direction. Lorsqu'il rencontre l'express, Murphy fait coucou à l'agent de conduite, fait demi-tour

et retourne à son point de départ. À ce moment-là il fait à nouveau demi-tour et retourne en direction de l'express et ainsi de **suite**.

Quelle heure sera-t-il lorsque l'express va écraser Murphy contre le butoir de la gare d'arrivée ?

#### Le point de vue de Murphy

Soit $t_0 := 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $t_n$ l'instant du $n$-ième retour au butoir de la gare d'arrivée. On appelle $d_n := t_n - t_{n-1}$ le temps de trajet du $n$-ième aller-retour.

Au départ de l'action, l'express et Murphy se dirigent l'un vers l'autre à la vitesse relative de 250 km/h. Ils parcourent les 100 km qui les séparent en $\dfrac{100}{250} = 0,4$ h. Ils se rejoignent donc pour un premier coucou à $100 \times 0,4 = 40$ km de la gare de départ. Ensuite Murphy parcourt les 60 km restant à nouveau en 0,4 h puisqu'il vole toujours à la même vitesse. Donc $t_1 = u_1 = 0,8$ h. À l'instant $t_1$ l'express se trouve ainsi à 20 km de la gare d'arrivée.

La situation est donc la même qu'à l'instant $t_0$, sauf que les distances (et donc les temps de trajet) sont divisés par 5. On aura donc $d_2 = 0,8 \times 0,2$ et ainsi de suite.

La suite $(d_n)$ est donc une suite géométrique de premier terme $d_1 = 0,8$ et de raison $0,2$.

Ainsi,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} 0,8 \times 0,2^k = 0,8\,\frac{1-0,2^n}{1-0,2} = 1 - 0,2^n.$$

On constate que la suite $(t_n)$ est croissante (encore heureux !) et que les réels $t_n$ se rapprochent de 1.

#### Le point de vue de l'agent de conduite

Il parcourt 100 km à la vitesse de 100 km/h. Donc son temps de trajet est exactement 1 h.

#### Synthèse

Après une infinité d'allers et retours, Murphy se fait écraser par l'express à 13 h exactement.

D'une certaine façon, la suite $(t_n)$ se stabilise vers la valeur limite 1.

Là encore, il s'agit d'une description. Il nous manque toujours une définition rigoureuse.

#### Mention légale

Aucun moustique n'a été maltraité durant cet exercice. De toutes façons aucun agent de conduite n'a accepté de percuter un butoir à 100 km/h avec un train dans le but d'écraser un moustique.

### 2.1.3 Exemples d'une limite infinie

On reprend l'exemple de la suite de Fibonacci 2 page 316 déjà vu dans le cours de seconde ainsi que dans l'exemple 2 page 8.

Soit la suite $(F_n)$ définie par : $\begin{cases} F_0 &= F_1 = 1 \\ F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \end{cases}$.

Le tableau ci-contre présente des valeurs arrondies des premiers termes de $(F_n)$ telles que calculées par un tableur.

Dans la case `A2` on rentre la formule $=$ `A1` $+$ `1` dans la case `B3` on rentre la formule $=$ `B2` $+$ `B1` et on copie ces formules dans les cases au-dessous.

On imagine que $F_n$ désigne la valeur d'une grandeur physique à un instant $n$. Une interprétation de ce graphique est :
« La grandeur $F$ semble pouvoir dépasser n'importe quelle valeur qu'on pourrait fixer à l'avance. »

À partir de $n = 1476$ le tableur n'est plus capable de calculer les termes de la suite, de cette façon du moins.

On a envie de dire que les termes de la suite $F$ tendent vers l'infini.

Il reste à définir **mathématiquement** cette notion à partir de ces observations.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| ... | ... |
| 10 | 89 |
| ... | ... |
| 50 | 20365011074 |
| ... | ... |
| 100 | $5,7315E+020$ |
| ... | ... |
| 200 | $4,5397E+041$ |
| ... | ... |
| 300 | $3,5958E+062$ |
| ... | ... |
| 400 | $2,8481E+083$ |
| ... | ... |
| 500 | $2,2559E+104$ |
| ... | ... |
| 1000 | $7,0330E+208$ |

### 2.1.4 Exemple d'une dispersion

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Si $n$ est pair, alors $u_n = 1$ et si $n$ est impair, $u_n = -1$. Les termes de la suite ne se rapprochent pas d'une valeur unique quand $n$ devient grand.

On a envie de dire que la suite $(u_n)$ **n'a pas de limite** quand $n$ tend vers $+\infty$.

## 2.2 Majoration et minoration d'une suite

On se rappelle les définitions 5 page 71 du cours de seconde.
Dans la suite, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{N}$ non majoré.

**Définition 1.**

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite.

- Dire qu'une suite $u$ est **majorée** signifie qu'il existe un réel $M$ tel que, pour tout entier naturel $n \in I$, on a $u_n \leqslant M$.
  On dit alors que le réel $M$ est un **majorant** de la suite.
- Dire qu'une suite $u$ est **minorée** signifie qu'il existe un réel $m$ tel que, pour tout entier naturel $n \in I$, on a $u_n \geqslant m$.
  On dit alors que le réel $m$ est un **minorant** de la suite.
- Une suite est dite **bornée**, lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Autrement dit, dire que la suite $u$ est majorée, c'est dire que l'ensemble $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in I,\ x = u_n\}$ est majoré.

Les manipulations mécaniques des propositions mathématiques permettent d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 1**
Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite.

- Pour que la suite $u$ ne soit pas majorée, il faut et il suffit que pour tout réel $M$, il existe un entier naturel $n \in I$, pour lequel on ait $u_n > M$.
- Pour que la suite $u$ ne soit pas minorée, il faut et il suffit que pour tout réel $m$, il existe un entier naturel $n \in I$, pour lequel on ait $u_n < m$.
- Pour que la suite $u$ ne soit pas bornée, il faut et il suffit que pour tout réel $M$, il existe un entier naturel $n \in I$, pour lequel on ait $|u_n| > M$.

**Remarque 1.**

Une suite majorée (resp. minorée) admet une infinité de majorants (resp. minorants).

## 2.3 Limites des suites

### 2.3.1 Limite infinie

On dispose d'une suite $(u_n)_{n\in I}$. On dispose aussi d'une machine : machine à calculer comme calculette, tableur ou interpréteur `python` d'un ordinateur.

On a envie de dire que cette suite tend vers $+\infty$ si elle dépasse la capacité de la machine, c'est-à-dire le plus grand réel $A$ représenté dans la machine.

Une telle définition pose deux problèmes.

Le premier : toutes les machines, tous les programmes n'ont pas le même $A$, et une suite pourrait tendre vers $+\infty$ pour une machine et pas pour une autre.

Le deuxième : En remplaçant une machine avec $A_1$ par une machine avec $A_2 > A_1$, on pourrait se rendre compte que la suite, après avoir dépassé $A_1$ et donc s'être qualifiée pour tendre vers $+\infty$ pour la première machine, non content de ne pas atteindre $A_2$ et bloquer la deuxième machine pourrait prendre des valeurs comprises entre 0 et 1 par exemple, ce qui ne correspond pas à l'idée qu'on se fait d'une suite tend vers $+\infty$. La définition qui suit résout ces deux problèmes :

- Il faut dépasser n'importe quelle valeur $A$ de n'importe quelle machine.
- Une fois qu'on a dépassé cette valeur – pas forcément à la première réussite – la suite ne doit plus redescendre au-dessous de $A$, qu'elle soit calculable par la machine ou non.

**Définition 2.**

1. Dire qu'une suite $(u_n)_n$ a pour limite $+\infty$ signifie que pour tout réel $A$ l'intervalle $]\ A\ ,\ +\infty\ [$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
   On écrit alors : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
2. Dire qu'une suite $(u_n)$ a pour limite $-\infty$ signifie que pour tout réel $A$ l'intervalle $]-\infty\ ,\ A\ [$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
   On écrit alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

**Remarque 2.**

Avec des quantificateurs cela s'écrit :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty : \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > A.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty : \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n < A.$

**Exemple 1**

1. Soit $(u_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
   **Démonstration :** soit $A > 0$. Prenons $p = \left\lfloor \sqrt{A} \right\rfloor + 1$. ( $\lfloor \bullet \rfloor$ désigne la partie entière : définition 3 page 64 du cours de seconde)
   Alors $p^2 > A$. Pour tout $n \geqslant p$, $u_n = n^2 > p^2 > A$ donc $u_n \in [\ A\ ,\ +\infty\ [$.
   D'après la définition, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
2. $u_n = -n^3$ : de même, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

### 2.3.2 Cas des suites croissantes non majorées

**Théorème 2**

1. Si $u$ est une suite croissante non majorée, alors $u$ tend vers $+\infty$.
2. Si $u$ est une suite décroissante non minorée, alors $u$ tend vers $-\infty$.

**Démonstration 2**

1. Soit $A$ un réel quelconque. Comme $u$ n'est pas majorée, il existe un entier $p$ tel que, pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$.
   La suite $u$ est croissante, donc, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.
   Alors, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \in ]\ A\ ,\ +\infty\ [$.
   Ainsi, la suite tend vers $+\infty$.

2. Même démonstration. □

**Exemple 2**

Soit $u$ une suite arithmétique de raison $r > 0$.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

C'est une simple traduction de la propriété d'Archimède (théorème 2 page 63 du cours de seconde).

De même si $u$ une suite arithmétique de raison $r < 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

**Exemple 3**

Soit $u$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

1. Démontrer que la suite $u$ est croissante.
2. Démontrer que pour $m \geqslant 1$, $\quad u_{2m} - u_m \geqslant \dfrac{1}{2} \qquad [1]$
3. Écrire l'inégalité [1] successivement pour $m = 1$, $m = 2$, $m = 4$, $m = 8$, $\ldots$, $m = 2^{n-1}$ puis additionner membre à membre ces inégalités. En déduire que $u_{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$. En déduire que la suite $u$ n'est pas majorée et déterminer la limite de la suite $u$.

---

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$, donc la suite $u$ est strictement croissante.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_{2m} - u_m = \displaystyle\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k}$.

   Or pour tout $k \in [\![m+1, 2m]\!]$, on a $k \leqslant 2m$ donc $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2m}$ et

$$\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{2m} \geqslant \frac{1}{2m} \sum_{k=m+1}^{2m} 1 \geqslant \frac{1}{2m} \times m \geqslant \frac{1}{2}.$$

3. On écrit l'inégalité [1] successivement pour $m = 1$, $m = 2$, $m = 4$, $m = 8$, $\ldots$, $m = 2^{n-1}$ :

$$\begin{array}{lcl}
m = 1 : & \displaystyle\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} & \geqslant \quad \dfrac{1}{2} \\
m = 2 : & \displaystyle\sum_{k=3}^{4} \frac{1}{k} & \geqslant \quad \dfrac{1}{2} \\
m = 4 : & \displaystyle\sum_{k=5}^{8} \frac{1}{k} & \geqslant \quad \dfrac{1}{2} \\
m = 8 : & \displaystyle\sum_{k=9}^{16} \frac{1}{k} & \geqslant \quad \dfrac{1}{2} \\
\ldots & \ldots & \geqslant \quad \ldots \\
m = 2^{n-1} & \displaystyle\sum_{k=1+2^{n-1}}^{2^n} \frac{1}{k} & \geqslant \quad \dfrac{1}{2}
\end{array}$$

On additionne membre à membre ces $n$ inégalités ( de $m := 2^0$ à $m := 2^{n-1}$) :

$$\sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}.$$

On ajoute 1 à chaque membre pour obtenir

$$u_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}.$$

Supposons que la suite $u$ soit majorée par $M > 0$. Pour $n := 2\lfloor M \rfloor$, on aurait à la fois $u_{2^n} \leqslant M$ puisque $M$ est un majorant de tous les termes de la suite et $u_{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2} \geqslant 1 + \lfloor M \rfloor > M$. C'est absurde.

La suite $u$ est croissante non majorée. D'après le théorème 2, elle tend vers $+\infty$.

### 2.3.3 Théorème de minoration

**Théorème 3**

Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers $+\infty$. Soit une autre suite $(v_n)$. S'il existe un entier $p$ tel que, pour tout $n \geqslant p$, $v_n \geqslant u_n$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

On a une propriété analogue si la limite est $-\infty$.

**Démonstration 3**

Soit $A$ un nombre réel.

$(u_n)$ tend vers $+\infty$, donc il existe un entier $q$ tel que, pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$.

Pour tout $n \geqslant p$, $v_n \geqslant u_n$.

Soit $r = \text{Max}(p\ ;\ q)$. ($r$ est le plus grand des deux entiers $p$ et $q$).

Pour tout $n \geqslant r$, $\quad A < u_n \leqslant v_n$ donc $v_n > A$.

La suite $(v_n)$ tend donc vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$. □

### 2.3.4 Limite finie

On se place dans le cas d'une suite qui se stabilise autour d'un nombre $\ell \in \mathbb{R}$.

On appelle $\varepsilon$ le nombre positif tel que la machine ne puisse plus distinguer de $\ell$ les nombres distants de $\ell$ de moins de $\varepsilon$.

On rappelle à cet effet qu'une traduction de « $x$ est distant de $\ell$ de moins de $\varepsilon$ » est « $|x - \ell| < \varepsilon$ ». C'est aussi dire que le réel $x$ est une approximation de $\ell$ à $\varepsilon$ près. Revoir le cas échéant la définition 8 page 73 du cours de seconde.

Comme pour les limites infinies, on va décider qu'une suite se stabilise autour de $\ell$ – on dira qu'elle **converge** vers $\ell$ – lorsque, à partir d'un certain indice, on ne peut plus distinguer les termes de la suite du nombre $\ell$.

Enfin, comme il faut se prémunir contre les progrès futurs des machines et que de toutes façons on n'a qu'une vague idée du $\varepsilon$ – qui de plus varie en fonction de $\ell$ pour une machine donnée ! – on va imposer que cette stabilisation se produise pour tous les $\varepsilon > 0$ possibles. C'est le sens de la définition suivante.

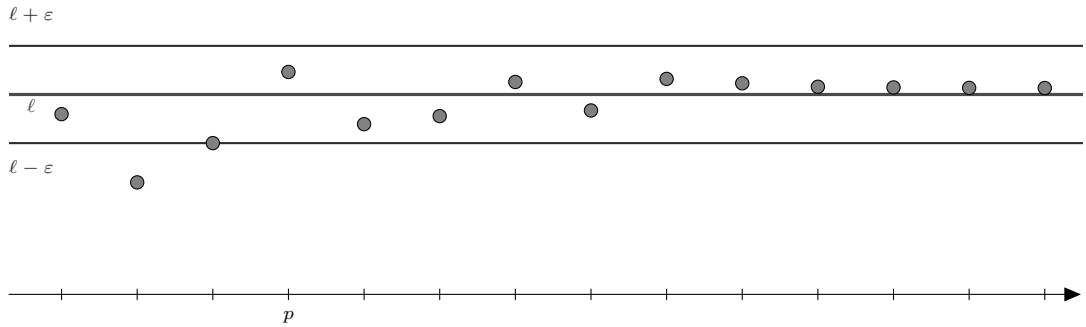
**Définition 3.**

$\ell$ désigne un réel quelconque. Dire qu'une suite $u$ a pour limite $\ell$ signifie que tout intervalle $]\ \ell-\varepsilon\ ,\ \ell+\varepsilon\ [$ centré en $\ell$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice.
On dit alors que la suite est convergente vers $\ell$.
À l'aide de quantificateurs, dire que la suite $(u_n)_{n\in I}$ a pour limite $\ell$ signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in I,\ \forall n \geqslant p,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

**Remarque 3.**

L'expression « à partir d'un certain indice » prouve que le statut de « converger vers $\ell$ » ou non ne change pas lorsqu'on modifie ou supprime un nombre fini de termes de la suite en question. Pour la même raison, si on considère une suite $u$, la suite $v$ définie par $\forall n \in I,\ v_n = u_{n+1}$ converge vers la même limite que $u$ ou diverge lorsque $u$ diverge.




Pour $n \geqslant p$, tous les termes de la suite appartiennent (semble-t-il, un dessin ne montre pas tout) à l'intervalle ouvert $]\ \ell-\varepsilon\ ,\ \ell+\varepsilon\ [$ centré en $\ell$.

**Notation** On écrit : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

**Exemple 4**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}.$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

En effet on se donne $\varepsilon > 0$. On prend $p$ un entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, par exemple la partie entière de $1 + \frac{1}{\varepsilon}$.

Pour tout entier $n \geqslant p$ on a $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \varepsilon$, d'après le théorème 15 page 70 du cours de seconde.

C'est bien dire que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

**Théorème 4**
Soit $u$ une suite et $\ell$ un nombre réel.

Pour que la suite $u$ converge vers $\ell$, il faut et il suffit que tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contienne aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain indice.

**Démonstration 4**
Dans un sens c'est évident : Si tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain indice, alors c'est vrai pour tous les intervalles ouverts centrés en $\ell$.

Dans l'autre sens. On se donne un intervalle $J$ ouvert contenant $\ell$. Alors on peut toujours trouver $\varepsilon > 0$ tel que $]\ \ell - \varepsilon\ ,\ \ell + \varepsilon\ [ \subset J$. Si $J = ]\ a\ ,\ b\ [$ avec $a < \ell < b$, il suffit de prendre le plus petit des deux nombres positifs $\ell - a$ et $b - \ell$. C'est encore plus facile dans les cas où $J = ]\ -\infty\ ,\ b\ [$ avec $\ell < b$ ou $J = ]\ a\ ,\ +\infty\ [$ avec $\ell < b$.

Dans tous les cas, puisque la suite $u$ converge vers $\ell$, l'intervalle ouvert $]\ \ell - \varepsilon\ ,\ \ell + \varepsilon\ [$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice. À plus forte raison tous ces termes appartiennent à l'intervalle $J$, et ce pour tout intervalle $J$ ouvert contenant $\ell$.

Ce qu'il fallait démontrer. □

Un théorème dont la démonstration est évidente (il suffit d'écrire les définitions).

**Théorème 5**
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $u$ une suite qui converge vers $\ell$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - \ell) = 0$.
- Soit $u$ une suite qui converge vers 0. On a $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$.
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $u$ une suite qui converge vers $\ell$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - \ell| = 0$.

On déduit du troisième point le théorème suivant :

**Théorème 6**
Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $u$ une suite qui converge vers $\ell$.
On a $\lim\limits_{n\to\infty} (-u_n) = -\ell$.

**Démonstration 6**
En effet, si on pose pour tout $n$, $\quad v_n = -u_n$, on a

$$|v_n - (-\ell)| = |-(u_n - \ell)| = |u_n - \ell|.$$

**Définition 4.**

On appelle suite **divergente** toute suite non convergente.
Elle a une limite infinie **ou** n'a pas de limite.

**Exemple 5**
Que peut-on dire de la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = (-1)^n$ ?

---

Démontrons que la suite $(u_n)$ est divergente.

Supposons le contraire et appelons $\ell$ une limite de cette suite. En spécifiant $\varepsilon := 1$ dans la définition 3, on sait qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $\quad \forall n \geqslant p$, $|u_n - \ell| < 1$. En particulier $|u_{2p} - \ell| < 1$ et $|u_{2p+1} - \ell| < 1$. Or $u_{2p} = 1$ et $u_{2p+1} = -1$ D'après l'omniprésente inégalité triangulaire, on obtient

$$2 = |u_{2p} - u_{2p+1}| = |(u_{2p} - \ell) + (\ell - u_{2p+1})| \leqslant |u_{2p} - \ell| + |u_{2p+1} - \ell| < 1 + 1 = 2,$$

soit en résumé $2 < 2$, c'est absurde.

**Théorème 7**
Toute suite convergente est bornée.

**Démonstration 7**
Soit $(u_n)$ une suite qui converge vers un réel $\ell$.
Considérons par exemple l'intervalle $]\ \ell - 1\ ,\ \ell + 1\ [$.
D'après la définition de la convergence, il existe un réel $A$ tel que, pour tout $n > A$, $\quad u_n \in ]\ \ell - 1\ ;\ \ell + 1\ [$.
Les termes $u_0$, $u_1$, …, $u_A$ sont en nombre fini, donc bornés, par le plus petit et le plus grand d'entre eux.
Les termes $u_n$, pour $n > A$ sont bornés par $\ell - 1$ et $\ell + 1$.
On en déduit que la suite est bornée. □

### 2.3.5 Unicité de la limite

Les théorèmes d'unicité sont importants en mathématiques. Celui-ci est **particulièrement** important :

**Théorème 8**
Soit $(u_n)$ une suite convergente. Elle admet donc une limite $\ell$.
Cette limite est **unique**.

**Démonstration 8**
Supposons que la suite admette deux limites, $\ell$ et $\ell'$.

On se donne $\varepsilon > 0$.

Puisque la suite converge vers $\ell$, il existe un entier $p_1$, tel que, pour tout $n \geqslant p_1$, $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Puisque la suite converge vers $\ell'$, il existe un entier $p_2$, tel que, pour tout $n \geqslant p_2$, $|u_n - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $p = \max(p_1, p_2)$. On a donc à la fois $|u_p - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|u_p - \ell'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. De ce fait

$$\begin{aligned}
|\ell - \ell'| &\leqslant |\ell - u_p + u_p - \ell'| \\
&\leqslant |\ell - u_p| + |u_p - \ell'| \qquad \text{d'après l'inégalité triangulaire 16 page 71} \\
&\leqslant |u_p - \ell| + |u_p - \ell'| \qquad \text{du cours de seconde.} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

et ce pour tout $\varepsilon > 0$.

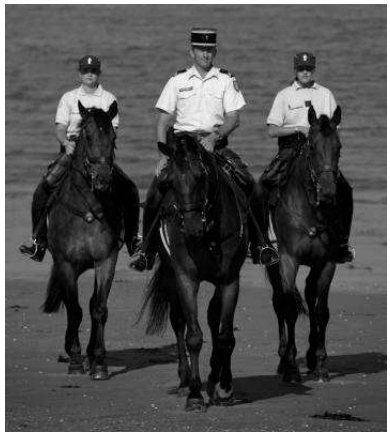
D'après le théorème 19 page 72 du cours de seconde, on a $\ell = \ell'$. □

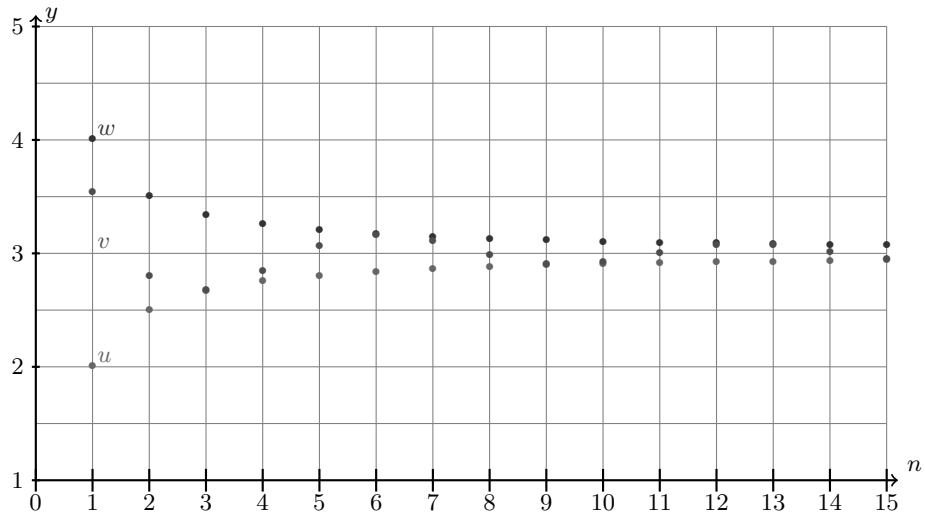
### 2.3.6 Théorème d'encadrement

**Théorème 9**
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soient trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \ell$ et s'il existe un entier $p$ tel que, pour tout $n \geqslant p$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors la suite $v$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Ce théorème s'est appelé « théorème des gendarmes » voire même « propriété (sic) des gendarmes ».

Il dit que si les deux gendarmes sur les ailes vont au même endroit, alors celui du milieu – si toutefois il reste au milieu – ira au même endroit.






**Démonstration 9**
Soit $\varepsilon > 0$. $I = ]\ \ell - \varepsilon\ ,\ \ell + \varepsilon\ [$ est un intervalle centré sur $\ell$.
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ donc il existe un entier $q$ tel que, pour tout $n \geqslant q$, $u_n \in ]\ \ell - \varepsilon\ ,\ \ell + \varepsilon\ [$.
$\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \ell$ donc il existe un entier $r$ tel que, pour tout $n \geqslant r$, $w_n \in ]\ \ell - \varepsilon\ ,\ \ell + \varepsilon\ [$.
On sait que, pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Soit $s = \max(\ p\ ,\ q\ ,\ r\ )$.
Pour tout entier $n \geqslant s$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$, donc $w_n \in ]\ \ell - \varepsilon\ ,\ \ell + \varepsilon\ [$.
On en déduit que la suite $(w_n)$ a aussi pour limite $\ell$. □

### 2.3.7 Conservation des inégalités larges

**Théorème 10 (Conservation des inégalités larges par passage à la limite)**
Soit $m, \ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)$ une suite majorée par $m$ à partir d'un certain rang.
On suppose de plus que la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$.
Alors $\ell \leqslant m$.

**Démonstration 10**
On traduit à l'aide de quantificateurs :

- $(u_n)_{n\in I}$ est majorée par $m$ à partir d'un certain rang :

$$\exists p \in I,\ \forall n \geqslant p,\ u_n \leqslant m.$$

- $(u_n)$ converge vers $\ell$ :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in I,\ \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon.$$

On se donne $\varepsilon > 0$. Pour $n \geqslant \max(p, q)$ on a en particulier $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant m$, d'où $\ell - m \leqslant \varepsilon$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 18 page 72 du cours de seconde, on a $\ell - m \leqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

**Exemple 6**
Soit $(u_n)$ une suite à termes négatifs. Si $(u_n)$ est convergente, alors sa limite est négative **ou nulle**.

De la même façon, on démontre le théorème suivant :

**Théorème 11**
Soit $M, \ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)$ une suite minorée par $M$ à partir d'un certain rang.
On suppose de plus que la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$.
Alors $\ell \geqslant M$.

## 2.4 Opérations et limites

**Théorème 12**
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)$ une suite qui converge vers $\ell$.
Soit $\ell' \in \mathbb{R}$ et $(v_n)$ une suite qui converge vers $\ell'$.
On a

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell',$$

et

$$\lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = \ell - \ell'.$$

**Démonstration 12**
Comme pour la démonstration 8 page 52, on va couper les $\varepsilon$ en deux.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in I}$ converge vers $\ell$,

$$\exists p \in I,\ \forall n \geqslant p,\ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque la suite $(v_n)_{n\in I}$ converge vers $\ell'$,

$$\exists q \in I,\ \forall n \geqslant q,\ |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De ce fait, $\forall n \geqslant \max(p, q)$,

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| &\leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

La première égalité demandée en découle.
En adaptant la démonstration ci-devant ou en utilisant le théorème 6 page 50, on obtient la deuxième égalité. □

**Théorème 13 (limite du produit)**
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)$ une suite qui converge vers $\ell$.
Soit $\ell' \in \mathbb{R}$ et $(v_n)$ une suite qui converge vers $\ell'$.
On a

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = \ell \cdot \ell'.$$

**Démonstration 13**
Toujours une seule idée : **majorer**. On écrit pour tout $n \in I$

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| &= |u_n v_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell'| \\ &\leqslant |u_n v_n - \ell v_n| + |\ell v_n - \ell\ell'| \\ &\leqslant |v_n| \cdot |u_n - \ell| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'|. \end{aligned}$$

On sait que la suite $v$ est convergente, donc bornée d'après le théorème 7 page 51. Soit $M$ un majorant strictement positif de $\{x \in \mathbb{R}, |\ \exists n \in I, x = |v_n|\}$.
On a, pour tout $n \in I$, $|u_n v_n - \ell\ell'| \leqslant M \cdot |u_n - \ell| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'|$. Il est temps de couper les $\varepsilon$ en deux. On se donne un $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in I}$ converge vers $\ell$,

$$\exists p \in I,\ \forall n \geqslant p,\ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Puisque la suite $(v_n)_{n\in I}$ converge vers $\ell'$,

$$\exists q \in I,\ \forall n \geqslant q,\ |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)}.$$

De ce fait, $\forall n \geqslant \max(p, q)$,

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| &\leqslant M \cdot |u_n - \ell| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'| \\ &\leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |\ell| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

L'égalité demandée en découle. □

Cas particulier : Lorsque $v$ est une suite constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel $a$ tel que $\forall n \in I,\ v_n = a$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$. ainsi on a $\lim\limits_{n\to\infty} au_n = a\ell$.

**Théorème 14 (limite de l'inverse)**
Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)$ une suite qui converge vers $\ell$.
On suppose de plus que $\forall n \in I,\ u_n \neq 0$.
On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}.$$

En combinant les deux théorèmes précédant, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 15 (limite du quotient)**
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)$ une suite qui converge vers $\ell$.
Soit $\ell' \in \mathbb{R}^*$ et $(v_n)$ une suite qui converge vers $\ell'$.
On suppose de plus que $\forall n \in I,\ v_n \neq 0$.
On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

**Démonstration 14 (limite de l'inverse)**
On va supposer, pour fixer les idées, que $\ell > 0$. Sinon on applique le théorème 6 page 50 et la méthode du jaguar casqué.

Pour tout $n \in I$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| &= \left|\frac{\ell - u_n}{u_n \ell}\right| \\ &= \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot |\ell|}.\end{aligned}$$

Dans un premier temps, il existe un indice $q$ tel que $\forall n \geqslant q,\ u_n \in ]\ \frac{\ell}{2}\ ,\ +\infty\ [$, intervalle ouvert contenant $\ell$. En particulier $\forall n \geqslant q,\ u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ soit $|u_n| \geqslant \dfrac{\ell}{2}$ soit encore $\dfrac{1}{|u_n|} \leqslant \dfrac{2}{\ell}$ d'après le théorème 15 page 70 du cours de seconde.

On se donne un $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n\in I}$ converge vers $\ell$,

$$\exists p \in I,\ \forall n \geqslant p,\ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon \ell^2}{2}.$$

Donc pour $n \geqslant \max(p, q)$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| &< \frac{2}{\ell}\,\frac{1}{\ell}\,\frac{\varepsilon\ell^2}{2} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

L'égalité demandée en découle. □

**Théorème 16 (limite de l'inverse 2)**
Soit $(u_n)$ une suite qui converge vers $+\infty$.
On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0.$$

**Démonstration 16 (limite de l'inverse 2)**
On commence par remarquer qu'à partir d'un certain indice, tous les termes de la suite $u$ sont strictement positifs et leur inverse est bien défini.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, on sait qu'il existe un indice $p$ tel que $\forall n \geqslant p,\ u_n > A$, ce qui entraîne, toujours via le théorème 15 page 70 du cours de seconde, que $0 < \dfrac{1}{u_n} < \varepsilon$. C'est bien dire que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$. □

**Théorème 17 (limite de l'inverse 3)**
Soit $(u_n)$ une suite qui converge vers 0.

On suppose de plus qu'à partir d'un certain indice, tous les termes de la suite $u$ sont **strictement positifs**.

On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty.$$

**Démonstration 17**
Soit $A > 0$. On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{A}$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, on sait qu'il existe un indice $p$ tel que $\forall n \geqslant p,\ 0 < \dfrac{1}{u_n} < \varepsilon$, ce qui entraîne, toujours via le théorème 15 page 70 que $u_n > A$.

C'est vrai en particulier pour $A = 1$.

Maintenant, pour $A \leqslant 0$, d'après ce qui précède, tous les termes de la suite appartiennent à $]\ 1\ ,\ +\infty\ [$ à partir d'un certain indice. À plus forte raison ils appartiennent à $]\ A\ ,\ +\infty\ [$.

Dans les deux cas, tous les termes de la suite appartiennent à $]\ A\ ,\ +\infty\ [$ à partir d'un certain indice.

C'est bien dire que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$. □

Les tableaux qui suivent ont l'ambition de résumer les théorèmes précédents. Certaines des cases n'ont pas été traitées. Les cases du tableau *Quotient* sont à prendre avec des pincettes.



**Ces tableaux ne se substituent pas aux théorèmes.**

## Addition ou soustraction

Soient $\ell$ et $\ell'$ deux réels. Alors :

| Si $(u_n)$ a pour limite | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(v_n)$ a pour limite | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $(u_n + v_n)$ a pour limite | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | **Forme indéterminée** |

## Produit

Soient $\ell$ et $\ell'$ deux réels. Alors :

| Si $(u_n)$ a pour limite | $\ell$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(v_n)$ a pour limite | $\ell'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite | $\ell\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | **Forme indéterminée** |

## Quotient

Soient $\ell$ et $\ell'$ deux réels. Alors :

| Si $(u_n)$ a pour limite | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | 0 | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Si $(v_n)$ a pour limite | $\ell \neq 0'$ | $\pm\infty$ | 0 | $\ell'$ | $\pm\infty$ | 0 | 0 | $\pm\infty$ |
| alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite | $\frac{\ell}{\ell'}$ | 0 | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | 0 | **Forme indéterminée** | **Forme indéterminée** | **Forme indéterminée** |

**Remarque 4.**

Lorsqu'il y a une **forme indéterminée** (FI), on ne peut conclure grâce à un théorème général. Une étude spécifique plus détaillée est alors nécessaire. Autrement dit, le travail ne fait que commencer.

**Exemple 7**

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = n$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ (voir l'exercice 5 en cas de doute).

On ne peut pas appliquer les théoèmes générux pour trouver la limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$. (FI)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{v_n} = (-1)^n\, n^2$. La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ n'est pas convergente.

### 2.4.1 Limites de suites géométriques

**Théorème 18**

1. Soit $q > 1$ , alors $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.
2. Soit $q \in ]-1\ ,\ 1[$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

**Démonstration 18**

1. Soit $a > -1$ un réel. Démontrons par récurrence que, pour tout $n$, $\mathscr{P}_n$ : $(1+a)^n \geqslant 1+na$. (Inégalité de Bernoulli ).
   (a) Pour $n = 0$ : $(1+a)^0 = 1$ et $1 + na = 1 + 0a = 1$ donc on a bien $\mathscr{P}_0$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$. On a donc $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
   De ce fait : $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geqslant (1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a$ car $na^2 > 0$.
   C'est bien dire que $\mathscr{P}_{n+1}$.
   On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}_n$.
2. Soit $q > 1$. Il existe $a > 0$ tel que $q = 1 + a$.
   Alors $q^n = (1+a)^n \geqslant 1+na$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(1+na) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$
3. Si $q = 0$, c'est évident
   Si $0 < q < 1$, on pose $Q = \dfrac{1}{q} > 1$ ; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{Q}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{Q^n}\right) = 0$ d'après ce qui précède.
   Si $-1 < q < 0$, $q = -Q$ avec $0 < Q < 1$ et on applique ce qui précède. □

## 2.5 Théorème de convergence

### 2.5.1 Convergence des suites monotones

Les deux théorèmes qui suivent sont très importants. Ils permettent d'établir l'existence d'une limite sans connaître cette limite.

**Théorème 19**

- ► Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
- ► Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Ces résultats sont intuitivement et géométriquement évidents. Pour autant ils nous sont inaccessibles pour le moment. Ils demandent une connaissance précise de ce que sont les nombres réels.

**Exemple 8**
Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_n = 2,\underbrace{4848\cdots48}_{n \text{ groupes } 48}$ pour $n \geqslant 1$.
Il est clair que cette suite est croissante, majorée par 3 (ou 2,5), donc elle est convergente vers une limite réelle $\ell$, avec $\ell = 2,48484848484848\cdots$.
Essayons de trouver une écriture de $\ell$ sous forme de fraction d'entiers.
On a : $u_n = 2 + \dfrac{48}{100} + \dfrac{48}{1000} + \cdots + \dfrac{48}{10^{2n}} = 2 + 48 \times \left(\dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{10^4} + \dfrac{1}{10^6} + \cdots + \dfrac{1}{10^{2n}}\right)$
$= 2 + 48 \times \left[\left(\dfrac{1}{10^2}\right) + \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^3 + \cdots + \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^n\right]$.
On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. On en déduit :

$$\begin{aligned} u_n &= 2 + 48 \times \frac{1}{10^2} \times \frac{1 - \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{10^2}} \\ &= 2 + 48 \times \frac{1}{100} \times \frac{1 - \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^n}{\dfrac{99}{100}} \\ &= 2 + 48 \times \frac{1}{100} \times \frac{100}{99}\left(1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Comme $-1 < \dfrac{1}{10^2} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^n = 0$.
En conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell = 2 + 48 \times \dfrac{1}{99} = \dfrac{2 \times 99 + 48}{99} = \dfrac{246}{99} = \dfrac{82}{33}}$

**Théorème 20**
- Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite croissante qui converge vers $\ell$.
  On a $\forall n \in I,\ u_n \leqslant \ell$.
- Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite décroissante qui converge vers $\ell$.
  On a $\forall n \in I,\ u_n \geqslant \ell$.

**Démonstration 20**
Sinon, il existe un indice $n_0 \in I$ tel que $u_{n_0} > \ell$, et par croissance de la suite $(u_n)_{n\in I}$,
$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0} > \ell$.

D'après le théorème 10 de conservation des inégalités larges par passage à la limite, on a $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$, ce qui n'est pas possible.

Même démonstration pour les suites décroissantes. □

### 2.5.2 Suites adjacentes

**Définition 5.**

On dit que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites **adjacentes** si
- $(u_n)$ est croissante ;
- $(v_n)$ est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

**Théorème 21**
Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes, si $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ est décroissante alors $u_n \leqslant v_p$ pour tous entiers $n$ et $p$.

**Démonstration 21**
Supposons qu'il existe deux entiers $N$ et $P$ tels que $u_N > v_P$.

D'après la monotonie des suites, on a $v_n < v_P < u_N < u_n$ pour tout entier $n > \max(N, P)$.

Donc pour tout entier $n > \max(N, P)$, on a $0 < u_N - v_P < u_n - v_P < u_n - v_n$.

Par passage à la limite, on a alors $0 < \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Contradiction. □

**Théorème 22**
Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

**Démonstration 22**
En effet, si $(u_n)$ est la suite croissante et $(v_n)$ la suite décroissante, $(u_n)$ est croissante et majorée par $v_0$ d'après le théorème 21. Elle converge vers une limite $\ell$ d'après le théorème 19. De même $(v_n)$ est croissante et minorée par $u_0$ d'après le théorème 21. Elle converge vers une limite $\ell'$ d'après le même théorème.

La suite $(u_n - v_n)$ tend vers zéro d'une part et vers $\ell - \ell'$ d'autre part. D'après l'unicité de la limite, on a $\ell = \ell'$, ce qu'il fallait démontrer. □

**Théorème 23**
Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes, de limite commune $\ell$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

**Démonstration 23**
Simple conséquence du théorème 20. □

**Exercice 1.**

Deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Confirmer ou infirmer les propositions suivantes en justifiant la réponse.

1. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont toutes les deux croissantes.
2. On a $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$.
3. Les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ ne sont pas majorées.
4. Les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont adjacentes.

**Solution 1**

1. Faux. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n(2n+1) + n(2n+2) - (2n+2)(2n+1)}{n(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{2n^2 + n + 2n^2 + 2n - (4n^2 + 2n + n + 2)}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{-2}{(2n+2)(2n+1)} < 0. \end{aligned}$$

   Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. En particulier elle n'est pas croissante. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2n+1+2n+2-2(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0. \end{aligned}$$

   La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.

2. Vrai. On a $y_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{15+12+10}{60} = \dfrac{37}{60}$.
   et $x_3 = y_3 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{37}{60} + \dfrac{20}{60} = \dfrac{57}{60} = \dfrac{19}{20}$.

3. Vrai.

$$y_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ termes}}$$

   donc $y_n \leqslant \dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$.
   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. Elle est donc majorée par son premier terme.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad y_n \leqslant x_n \leqslant x_1$.

4. VRAI. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n - y_n = \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$.

## 2.6 Exemples

### 2.6.1 Volume d'une pyramide à base carrée

**Exemple 9**

On considère une pyramide dont la base est un carré de côté $a$ et de hauteur $h$. On se propose de démontrer que le volume de la pyramide est $\dfrac{a^2h}{3}$. On se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On découpe la pyramide en $n$ troncs de pyramides de hauteur $\dfrac{h}{n}$.

1. Calculer le côté de la base du $k$ - ième tronc de pyramide (compté à partir du haut) ( $1 \leqslant k \leqslant n$).
2. En déduire un encadrement du volume du $k$ - ième tronc de pyramide ( $1 \leqslant k \leqslant n$) en fonction de $k$ et de $n$.
3. En déduire un encadrement du volume $V$ de la pyramide en fonction de $n$.
4. Que devient cet encadrement lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

---

1. Le côté de la base du $k$ - ième tronc de pyramide (compté à partir du bas) mesure $\dfrac{k}{n}\,a$.
2. Le volume $V_{k,n}$ du $k$ - ième tronc de pyramide est compris entre les volumes de pavés de hauteur $\dfrac{h}{n}$ et dont la base est celle du $k$ - ième tronc de pyramide (comme minorant) ou du $(k+1)$ - ième tronc de pyramide (comme majorant). On obtient
$$\frac{k^2}{n^2} \times \frac{a^2h}{n} \leqslant V_{k,n} \leqslant \frac{(k+1)^2}{n^2} \times \frac{a^2h}{n}.$$
3. En sommant ces inégalités pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ on obtient :
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k^2}{n^2} \times \frac{a^2h}{n}\right) \leqslant V \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2} \times \frac{a^2h}{n}\right)$$
soit
$$\frac{a^2h}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} m^2 \leqslant V \leqslant \frac{a^2h}{n^3}\sum_{m=1}^{n} m^2$$
Or $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et par suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.
4. On a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \dfrac{1}{3}$ d'après l'exemple 5 page 12. D'après le théorème d'encadrement (théorème 9 page 52) la suite constante $V$ tend vers $\dfrac{a^2h}{3}$. D'après l'unicité de la limite (théorème 8 page 51), on a $V = \dfrac{a^2h}{3}$, en accord avec la formule qui sera donnée au paragraphe 8.1.4 page 317.

**Remarque 5.**

*Mutatis mutandis* on démontre que le volume d'un cone droit de révolution est $V = \dfrac{Bh}{3}$ où $h$ désigne la hauteur et $B$ l'aire de la base.

### 2.6.2 Inverse

**Exemple 10**
Soit $a > 0$ et $b > 0$ tel que $ab < 1$. On définit une suite $u$ par récurrence :

$$u_0 = b, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - au_n^2.$$

On a

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n\ : 0 < au_n < 1$.
2. La suite $u$ est croissante.
3. La suite $u$ est majorée.
4. La limite de $u$ existe, s'appelle $\ell$ et vérifie $a\ell = 1$.
5. On considère la suite $v$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$.
   Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = -av_n^2$.

---

1. On a clairement $\mathscr{P}_0$ puisque $b > 0$ a été choisi pour avoir $ab < 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$. On a donc $0 < au_n < 1$. Or $au_{n+1} = 2au_n - a^2u_n^2 = au_n(2 - au_n)$. Puisque $au_n < 1$ on a $2 - au_n > 1$ donc $au_{n+1} > 0$ comme produit de deux nombres positifs. De plus $au_{n+1} - 1 = 2au_n - a^2u_n^2 - 1 = -(au_n - 1)^2 < 0$. On a bien $\mathscr{P}_{n+1}$.
   Par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = u_n - au_n^2 = u_n(1 - au_n) \geqslant 0$. La suite $u$ est donc croissante.
3. Supposons l'espace d'un instant que $u$ n'est pas majorée. D'après le théorème 2 page 46 on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{n\to\infty} au_n = +\infty$ ce qui contredit le fait que la suite $(au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.
4. La suite $u$ converge d'après le théorème 19 page 59. Soit $\ell$ sa limite. C'est aussi la limite de la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. D'après les théorèmes d'opérations sur les limites, on obtient, via l'unicité sur la limite,
   $$\ell = 2\ell - a\ell \times \ell.$$
   de ce fait $\ell(1 - a\ell) = 0$. D'après la croissance de $u$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$. Par conservation des inégalités larges par passage à la limite (théorème 10 page 53) on a $\ell \geqslant b$ et $\ell \neq 0$. De ce fait on a bien $1 - a\ell = 0$.

5. On sait que $\ell = 2\ell - a\ell^2$. Pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= 2u_n - au_n^2 - (2\ell - a\ell^2) \\ &= 2(u_n - \ell) - a(u_n^2 - \ell^2) \\ &= (u_n - \ell)(2 - a(u_n + \ell)) \\ &= v_n(2 - a(v_n + 2\ell)) \\ &= -av_n^2, \end{aligned}$$

puisque $a\ell = 1$.

Cet exemple démontre le théorème 9 page 69 vu dans le cours de seconde dans le cas des nombres strictement positifs. Il donne aussi un algorithme pour calculer des valeurs approchées de cet inverse.

Le lecteur tenace pourra vérifier qu'il n'y a pas de cercle vicieux, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'usage crucial de l'inverse d'un nombre réel – non rationnel – pour démontrer la chaîne de théorèmes qui permet de traiter cet exemple.

### 2.6.3 Racine carrée

**Exemple 11**
Soit $a > 0$ et $b > 0$ tel que $b^2 > a$. On définit une suite $u$ par récurrence :

$$u_0 = b, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On a

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 > a$.
3. la suite $u$ est décroissante.
4. la suite $u$ converge vers une limite $\ell > 0$ qui vérifie $\ell^2 = a$.
5. On considère la suite $v$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$.
   Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$ et $0 < v_{n+1} < \dfrac{v_n^2}{2\ell}$.

---

1. Récurrence immédiate.

2. Pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4}\left(u_n^2 + \frac{a^2}{u_n^2} + 2a\right) - a \\ &= \frac{1}{4}\left(u_n^2 + \frac{a^2}{u_n^2} - 2a\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{a}{u_n}\right)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Puis par une récurrence immédiate on obtient bien $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 > a$.

3. Pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_n} - u_n\right) \\ &= \frac{1}{2u_n}\left(a - u_n^2\right) < 0 \end{aligned}$$

d'après la question précédente. La suite $u$ est bien décroissante.

4. La suite $u$ est bien décroissante, minorée par zéro. Elle est donc convergente d'après le théorème 19. On a aussi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}$ donc d'après les théorèmes d'opérations sur les limites, on a bien

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$$

et par conséquent $2\ell^2 = \ell^2 + a$, d'où le résultat.

5. On sait que $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{a}{\ell}\right)$. Pour tout entier naturel $n$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) \\ &= \frac{1}{2}(u_n - \ell) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right) \\ &= \frac{1}{2}(u_n - \ell) + \frac{a}{2u_n\ell}\left(\ell - u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}(u_n - \ell)\left(1 - \frac{a}{u_n\ell}\right) \\ &= \frac{v_n}{2}\left(\frac{\ell u_n - a}{u_n\ell}\right) \\ &= \frac{v_n}{2}\left(\frac{\ell(v_n + \ell) - a}{u_n\ell}\right) \qquad \text{puisque } \ell^2 = a \\ &= \frac{v_n}{2}\frac{\ell v_n}{u_n\ell} \\ &= \frac{v_n^2}{2u_n}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ et $u_n > \ell$. De ce fait on a bien $v_{n+1} < \dfrac{v_n^2}{2\ell}$.

**Remarque 6.**

L'exemple précédent démontre l'existence dans le théorème 41 page 87 du cours de seconde, ainsi qu'un algorithme pour calculer la dite racine carrée.
Cet algorithme porte le nom de Héron d'Alexandrie qui l'a exposé au premier siecle après J.-C. Une tablette babylonnienne datée entre 1800 et 1600 avant J.-C. semble montrer qu'il était connu bien avant, dans le cas où $a = 2$ du moins.

**Exemple 12**
On en vient à l'exemple donné au tout début du chapitre. Pour cela on définit une suite $u$ par récurrence par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

La démarche qui suit paraîtra moins artificielle après l'étude du chapitre 5. En attendant, le lecteur se laissera guider.

1. On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)\ : 1 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   On a clairement $\mathscr{P}(0)$. On remarque ensuite que $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$. On a donc $1 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, donc $2 \leqslant 1+u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ donc $1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+u_n} \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc $\mathscr{P}(n+1)$.
   Par récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$.
2. La suite $u$ est croissante. En effet $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{1+u_n} - u_n \\ &= \frac{1+u_n-u_n^2}{\sqrt{1+u_n}+u_n} \qquad \text{(expression conjuguée)} \end{aligned}$$
   Or $u_n^2 - u_n - 1 = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$. Or d'après $\mathscr{P}(n)$, $0 \leqslant u_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$, donc $\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{5}{4}$ (théorème 45 page 89 du cours de seconde) et on a bien $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
3. La suite $u$ est croissante, et majorée par $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Elle est donc convergente d'après le théorème 19 page 59.
   Reste à démontrer que la limite est effectivement $\phi := \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pour cela on va étudier la suite $v$ définie par $v_n = \phi - u_n$ pour tout entier $n$. On a déjà remarqué que $\phi^2 = 1 + \phi$ ou que

$\phi = \sqrt{1+\phi}$. Donc pour tout entier $n$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant v_{n+1} &= \phi - u_{n+1} \\ &= \sqrt{1+\phi} - \sqrt{1+u_n} \\ &= \frac{1+\phi-(1+u_n)}{\sqrt{1+\phi}+\sqrt{1+u_n}} \\ &= \frac{\phi-u_n}{\phi+\sqrt{1+u_n}} \end{aligned}$$

Or $\sqrt{1+u_n} \geqslant 1$ donc $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{1+\phi}\, v_n$. On en déduit par une récurrence sans malice que $0 \leqslant v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{1+\phi}\right)^n$. Comme la suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{1+\phi}$ converge vers zéro (puisque $0 < q < 1$, on déduit du théorème d'encadrement (théorème 9 page 52 ) que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ soit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \phi$.

## 2.7 Vrai ou faux ?

### 2.7.1 Énoncé

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

1. Toute suite croissante est minorée.
2. Toute suite à termes positifs est minorée.
3. Si une suite $(u_n)$ n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
4. Si une suite $(u_n)$ converge vers 0, alors la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ tend vers $+\infty$.
5. Si une suite $(u_n)$ converge vers $+\infty$, alors la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ converge vers 0.
6. Si une suite $(u_n)$ converge vers 0, alors la suite $(v_n)$ définie par $v_n = nu_n$ converge vers 0.
7. Si une suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$ et si une suite $(v_n)$ est convergente, alors la suite $(w_n)$ définie par $w_n = u_n v_n$ tend vers $+\infty$.
8. Si une suite $(u_n)$ converge et que la suite $(v_n)$ diverge, alors la suite $(w_n)$ définie pour tout entier $n$ par $w_n = u_n + v_n$ est divergente.
9. Si une suite $(u_n)$ est croissante et majorée, alors la suite $\left(u_n^2\right)$ est aussi croissante et majorée.
10. Si une suite $(u_n)$ converge, alors la suite $(v_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$ converge vers zéro.
11. Si une suite $(u_n)$ croissante vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors la suite $(u_n)$ converge.

### 2.7.2 Corrigé

1. Vrai. Elle est minorée par son premier terme.
2. Vrai. Elle est minorée par zéro.

3. Faux. Contrexemple : La suite $(u_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n\, n.$$

4. Faux. Contrexemple : La suite $(u_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -\frac{1}{n}$$

converge vers 0. Pour autant, la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n} := -n$ ne tend pas vers $+\infty$.

5. Vrai. C'est le théorème 16 page 56.

6. Faux. Contrexemple : La suite $(u_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}$$

converge vers 0. Pour autant, la suite $(v_n)$ définie par $v_n = nu_n = 1$ ne tend pas vers 0.

7. Faux. Contrexemple : Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n \qquad \text{et} \qquad v_n = 0.$$

La suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$ et la suite $(v_n)$ converge vers 0. Pour autant, la suite $(w_n)$ définie par $w_n = u_n v_n = 0$ ne tend pas vers $+\infty$.

8. Vrai. Par contraposée. Si $(w_n)$ converge, alors la suite $(v_n)$ converge comme différence de deux suites convergentes.

9. Une négation de « la suite est croissante et majorée » est « la suite n'est pas croissante **ou** n'est pas majorée ».

Contrexemple : La suite $(u_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}$$

est croissante et majorée. Pour autant la suite $\left(u_n^2\right)$ n'est pas croissante : en effet $u_1^2 = 1$ et $u_2^2 = \dfrac{1}{4}$.

10. Vrai. Soit $\ell := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell$ d'après la remarque 3. On en déduit que la suite $(v_n)$ converge vers 0 d'après le théorème 12.

11. Faux. Sinon ce serait un théorème du cours... Contrexemple : La suite $(u_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n := \sqrt{n}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Donc on a $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Pour autant, la suite $(u_n)$ diverge (vers $+\infty$).

L'exemple 3 constitue un autre contrexemple.

**Exercice 2** (France, Juin 2005)**.**

On considère une suite $(u_n)$, définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite $(v_n)$ sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$ .
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée.

1. Si $(u_n)$ est convergente, alors $(v_n)$ est convergente.
2. Si $(u_n)$ est minorée par 2, alors $(v_n)$ est minorée par $-1$.
3. Si $(u_n)$ est décroissante, alors $(v_n)$ est croissante.
4. Si $(u_n)$ est divergente, alors $(v_n)$ converge vers zéro.

**Solution 2 (France, Juin 2005)**

1. Faux. Contrexemple : La suite $(u_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1}$$

est convergente (vers 0). Pour autant, la suite $(v_n)$ définie par $v_n = -\dfrac{2}{u_n} = -2(n+1)$ ne converge pas.

2. Vrai. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $(u_n)$ est minorée par 2, on a $2 \leqslant u_n$ donc $\dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{u_n}$ d'après la décroissance de la fonction inverse sur l'intervalle $[\ 2\ ,\ +\infty\ [$. En multipliant les deux membres par $-2$ on change le sens de l'inégalité soit $-1 \leqslant \dfrac{-2}{u_n} = v_n$ et ce pour tout entier naturel $n$. C'est bien dire que la suite est minorée par $-1$.

3. Faux. Contrexemple : La suite $(u_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est décroissante. Pour autant, la suite $(v_n)$ définie par $v_n = -\dfrac{2}{u_n} = -2(n+1)$ n'est pas croissante.

4. Faux. Contrexemple : La suite $(u_n)$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$ est divergente. Pour autant, la suite $(v_n)$ définie par $v_n = -2 \times (-1)^n = -2(n+1)$ ne converge pas vers zéro.

## 2.8 QCM

**Exercice 3** (La Réunion, Juin 2005).

Donner les propositions correctes.
On considère trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ ayant, pour tout entier naturel $n$, les propriétés suivantes : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 1$.
Alors :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$.
2. La suite $(v_n)$ est minorée.
3. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$.
4. On ne sait pas dire si la suite $(v_n)$ a une limite ou non.

**Solution 3 (La Réunion, Juin 2005)**

1. Faux. Les suites constantes $u_n := -1$, $v_n := \dfrac{1}{2}$ et $w_n := 1$ fournissent un contrexemple.
2. Vrai. La suite $(u_n)$ est convergente, donc elle est minorée par un réel $m$. Cela signifie que $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n$. *A fortiori* on a $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant v_n$. C'est bien dire que $m$ est un minorant de la suite $(v_n)$.
3. Faux. Les suites $u_n := -1$, $v_n := 1 + \dfrac{1}{n+1}$ et $w_n := v_n$ fournissent un contrexemple. On a $v_0 = 2$.
4. Vrai. Les suites constantes $u_n := -1$, $v_n := \dfrac{1}{2}$ et $w_n := 1$ fournissent un exemple où la suite $(v_n)$ a une limite.
   Les suites $u_n := -1$, $v_n := (-1)^n$ et $w_n := 1$ fournissent un exemple où la suite $(v_n)$ n'a pas de limite.

## 2.9 Exercices

**Exercice 4.**

Étudier la limite, lorsque $n$ tend vers $\infty$, des suites suivantes.

1. $u_n = n$ ;
2. $u_n = 1$ ;
3. $u_n = 3^n$ ;
4. $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ ;
5. $u_n = \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{2n^2}{n^2+1}$

**Exercice 5.**

Déterminer la limite de $\dfrac{(-1)^n}{n}$.

**Exercice 6** (Suite arithmético-géométrique)**.**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n$, $3u_{n+1} = u_n + 4$ .

1. Calculer $u_1$ et $u_2$ .
2. Démontrer que, pour tout entier $n$, $u_n \geqslant 2$ .
3. Montrer que $(u_n)$ est une suite décroissante.
4. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose, pour tout entier $n$, $v_n = u_n - 2$ .
   (a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$ .
6. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   (a) Déterminer l'expression de $S_n$ , puis de $T_n$, en fonction de $n$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ .

**Exercice 7.**

Dans chacun des cas suivants, trouver une suite $(u_n)$ et une suite $(v_n)$ telles que :

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ; $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = +\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ; $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = 5$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ; $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ; $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = 5$.

**Exercice 8.**

On considère la suite $(w_n)$ dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$ :

$$nw_n := (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 := 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

| $w_0$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ | $w_7$ | $w_8$ | $w_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |

1. Détailler le calcul permettant d'obtenir $w_{10}$.
2. Donner la nature de la suite $(w_n)$. Calculer $w_{2\,019}$.

**Exercice 9** (Suite arithmético-géométrique).

1. On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout nombre entier naturel $n$, par :

$$u_0 := 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} := \frac{1}{3}u_n + 4.$$

   Calculer $u_1$ et $u_2$. La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2. On pose, pour tout nombre entier naturel $n$, $\quad v_n = u_n - 6$.
   (a) Pour tout nombre entier naturel $n$, calculer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite $(v_n)$ ?
   (c) Donner le terme général $v_n$ en fonction de $n$.
   (d) En déduire que pour tout nombre entier naturel $n$, $\quad u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.
   (e) La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

**Exercice 10** (Nouvelle-Calédonie, Novembre 2004).

On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies, pour tout entier naturel $n$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer $u_1$, $v_1$, $u_2$ et $v_2$.
2. Soit la suite $(w_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   (b) Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ et préciser la limite de la suite $(w_n)$.
3. Démontrer que les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$, sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite $(t_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
   (a) Démontrer que la suite $(t_n)$ est constante.
   (b) En déduire la limite des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

Voir aussi l'exercice 12 page 591 pour un autre point de vue.

**Exercice 11** (Antilles-Guyane, Juin 2004).

On définit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$.

Soit $\mathcal{D}$ une droite munie d'un repère $(O; \vec{\imath})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points $A_n$ et $B_n$ d'abscisses respectives $a_n$ et $b_n$.

1. Placer les points $A_0$, $B_0$, $A_1$, $B_1$, $A_2$ et $B_2$.
2. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
3. Comparer $a_n$ et $b_n$. Étudier le sens de variation des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.
4. Démontrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes.
5. Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $(v_n)$ est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu $I$.
6. Justifier que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergentes et calculer leur limite. Interpréter géométriquement ce résultat.

**Exercice 12** (Liban, Juin 2004).

1. Soit $x$ un nombre réel positif ou nul et $k$ un entier strictement supérieur à $x$.
   (a) Montrer par récurrence sur $n$ que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $k$,
   $$\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}.$$
   (b) En déduire que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $k$ :
   $$\frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$
   (c) Montrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.
2. (a) Montrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 : $\frac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1$.
   (Écrire $\frac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n-1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).
   (b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

**Exercice 13** (Centres étrangers, Juin 2002)**.**

On définit deux suites $u$ et $v$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}.$$

1. On appelle $w$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que $w$ est une suite géométrique à termes positifs. Quelle est sa raison ?
   (b) Déterminer la limite de la suite $w$.
2. Démontrer que les suites $u$ et $v$ sont adjacentes. On appellera $\ell$ leur limite.
3. On appelle $t$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   (a) Montrer que $t$ est une suite constante. Déterminer cette constante.
   (b) Déterminer alors la valeur de $\ell$.

**Exercice 14** (Amérique du Sud, Novembre 2001)**.**

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}.$$

1. (a) Montrer que $(u_n)$ est majorée par 4.
   (b) Montrer que $(u_n)$ est strictement croissante.
   (c) En déduire que $(u_n)$ converge. On notera $\ell$ sa limite.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a :

$$4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

   (b) Donner la valeur de $\ell$ définie au 1c.
   (c) Étudier la convergence de la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = n^2(4 - u_n).$$

**Exercice 15.**

Démontrer que les suites suivantes de terme général $u_n$ ont une limite quand $n$ tend vers $\infty$ et calculer leurs limites.

1. $u_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}$.
2. $u_n = \dfrac{-4n^2+3n+3}{n^2-n+4}$.
3. $u_n = 2n - \sqrt{4n^2-3n+1}$.
4. $u_n = \dfrac{4^n-3^n}{4^n+2^n}$.

**Exercice 16.**

Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   (b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $0 < u_n < 1$ .
   (c) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ .
2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$
   (b) Déterminer la limite de la suite $(x_n)$ .

**Exercice 17.**

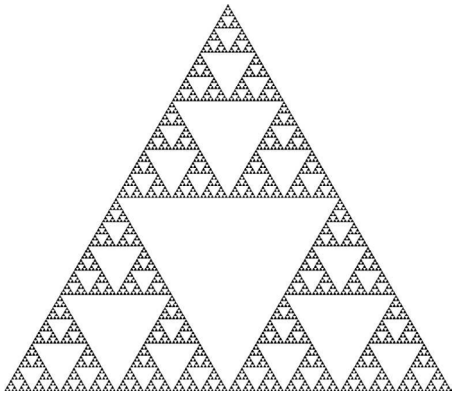
Soit $u_0$ et $u_1$ deux réels de ] 0 , 1 [. On définit deux suites $(u)$ et $(v)$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}}{2}, \quad \text{et} \quad v_n = \min(u_n, u_{n+1}).$$

1. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in ]\,0\ ;\ 1\,[ \quad \text{et} \quad v_n = \in ]\,0\ ;\ 1\,[.$$
2. Démontrer que la suite $(v)$ est croissante.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$.
4. Démontrer que les suites $(u)$ et $(v)$ convergent vers 1.

**Exercice 18** (Triangle de Sierpiński, suites géométriques)**.**

On part d'un triangle équilatéral de coté $a$ tout noir. On le partage en 4 triangle équilatéraux obtenus en joignant les milieux des côtés du triangle initial et on colorie en blanc le triangle central.
À l'étape suivante, chaque triangle noir est à son tour partagé en quatre triangles égaux suivant le même principe, et chaque nouveau triangle centrale est peint en blanc.
Après sept étapes, la figure obtenue est donnée ci-contre.
Dans tout l'exercice, $n$ est un entier naturel strictement positif.



1. On note $a_n$ l'aire de la surface noire après $n$ étapes. Calculer $a_1$, $a_2$, et $a_3$.
2. On note $p_n$ le nombre de triangles noirs lors de la $n$-ième étape et $c_n$ la longueur de leurs côtés.

   Montrer que les suites $(p_n)$ et $(c_n)$ sont des suites géométriques dont on donnera les éléments caractéristiques.
3. Exprimer l'aire d'un triangle noir à l'étape $n$. En déduire l'aire $a_n$ de la surface noire au bout de $n$ étapes.
4. Étudier la convergence de la suite $(a_n)$ et sa limite éventuelle.

### 2.9.1 Probabilités

**Exercice 19** (Antilles-Guyane, Septembre 2002).

1. Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = \frac{1}{6}\, u_n + \frac{1}{3}\,.$$
   (a) Soit la suite $(v_n)$ définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$ ; montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$, puis celle de $u_n$.
2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.
   On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.
   On désigne par :
   – $A_n$ l'événement « on utilise le dé A au $n$-ième lancer » ;
   – $\overline{A_n}$ l'événement contraire de $A_n$ ;
   – $R_n$ l'événement « on obtient rouge au $n$-ième lancer» ;
   – $\overline{R_n}$ l'événement contraire de $R_n$ ;
   – $a_n$ et $r_n$ les probabilités respectives de $A_n$ et $R_n$.
   (a) Déterminer $a_1$.
   (b) Déterminer $r_1$. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.
   (c) En remarquant que, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup \left(R_n \cap \overline{A_n}\right)$, montrer que :
$$r_n = -\frac{1}{6}\, a_n + \frac{2}{3}\,.$$
   (d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$.
   (e) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{6}\, a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de $a_n$ en fonction de $n$.
   (f) En déduire l'expression de $r_n$ en fonction de $n$ puis la limite de $r_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## 2.10 Solutions

**Solution 4**

1. C'est une suite de référence ! En reprenant la quantification de la limite ( remarque 2 page 46), il suffit de prendre $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
2. En reprenant les notations de la définition 3 page 49, il suffit de prendre $\ell = 1$ et $A = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.
3. Une récurrence sans malice établit que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n > n$. D'après le théorème de minoration, on a

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

4. On a $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 0 \leqslant u_n < \dfrac{1}{n}$.

   Or $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

5. On a successivement

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 2$.

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 + 1 = +\infty$.

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$, car $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1 - \dfrac{1}{n^2+1}$.

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n^2+1} = 2$.

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \dfrac{2n^2}{n^2+1} = 4$.

**Solution 5**

On a $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, d'après le théorème d'encadrement on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

**Solution 6**

1. $\boxed{u_1 = 3}$ et $\boxed{u_2 = \dfrac{7}{3}}$.

2. Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n$ , $u_n \geqslant 2$ .

   (a) Initialisation : $u_0 = 5 \geqslant 2$ donc c'est vrai pour $n = 0$.

   (b) Hérédité : on suppose que $u_n \geqslant 2$ pour un entier $n$.

   Alors $u_n + 4 \geqslant 6$ d'où $\dfrac{u_n+4}{3} \geqslant \dfrac{6}{3} = 2$ donc $u_{n+1} \geqslant 2$ c.q.f.d

   La proposition est donc héréditaire.

   Pour tout $n$, $\boxed{u_n \geqslant 2}$.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n$, $\quad u_{n+2} < u_{n+1}$.

   (a) Initialisation : on a déjà montré que $u_1 = \dfrac{7}{2} < 5 = u_0$.

   (b) Hérédité : on suppose que $u_{n+1} < u_n$ ; alors $u_{n+1} + 4 < u_n + 4$ donc $\dfrac{u_{n+1}+4}{3} < \dfrac{u_n+4}{3}$, c'est-à-dire $u_{n+2} < u_{n+1}$.

   La propriété est donc héréditaire.

   La suite est donc décroissante.

4. On a montré que la suite était minorée par 2 et décroissante ; elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 2$.

5. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n + 4}{3} - 2 = \dfrac{u_n + 4 - 6}{3} = \dfrac{u_n - 2}{3} = \dfrac{1}{3} v_n$.

   La suite $(v_n)$ est géométrique, de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$.

   (b) On en déduit $\boxed{v_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

6. (a) $S_n$ est la somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique :

   $S_n = v_0 \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 3 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \boxed{\dfrac{9}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)}$.

   Pour tout $n$, $v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2$ donc

   $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = S_n + 2(n+1) = \boxed{\dfrac{9}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) + 2(n+1)}$.

   (b) On a $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$.

   On en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{9}{2}}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty}$.

**Solution 7**

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$.
2. $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 5n$.
3. $u_n = 2n$ et $v_n = -n$.
4. $u_n = n + 5$ et $v_n = -n$.

**Solution 8**

1. En spécifiant $n := 10$ on obtient $10w_{10} = 11w_9 + 1 = 11 \times 19 + 1 = 210$, d'où $w_{10} = \dfrac{210}{10} = 21$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En divisant les deux membres par $n(n+1)$, on trouve $\dfrac{w_n}{n+1} = \dfrac{w_{n-1}}{n} + \dfrac{1}{n(n+1)}$. En posant $u_n := \dfrac{w_n}{n+1}$ on trouve alors $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Par télescopage, on trouve alors, $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$u_N - u_0 = \sum_{n=1}^{N} (u_n - u_{n-1}) = u_N - u_0 = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

   Soit $\dfrac{w_N}{N+1} - 1 = 1 - \dfrac{1}{N+1}$ soit $w_N = 2N + 1$.
   On en déduit que $(w_n)$ est une suite arithmétique de raison 2 et que $w_{2\,019} = 4\,039$.

**Solution 9**

1. On trouve $u_1 = \dfrac{1}{3} + 4 = \dfrac{13}{3}$ et $u_2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{13}{3} + 4 = \dfrac{49}{9}$.
   On a $u_1 - u_0 = \dfrac{13}{3} - 1 = \dfrac{10}{3}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{49}{9} - 1 = \dfrac{40}{9}$. Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et la suite $(u_n)$ n'est pas arithmétique.
   On a $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{13}{3}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{49}{9} \times \dfrac{3}{13} = \dfrac{49}{39}$. Donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ et la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{n+1} - 6 &= \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

(b) La suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

(c) Son premier terme est $v_0 = u_0 - 6 = -5$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -\frac{5}{3^n}.$$

(d) On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + 6 = 6 - \frac{5}{3^n}.$$

(e) La raison de la suite géométrique $(v_n)$ appartient à $]\,-1\ ,\ 1\,[$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 6$.

**Solution 10 (Nouvelle-Calédonie, Novembre 2004)**

1. En spécifiant $n := 0$ on trouve $u_1 = \dfrac{7}{2}$ puis $v_1 = \dfrac{15}{4}$.
   En spécifiant $n := 1$ on trouve $u_2 = \dfrac{29}{8}$ puis $v_2 = \dfrac{59}{16}$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par écrire

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} = \frac{u_n + v_n}{4} + \frac{v_n}{2} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= -\frac{u_n}{4} + \frac{v_n}{4} \\ &= \frac{1}{4} w_n, \end{aligned}$$

et ce pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. C'est bien dire que $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

(b) On a $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$. De ce fait, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}.$$

Comme la valeur absolue de la raison de la suite $(w_n)$ est strictement plus petite que 1 on a $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$.

3. • On a $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2}$ donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{4^n} \geqslant 0$. La suite $(u_n)$ est croissante.
   • On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = -\frac{w_n}{4} = -\frac{1}{4^{n+1}} \leqslant 0.$$

La suite $(v_n)$ est décroissante.
   • On a $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$.
C'est bien dire que les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$, sont adjacentes.
Par conséquent, elles sont convergentes et ont la même limite $\ell$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1} - u_n - 2v_n}{3} \\ &= \frac{u_n + v_n + u_n + 3v_n - 2u_n - 4v_n}{6} = 0. \end{aligned}$$

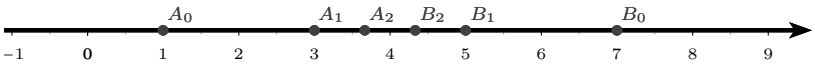
C'est bien dire que la suite $(t_n)$ est constante.
Cette constante égale $t_0 = \dfrac{u_0 + 2v_0}{3} = \dfrac{3+8}{3} = \dfrac{11}{3}$.

(b) Le système $\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 2v_n + u_n = 3t_n \end{cases}$ d'inconnues $v_n$ et $u_n$ se résout en $v_n = \dfrac{w_n + 3t_n}{3}$ et $u_n = \dfrac{-2w_n + 3t_n}{3}$.

Donc les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont la même limite que $(t_n)$, à savoir $\dfrac{11}{3}$.

**Solution 11 (Antilles-Guyane, Juin 2004)**

1.




2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) - \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) = \frac{1}{3}(a_n - b_n) = \frac{1}{3}u_n.$$

De ce fait la suite $(u_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$. Son premier terme est $u_0 = a_0 - b_0 = 1 - 7 = -6$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = -\dfrac{6}{3^n}$.

3. En particulier on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n < 0$, c'est-à-dire $a_n < b_n$.

De ce fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) - a_n = \dfrac{1}{3}(b_n - a_n) > 0$. C'est dire que la suite $(a_n)$ est croissante. De même,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) - b_n = \dfrac{1}{3}(a_n - b_n) < 0$. C'est dire que la suite $(a_n)$ est décroissante.

4. Il ne reste plus qu'à démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Or la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc sa limite est nulle.

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = a_{n+1} - a_n + b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(b_n - a_n) + \frac{1}{3}(a_n - b_n) = 0.$$

C'est dire que la suite $(v_n)$ est constante. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 = a_0 + b_0 = 1 + 7 = 8$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le milieu de $[A_nB_n]$ a pour abscisse $\dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{v_n}{2} = 4$. Donc tous les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu $I$, d'abscisse 4.

6. Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergentes parce qu'adjacentes (théorème 22). Soit $\ell$ leur limite commune. La suite constante $(v_n)$ converge vers $2\ell$ d'une part et vers 8 d'autre part, donc $\ell = 4$.

Les points $A_n$ et $B_n$ tendent vers $I$ symétriquement.

**Solution 12 (Liban, Juin 2004)**

1. (a) **Énoncé :** Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition dépendant de l'entier $n \geqslant k$ :

$$\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}.$$

**Initilisation :** La proposition $\mathscr{P}_k$ est clairement vérifiée, il s'agit même d'une égalité.

**Hérédité :** Soit $n \geqslant k$ un entier pour lequel on a $\mathscr{P}_n$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{k^n}{n!} \times \frac{k}{n+1} \\ &\leqslant \frac{k^n}{n!} \text{ car } k \leqslant n+1 \\ &\leqslant \frac{k^k}{k!} \text{ d'après } \mathscr{P}_n.\end{aligned}$$

La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est bien vérifiée.
**Conclusion :** On a $\mathscr{P}_k$ et $\forall n \geqslant k, (\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1})$. Donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \geqslant k,\ \mathscr{P}_n$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) Soit $n$ un entier supérieur ou égal à $k$ :

$$\frac{x^n}{n!} = \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!},$$

d'après $\mathscr{P}_n$.

(c) On a $\forall n \geqslant k,\ 0 \leqslant \frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$. Puisque $0 \leqslant \frac{x}{k} < 1$, la suite géométrique $\left(\frac{x}{k}\right)_n$ de raison $q := \frac{x}{k}$ converge vers zéro. Multipliée par la constante $\frac{k^k}{k!}$, la suite $\left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$ tend vers zéro. En appliquant le théorème d'encadrement (théorème 9), la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_n$ converge vers zéro.

2. (a) On peut écrire $n!$ comme produit des $n$ facteurs $1, 2, \ldots, n$ mais aussi comme le produit des $n-1$ facteurs $2, 3, \ldots, n$, soit $n! = 2 \times 3 \times \ldots \times n$. De ce fait, $\frac{n^{n-1}}{n!} = \frac{n}{2} \times \frac{n}{3} \times \ldots \times \frac{n}{n} = \prod_{p=2}^{n} \frac{n}{p}$. On a $\forall p \in \{2, 3, \ldots, n\},\ \frac{n}{p} \geqslant 1$ donc on a bien $\frac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1$.

(b) En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par $n \geqslant 0$, on a $\forall n \geqslant 2,\ \frac{n^n}{n!} \geqslant n$. D'après le théorème de minoration (théorème 3) on a bien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

**Solution 13 (Centres étrangers, Juin 2002)**

1. (a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}v_n \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)u_n + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)v_n \\ &= -\frac{1}{12}u_n + \frac{1}{12}v_n \\ &= \frac{1}{12}w_n.\end{aligned}$$

Donc $w$ est une suite géométrique de raison $q := \frac{1}{12}$. On a $w_0 = v_0 - u_0 = 11$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{11}{12^n} > 0$.

(b) On a $q \in ]-1\ ,\ 1[$ donc d'après le théorème 18 $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$.

2. • On a $\forall n \in \mathbb{N}$ :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\,u_n + \frac{2}{3}\,v_n - u_n = \frac{2}{3}\,v_n - \frac{2}{3}\,u_n = \frac{2w_n}{3} \geqslant 0,$$
d'après la question 1a. De ce fait la suite $u$ est croissante.
• On a $\forall n \in \mathbb{N}$ :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}\,u_n + \frac{3}{4}\,v_n - v_n = -\frac{1}{4}\,v_n + \frac{1}{4}\,u_n = -\frac{w_n}{4} \leqslant 0,$$
toujours d'après la question 1a. De ce fait la suite $v$ est décroissante.
• On a $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Pour ces trois raisons, les suites $u$ et $v$ sont adjacentes.

3. (a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$ :
$$\begin{aligned} 3u_{n+1} + 8v_{n+1} &= u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) \\ &= 3u_n + 8v_n = t_n. \end{aligned}$$
C'est bien dire, que la suite $t$ est constante. Cette constante est $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3 + 96 = 99$.

(b) On a d'une part $\lim t = 99$ et d'autre part $\lim t = 3\ell + 8\ell = 11\ell$. D'après l'unicité de la limite, on a $11\ell = 99$ soit $\ell = 9$.

**Solution 14 (Amérique du Sud, Novembre 2001)**

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{P}_n$ la proposition « $u_n < 4$ ».
On a clairement $\mathscr{P}_0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a $\mathscr{P}_n$. On a donc $u_n < 4$ donc $3u_n + 4 < 16$ donc $\sqrt{3u_n + 4} < \sqrt{16}$ soit $u_{n+1} < 4$ c'est-à-dire $\mathscr{P}_{n+1}$.
D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n < 4$. En particulier la suite $(u_n)$ est majorée par 4.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a clairement $u_n \geqslant 0$ et
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{3u_n + 4} - u_n \\ &= \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} \\ &= \frac{(4 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} > 0. \end{aligned}$$
et ce pour tout entier $n$. C'est bien dire que $(u_n)$ est strictement croissante.

(c) La suite $(u_n)$ est croissante et majorée (par 4). Donc elle converge.

2. (a) Soit $n$ un entier naturel, on a, grâce à la croissance de la suite $(u_n)$ :
$$\begin{aligned} 4 - u_{n+1} &= 4 - \sqrt{3u_n + 4} \\ &= \frac{16 - 3u_n - 4}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \\ &= \frac{3(4 - u_n)}{4 + u_{n+1}} \\ &\leqslant \frac{3(4 - u_n)}{4 + u_1} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\,(4 - u_n)\,. \end{aligned}$$

(b) Une récurrence sans difficulté donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 4 - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(4 - u_0).$$

Comme on a aussi $0 \leqslant 4 - u_n$, d'après le théorème d'encadrement, on peut affirmer

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 4.$$

(c) D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \frac{1}{4}\frac{n^2}{2^n}$.

La suite positive $w$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n := \dfrac{n^2}{2^n}$ tend vers zéro.

En effet – en reprenant les arguments de la solution 12 – on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$. De ce fait, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{1}{2}$. Donc (en spécifiant $\varepsilon := \dfrac{1}{4}$ dans la définition de la limite, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant p,\ \dfrac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant \dfrac{3}{4}$, donc $\forall n \geqslant p,\ 0 \leqslant w_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-p} w_p$ via une récurrence sans malice. Ainsi on a $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ d'après le théorème d'encadrement, et enfin $\lim\limits_{n\to\infty} 4 - v_n = 0$ pour la même raison.

**Solution 15**

Dans les quatre cas on a une forme indéterminée.

1. Pour $n \neq 0$, $u_n = \dfrac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3-\frac{5}{n}\right)} = \dfrac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{2}{5}}$.
2. Pour $n \neq 0$, $u_n = \dfrac{n^2\left(-4+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{-4+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -4}$
3. On utilise l'expression conjuguée (voir paragraphe 5.9.3 page 90 du cours de seconde).

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{\left[2n-\sqrt{4n^2-3n+1}\right]\left[2n+\sqrt{4n^2-3n+1}\right]}{\left[2n+\sqrt{4n^2-3n+1}\right]} = \frac{4n^2-\left(4n^2-3n+1\right)}{2n+\sqrt{4n^2-3n+1}} \\
&= \frac{3n-1}{2n+\sqrt{4n^2-3n+1}} = \frac{3n-1}{2n+\sqrt{4n^2\left(1-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)}} \\
&= \frac{3n-1}{2n+2n\sqrt{1-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n^2}}} \\
&= \frac{n\left[3-\frac{1}{n}\right]}{2n\left[1+\left(1-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)\right]} \\
&= \frac{3-\frac{1}{n}}{2\left[1+\left(1-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)\right]}.
\end{aligned}$$

On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{3}{4}}$.

4. Pour tout entier $n$, $\quad u_n = \dfrac{4^n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{4^n\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} = \dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Les raisons $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{4}$ sont strictement compris entre -1 et 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1}$.

**Solution 16**

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n)}{(n+1)^2} = \frac{\left[n^2+2n+1\right]-1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc $u_n < 1$.

   De même, $n+1 > 1$, donc $(n+1)^2 > 1$, donc $\dfrac{1}{(n+1)^2} < 1$, donc $-\dfrac{1}{(n+1)^2} > 1$, donc $1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$.

   On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < 1$.

   (c) Il est clair que $(u_n)$ est croissante.

2. (a) i. Initialisation :

   Pour $n = 1$, $x_1 = u_1 = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{n+2}{2(n+1)} = \dfrac{3}{4}$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

   ii. Hérédité : on suppose la propriété vraie pour un certain entier $n$, donc $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

   Alors : $x_{n+1} = x_n \times u_{n+1} = \dfrac{n+2}{2(n+1)} \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \dfrac{n+3}{2(n+2)}$

   après simplification.

   La propriété est héréditaire.

   D'après le théorème de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) En factorisant par $n$ au numérateur et au dénominateur, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

**Solution 17**

1. Par une récurrence à deux pas, si $0 < u_n < 1$ et $0 < u_{n+1} < 1$ alors $\dfrac{0+0}{2} < \dfrac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n+1}}}{2} < \dfrac{1+1}{2}$ ce qui assure l'hérédité. L'initialisation est claire. D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in ]\,0\ ;\ 1\,[$.

   Ensuite, $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in ]\,0\ ,\ 1\,[$ et $u_{n+1} \in ]\,0\ ,\ 1\,[$. Donc $0 < \min(u_n, u_{n+1}) < 1$ soit $0 < v_n < 1$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - On a $u_n \geqslant v_n$ et $u_{n+1} \geqslant v_n$. Donc $u_{n+2} = \dfrac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n+1}}}{2} \geqslant \dfrac{\sqrt{v_n}+\sqrt{v_n}}{2} = \sqrt{v_n} \geqslant v_n$ puisque $v_n \in ]\,0\ ,\ 1\,[$.
   - On a $u_{n+1} \geqslant v_n$.

   On déduit de $u_{n+2} \geqslant v_n$ et de $u_{n+1} \geqslant v_n$ que $v_{n+1} = \min(u_n, u_{n+1}) \geqslant v_n$ ceci pour tout entier $n$.

   La suite $(v)$ est donc croissante. Comme elle est majorée par 1, elle admet une limite $\ell \leqslant 1$. Comme $v_0 = \min(u_0, u_1) > 0$ on a $\ell \geqslant v_0 > 0$.

3. - Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = \dfrac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n+1}}}{2} \geqslant \dfrac{\sqrt{v_n}+\sqrt{v_n}}{2} \geqslant v_n$ et ce pour tout entier $n$.
   - On a aussi $u_{n+3} \geqslant \sqrt{v_{n+1}}$ d'après le résultat précédent et $\sqrt{v_{n+1}} \geqslant \sqrt{v_n}$ d'après la croissance de la suite $(v)$.

   On déduit de $u_{n+2} \geqslant \sqrt{v_n}$ et de $u_{n+3} \geqslant \sqrt{v_n}$ que $v_{n+2} = \min(u_{n+2}, u_{n+3}) \geqslant \sqrt{v_n}$ ceci pour tout entier $n$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N},\ w_n := v_{n+2}^2 - v_n$. D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geqslant 0$. D'après la question 2. on a $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \ell^2 - \ell = \ell(\ell-1)$. On a donc $\ell(\ell-1) \geqslant 0$. Comme $\ell > 0$, on a $\ell \geqslant 1$.

On a déjà vu que $\ell \leqslant 1$ à la question 2. On a bien finalement $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n \leqslant 1$, donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

**Solution 18 (Triangle de Sierpiński, suites géométriques)**

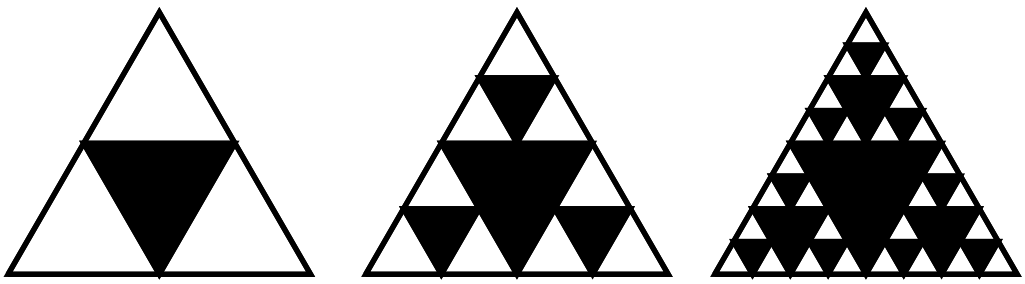
1. Au bout de zéro étape, on a le triangle de départ. Son aire égale $\mathscr{A} := \dfrac{a\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

   On a clairement $a_1 = \dfrac{1}{4}\mathscr{A}$.

   À la deuxième étape, chacun des petits triangles (blancs ou noirs) ont une aire égale à $\dfrac{\mathscr{A}}{16}$. Il y a quatre tels triangles dans le gros rectangle noir, plus trois petits, soit $a_2 = \dfrac{7}{16}\mathscr{A}$.

   À la troisième étape, chacun des petits triangles ont une aire égale à $\dfrac{\mathscr{A}}{64}$. Il y en a $16+3\times 4+9 = 37$

   Donc $a_3 = \dfrac{37}{64}\mathscr{A}$.



2. On a $p_1 = 1$ et $p_2 = 3$. En effet on ne compte que les petits triangles, ceux apparus lors de la deuxième étape. Le gros triangle est apparu lors de la première étape. Il apparaît autant de triangles noirs lors de la $n$-ième étape qu'il n'y a de triangles blancs à la fin de la $n-1$-ième étape. Or à chaque étape, chaque triangle blanc fait apparaître trois triangles blancs. Il y a donc $3^n$ triangles blancs à la fin de la $n$-ième étape, donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1,\ p_n = 3^{n-1}$. La suite $(p_n)$ est géométrique de raison 3.

   À chaque étape, les côtés des triangles sont deux fois plus petits d'après le théorème de la droite des milieux. Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1,\ c_n = a2^{-n}$. La suite $(p_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

3. **Première méthode** : Chaque triangle engendré par la $k$-ième étape a une aire égale à $\left(2^{-k}\right)^2\mathscr{A} = \mathscr{A}4^{-k}$. Il y en a $p_k = 3^{k-1}$. Donc la somme de leurs aires égale $3^{k-1}\mathscr{A}4^{-k} = \dfrac{\mathscr{A}}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^k$.

Solutions

Donc en sommant pour $k$ variant de 1 à $n$, d'après le théorème 7 page 322 du cours de seconde,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathscr{A}}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= \frac{\mathscr{A}}{3} \times \frac{3}{4}\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\mathscr{A}}{4}\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}} \\ &= \mathscr{A}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right). \end{aligned}$$

**Deuxième méthode** : On calcule l'aire des triangles blancs. À chaque étape, elle est multipliée par $\frac{3}{4}$. Après la $n$-ième étape, l'aire égale $\mathscr{A}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

On en déduit que $a_n = \mathscr{A}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

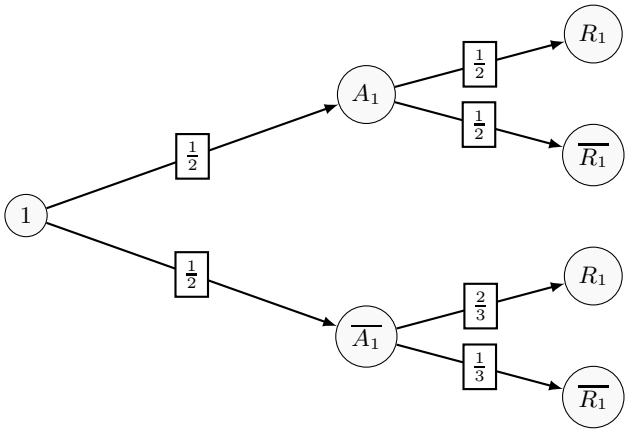
4. La suite $(a_n)$ est clairement croissante et majorée par $\mathscr{A}$. Elle est donc convergente. On peut aussi directement calculer sa limite, puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

### 2.10.1 Probabilités

**Solution 19 (Antilles-Guyane, Septembre 2002)**

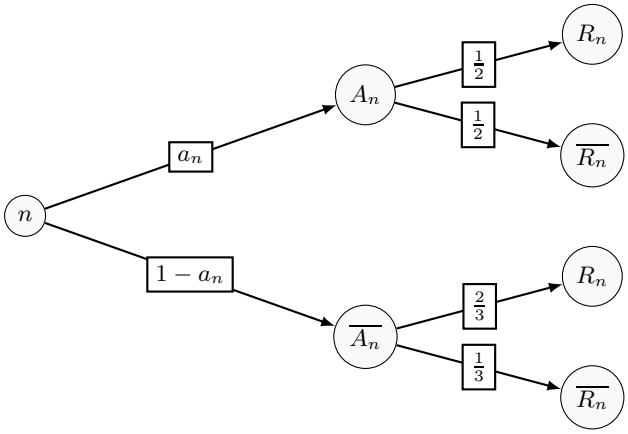
1. (a) On a
$$\frac{1}{6}\,\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$
Donc
$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}\,u_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\,\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(u_n - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{6}\,v_n.$$
(b) On a $v_0 = u_0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{10}\,\frac{1}{6^n}$ et $u_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\,\frac{1}{6^n}$.

2. (a) En traduisant faute de mieux « au hasard » par une équiprobabilité on a $a_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$.
(b)



On a $r_1 = P(A_1 \cap R_1) + P(\overline{A_1} \cap R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$.

(c)




Toujours par lecture de l'arbre,
$r_n = P(A_n \cap R_n) + P(\overline{A_n} \cap R_n) = a_n \times \frac{1}{2} + (1 - a_n) \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}\, a_n + \frac{2}{3}$.

(d) Pour utiliser le dé A au $n+1$-ième lancer, il n'y a que deux possibilités (qui s'excluent) :
- ▶ Si au $n$-ième lancer on a utilisé le dé A, alors il est nécessaire et suffisant de tirer une face rouge. L'événement qui décrit cette situation est $A_n \cap R_n$.
- ▶ Si au $n$-ième lancer on a utilisé le dé B, alors il est nécessaire et suffisant de tirer une face blanche. L'événement qui décrit cette situation est $\overline{A_n} \cap \overline{R_n}$.

On a donc $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$.

(e) Puisque les événements $A_n \cap R_n$ et $\overline{A_n} \cap \overline{R_n}$ sont incompatibles, on a

$$a_{n+1} = P(A_n \cap R_n) + P(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}).$$

Or par lecture de l'arbre ci-dessus, la feuille du haut donne $P(A_n \cap R_n) = a_n \times \frac{1}{2}$ et la feuille du bas donne $P(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}) = (1 - a_n) \times \frac{1}{3}$.
Finalement

$$a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{2} + (1 - a_n) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\, a_n.$$

et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus $a_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$ (voir 2a).
Les suites $(a_n)$ et $(v_n)$ ont la même définition par récurrence. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = u_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\, \frac{1}{6^n}.$$

(f) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = -\frac{1}{6}\, a_n + \frac{2}{3}$.
Or $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{2}{5}$ d'après le théorème 18. Donc, d'après les opérations sur les limites,

$$\lim_{n \to \infty} r_n = -\frac{1}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}.$$

## 2.11 Travaux dirigés

**Travaux dirigés 1**

Soit $(d_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres entiers appartenant à $\{0,1,2,\dots,9\}$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ x_n=\sum_{k=1}^{n} d_k 10^k.$$

1. Dans cette question, on prend $d_1=1, d_2=4, d_3=1, d_4=5$.
   Donner les écritures décimales de $x_1, x_2, x_3$ et $x_4$.
2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est majorée par 1.
3. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.
4. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers une limite que l'on notera $x$.
5. Démontrer que $0\leqslant x\leqslant 1$.
6. Démontrer que
$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ x_n\leqslant x\leqslant x_n+10^n.$$

**Théorème 24**

Soit $x\in\mathbb{R}$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :

(i) $\forall\, n\geqslant 1, a_n\in\{0,\dots,9\}$ et $a_0\in\mathbb{Z}$,

(ii) $\nexists N\in\mathbb{N}\mid\forall\, n>N, a_n=9$,

(iii)

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\leqslant x<a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{1}{10^n}.$$

**Démonstration 24**

Soit $u_n$ la valeur décimale approchée par défaut de $x$ à $10^{-n}$ près. La double-inégalité en (iii) se réduit alors à l'égalité

$$u_n=a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}.$$

Soit $m=u_n\,10^n\in\mathbb{N}$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$u_n=\frac{m}{10^n}=a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}\Longleftrightarrow m=a_0\,10^n+a_1\,10^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\,10+a_n.$$

Cette dernière équation n'admet qu'une unique solution dans $\mathbb{Z}\times\{0,\dots,9\}^n$, par unicité de l'écriture en base 10 des entiers naturels.

Montrons encore que les coefficients $a_i$ sont indépendants du rang choisi. Autrement dit, montrons que $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ sont les mêmes au rang $n$ et $n+1$. Supposons qu'on ait au rang $n+1$ la double-inégalité

$$b_0+\cdots+\frac{b_n}{10^n}+\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}}\leqslant x<b_0+\cdots+\frac{b_n}{10^n}+\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}}+\frac{1}{10^{n+1}}.$$

Or, puisque $b_{n+1} \leqslant 9$, on aura nécessairement $\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant \frac{1}{10^n}$, et notre double-inégalité devient

$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_n}{10^n} \leqslant x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

L'unicité de la solution $(a_0, \ldots, a_n)$ de la double-inégalité en (iii) au rang $n$ nous permet d'affirmer que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $a_i = b_i$.

Supposons enfin qu'il existe un entier naturel $N$ tel que tout $n \geqslant N$ vérifie $a_n = 9$. Quitte à effectuer une multiplication par une combinaison linéaire de puissances de 10, on est ramené à étudier le cas particulier $0, 99\overline{9}\ldots$ Or

$$0, 99\overline{9} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1,$$

et la double-inégalité en (iii) n'est plus vraie pour tout $n$ alors, car les membres de gauche et de droite sont égaux, ce qui est contradictoire. □

**Définition 6.**

Dans ce cas, par passage à la limite,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

et l'on dit que c'est le **développement décimal illimité propre** de $x$, et on note de manière plus commode $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$

**Remarque 7.**

Un développement décimal illimité est dit impropre s'il ne vérifie pas le théorème 24. Par exemple, $1 = 1, 00\overline{0} = 0, 99\overline{9}$. Le premier est propre, le second est impropre.

## 2.12 Problèmes

**Problème 2 (Suites d'Archimède)**
D'après Jean-Louis Frot, *Mathématiques*, Ellipses 2013.

1. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par récurrence par $u_0 = 4$, $v_0 = \sqrt{8}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} := \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \qquad u_{n+1} := \sqrt{u_n \cdot v_{n+1}}. \tag{2.1}$$

   (a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n \leqslant v_n \Longrightarrow u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n)\,.$$

   En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.

   (b) Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes.

   (c) Démontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ont la même limite.

2. Vitesse de convergence.
   (a) Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_n = (v_n - u_n)\frac{u_n}{u_n + v_n}. \tag{2.2}$$
   (b) En déduire
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant (v_n - u_n)\frac{u_n}{u_n + v_n}\ , \quad \text{puis } v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n),$$
   et enfin
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (4 - \sqrt{8}). \tag{2.3}$$
3. On améliore l'inégalité (2.3).
   (a) Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = (v_{n+1} - u_{n+1})\frac{u_n}{u_{n+1}}. \tag{2.4}$$
   (b) En soustrayant (2.2) et (2.4), démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} = (v_n - u_n)\,\frac{1}{1 + \frac{v_n}{u_n}}\,\frac{1}{1 + \frac{u_n}{u_{n+1}}}.$$
   (c) Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right) \times \left(1 + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = 1 + \frac{v_n}{u_n} + \frac{u_n + v_n}{u_{n+1}} \geqslant 2 + \frac{u_n + v_n}{u_{n+1}}.$$
   (d) Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n + v_n}{u_{n+1}} \geqslant 2.$$
   (e) Déduire des trois dernières questions que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(v_n - u_n),$$
   puis que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \times (4 - \sqrt{8}). \tag{2.5}$$

Une suite sera proposée au problème 8 page 261.

**Correction 2 (Suites d'Archimède)**

1. (a) On commence par vérifier (récurrence immédiate) que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $v_n > 0$. De ce fait les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont définies.
   Maintenant, si pour un entier $n$ on a $u_n \leqslant v_n$, alors
   - $v_{n+1} - v_n = v_n\left(\dfrac{2u_n}{u_n + v_n} - 1\right) = \dfrac{v_n}{u_n + v_n}(u_n - v_n) \geqslant 0.$
   - $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_{n+1}} - \sqrt{u_n^2} = \sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_n}\right) \geqslant \sqrt{u_n}\,(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geqslant 0.$

•
$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 &= v_{n+1}\left(\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - u_n\right) \\ &= \frac{v_{n+1}u_n}{u_n+v_n}\left(2v_n - (u_n+v_n)\right) \\ &= \frac{v_{n+1}u_n}{u_n+v_n}(v_n-u_n) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} \geqslant u_{n+1}$.

On démontre par récurrence la proposition qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathcal{P}_n \ : u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

On a $\mathcal{P}_0$. En effet, on a $u_0 = \sqrt{8} < 3 < 4 = v_0$. D'après ce qui vient d'être vu, on en déduit bien $\mathcal{P}_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel $\mathcal{P}_n$. En particulier, on a $u_n \leqslant v_n$. D'après ce qui vient d'être vu, on en déduit $\mathcal{P}_{n+1}$.

D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

En particulier, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)_n$ est donc croissante. De même, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant v_{n+1}$. La suite $(v_n)_n$ est ainsi décroissante.

(b) La suite $(v_n)_n$ est décroissante et minorée par 0. Donc elle est convergente. La suite $(u_n)_n$ est croissante. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ d'après la question précédente. La suite $(u_n)_n$ est donc majorée. Elle est convergente.

(c) Soit $\ell := \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\ell' := \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. On a successivement

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}, \quad \ell' = \lim_{n\to\infty} v_{n+1}, \quad \ell'(\ell+\ell') = \lim_{n\to\infty} v_{n+1}(u_n+v_n) \text{ et } 2\ell\ell' = \lim_{n\to\infty} 2u_nv_n.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}(u_n+v_n) = 2u_nv_n$. D'après l'unicité de la limite, on a $\ell'(\ell+\ell') = 2\ell\ell'$, donc $\ell'^2 = \ell\ell'$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant u_n \geqslant u_0 = \sqrt{8}$, on a $\ell' \geqslant \sqrt{8}$ et $\ell' \neq 0$ et en fin de compte $\ell = \ell'$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_n &= \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - u_n \\ &= \frac{u_n}{u_n+v_n}\left(2v_n - (u_n+v_n)\right) \\ &= \frac{u_n}{u_n+v_n}(v_n-u_n). \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc $-u_{n+1} \leqslant -u_n$. De ce fait,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n+v_n}(v_n-u_n).$$

De plus $v_n \geqslant u_n$ donc $0 > u_n + v_n \geqslant 2u_n$ et $\dfrac{u_n}{u_n+v_n} \leqslant \dfrac{u_n}{2u_n} = \dfrac{1}{2}$.

Le résultat en découle.

Maintenant, une récurrence sans malice donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (u_0 - v_0) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (4 - \sqrt{8}).$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(u_{n+1}-u_n)u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_n u_{n+1} = u_n v_{n+1} - u_n u_{n+1} = u_n(v_{n+1}-u_{n+1}),$$

d'où le résultat en divisant par $u_{n+1}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1}-u_{n+1} &= (v_{n+1}-u_n) - (u_n - u_{n+1}) \\ &= \frac{u_n}{u_n+v_n}(v_n-u_n) - \frac{u_n}{u_{n+1}}(v_{n+1}-u_{n+1}). \end{aligned}$$

D'où $\quad (v_{n+1}-u_{n+1})\left(1+\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = (v_n-u_n)\,\dfrac{1}{1+\frac{v_n}{u_n}},$

d'où le résultat en divisant par $1+\dfrac{u_n}{u_{n+1}} > 0$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\left(1+\frac{v_n}{u_n}\right)\times\left(1+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = 1+\frac{v_n}{u_n}+\frac{u_n}{u_{n+1}}+\frac{u_n}{u_{n+1}}\times\frac{v_n}{u_n} = \frac{u_n+v_n}{u_{n+1}}.$$

Or $v_n \geqslant u_n$ d'où $1+\dfrac{v_n}{u_n} \geqslant 2$ et enfin $\left(1+\dfrac{v_n}{u_n}\right)\times\left(1+\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) \geqslant 2+\dfrac{u_n+v_n}{u_{n+1}}$.

(d) Maintenant $(u_n+v_n)^2 - 4u_{n+1}^2 = (u_n+v_n)^2 - 4u_n v_{n+1} \geqslant (u_n+v_n)^2 - 4u_n v_n$ puisque $u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} \leqslant v_n$. Donc

$$(u_n+v_n)^2 - 4u_{n+1}^2 \geqslant u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 4u_n v_n \geqslant u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2 \geqslant (u_n-v_n)^2 \geqslant 0.$$

On en déduit, en prenant les racines carrées positives, que

$$u_n+v_n \geqslant 2u_{n+1} \text{ et } \frac{u_n+v_n}{u_{n+1}} \geqslant 2.$$

(e) On a obtenu dans les questions précédentes, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1+\frac{v_n}{u_n}}\,\frac{1}{1+\frac{u_n}{u_{n+1}}} \leqslant \frac{1}{4},$$

et par suite $v_{n+1}-u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$.

Enfin une récurrence sans malice donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \times (u_0-v_0) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \times (4-\sqrt{8}).$$

# Chapitre 3

# Limites, continuité

## Sommaire


| | | |
|---|---|---|
| **3.1** | **Approche intuitive** | **96** |
| **3.2** | **Définitions** | **98** |
| **3.3** | **Opérations** | **108** |
| **3.4** | **Compositions** | **109** |
| **3.5** | **Continuité** | **111** |
| **3.6** | **Continuité sur une réunion d'intervalles** | **112** |
| **3.7** | **Suites récurrentes** | **116** |
| **3.8** | **Exercices** | **118** |
| **3.9** | **Solutions** | **120** |
| **3.10** | **Problèmes** | **125** |
| **3.11** | **Correction** | **126** |

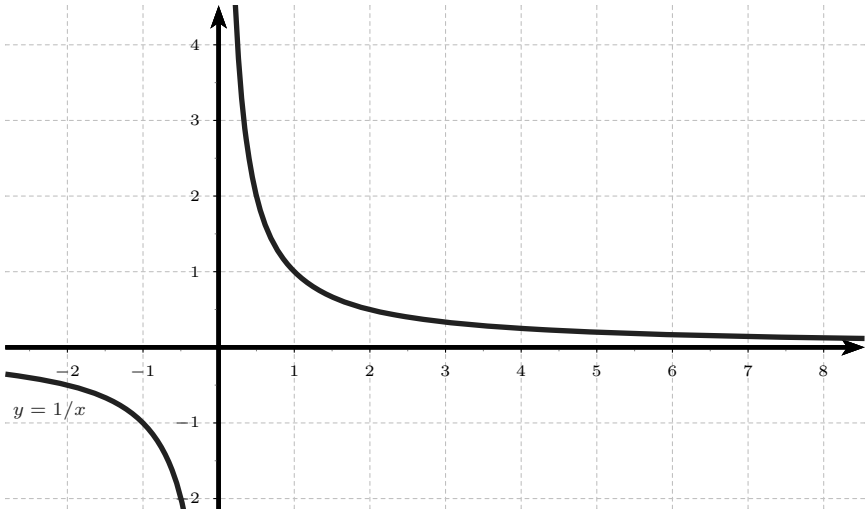
Les limites ont été vues et définies pour les suites. Il existe un certain nombre de liens entre ces deux notions de limites.

## 3.1 Approche intuitive

Trois exemples de représentations graphiques :

### 3.1.1 Fonction inverse

Dans le cours de seconde, nous avons déjà rencontré la fonction inverse dans les exemples 7 page 346. Nous aurons l'occasion de la revoir.

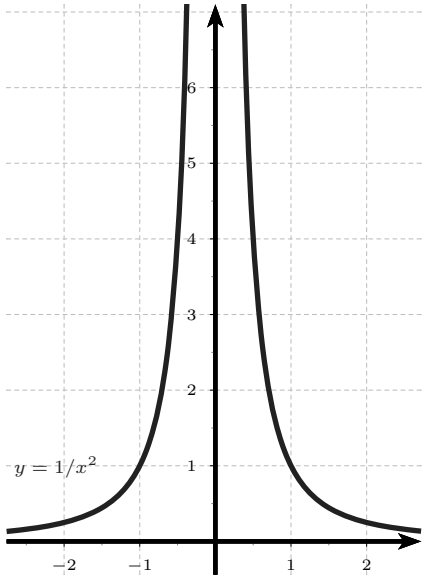



Comme pour une suite $(u_n)_n$ qui tendrait vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, on a envie de dire que la fonction inverse tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$.

### 3.1.2 Fonction inverse au carré

On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & ]-\infty\,,\,0\,[\cup]\,0\,,\,+\infty\,[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2}, \end{array}$$

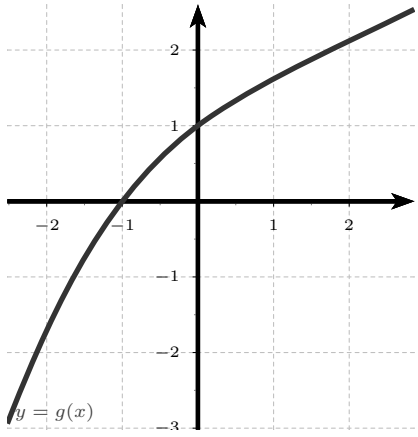



On a envie de dire que la fonction $f$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers 0. Cette situation est complètement différente de la précédente et différente de la convergence des suites.

### 3.1.3 Une fonction plus élaborée

On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} g\ :\ ]-\infty\ ,\ 0\ [\cup]\ 0\ ,\ +\infty\ [ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}+x-2}, \end{array}$$




La fonction $g$ n'est pas définie pour $x = 0$. Pourtant on a envie de dire que $g(0) = 1$, ce qui n'a pas de sens. On dira plutôt que la fonction $g$ tend vers 1 quand $x$ tend vers 0.

Il nous reste à donner des définitions rigoureuses des ces nouvelles notions.

## 3.2 Définitions

### 3.2.1 Limites à l'infini

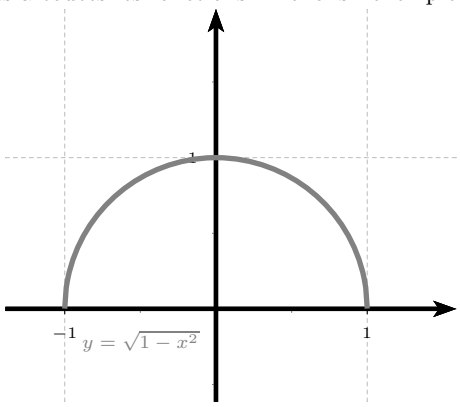
On rappelle la définition 3 page 49 :
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Dire que la suite $(u_n)_{n\in I}$ a pour limite $\ell$ signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in I,\ \forall n \geqslant p,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

D'abord, la notion de limite en $+\infty$ ne s'applique pas à toutes les fonctions. Prenons l'exemple de

$$\begin{array}{rccc} h\ : & [\,-1\ ,\ 1\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2}, \end{array}$$

La question de la limite en $+\infty$ de cette fonction ne se pose même pas. En effet, l'ensemble de définition est borné. Il ne contient pas d'intervalle non majoré.




**Définition 1.**

Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle non majoré et $f$ une fonction définie sur $D$.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Dire que la fonction $f$ a pour limite $\ell$ en $+\infty$ signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in [\ A\ ,\ +\infty\ [\ \cap\ D,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

**Remarque 1.**

Soient $\ell \in \mathbb{R}$, $D$ une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle non majoré et $f$ une fonction définie sur $D$ qui admet pour limite $\ell$ en $+\infty$.
La suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = f(n)$ est définie à partir d'un certain rang.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
En particulier – d'après le théorème 8 page 51 – la limite d'une fonction en $+\infty$ est unique.

**Notation 1.**

Si $f$ est une fonction qui admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, alors on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

**Remarque 2.**

Si on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = 0$ et pour tout $x \notin \mathbb{Z}$, $f(x) = 1$.
La suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro (elle est constante) et pour autant la fonction $f$ n'a pas de limite en $+\infty$.

**Remarque 3.**

Dans l'écriture $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, la lettre $x$ est une variable muette..

**Exemple 1**
La fonction inverse tend vers 0 en $+\infty$.

On définit de même les limites en $-\infty$.

**Définition 2.**

Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle non minoré et $f$ une fonction définie sur $D$.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Dire que la fonction $f$ a pour limite $\ell$ en $-\infty$ signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in ]\ -\infty\ ,\ A\ ]\ \cap\ D,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Cette limite est unique et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

On définit de même les limites infinies en $+\infty$ ou $-\infty$.

**Définition 3.**

Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle non majoré et $f$ une fonction définie sur $D$.
- Dire que la fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que :

$$\forall M > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in [\ A\ ,\ +\infty\ [\ \cap\ D,\ f(x) > M.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**Définition 3.**

- Dire que la fonction $f$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que :

$$\forall m > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in [\ A\ ,\ +\infty\ [\ \cap\ D,\ f(x) < m.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

**Définition 4.**

Soit $D$ une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle non minoré et $f$ une fonction définie sur $D$.

- Dire que la fonction $f$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que :

$$\forall M > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in ]\ -\infty\ ,\ A\ ]\ \cap\ D,\ f(x) > M.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

- Dire que la fonction $f$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que :

$$\forall m > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in ]\ -\infty\ ,\ A\ ]\ \cap\ D,\ f(x) < m.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

**Exemple 2**
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

### 3.2.2 Limites à distance finie

#### Nombres adhérents

On reprend l'exemple

$$\begin{array}{rccc} f\ :\ & ]\ -\infty\ ,\ 0\ [ \cup ]\ 0\ ,\ +\infty\ [ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2}, \end{array}$$

On veut pouvoir dire que la fonction $f$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers 0. On va remarquer pour cela que pour être sûr que $f(x)$ soit plus grand que n'importe quel nombre $A$ fixé à l'avance, il suffit de prendre $x$ suffisamment proche de zéro. En effet :

- si $A \leqslant 0$ on peut prendre ce qu'on veut, par exemple 1 : si $x \in \mathscr{D}_f := ]\ -\infty\ ,\ 0\ [ \cup ]\ 0\ ,\ +\infty\ [$ et $|x| < 1$ alors $f(x) > A$ ;
- si $A > 0$ on peut prendre $\alpha := \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ et on a alors $f(x) > A$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $|x| < \alpha$.

D'abord, la notion de limite en un réel fixé ne s'applique pas à toutes les fonctions. Reprenons l'exemple de

$$\begin{array}{rccc} h\ : & [\,-1\ ,\ 1\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2}, \end{array}$$

La question de la limite en 2 de cette fonction ne se pose même pas. En effet, il ne sera pas possible de s'approcher autant que l'on veut de 2 tout en restant dans l'ensemble de définition de $h$.

**Définition 5.**

- On dit qu'un réel est **adhérent** à un intervalle s'il appartient à cet un intervalle ou s'il est une borne de cet intervalle.
- On dit qu'un réel est adhérent à une réunion d'intervalles s'il est adhérent à l'un de ces intervalles.

**Exemples 3**

- 0 est adhérent à $]\,-\infty\ ,\ 0\,[ \cup ]\,0\ ,\ +\infty\,[$.
- 1 est adhérent à $]\,-1\ ,\ 1\,[$.
- 0 est adhérent à $]\,-1\ ,\ 1\,[$.
- 2 n'est pas adhérent à $]\,-1\ ,\ 1\,[$.

**Théorème 1**

Soit $\mathscr{D}$ une réunion d'intervalles et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}$. Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathscr{D}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

**Démonstration 1**

Si $\mathscr{D}$ est un intervalle $(a,b)$, il suffit de prendre $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + (b-a)2^{-(n+1)}$ et si $\mathscr{D}$ est un intervalle $(c,a)$, il suffit de prendre $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a - (a-c)2^{-(n+1)}$. Enfin si $\mathscr{D}$ contient un des deux intervalles précédents, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvée reste valable puisque tous les éléments de l'intervalle sont aussi des éléments de $\mathscr{D}$. □

### Limites infinies

**Définition 6.**

Soit $f$ une fonction définie sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}$.

- On dit que $f$ tend vers $+\infty$ en $a$, ce que l'on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathscr{D}, (|x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A).$$

- On dit que $f$ tend vers $-\infty$ en $a$, ce que l'on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathscr{D}, (|x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) < A).$$

**Théorème 2**

Soit $f$ une fonction définie sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}$ qui converge vers $a$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = +\infty.$$

**Démonstration 2**

Soit $A$ un nombre réel. Puisque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, on peut affirmer l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que l'on est assuré d'avoir $f(x) > A$ pour tout $x \in \mathscr{D}$ vérifiant $|x-a| < \alpha$.

Or en revenant à la définition 3 page 49 de la limite d'une suite, puisque $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, en prenant $\varepsilon := \alpha$ il existe $p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\ |u_n - a| < \alpha$.

Comme on est sûr que ces $u_n \in \mathscr{D}$ on a $f(u_n) > A$.

Résumons en « oubliant » $\alpha$ :

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant p,\ f(u_n) > A,$$

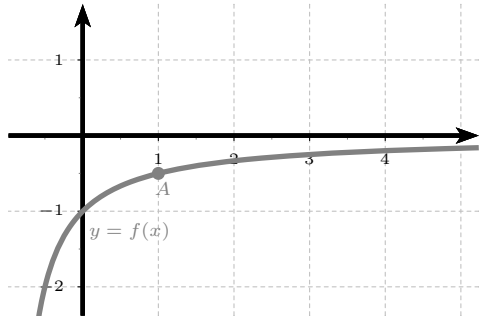
et ce quel que soit $A \in \mathbb{R}$. C'est bien dire que $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = +\infty$. □

**Remarque 4.**

Ce théorème est un théorème de composition de limites. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est la composée, au sens de la définition 12 page 352 déjà vue dans le cours de seconde, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la fonction $f$.

### Limites finies

Soit
$$\begin{array}{rccc} f\ : & ]-1\ ,\ +\infty\ [\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}. \end{array}$$
En traçant la représentation graphique ci-contre, on a envie d'écrire que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$ tant le tracé de `Geogebra` laisse croire que $f(1)$ est défini – ce qui n'est pas le cas – et que $f(1) = \dfrac{1}{2}$.




**Définition 7.**

Soit $f$ une fonction définie sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}$.
Soit $\ell$ un nombre réel.
On dit que la fonction $f$ tend vers $\ell$, ce que l'on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathscr{D}, (|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon).$$

Autrement dit, quelle que soit la marge d'erreur $\varepsilon$ qu'on s'impose en ordonnée, il est toujours possible de trouver une marge d'erreur $\alpha$ en abscisse de telle sorte que – pourvu qu'on reste dans l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ – le simple fait d'être proche de $a$ de moins de $\alpha$ nous assure d'avoir une image proche de $\ell$ de moins de la marge d'erreur $\varepsilon$ qu'on s'était imposée.

**Remarque 5.**

On n'a pas encore établi l'unicité de la limite. Cela viendra dans le paragraphe suivant.

### Caractérisation séquentielle de la limite

**Théorème 3**
Soit $f$ une fonction définie sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}$. Soit $\ell$ un nombre réel.

$\Rightarrow$ Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}$ qui converge vers $a$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell.$$

$\Leftarrow$ Si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}$ qui converge vers $a$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$ alors,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

**Démonstration 3**

⇒ Supposons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $a$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{D}, |x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

D'autre part, on sait que, pour cet $\alpha$

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall n > M, |u_n - a| < \alpha$$

on en déduit, en oubliant le $\alpha$, que

$$\forall n > M, |f(u_n) - \ell| < \varepsilon.$$

C'est bien dire que

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell.$$

⇐ Par contraposée : si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq \ell$, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}$ qui converge vers $a$, telle que $f(u_n)$ ne converge pas vers $\ell$. Supposons que $f$ n'admette pas $\ell$ pour limite en $a$. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathscr{D}, |x-a| < \alpha \text{ et } |f(x) - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

En particulier, en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in \mathscr{D}, |u_n - a| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - \ell| > \varepsilon$$

Mais alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $a$ et la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers $\ell$. Ce qu'on voulait établir. □

Comme conséquence, on a le théorème d'unicité de la limite suivant :

**Théorème 4**

Soit $f$ une fonction définie sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}$. Soit $\ell$ et $\ell'$ deux nombres réels.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

**Démonstration 4**

D'après le théorème 1, il existe une suite d'éléments de $\mathscr{D}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

D'après le théorème précédent (sens ⇒) on a d'une part $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$ et d'autre part $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \ell'$. D'après le théorème 8 page 51, on a bien $\ell = \ell'$. □

**Remarques 6** (Se ramener à zéro)**.**

- Dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, c'est dire que $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - \ell) = 0$.
- Dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, c'est dire que $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = \ell$.
- Dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, c'est dire que $\lim\limits_{h\to 0} (f(x+h) - \ell) = 0$, autrement dit la fonction $\varepsilon$ définie par $\varepsilon(h) := f(x+h) - \ell$ tend vers zéro en zéro.

Ce réflexe de ramener à zéro des situations complexes permet de clarifier bien des calculs.

### 3.2.3 Limites à droite, à gauche

La fonction inverse

$$\begin{array}{rccc} f\ :\ & ]-\infty\ ,\ 0\ [\cup]\ 0\ ,\ +\infty\ [ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}, \end{array}$$

déjà vue plus haut n'admet pas de limite – finie ou infinie – en zéro. En revanche la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_1\ :\ & ]\ 0\ ,\ +\infty\ [ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}, \end{array}$$

obtenue en diminuant l'ensemble de définition, admet une limite infinie en zéro : $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = +\infty$.

Pour la fonction inverse elle-même, on traduit cela en disant que la fonction $f$ admet $+\infty$ comme limite **à droite** en zéro.

**Définition 8.**

Soit $f$ une fonction définie sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}\cap]\ a\ ,\ +\infty\ [$. Soit aussi $\ell$ un nombre réel.

- On dit que $f$ tend vers $+\infty$ à droite en $a$ si

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathscr{D}\cap]\ a\ ,\ +\infty\ [, (|x-a|<\alpha\Longrightarrow f(x)>A).$$

- On dit que $f$ tend vers $-\infty$ à droite en $a$ si

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathscr{D}\cap]\ a\ ,\ +\infty\ [, (|x-a|<\alpha\Longrightarrow f(x)<A).$$

- On dit que $f$ tend vers $\ell$ à droite en $a$ si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathscr{D}\cap]\ a\ ,\ +\infty\ [, (|x-a|<\alpha\Longrightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon).$$

On définit les limites **à gauche**.

**Définition 9.**

Soit $f$ une fonction définie sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}\cap]-\infty\ ,\ a\ [$. Soit aussi $\ell$ un nombre réel.

- On dit que $f$ tend vers $+\infty$ à gauche en $a$ si

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathscr{D}\cap]-\infty\ ,\ a\ [,\ (|x-a|<\alpha\Longrightarrow f(x)>A).$$

- On dit que $f$ tend vers $-\infty$ à gauche en $a$ si

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathscr{D}\cap]-\infty\ ,\ a\ [,\ (|x-a|<\alpha\Longrightarrow f(x)<A).$$

- On dit que $f$ tend vers $\ell$ à gauche en $a$ si

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall x\in\mathscr{D}\cap]-\infty\ ,\ a\ [,\ (|x-a|<\alpha)\Longrightarrow (|f(x)-\ell|<\varepsilon).$$

**Notation 2.**

Notation : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ pour la limite à gauche.
On trouve aussi les notations $\lim\limits_{x\to a^+}$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{x\to a^-}$ pour la limite à gauche en $a$.

**Remarque 7.**

Les limites à droite (ou à gauche) – lorsqu'elles existent – sont uniques. Le lecteur est invité à le vérifier. Il est aussi possible de remarquer que ce sont de vraies limites d'une fonction pour laquelle on aurait restreint la variable à n'exister qu'à droite (ou à gauche) de $a$.

**Théorème 5**
Soient $f$ une fonction définie sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D} \cap ]\ a\ ,\ +\infty\ [$ et à $\mathscr{D} \cap ]\ -\infty\ ,\ a\ [$.

Si $f$ n'est pas définie en $a$, pour que $f$ admette une limite en $a$, il faut et il suffit que

1. $f$ admette une limite à droite et à gauche en $a$ ;
2. **et** que ces limites soient les mêmes.

Si $f$ est définie en $a$, pour que $f$ admette une limite en $a$, il faut et il suffit que

1. $f$ admette une limite à droite et à gauche en $a$ ;
2. **et** que ces limites soient les mêmes et égales à $f(a)$.

**Démonstration 5**
Tout d'abord, il est clair que si puisque $a$ est adhérent à $\mathscr{D} \cap ]\ a\ ,\ +\infty\ [$ et à $\mathscr{D} \cap ]\ -\infty\ ,\ a\ [$, alors $a$ *fortiori*, $a$ est adhérent à $\mathscr{D}$.

Démonstration dans le cas où les limites sont finies. Les autres cas sont laissés au lecteur.
On suppose que $f$ admet une limite $\ell$ en $a$ :
On se donne $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe un réel $\alpha > 0$ pour lequel

$$\forall x \in \mathscr{D},\ (|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon).$$

*A fortiori*, pour ce même $\alpha > 0$,

$$\forall x \in \mathscr{D} \cap ]\ a\ ,\ +\infty\ [,\ (|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon),$$

ce qui signifie que la limite à droite en $a$ de $f$ existe et vaut $\ell$.

De même, toujours pour ce même $\alpha > 0$,

$$\forall x \in \mathscr{D} \cap ]\ -\infty\ ,\ a\ [,\ (|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon),$$

ce qui signifie que la limite à gauche en $a$ de $f$ existe et vaut $\ell$.

Dans l'autre sens. On suppose que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \ell = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$. On se donne $\varepsilon > 0$.
Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \ell$, il existe un réel $\alpha_1 > 0$ pour lequel on a

$$\forall x \in \mathscr{D} \cap ]\ a\ ,\ +\infty\ [,\ (|x-a| < \alpha_1 \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon).$$

De même, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \ell$, il existe un réel $\alpha_2 > 0$ pour lequel on a

$$\forall x \in \mathscr{D} \cap ]\ -\infty\ ,\ a\ [,\ (|x-a| < \alpha_2 \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon).$$

De ce fait, en posant $\alpha := \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a, quitte à prendre en compte $\ell = f(a)$ dans le cas où $f$ est définie en $a$,

$$\forall x \in \mathscr{D}, (|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon),$$

ce qui signifie que la limite en $a$ de $f$ existe et vaut $\ell$. □

**Exemple 4**
Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = 0$. Bien entendu, $f$ n'admet pas de limite en zéro.

**Théorème 6**
Soit $f$ une fonction croissante sur un intervalle $I$.

La fonction $f$ admet des limites à droite et à gauche en chaque point de $I$ pour lequel cela a un sens.

**Démonstration 6**
On va démontrer le théorème pour une fonction $f$ croissante sur un intervalle $I = ]\ a\ ,\ b\ ]$ et on va démontrer que la fonction $f$ admet une limite à droite en $a$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + (b-a)2^{-n}$ est décroissante, de limite $a$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$. De plus on vérifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = f(u_n)$ est décroissante. Elle admet donc une limite, $-\infty$ ou $\ell \in \mathbb{R}$.

**Remarque 8.**

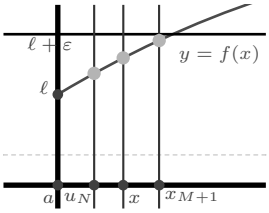
Si $f$ est aussi définie en $a$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $f(a)$ et de ce fait $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n)$ est une limite finie.

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = -\infty$, on va démontrer que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$. Pour cela on se donne $A \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = -\infty$, il existe un entier $M$ tel que $\forall n > M,\ f(u_n) < A$ et en posant $\alpha := u_{M+1} - a$ on a

  $$\forall x \in ]\ a\ ,\ a+\alpha\ [,\ f(x) < f(u_{M+1}) < A.$$

  On a bien démontré que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$.

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$, on va démontrer que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$.




Pour cela on se donne $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$, il existe un entier $M$ tel que $\forall n > M,\ \ell-\varepsilon < f(u_n) < \ell+\varepsilon$ et en posant à nouveau $\alpha := u_{M+1}-a$ on a

$$\forall x \in ]\ a\ ,\ a+\alpha\ [,\ \ell \leqslant f(x) < f(u_{M+1}) < \ell+\varepsilon.$$

En effet soit $x \in ]\ a\ ,\ a+\alpha\ [$. En posant $\varepsilon' = x-a > 0$, il existe un entier $N$ tel que $a-\varepsilon' < u_N < a+\varepsilon' = x$, et d'après le théorème 20 page 60, $\ell \leqslant f(u_N)$. De plus d'après la croissance de $f$ sur l'intervalle $]\ a\ ,\ b\ ]$ on a bien $\ell \leqslant f(u_N) < f(x) < \ell+\varepsilon$.

On a bien démontré que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$. □

### 3.2.4 Théorèmes d'encadrement

**Théorème 7 (Théorème d'encadrement)**
Soient $f, g$ et $h$ trois fonctions définies sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}$ ou $a = -\infty$ ou $a = +\infty$.

i) Si $\forall x \in \mathscr{D},\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et s'il existe un réel $\ell$ tel que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ alors on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Autrement dit, la limite existe d'une part, et égale $\ell$ d'autre part.

ii) Si $\forall x \in \mathscr{D},\ g(x) \leqslant f(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

iii) ] Si $\forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

**Démonstration 7 (Théorème d'encadrement)**
On démontre le $i$). Les autres démonstrations sont identiques *mutatis mutandis*.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'éléments de $\mathscr{D}$ qui converge vers $a$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) \leqslant f(u_n) \leqslant h(u_n)$.

- D'après le théorème 3 (sens $\Rightarrow$) on a $\lim\limits_{n\to\infty} g(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty} h(u_n) = \ell$.
- D'après le théorème d'encadrement pour les suites (théorème 9 page 52), on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$.
- Puisque cette limite est la même pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a$, d'après le théorème 3 (sens $\Leftarrow$) on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. □

## 3.3 Opérations

On a des théorèmes analogues aux théorèmes sur les suites (voir paragraphe 2.4 page 54. Plus précisément :

**Théorème 8**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}$. Soit $\ell$ et $\ell'$ deux nombres réels.

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ On a

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \ell+\ell', \quad \lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \ell-\ell' \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a}(f(x)\times g(x)) = \ell\times\ell'.$$

Si de plus $\ell' \neq 0$ et que $\forall x \in \mathscr{D},\ g(x) \neq 0$ alors

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\ell}{\ell'}.$$

**Démonstration 8**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'importe quelle suite d'éléments de $\mathscr{D}$ qui converge vers $a$. D'après le théorème 3 page 103 les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(x_n) \ \text{ et } v_n = g(x_n)$$

convergent respectivement vers $\ell$ et $\ell'$.

D'après les théorèmes du paragraphe 2.4 page 54, on a

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \ell+\ell',\ \lim_{n\to\infty}(f(x_n)-g(x_n)) = \ell-\ell',\ \lim_{n\to\infty}(f(x_n)\times g(x_n)) = \ell\times\ell',$$

et le cas échéant

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right) = \frac{\ell}{\ell'}.$$

Ces égalités étant vraies quelle que soit la suite d'éléments de $\mathscr{D}$ qui converge vers $a$. D'après le théorème 3 page 103 les fonctions $f+g$, $f-g$, $f\times g$ et le cas échéant $\frac{f}{g}$ admettent comme limites respectives en $a$ : $\ell+\ell'$, $\ell-\ell'$, $\ell\times\ell'$ et le cas échéant $\frac{\ell}{\ell'}$. □

**Remarque 9.**

Ces résultats s'étendent sans problème aux limites à droite ou à gauche.

## 3.4 Compositions

Nous avons déjà vu la composition des fonctions dans le cours de seconde, au paragraphe 10.7 page 351. Nous allons nous intéresser à la limite d'une composée. Dans ce paragraphe, la difficulté ne porte pas sur les limites mais plutôt sur ce que signifie vraiment une composée.

Nous avons aussi déjà vu un théorème de composition des limites, le théorème 3.

**Théorème 9**

Soient $\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} g: & \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g(t) \end{array}$. On suppose de plus que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.

Soient $a$ un nombre adhérent à $\mathscr{D}_f$ et $b$ un nombre adhérent à $\mathscr{D}_g$. Soit $\ell$ un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{t\to b} g(t) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = \ell$.

La démonstration est en tout point identique à celle du théorème 3.

**Démonstration 9**

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{t\to b} g(t) = \ell$, il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathscr{D}_g,\ (|t-b| < \beta \Longrightarrow |g(t)-\ell| < \varepsilon).$$

D'autre part, on sait que, pour ce $\beta$ – puisque $\lim\limits_{t\to a} f(x) = b$ – il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ (|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-b| < \beta).$$

Maintenant, en « oubliant » $\beta$, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ vérifiant $|x-a| < \alpha$, on a $t := f(x) \in \mathscr{D}_g$ qui vérifie $|t-b| < \beta$, donc $|g(t)-\ell| < \varepsilon$ c'est-à-dire $|g(f(x))-\ell| < \varepsilon$.
Ce qu'il fallait établir pour avoir $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = \ell$. □

Il existe de nombreux autres théorèmes de compositions des limites. Par exemple :

**Théorème 10**

Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t) \end{array}$. On suppose de plus que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.

Soit $a$ un nombre adhérent à $\mathscr{D}_f$ et on suppose que $\mathscr{D}_g$ contient un intervalle non majoré. Soit $\ell$ un nombre réel.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = \ell$.

**Démonstration 10**

Soit $\varepsilon > 0$. Alors – puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \ell$ – il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathscr{D}_g,\ (t > B \Longrightarrow |g(t)-\ell| < \varepsilon).$$

D'autre part, on sait que, pour ce $B$ – puisque $\lim\limits_{t\to a} f(x) = +\infty$ – il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ (|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) > B).$$

Maintenant, en « oubliant » $B$, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ vérifiant $|x-a| < \alpha$, on a $t := f(x) \in \mathscr{D}_g$ qui vérifie $t > B$, donc $|g(t)-\ell| < \varepsilon$ c'est-à-dire $|g(f(x))-\ell| < \varepsilon$. Ce qu'il fallait établir pour avoir $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = \ell$.□

Il existe vingt-sept [1] tels théorèmes de compositions des limites. Il ne serait pas raisonnable de tous les démontrer ici. En revanche, en démontrer quelques-uns est un exercice formateur.

1. Sans compter ceux que l'on peut obtenir avec des limites à droite ou à gauche...

# 3.5 Continuité

Une fonction continue en un point $a$ est une fonction indéfiniment approximable. C'est-à-dire que pour avoir une approximation de $f(a)$ aussi précise que l'on veut, il suffit de s'approcher de $a$ d'assez près.

## 3.5.1 Définition

Le lien avec les limites est le suivant :

**Définition 10.**

Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$.
On dit que $f$ est continue en $a \in \mathscr{D}$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En revenant à la définition de la limite, on obtient la caractérisation suivante à l'aide des quantificateurs :

**Théorème 11**
Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$. Soit $a \in \mathscr{D}$.

Pour que la fonction $f$ soit continue en $a$, il faut et il suffit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathscr{D},\ (|x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Le théorème 3 se traduit alors par :

**Théorème 12 (Composition d'une suite et d'une fonction continue)**
Soient $f$ une fonction définie sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et $a$ un nombre réel appartenant à $\mathscr{D}$.

Pour que la fonction $f$ soit continue en $a$, il faut et il suffit que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{D}$ qui converge vers $a$, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(u_n) = f(a).$$

## 3.5.2 Opérations

Toujours en retranscrivant le théorème 8, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 13 (Règles opératoires)**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et continues en $a \in \mathscr{D}$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $f + g$, $\lambda f$ et $fg$ sont aussi continues en $a$.

Si de plus $g$ est non nulle sur $\mathscr{D}$ alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en $a$.

### 3.5.3 Composition

On traduit le théorème 9 par le théorème suivant :

**Théorème 14**

Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} g : & \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g(t) \end{array}$. On suppose de plus que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.
Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
Si $f$ est continue en $a$ et $g$ est continue en $f(a)$ alors $(g \circ f)$ est continue en $a$.

## 3.6 Continuité sur une réunion d'intervalles

**Définition 11.**

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$.
On dit que $f$ est continue sur $\mathscr{D}$ si elle est continue en tout point $t \in \mathscr{D}$, c'est-à-dire
$\lim\limits_{x \to t} f(x) = f(t)$.

**Exemples 5**

1. La fonction $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x, \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2, \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $\begin{array}{rccc} h : & [\,0\,,\,+\infty\,[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x}, \end{array}$ est continue sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$.

---

1. En reprenant la définition quantifiée, il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon$.
2. Grâce aux règles opératoires, on a la continuité en tout point de $g = f \times f$.
3. Soit $a > 0$. On va démontrer que $h$ est continue en $a$. Pour cela, on remarque que pour tout $t \in [\,a/2\,,\,b\,]$, on a
$$h(t) - h(a) = \sqrt{t} - \sqrt{a} = \frac{t-a}{\sqrt{t}+\sqrt{a}}$$
donc
$$|h(t) - h(a)| \leqslant \left| \frac{t-a}{\sqrt{t}+\sqrt{a}} \right| \leqslant \frac{2}{3a}|t-a|.$$
On se donne $\varepsilon > 0$. Pour avoir $|h(t) - h(a)| < \varepsilon > 0$, il suffit donc de choisir $|t-a| < \dfrac{3a}{2}\varepsilon$, pourvu toutefois que $t \geqslant a/2$. En posant $\alpha := \min\left(\dfrac{3a}{2}\varepsilon, \dfrac{a}{2}\right)$ on a donc
$$\forall t \in [\,0\,,\,b\,],\ (|t-a| < \alpha \Longrightarrow |h(t) - h(a)| < \varepsilon)\,.$$

C'est bien dire que $h$ est continue en $a$.
Reste à démontrer que la fonction $h$ est continue en zéro. Or pour avoir $|h(t) - h(0)| = \sqrt{t} < \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ est fixé, il suffit de prendre $|t - 0| = |t| < \alpha$ en posant $\alpha := \varepsilon^2$.
La fonction $h$ est bien continue sur tout $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$.

On étend sans aucune difficulté les règles opératoires déjà vues à une réunion d'intervalles.

**Théorème 15 (Règles opératoires)**
Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur une réunion d'intervalles $\mathscr{D}$ et continues sur $\mathscr{D}$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$.
Les fonctions $f + g$, $\lambda f$ et $fg$ sont aussi continues sur $\mathscr{D}$.
Si de plus $g$ est non nulle sur $\mathscr{D}$ alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur $\mathscr{D}$.

### 3.6.1 Composition

On traduit le théorème 9 page 109 par :

**Théorème 16**

Soit $\begin{array}{rccc} f\ : & \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} g\ : & \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g(t) \end{array}$. On suppose de plus que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.
Si $f$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ et $g$ est continue sur $\mathcal{D}_g$ alors $(g \circ f)$ est continue sur $\mathcal{D}_f$.

### 3.6.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Ce théorème est suffisamment important pour faire l'objet d'une abréviation massivement employée : « TVI ».

**Théorème 17 (Théorème des valeurs intermédiaires)**
Soit $f$ une fonction continue sur un **intervalle** $I$ et $a$ et $b$ deux réels de $I$. Alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [\ a\ ,\ b\ ]$ tel que $f(c) = k$.

La démonstration se fait par **dichotomie**, c'est-à-dire en coupant l'intervalle en deux, en choisissant une des deux moitiés et en recommençant.
**Démonstration 17**

- On peut supposer $k = 0$. En effet, si l'on a montré le théorème dans ce cas, on l'applique ensuite à la fonction $f - k$, continue sur $I$.
- Si $f(a)$ ou $f(b)$ est nul le résultat est évident. Sinon, on peut supposer $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, quitte à appliquer le théorème à $-f$.

- On construit par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, croissante, et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante, avec

$$a_0 = a, b_0 = b, a_n < b_n, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},\ f(a_n) \leqslant 0 \ \text{ et } \ f(b_n) \geqslant 0.$$

On passe de $n$ à $n+1$ en considérant $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$. S'il est $\geqslant 0$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, s'il est $< 0$ on pose $b_{n+1} = b_n$ et $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.
Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Soit alors $c$ la limite commune de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $f$ est continue, les suites $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(c)$. Mais, comme on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) \leqslant 0$, on a $f(c) \leqslant 0$, d'après le théorème 10 page 53. De même, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(b_n) \geqslant 0$ donc $f(c) \geqslant 0$. On en déduit bien que $f(c)$ est nul. □

**Remarque 10.**

Le TVI peut s'énoncer de plusieurs façons. Soit $f$ une fonction continue sur un **intervalle** $I$
- l'ensemble image $f(I)$ est un intervalle.
- soit $a$ et $b$ deux réels de $I$. Alors tout réel $k$ compris entre admet au moins un antécédent par $f$. Autrement dit l'équation

$$[f(x) = k;\ \text{inconnue } x \in I]$$

admet au moins une solution.

**Exemple 6**
Donner une solution à $10^{-6}$ près de l'équation

$$[x^3 - 3x + 1 = 0;\ \text{inconnue } x \in \mathbb{R}].$$

On considère $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 - 3x + 1 \end{array}$.
La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ par applications des règles opératoires. On a $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$. D'après le TVI, l'équation

$$[x^3 - 3x + 1 = 0;\ \text{inconnue } x \in \mathbb{R}]$$

admet au moins une solution dans l'intervalle [ 0 , 1 ].
En remarquant que $2^{10} = 1024 > 10^3$, on voit qu'il suffit de 20 itérations pour trouver une approximation à $10^{-6}$ près.
Le programme affiche `0.34729671478271484`, donc $0,347297$ une valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$.

```
def f(x):
    return 1 + x*(-3+x*x)

def sol(x1,x2):
    epsilon = 0.01
    a = x1 ; b = x2
    while b - a > epsilon:
        c=0.5*(a+b)
        if f(c)>0:
            a=c
        else:
            b=c
    return c

print(sol(-2,0),sol(0,1),sol(1,2))
```

### 3.6.3 Continuité sur un segment

**Théorème 18**
Soit $a < b$ deux réels et $f$ une fonction continue sur le **segment** $[\ a\ ,\ b\ ]$.
La fonction $f$ admet un maximum global et un minimum global sur le segment $[\ a\ ,\ b\ ]$.
(Revoir les définitions 7 page 348 dans le cours de seconde).

La démonstration qui suit est décalquée sur celle de l'infatigable Daniel Perrin sur son site : https ://www.math.u-psud.fr/∼perrin/

On montre le cas du maximum. Pour cela on introduit la notion suivante :

**Définition 12.**

Soit $f : [\ a\ ,\ b\ ] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Un intervalle $[\ A\ ,\ B\ ] \subset [\ a\ ,\ b\ ]$ sera dit dominant pour $f$ s'il vérifie :

$$\forall x \in [\ a\ ,\ b\ ],\ \exists y \in [\ A\ ,\ B\ ],\ \text{ tel que } f(y) \geqslant f(x).$$

On établit le lemme suivant :

**Lemme 19**
Soit $f : [\ a\ ,\ b\ ] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si l'intervalle $[\ A\ ,\ B\ ]$ est dominant pour $f$ et si $C$ est dans $[\ A\ ,\ B\ ]$ l'un des intervalles $[\ A\ ,\ C\ ]$ ou $[\ C\ ,\ B\ ]$ est dominant.

**Démonstration 19**
Si $[\ A\ ,\ C\ ]$ est dominant on a gagné. Sinon, c'est que l'on a :

$$\exists x_0 \in [\ a\ ,\ b\ ], \forall y \in [\ A\ ,\ C\ ], f(x_0) > f(y).$$

Mais, comme $[\ A\ ,\ B\ ]$ est dominant, il existe $y_0 \in [\ A\ ,\ B\ ]$ (et $y_0$ est donc dans $[\ B\ ,\ C\ ]$) avec $f(y_0) \geqslant f(x_0)$. On en déduit que $[\ B\ ,\ C\ ]$ est dominant. En effet, soit $x \in [\ a\ ,\ b\ ]$. Il existe $y \in [\ A\ ,\ B\ ]$ avec $f(y) \geqslant f(x)$. Si $y$ est dans $[\ B\ ,\ C\ ]$ c'est fini ; s'il est dans $[\ A\ ,\ C\ ]$ on a $f(y) < f(x_0) \leqslant f(y_0)$ et on a gagné □

Maintenant, on peut démontrer le théorème :

**Démonstration 18**
On en déduit, par dichotomie, qu'il existe une suite de segments $[\ a_n\ ,\ b_n\ ]$ de longueur $\dfrac{b-a}{2^n}$ dominants pour $f$, où les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Soit $c$ la limite commune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédentes. Montrons que $f(c)$ est le maximum de $f$.

Soit $x$ quelconque dans $[\ a\ ,\ b\ ]$. Comme $[\ a_n\ ,\ b_n\ ]$ est dominant il existe $x_n \in [\ a_n\ ,\ b_n\ ]$ avec $f(x_n) \geqslant f(x)$. Mais alors, la suite $(x_n)$ converge vers $c$ d'après le théorème d'encadrement 9 page 52 et, puisque $f$ est continue, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(c)$ qui vérifie donc, à la limite $f(c) \geqslant f(x)$ par conservation des inégalités larges par passage à la limite (théorème 10 page 53). □

En combinant les théorèmes 17 et 18 on obtient le théorème suivant :

**Théorème 20**
Soit $a < b$ deux réels et $f$ une fonction continue sur le **segment** $[\ a\ ,\ b\ ]$.
L'image du segment $[\ a\ ,\ b\ ]$ par la fonction $f$ est un segment.

## 3.7 Suites récurrentes

**Définition 13.**

Soit $f$ une fonction sur un intervalle $I$. On appelle **point fixe** de $f$ tout réel $x$ appartenant à $I$ vérifiant

$$f(x) = x$$

**Théorème 21**
Soit $f$ une fonction **continue** sur un **segment** $[\ a\ ,\ b\ ]$. On suppose que

$$\forall x \in [\ a\ ,\ b\ ],\ f(x) \in [\ a\ ,\ b\ ].$$

La fonction $f$ admet au moins un point fixe dans $[\ a\ ,\ b\ ]$.

**Démonstration 21**
La fonction $g$ définie sur $[\ a\ ,\ b\ ]$ par

$$\forall x \in [\ a\ ,\ b\ ],\ g(x) = f(x) - x,$$

est continue sur $[\ a\ ,\ b\ ]$ comme différence de deux fonctions continues et vérifie $g(a) = f(a) - a \leqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \geqslant 0$.

D'après le TVI, il existe $x \in [\ a\ ,\ b\ ], g(x) = 0$. Ce réel $x$ est un point fixe de $f$. □

**Théorème 22**
Soit $f$ une fonction **continue** sur un **segment** $[\ a\ ,\ b\ ]$. On suppose que

$$\forall x \in [\ a\ ,\ b\ ],\ f(x) \in [\ a\ ,\ b\ ].$$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [\ a\ ,\ b\ ]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
**Si** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est un point fixe de la fonction $f$ dans $[\ a\ ,\ b\ ]$.

**Démonstration 22**
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par récurrence. Soit $\ell$ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b$.

D'après le théorème de conservation des inégalités larges par passage à la limite (théorème 20 page 60), on a $a \leqslant \ell \leqslant b$. De ce fait, la fonction $f$ est continue en $\ell$.

Maintenant la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir remarque 3 page 49). Or elle converge aussi vers $f(\ell)$ d'après le théorème 3.

D'après l'unicité de la limite (théorème 8 page 51), $\ell = f(\ell)$ ce qu'il fallait démontrer. □

Le théorème suivant peut être très utile.

**Théorème 23**
Soit $f$ une fonction **croissante** sur un **segment** $[\ a\ ,\ b\ ]$. On suppose que

$$\forall x \in [\ a\ ,\ b\ ],\ f(x) \in [\ a\ ,\ b\ ].$$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [\ a\ ,\ b\ ]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si $u_0 \leqslant u_1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (comme elle est majorée par $b$, elle converge).
- Si $u_0 \geqslant u_1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (comme elle est minorée par $a$, elle converge).

**Démonstration 23**
Dans le cas où $u_0 \leqslant u_1$, la croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se démontre à l'aide d'une récurrence sans malice : Si $u_{n-1} \leqslant u_n$ alors $f(u_{n-1}) \leqslant f(u_n)$ par croissance de la fonction $f$, soit $u_n \leqslant u_{n+1}$.

La décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $u_0 \geqslant u_1$ se démontre de la même façon. □

**Exemple 7**
On reprend l'exemple 12 page 67. On pourra comparer les deux solutions.

On définit une suite $u$ par récurrence par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

Pour cela on définit une fonction $f$ sur $[\ 1\ ,\ \Phi\ ]$ par

$$\forall x \in [\ 1\ ,\ \Phi\ ],\ f(x) = \sqrt{1+u_n}, \quad \text{avec } \Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

La fonction $f$ est croissante sur $[\ 1\ ,\ \Phi\ ]$. De plus $f(1) = \sqrt{2} \geqslant 1$ et $f(\Phi) = \Phi$ car $\Phi + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \Phi^2$.

De ce fait, on a

$$\forall x \in [\ 1\ ,\ \Phi\ ],\ f(x) \in [\ 1\ ,\ \Phi\ ].$$

De plus la fonction $f$ est continue sur $[\ 1\ ,\ \Phi\ ]$. De ce fait, la suite $u$ converge vers un point fixe de $f$.

Les points fixes de $f$ sont solution de l'équation $\left[x^2 = x+1;\ \text{inconnue } x \in [\ 1\ ,\ \Phi\ ]\right]$.

**Remarque 11.**

Le nombre $\Phi$ qui apparaît ça et là, s'appelle nombre d'or.

**Moralité** : Il est grand temps de trouver un moyen pratique pour démontrer qu'une fonction est croissante et de savoir résoudre une équation du second degré.

## 3.8 Exercices

**Exercice 1.**

Soit $f$ la fonction définie par

$$\forall x \neq -2,\ f(x) = \frac{-2x^2 - 3x + 5}{x + 2}.$$

1. Étudier la limite de $f$ en chacune des bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer des réels $a$, $b$, $c$ tels que, pour tout $x \neq -2$,
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}.$$
3. Donner une équation des asymptotes éventuelles, justifier.
4. Pour tout $x \neq -2$, étudier le signe de $f(x) + 2x - 1$. Interpréter graphiquement le résultat.
5. Dresser le tableau de variations de $f$.
6. Montrer que le point $I\ \big(-2\ ,\ 5\big)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de $f$.

**Exercice 2.**

Étudier la limite, lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et $-\infty$, des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{-x^2 + 3x - 2}$ ;
2. $f(x) = \dfrac{1 - 4x^2}{x^2}$ ;
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - x}$ ;
4. $f(x) = \sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1}$ (en $+\infty$) ;
5. $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x$.

Pour les questions 3 à 4, on pourra utiliser l'*expression conjuguée* paragraphe 5.9.3 page 90 du cours de seconde.

**Exercice 3.**

1. Déterminer les limites (éventuellement à droite et à gauche) en $x = -1$ et $x = 2$ de la fonction $f$ définie par :
   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}\ f(x) = \dfrac{2x-3}{(x+1)(x-2)}$.
2. Déterminer la limite en 1 de la fonction $f$ définie par :
$$\forall x \in ]-\infty\ ,\ 5] \setminus \{1\}\ f(x) = \frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}.$$
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie :
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ 0 < f(x) < 2.$$
   Déterminer la limite de $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

**Exercice 4.**

Donner des exemples de fonctions $f$ et $g$ telles que

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + g(x) = 1$,
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + g(x)$ n'existe pas.

**Exercice 5** (Vrai / Faux)**.**

Pour chaque affirmation, on demande une justification (contrexemple ou preuve). Il peut être utile, pour aider à la réflexion, de chercher des exemples graphiquement.
Soit $f$ une fonction définie sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$.

1. Si $f$ n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. Si $f$ est une fonction croissante sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $f$ n'est pas majorée.
4. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe au moins un intervalle de la forme $]\ A\ ,\ +\infty\ [$, avec $A \in \mathbb{R}$, sur lequel $f$ est croissante.

**Exercice 6.**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Est-ce que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ a une solution ?

**Exercice 7.**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue ayant le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $10$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | ↘ | $-5$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-10$ | ↗ | $3$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ ?

**Exercice 8.**

Résoudre de façon approchée à $10^{-2}$ l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

## 3.9 Solutions

**Solution 1**

1. Limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

   En $-\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$.

   En $-2^-$ : $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 3 \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{1}{x+2} = 3 \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

   En $-2^+$ : $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3 \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{x+2} = 3 \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

   En $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = -\infty$.

2. Soit $a$, $b$, $c$ des réels tels que, pour tout $x \neq -2$, $\quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$. Pour tout $x \neq -2$,

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} = \frac{(a)x^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}$$

On identifie les coefficients du numérateur, puis on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ 2a+b & = & -3 \\ 2b+c & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b & = & -3-2a=-3+4=1 \\ c & = & 5-2b=5-2=3 \end{array}\right.$$

Il **suffit** de choisir $a=-2,\ b=1$ et $c=3$. Donc on peut écrire, $\boxed{\forall x\neq 2,\ f(x)=-2x+1+\dfrac{3}{x+2}.}$

3. Asymptotes.
   - Au voisinage de $-2$, la fonction $f$ admet des limites infinies à gauche et à droite.
     Donc $\boxed{f \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x=-2.}$
   - D'après le résultat de la question 2,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-2x+1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+2}=0.$$

     Donc $\boxed{f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y=-2x+1 \text{ au voisinage de } +\infty.}$
     Le raisonnement est identique au voisinage de $-\infty$, par conséquent
     $\boxed{f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y=-2x+1 \text{ au voisinage de } -\infty.}$

4. Pour tout $x\neq -2$, $f(x)+2x-1=\dfrac{3}{x+2}$. Ainsi

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)+2x-1$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |

   Ce qui signifie graphiquement que la courbe est sous l'asymptote oblique sur l'intervalle $]-\infty\ ,\ -2\ [$ et au-dessus de l'asymptote sur l'intervalle $]-2\ ,\ +\infty\ [$.

5. On ne peut pas encore calculer la dérivée de $f$ (voir chapitre 4) en utilisant la forme trouvée à la question 2. Soit $x\neq -2$,

$$f'(x)=-2-\frac{3}{(x+2)^2}.$$

   Or $(x+2)^2>0$ pour $\neq -2$, donc $-\dfrac{3}{(x+2)^2}<0$ et finalement $f'(x)<0$. La fonction $f$ est donc décroissante *sur chacun des intervalles de l'ensemble de définition* :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

   Faute de dérivées, on se contente de remarquer que les deux fonctions $x\longmapsto -2x+1$ et $x\longmapsto\dfrac{3}{x+2}$ sont décroissantes sur chacun des intervalles $]-\infty\ ,\ -2\ [$ et $]-2\ ,\ +\infty\ [$. Il en est de même de leur somme, à savoir la fonction $f$.

6. On a pour tout $x \neq -2$,

$$f(-4-x) = -2(-4-x) + 1 + \frac{3}{-4-x+2} = 2x + 9 + \frac{3}{-2-x} = -f(x) + 10.$$

C'est bien dire que $I\left(-2\ ,\ 5\right)$ est centre de symétrie pour la courbe représentative de $f$.

**Solution 2**

1. Pour tout $x \neq 0$ et $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f(x) = \frac{x^3\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = x\frac{\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{-1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}}.$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{-1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} = -2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{-1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} = -2$.

On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

2. Pour tout $x \neq 0$, on a $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 4$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. On en déduit :

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -4}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4}$.

3. Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, en essayant de calculer directement la limite, sans changer l'expression de $f$, on trouve une forme indéterminée (« $\infty - \infty$ »).
Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x} \geqslant \sqrt{2} + \sqrt{x^2-x} \geqslant 2 > 0$ donc n'est jamais nul[2],

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-x} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}} \\ &= \frac{(x^2+2) - (x^2-x)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}} \qquad \text{(Identité remarquable } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2\text{)} \\ &= \frac{2+x}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}} \end{aligned}$$

Si l'on essaye de calculer directement la limite à l'aide des théorèmes généraux, on trouve encore une forme indéterminée (« $\dfrac{\infty}{\infty}$ »). On s'inspire de la démarche dans le cas d'une fraction rationnelle.
On suppose de plus $x \neq 0$. On peut alors écrire

$$f(x) = \frac{2+x}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}} = \frac{x\left(\frac{2}{x} + 1\right)}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}} = \frac{x\left(\frac{2}{x} + 1\right)}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)},$$

soit $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} u(x)$ avec $u(x) := \dfrac{\frac{2}{x} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$. De plus, on remarque que $\sqrt{x^2} = |x|$.
Déterminons les limites en $+\infty$ de chacun des membres :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} + 1 = 0 + 1 = 1$

2. On peut donc diviser par $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}$ en tout quiétude.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x^2} = 1+0 = 1$ et $\lim\limits_{y\to 1}\sqrt{y} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1-0 = 1$ et, de même, $\lim\limits_{y\to 1}\sqrt{y} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}} = 1$.
- Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.
- Pour tout $x>0$, $|x| = x$, donc $\dfrac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$.

En conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}\right)\times\left(\lim_{x\to+\infty} u(x)\right) = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. On a pour tout réel $x$, toujours grâce à l'expression conjuguée,

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}} = \frac{x+2-x+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}.$$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

5. On a pour tout réel $x$, toujours grâce à l'expression conjuguée,

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}.$$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

**Solution 3**

1. ▶ Pour $x := -1$, $\dfrac{2x-3}{(x-2)} = \dfrac{-5}{-3} = \dfrac{5}{3} > 0$. Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty}$.

▶ Pour $x := 2$, $\dfrac{2x-3}{(x+1)} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} > 0$. Donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<2}} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>2}} f(x) = +\infty}$.

2. En utilisant l'expression conguée,

$$\begin{aligned}\forall x\in]-\infty\ ,\ 5]\setminus\{1\}\ f(x) &= \frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}\\ &= \frac{5-x-4}{(x-1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}\\ &= \frac{1-x}{(x-1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{5-x}+2}.\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{5-x}+2 = 4$, on a $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\dfrac{1}{4}$.

3. On a $\forall x>0,\ 0<\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{2}{x}$. Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} = 0$. D'après le théorème d'encadrement (théorème 7) on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

**Solution 4**

Les exemples ne manquent pas !

Solutions

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3.$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} - x.$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -x.$

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -x.$

**Solution 5 (Vrai / Faux)**

1. Faux.

2. Faux.

3. Vrai.

4. Faux.

**Solution 6**

La réponse est oui.

En spécifiant $M := 1$ dans la définition 3, on sait qu'il existe $A$ tel que $f(A) > 1$ en spécifiant $x := A$.

De même il existe $A'$ tel que $f(A) < -1$.

On applique ensuite le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 17) à la fonction $f$ restreinte à l'intervalle $[A'\ ,\ A]$ (ou $[A\ ,\ A']$ si $A < A'$.

**Solution 7**

Une solution dans l'intervalle $]-\infty\ ,\ -5]$ d'après le TVI, et une seule car $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ,\ -5]$.

Une solution dans l'intervalle $]-5\ ,\ 0]$ d'après le TVI, et une seule car $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]-5\ ,\ 0]$.

Une solution dans l'intervalle $]0\ ,\ 1]$ d'après le TVI, et une seule car $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ,\ 1]$.

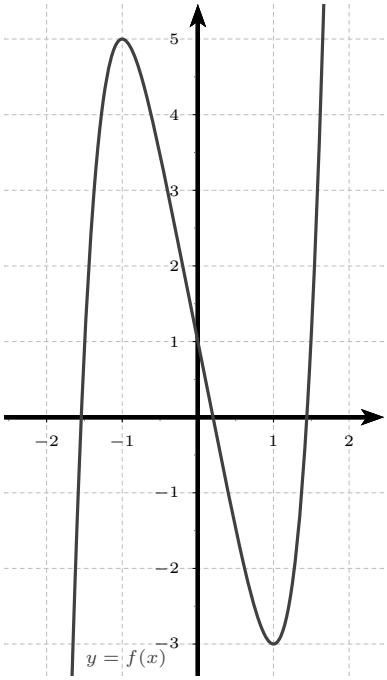
Une solution dans l'intervalle $]3\ ,\ 10]$ d'après le TVI, et une seule car $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]3\ ,\ 10]$.

Pas de solution dans l'intervalle $]10\ ,\ +\infty[$ car $\forall x \in ]10\ ,\ +\infty[,\ f(x) \geqslant 2$.

Au total l'équation admet quatre solutions sur $\mathbb{R}$.

**Solution 8**

On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) := x^5 - 5x + 1$.




On a $f(0) = 1$, $f(1) = -3$, $f(2) = 23$ et $f(-2) = -41$. D'après le TVI, l'équation admet au moins trois solutions, une sur $[-2\ ,\ 0]$, une sur $[0\ ,\ 1]$ et une sur $[1\ ,\ 2]$. Par dichotomie :

```
def f(x):
    return 1 + x*(-5+x**4)

def sol(x1,x2):
    epsilon = 0.01
    a = x1 ; b = x2
    while b - a > epsilon:
        c=0.5*(a+b)
        if f(c)*f(a)>0:
            a=c
        else:
            b=c
    return c

print(sol(-2,0),sol(0,1),sol(1,2))
```

Le programme affiche $-1,54$; $0,20$ et $1,45$ à $10^{-2}$ près.

Pour savoir s'il existe d'autres solutions, et en particulier sur les intervalles précédents, il y aura lieu d'étudier les variations de $f$. C'est l'objet du chapitre suivant.

## 3.10 Problèmes

**Problème 3 (Une équation fonctionnelle)**
On se propose d'étudier les fonctions $f$ continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y). \qquad (\star)$$

On verra au chapitre 6 que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(\omega x)$ sont solutions de cette équation fonctionnelle.

1. Quelles sont les fonctions constantes solution de $(\star)$ ?
   On suppose désormais que la fonction $f$ n'est pas constante.
2. Calculer $f(0)$.
3. Démontrer que la fonction $f$ est paire.
4. Écrire une relation entre $f(2x)$ et $f(x)$ pour tout réel $x$.
5. On suppose dans cette question que $f$ ne s'annule pas.
   (a) Étudier le signe de $f$.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 1$.
   Étudier les variations de la suite $(u_n)$ définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n := f(a2^n).$$

   Quelle est sa limite ?

(c) Que peut-on en conclure pour la fonction $f$ ?

6. Démontrer que si la fonction $f$ s'annule, alors est périodique.

## 3.11 Correction

**Correction 3 (Une équation fonctionnelle)**

1. Supposons que la fonction constante égale à $c$ soit solution de $(\star)$. On a alors $c+c=2c.c$ soit $c=0$ ou $c=1$.
2. En spécifiant $y := 0$ dans $(\star)$ on trouve : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)+f(x)=2f(x)f(0)$. Puisque $f$ n'est pas constante, il existe un réel $x$ tel que $f(x)\neq 0$. En spécifiant cet $x$ on trouve $1=f(0)$.
3. En spécifiant $x := 0$ dans $(\star)$ on trouve : $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$, soit $f(y)+f(-y)=2f(y)$ d'après la question précédente, soit encore $-f(y)+f(-y)=0$ ou $f(y)=f(-y)$ et ce pour tout réel $y$. C'est bien dire que la fonction $f$ est paire.
4. En spécifiant $y := x$ dans $(\star)$ on trouve : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x)+f(0)=2f(x)f(x)$, soit $f(2x)=2f(x)^2-1$.
5. (a) Puisque la fonction $f$ est continue, elle est de signe constant, d'après le TVI. Or $f(0)=1$, donc la fonction $f$ ne prend que des valeurs positives.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= f(a2^{n+1})-u_n \\ &= f\left(2a2^n\right)-u_n \\ &= 2f\left(a2^n\right)^2-1-u_n \\ &= 2u_n^2-1-u_n \\ &= (2u_n+1)(u_n-1). \end{aligned}$$

   On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0<u_{n+1}-u_n<1$.

   **Énoncé :** Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition qui dépend de l'entier $n$ : $\quad 0<u_{n+1}-u_n<1$.

   **Initialisation :** On a $u_0=f(a)<1$. On a $u_1=f(2a)>0$ puisque $f$ ne prend que des valeurs strictement positives. Enfin on a $u_1-u_0=(2u_0+1)(u_0-1)<0$. C'est bien dire qu'on a $\mathscr{P}_0$.

   **Hérédité :** Soit $n$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}_n$. On a alors $u_{n+2}-u_{n+1}=(2u_{n+1}+1)(u_{n+1}-1)<0$ puisque d'après $\mathscr{P}_n$ on a $2u_{n+1}+1>0$ et $u_{n+1}-1<0$. Donc $u_{n+2}<u_{n+1}$. De plus $u_{n+2}=f(2^{n+2}a)>0$ puisque $f$ ne prend que des valeurs strictement positives. On a donc bien $0<u_{n+2}<u_{n+1}<1$, c'est-à-dire $\mathscr{P}_{n+1}$.

   **Conclusion :** On a $\left.\begin{array}{l}\mathscr{P}_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}\end{array}\right\}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.

   Il en résulte que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante. Comme elle est minorée (par 0) elle est convergente vers une limite $\ell \in [0\ ,\ u_0]$.

   Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=(2u_n+1)(u_n-1)$,donc d'après les opérations sur les limites, on a $\ell-\ell=(2\ell+1)(\ell-1)$, soit $(2\ell+1)(\ell-1)=0$ ce qui est impossible.

   (c) On en conclut qu'une fonction $f$ solution de $(\star)$ qui ne s'annule pas ne peut pas prendre de valeur strictement inférieure à 1.

6. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. On a clairement $a \neq 0$ car $f(0) = 1$.
   Soit $t \in \mathbb{R}$. En spécifiant $x := t + a$ et $y := a$ dans $(\star)$, on a $f(t + 2a) + f(t) = 2f(t + a)f(a) = 0$, soit $f(t + 2a)) = -f(t)$ et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   On en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t + 4a)) = -f(t + 2a) = -(-f(t)) = f(t)$.
   C'est bien dire que la fonction $f$ admet le réel $4a$ comme période.

# Chapitre 4

# Dérivation

## Sommaire


| | | |
|---|---|---|
| 4.1 | Définitions | 131 |
| 4.2 | Opérations | 134 |
| 4.3 | Composition | 138 |
| 4.4 | Accroissements finis | 139 |
| 4.5 | Variations des fonctions | 142 |
| 4.6 | Théorème de la bijection | 143 |
| 4.7 | Quiz | 147 |
| 4.8 | Exercices | 148 |
| 4.9 | Solutions | 152 |
| 4.10 | Problèmes | 161 |
| 4.11 | Corrigés | 164 |

### 4.0.1 Vitesse instantanée

Isaac se déplace sur son vélomoteur sur une route rectiligne. Il souhaite savoir à quelle vitesse il roule. Pour cela Wilhelm a relevé, en fonction du temps, la distance (en km) que Isaac a parcourue (temps en min). Il a appelé $f(t)$ l'abscisse de Isaac à l'instant $t$.

La vitesse **moyenne** de Isaac sur l'ensemble du trajet est le quotient de la distance parcourue par le temps de parcours, soit $\overline{v} = \dfrac{f(10)-f(0)}{10-0} = \dfrac{5}{10} = 0,5$ km/min. Isaac remarque que c'est aussi le coefficient directeur de la droite $(AK)$ (voir définition 3 page 382 du cours de seconde). Autrement dit, plus le coefficient directeur est grand et plus la vitesse est grande. C'est du bon sens.

Remarquons qu'un coefficient directeur négatif, donc une vitesse moyenne négative, signalerait que Isaac – pour des raisons qui lui sont propres – aurait fait demi-tour.

Si Isaac veut connaître sa vitesse moyenne pendant la première minute, il calculera le coefficient directeur de la droite $(AB)$ en vert, soit $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)$ etc.

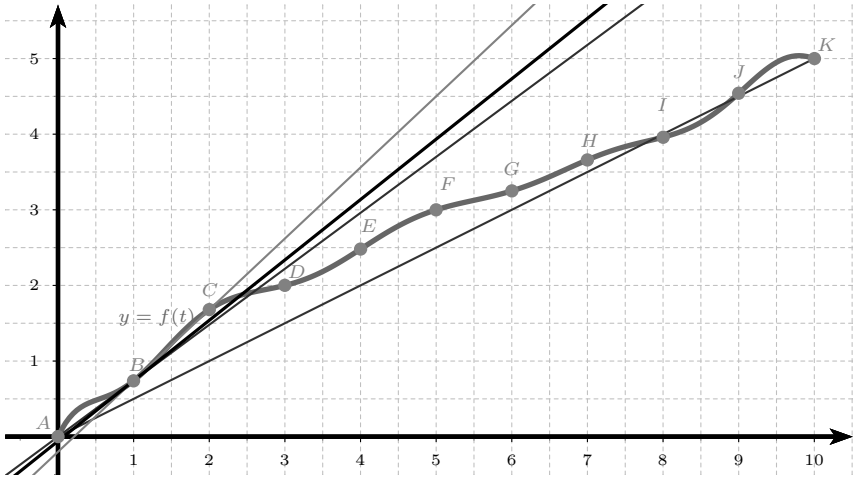
Si maintenant Isaac veut connaître sa vitesse moyenne pendant la deuxième minute, il calculera le coefficient directeur de la droite $(BC)$ en bleu, soit $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)-f(1)$.

S'il veut connaître sa vitesse moyenne entre les instants $t=1$ et $t=1+h$, il devra calculer le coefficient directeur $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

Plus $h$ sera petit en valeur absolue et plus Isaac aura une idée précise de sa vitesse (instantanée) à l'instant $t=1$.

La droite noire est la droite passant par $B$ dont le coefficient directeur est la limite, lorsque $h$ tend vers zéro du coefficient directeur $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

Ce nombre, $\ell = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ est, par définition, la vitesse instantanée de Isaac à l'instant $t=1$.




### 4.0.2 Approximation affine

Une équation de la droite noire passant par $B$ ( 1 , $f(1)$ ) est donc

$$y = f(1) + \ell(x-1).$$

Lorsque $h := x - 1$ est suffisamment proche de zéro, on peut prendre $f(1) + \ell(x-1)$ comme approximation affine de $f(x)$. Cela signifie qu'on considère que la vitesse de Isaac est constante et égale à $\ell$ entre les instants $t = 1$ et $t = x = 1 + h$.

Lorsqu'on écrit $\ell = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$, cela veut dire que $\varepsilon(h) := \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} - \ell$ tend vers zéro lorsque $h$ tend vers zéro. En multipliant cette égalité par $h$, on obtient

$$f(1+h) = \underbrace{f(1) + \ell.h}_{\text{approximation affine}} + h\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Reste à donner des définitions formelles à tout cela, sans avoir besoin de Isaac ni de son vélomoteur.

# 4.1 Définitions

## 4.1.1 Nombre dérivé

**Définition 1.**

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$. Soit $a \in \mathscr{D}$.
On dit que $f$ est **dérivable** en $a$ si la limite, quand $h$ tend vers zéro du taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
Dans ce cas, cette limite s'appelle le **nombre dérivé** de $f$ en $a$. On le note $f'(a)$ ou $\dfrac{df}{dx}(a)$ en sciences physiques.

Dans le cas du vélomoteur de Isaac, la vitesse instantanée de Isaac à l'instant $t = 1$ est donc le nombre dérivé $f'(1)$ ou plutôt $\dfrac{df}{dt}(1)$. La question de l'existence de cette limite ne s'est pas posée. Pourtant, dans le cas général, c'est un problème mathématique qui peut se poser.

**Exemple 1**
Soit $f : x \in [\,0\,,\,+\infty\,[ \longmapsto \sqrt{x}$. Soit $a > 0$, la fonction $f$ est dérivable en $a$ et de plus $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

En effet pour tout réel $h$ non nul tel que $a + h > 0$ on a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.$$

On sait que la fonction $f$ est continue en $a$ (exemple 5 page 112). De ce fait on a $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

### 4.1.2 Approximation affine

**Théorème 1**
Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$. Soit $a \in \mathscr{D}$.

Pour que la fonction $f$ soit dérivable en $a$, il faut et il suffit qu'il existe deux réels $m$ et $p$ et une fonction $\varepsilon$ qui tend vers zéro en zéro et telle que, pour tout $h$ tel que $a+h \in \mathscr{D}$,

$$f(a+h) = mh + p + h\varepsilon(h).$$

**Démonstration 1**

- Si $f$ est dérivable en $a$, il suffit de prendre $p = f(a)$, $m = f'(a)$, $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$ pour $h \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$.
- inversement, s'il existe deux réels $m$ et $p$ et une fonction $\varepsilon$ qui tend vers zéro en zéro et telle que, pour tout $h$ tel que $a+h \in \mathscr{D}$, $f(a+h) = mh + p + h\varepsilon(h)$, alors pour $h = 0$, $f(a) = p$ donc pour $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - m = \varepsilon(h)$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = m$. De plus $m = f'(a)$. □

**Définition 2.**

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. Soit $a \in \mathscr{D}$. Soit $f$ une fonction dérivable en $a$. Le plan est rapporté à un repère.
On appelle tangente à la représentation graphique de $f$ au point d'abscisse $a$, la droite d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

**Théorème 2**
Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$. Soit $a \in \mathscr{D}$.

Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.

**Démonstration 2**
Il suffit de démontrer que $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. Or il existe une fonction $\varepsilon$ qui tend vers zéro en zéro et telle que, pour tout $h$ tel que $a+h \in \mathscr{D}$, $f(a+h) = f'(a).h + f(a) + h\varepsilon(h)$. Par opérations sur les limites, on a bien $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f'(a) \times 0 + f(a) + 0 \times 0 = f(a)$. □

**Théorème 3**
Soit $m$ et $p$ deux nombres réels et $f$ une fonction affine définie sur un intervalle $I$ par

$$\forall x \in I,\ f(x) = mx + p.$$

La fonction $f$ est dérivable en tout $a \in I$ et $f'(a) = m$.

**Démonstration 3**
Soit $x \in I$, on a $f(x) - f(a) = m(x-a)$ soit en posant $h := x - a$,

$$f(a+h) = mh + f(a) + h\varepsilon(h),$$

en posant $\varepsilon(h) := 0$. On a bien sûr $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, donc $m = f(a)$ et ce pour tout $a \in I$. □

### 4.1.3 Dérivée à droite, à gauche

**Définition 3.**

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$. Soit $a \in \mathscr{D}$.
On dit que $f$ est **dérivable à droite** en $a$ si la limite à droite, quand $h$ tend vers zéro du taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
Dans ce cas, cette limite s'appelle le **nombre dérivé à droite** de $f$ en $a$. On le note $f'_d(a)$.
On a une définition semblable pour le **nombre dérivé à gauche** de $f$ en $a$. On le note $f'_g(a)$.

**Théorème 4**
Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$. Soit $a \in \mathscr{D}$.

Si $f$ admet en $a$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche et que $f'_d(a) = f'_g(a)$ alors $f$ est dérivable en $a$ et de plus $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

**Démonstration 4**
C'est une simple conséquence du théorème 5 page 106, dans le premier cas puisque $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ n'est pas définie pour $h = 0$. □

**Exemple 2**
Soit $f \ : \ x \in \mathbb{R} \longmapsto |x|$.

On a $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. De ce fait la fonction $f$ n'est pas dérivable en 0.

### 4.1.4 Fonction dérivée

**Définition 4.**

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. Soit $f$ une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$. On dit que $f$ est **dérivable** sur $\mathscr{D}$ si elle est dérivable en tout $a \in \mathscr{D}$. Dans ce cas on appelle **fonction dérivée** de $f$ la fonction $\begin{array}{rccc} f' : & \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \longmapsto & f'(a) \end{array}$.

**Exemple 3 (Statistiques)**
On reprend de nouveau l'exemple 12 page 298 du cours de seconde.

Le polygone des fréquences cumulées croissantes est la courbe représentative d'une fonction affine par morceaux **continue**. Dans chaque classe $I_k$ le coefficient directeur $m_k$ est – à un facteur d'échelle près – la hauteur dans l'histogramme du rectangle qui représente cette classe. Autrement l'histogramme est la représentation graphique (coloriée) de la dérivée du polygone des fréquences cumulées croissantes.

**Remarque 1.**

De façon paradoxale, il est souvent beaucoup plus facile de calculer toute une fonction dérivée qu'un nombre dérivé. C'est le but des deux rubriques qui viennent.

## 4.2 Opérations

### 4.2.1 Dérivée d'une somme

**Théorème 5**
Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles. Soient deux fonctions $u$ et $v$ dérivables sur $\mathscr{D}$. Alors $u+v$ est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$ et :

$$(u+v)' = u' + v'.$$

**Démonstration 5**
Soit $a \in \mathscr{D}$. Il existe deux fonctions $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ qui tendent vers zéro en zéro et telle que, pour tout $h$ tel que $a+h \in \mathscr{D}$,

$$u(a+h) = u'(a).h + u(a) + h\varepsilon_1(h) \text{ et } v(a+h) = v'(a).h + v(a) + h\varepsilon_2(h).$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient

$$u(a+h) + v(a+h) = (u'(a) + v'(a)).h + (u(a) + v(a)) + h(\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)).$$

Puisque $\varepsilon := \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ tend vers zéro en zéro par opérations sur les limites, on en déduit que :

1. la fonction $u+v$ est dérivable en $a$,
2. (u+v)'(a) = u'(a) + v'(a).

Ceci est vrai pour tout $a \in \mathscr{D}$ d'où le résultat. □

### 4.2.2 Dérivée d'un produit

**Théorème 6**
Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles.

- Soient deux fonctions $u$ et $v$ dérivables sur $\mathscr{D}$. Alors $uv$ est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$ et :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

- En particulier, si $\lambda$ est un réel, alors $(\lambda v)' = \lambda v'$.
- Soient un entier naturel non nul $n$ et une fonction $u$ dérivable sur $\mathcal{D}$. Alors $u^n$ est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$ et

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'.$$

**Démonstration 6**
Soit $a \in \mathscr{D}$.

- Il existe deux fonctions $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ qui tendent vers zéro en zéro et telle que, pour tout $h$ tel que $a+h \in \mathscr{D}$,

$$u(a+h) = u'(a).h + u(a) + h\varepsilon_1(h) \text{ et } v(a+h) = v'(a).h + v(a) + h\varepsilon_2(h).$$

En multipliant ces deux égalités, on obtient

$$\begin{aligned} u(a+h)\times v(a+h) &= (u'(a)\times v(a) + u(a)\times v'(a)).h + (u(a)\times v(a)) + \\ &\quad + h(\varepsilon_1(h)(u'(a).h + u(a)) + \varepsilon_2(h)(v'(a).h + v(a)) + h\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)) \\ &= (u'(a)\times v(a) + u(a)\times v'(a)).h + (u(a)\times v(a)) + h(\varepsilon(h)), \end{aligned}$$

en posant

$$\varepsilon(h) := \varepsilon_1(h)(u'(a).h + u(a)) + \varepsilon_2(h)(v'(a).h + v(a)) + h\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h).$$

D'après les opérations sur les limites, on a bien $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Par conséquent,

1. la fonction $u \times v$ est dérivable en $a$,
2. $(u\times v)'(a) = u'(a)\times v(a) + u(a)\times v'(a)$.

Ceci est vrai pour tout réel $a$ de $\mathscr{D}$ d'où le résultat.

- Il suffit d'appliquer ce qui précède avec $u : x \longmapsto \lambda$. En effet une fonction constante est dérivable sur tout intervalle ou une réunion d'intervalles et de fonction dérivée nulle.
- On démontre par récurrence la proposition $\mathcal{P}_n$ qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ : La fonction $u^n$ est dérivable sur $\mathscr{D}$ et

$$\forall x \in \mathscr{D},\ (u^n)'(x) = nu^{n-1}(x)u'(x).$$

La proposition $\mathcal{P}_1$ est claire puisque $\forall t \in \mathbb{R},\ t^0 = 1$.

Soit $n$ un entier naturel non nul, pour lequel $\mathcal{P}_n$. On a $u^{n+1} = u^n \cdot u$. Donc $u^{n+1}$ est dérivable sur $\mathscr{D}$ comme produit de $u^n$ ( dérivable sur $\mathscr{D}$ d'après $\mathcal{P}_n$) et de $u$ ( dérivable sur $\mathscr{D}$). De plus

$$\left(u^{n+1}\right)' = (u^n)'\,u + u^n u' = \underbrace{nu^{n-1}u'}_{\mathcal{P}_n} u + u^n u' = nu^n u' + u^n u' = (n+1)u^n u',$$

ce qui complète $\mathcal{P}_{n+1}$. En résumé, on a $\mathcal{P}_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n$. □

**Exemple 4**
La fonction $\begin{array}{rccc} f\ : & [\,0\ ,\ +\infty\,[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x.\sqrt{x} \end{array}$ est dérivable en tout réel $x \geqslant 0$ et

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

En effet on pose $u(x) := x$ et $v(x) := \sqrt{x}$. On a $u$ et $v$ dérivables sur $]\,0\ ,\ +\infty\,[$ et $\forall x \in\ ]\,0\ ,\ +\infty\,[$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. De ce fait

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

De plus, en zéro,

$$f(0+h) = f(h) = h.\sqrt{h} = 0.h + f(0) + h\varepsilon(h),$$

avec $\varepsilon(h) := \sqrt{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Donc $f$ est dérivable en zéro et $f'(0) = 0 = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ en posant $x := 0$.

### 4.2.3 Dérivée d'un quotient

**Théorème 7**
Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Soient deux fonctions $u$ et $v$ dérivables sur $\mathscr{D}$ telles que pour tout réel $a$ de $\mathscr{D}$, $v(a) \neq 0$. Alors $\dfrac{u}{v}$ est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$ et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

**Démonstration 7**
Soit $a \in \mathscr{D}$. Il existe deux fonctions $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ qui tendent vers zéro en zéro et telle que, pour tout $h$ tel que $a + h \in \mathscr{D}$,

$$u(a+h) = u'(a).h + u(a) + h\varepsilon_1(h) \ \text{ et } v(a+h) = v'(a).h + v(a) + h\varepsilon_2(h).$$

De plus, d'après le théorème 2, il existe une fonction $\varepsilon_3$ qui tend vers zéro en zéro et telle que, pour tout $h$ tel que $a + h \in \mathscr{D}$,

$$\frac{1}{v(a+h).v(a)} = \frac{1}{v(a)^2} + \varepsilon_3(h).$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a)}{v(a)} &= \frac{u(a+h).v(a) - u(a).v(a+h)}{v(a+h).v(a)} \\
&= \frac{u'(a).v(a).h + u(a).v(a) + v(a).h.\varepsilon_1(h) - u(a).v'(a).h - u(a).v(a) - u(a).h.\varepsilon_2(h)}{v(a+h).v(a)} \\
&= \frac{u'(a).v(a).h + v(a).h.\varepsilon_1(h) - u(a).v'(a).h - u(a).h.\varepsilon_2(h)}{v(a+h).v(a)} \\
&= \Big(u'(a).v(a).h + v(a).h.\varepsilon_1(h) - u(a).v'(a).h - u(a).h.\varepsilon_2(h)\Big) \times \frac{1}{v(a)^2} \\
&\qquad + \Big(u'(a).v(a).h + v(a).h.\varepsilon_1(h) - u(a).v'(a).h - u(a).h.\varepsilon_2(h)\Big) \times \varepsilon_3(h) \\
&= \frac{u'(a).v(a) - u(a).v'(a)}{v(a)^2}\, h + h.\varepsilon(h),
\end{aligned}$$

en posant

$$\varepsilon(h) := (v(a).\varepsilon_1(h) - u(a).\varepsilon_2(h)) \times \frac{1}{v(a)^2} + \Big(u'(a).v(a) + v(a).\varepsilon_1(h) - u(a).v'(a) - u(a).\varepsilon_2(h)\Big) \times \varepsilon_3(h).$$

D'après les opérations sur les limites, on a bien $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Par conséquent,

1. la fonction $\left(\frac{u}{v}\right)$ est dérivable en $a$,
2. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Ceci est vrai pour tout $a$ de $\mathscr{D}$ d'où le résultat. □

**Exemple 5**
La fonction inverse $\begin{array}{rccc} f\ :\ ]-\infty\ ,\ 0\ [\cup]\ 0\ ,\ +\infty\ [ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ est dérivable en tout réel $x \neq 0$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

---

En effet on pose $u(x) := 1$ et $v(x) := x$. On a $u$ et $v$ dérivables sur $]-\infty\ ,\ 0\ [\cup]\ 0\ ,\ +\infty\ [$ et $\forall x \in ]-\infty\ ,\ 0\ [\cup]\ 0\ ,\ +\infty\ [,\ v(x) \neq 0$, $u'(x) = 0$ et $v'(x) = 1$. De ce fait

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

## 4.3 Composition

**Théorème 8 (Règle de la chaîne)**

Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} g : & \mathcal{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g(t) \end{array}$. On suppose de plus que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.

Soit $a \in \mathscr{D}_f$.

Si $f$ est dérivable en $a$ et $g$ est dérivable en $f(a)$ alors $G := (g \circ f)$ est continue en $a$. De plus

$$G'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

**Démonstration 8 (Règle de la chaîne)**

Il existe une fonction $\varepsilon_1$ qui tend vers zéro en zéro et telle que, pour tout $h$ tel que $a + h \in \mathscr{D}$,

$$f(a+h) = f'(a).h + f(a) + h\varepsilon_1(h).$$

De même, il existe une fonction $\varepsilon_2$ qui tend vers zéro en zéro et telle que, pour tout $k$ tel que $f(a)+k \in \mathscr{D}$,

$$g(f(a)+k) = g'(f(a)).k + g(f(a)) + k\varepsilon_2(k).$$

En particulier lorsqu'on prend $k := f(a+h) - f(a) = f'(a).h + h\varepsilon_1(h)$, l'égalité ci-dessus devient

$$\begin{aligned} G(a+h) = g(f(a+h)) &= g'(f(a)).(f'(a).h + h\varepsilon_1(h)) + g(f(a)) + (f'(a).h + h\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(k) \\ &= g'(f(a)).f'(a).h + G(a) + h\varepsilon(h), \end{aligned}$$

en posant

$$\varepsilon(h) := g'(f(a)).\varepsilon_1(h) + (f'(a) + \varepsilon_1(h))\varepsilon_2(f'(a).h + h\varepsilon_1(h)).$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} f'(a).h + h\varepsilon_1(h) = 0$, donc d'après les opérations sur les limites, on a bien $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Par conséquent,

1. la fonction $G$ est dérivable en $a$,
2. $G'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$. □

**Remarque 2.**

« Règle de la chaîne » est une traduction de l'anglais « chain rule ».
L'écriture « physicienne » de $G'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$ devient

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \times \frac{df}{dx}.$$

**Exemple 6**

Soit $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g(t) \end{array}$ une fonction dérivable en tout réel $t \in \mathbb{R}$, $a$ et $b$ deux nombres réels. La fonction $\begin{array}{rccc} G: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(ax+b) \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = a.g'(ax+b).$$

Poser $f(x) := ax + b$.

## 4.4 Accroissements finis

### 4.4.1 Condition nécessaire d'un extremum relatif

**Théorème 9**
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et soit $a$ un point de $I$ tel que

1. Le point $a$ est **intérieur** à l'intervalle, c'est à dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[ \subset I$.
2. Le point $a$ est un extremum local de la fonction $f$ sur $I$.
3. La fonction $f$ est dérivable au point $a$.

alors $\boxed{f'(a) = 0}$.

**Démonstration 9**
Quitte à changer $f$ en $-f$, on peut supposer que $f$ possède un maximum local en $a$, c'est à dire qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\forall x \in [\ a-\beta\ ,\ a+\beta\ ] \cap I, \quad f(x) \leqslant f(a)$. Posons $r = \min(r_1, r_2)$.

- Si $a - r < x < a$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$. Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a)$, par passage à la limite dans l'inégalité, on tire que $f'_d(a) \leqslant 0$.
- Si $a < x < a + r$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ et puisque $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a)$, par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient que $f'_d(a) \geqslant 0$. □

Puisque $f$ est dérivable en $a$, on obtient

$$f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a) = 0.$$

**Remarque 3.**

Il est très facile de comprendre de travers le théorème précédent. Témoin l'exemple qui suit.

Soit $\begin{array}{rccc} f : & [\,-1\ ,\ 1\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 \end{array}$. La fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $[\,-1\ ,\ 1\,]$. Elle y est donc continue et admet un maximum et un minimum. Il n'est pas difficile de voir que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[\,-1\ ,\ 1\,]$. Donc le minimum de $f$ est $f(-1) = -1$ et le minimum de $f$ est $f(-1) = -1$.
De plus $\forall x \in [\,-1\ ,\ 1\,],\ f'(x) = 3x^2$. Autrement dit :

- au point où la dérivée s'annule, c'est-à-dire en zéro, la fonction $f$ n'admet pas d'extrémum local puisque $f$ est strictement croissante sur $[\,-1\ ,\ 1\,]$. La condition nécessaire d'extrémum local n'est pas suffisante ;
- aux points où la fonction $f$ admet un extrémum local, c'est-à-dire en $-1$ et en 1, la dérivée de $f$ ne s'annule pas. Cela ne contredit pas le théorème 9 dans la mesure où les points $-1$ et en 1 sont les bornes de l'intervalle $[\,-1\ ,\ 1\,]$ et ne sont pas intérieurs à$[\,-1\ ,\ 1\,]$ de ce fait.

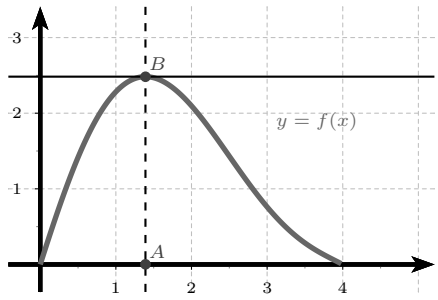
### 4.4.2 Théorème de Rolle

**Théorème 10 (de Rolle)**
Soit $f$ une fonction continue sur le **segment** $[\,a\ ,\ b\,]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]\,a\ ,\ b\,[$.
Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in ]\,a\ ,\ b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

**Démonstration 10**
Comme $f$ est continue sur le segment $[\,a\ ,\ b\,]$, l'image de ce segment, par application du théorème 20 page 116 est un segment $[\,m\ ,\ M\,]$ avec $m \leqslant M$.

- Si $m = M$ alors $f$ est constante sur $[\,a\ ,\ b\,]$ et sa dérivée est nulle sur $]\,a\ ,\ b\,[$.
- Sinon, alors $m < M$. Comme $f(a) = f(b)$ l'un des deux est différent de $m$ ou $M$. On peut supposer que $f(a) \neq m$. Le minimum de $f$ sur $[\,a\ ,\ b\,]$ est donc atteint en un point $c \in [\,a\ ,\ b\,]$ différent de $a$ et de $b$, donc en un point intérieur de l'intervalle $[\,a\ ,\ b\,]$. D'après la proposition précédente, on a $f'(c) = 0$. □

Interprétation graphique :
La fonction $f$ prend la même valeur (ici zéro) en $a = 0$ et en $b = 4$.
Sa dérivée s'annule en $c$. On a représenté les points $A\ (\ c\ ,\ 0\ )$ et $B\ (\ c\ ,\ f(c)\ )$.
La tangente au point $B$ est horizontale.




Interprétation cinématique :
Si Isaac retourne à son point de départ avec son vélomoteur, alors il a vu sa vitesse instantanée s'annuler à un instant donné où il faisait demi-tour.

### 4.4.3 Théorème des accroissements finis

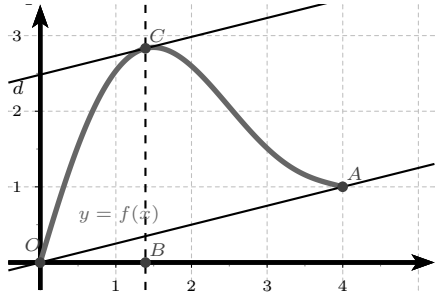
**Théorème 11 (Théorème des accroissement finis (TAF))**
Soit une fonction $f : [\ a\ ,\ b\ ] \to \mathbb{R}$. On suppose que

1. la fonction $f$ est continue sur le segment $[\ a\ ,\ b\ ]$,
2. la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]\ a\ ,\ b\ [$.

Alors il existe un point intérieur $c \in ]\ a\ ,\ b\ [$ tel que

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

Interprétation graphique :
Au point $C\ (\ c\ ,\ f(c)\ )$ la tangente à la courbe représentative de $f$ est parallèle à la droite $(OA)$.




**Démonstration 11**
Définissons une fonction auxiliaire $\begin{array}{rcl} \phi\ :\ [\ a\ ,\ b\ ] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) - f(a) - K(t-a) \end{array}$ où $K$ est une constante que nous choisissons de telle sorte que $\phi(a) = \phi(b)$. On trouve $K = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. La fonction $\phi$ est continue sur le segment $[\ a\ ,\ b\ ]$ (théorèmes généraux), dérivable sur l'intervalle $]\ a\ ,\ b\ [$ (théorème généraux sur les dérivées) et on calcule $\phi(a) = \phi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in ]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$. □

**Remarque 4.**

Quand un mobile se déplace sur un axe et part d'un point $A$ au temps $t_1$, arrive en $B$ au temps $t_2$ et si $f$ est la fonction position de ce mobile sur l'axe, alors il existe un instant $t \in ]\ t_1\ ,\ t_2\ [$ tel que la vitesse instantanée en $t$ : $f'(t)$ de ce mobile soit égale à sa vitesse moyenne $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$.

### 4.4.4 Inégalité des accroissements finis

**Théorème 12 (Inégalité des accroissement finis)**
Soit une fonction $f : [\ a\ ,\ b\ ] \to \mathbb{R}$. On suppose que

1. la fonction $f$ est continue sur le segment $[\ a\ ,\ b\ ]$,
2. la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]\ a\ ,\ b\ [$,
3. il existe deux réels $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in ]a, b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

Alors on a

$$\boxed{m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)}$$

**Démonstration 12**
Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f$ sur le segment $[\ a\ ,\ b\ ]$. Il existe un réel $c \in ]\ a\ ,\ b\ [$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Puisque $m \leqslant f'(c) \leqslant M$, on en déduit que $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$. □

Interprétation cinématique :

Si Isaac se déplace sur son vélomoteur avec une vitesse instantanée qui est comprise à chaque instant entre 10 km/h et 35 km/h, alors il peut affirmer qu'en une heure il parcourt une distance comprise entre 10 km et 35 km.

Comme quoi ce genre de propriété complètement évidente physiquement, peut nécessiter des efforts insoupçonnables en mathématiques pour être démontrée rigoureusement. Le cas de l'inégalité des accroissements finis n'est pas isolé.

## 4.5 Variations des fonctions

Le résultat suivant est une conséquence du théorème des accroissements finis. C'est un outil puissant d'étude des fonctions. Il explique que si Isaac se déplace sur son vélomoteur avec une vitesse instantanée qui est à chaque instant positive, alors Isaac ne va jamais se mettre à reculer.

**Théorème 13 (Caractérisation des fonctions constantes, monotones)**
Soit $I$ un **intervalle** de $\mathbb{R}$. Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que $f$ est dérivable sur $I$. Alors on a les résultats suivants :

1. $(\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0) \iff f$ est croissante sur $I$.
2. $(\forall x \in I, \quad f'(x) > 0) \implies f$ est strictement croissante sur $I$.
3. $(\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0) \iff f$ est décroissante sur $I$.
4. $(\forall x \in I, \quad f'(x) < 0) \implies f$ est strictement décroissante sur $I$.
5. $(\forall x \in I, \quad f'(x) = 0) \iff f$ est constante sur $I$.

**Démonstration 13**
Démontrons la première équivalence. Les trois suivantes se démontrent de même.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que : $\forall x \in ]\ a\ ,\ b\ [,\quad f'(x) \geqslant 0$ et montrons que $f$ est croissante sur $[\ a\ ,\ b\ ]$. Soient $x_1, x_2 \in [\ a\ ,\ b\ ]$ tels que $x_1 < x_2$. La fonction $f$ est continue sur $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$ et dérivable sur $]\ x_1\ ,\ x_2\ [$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]\ x_1\ ,\ x_2\ [$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0$ et donc $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ ce qui prouve que $f$ est croissante sur $[\ a\ ,\ b\ ]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que $f$ est croissante sur $[\ a\ ,\ b\ ]$. Alors, pour tout $x_0 \in ]\ a\ ,\ b\ [$ le taux d'accroissement de $f$ en $x_0$, $\Delta_{x_0,f} : x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est une fonction positive sur $]\ a\ ,\ b\ [\backslash\{x_0\}$. Puisque la fonction $f$ est dérivable au point $x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta_{x_0,f}(x) = f'(x_0)$. Par passage à la limite dans l'inégalité, on en tire que $f'(x_0) \geqslant 0$.

La dernière équivalence est conséquence du fait qu'une fonction est constante si et seulement si elle est à la fois croissante et décroissante. □

**Remarque 5.**

La réciproque de 2. est fausse : la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, dérivable et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

## 4.6 Théorème de la bijection

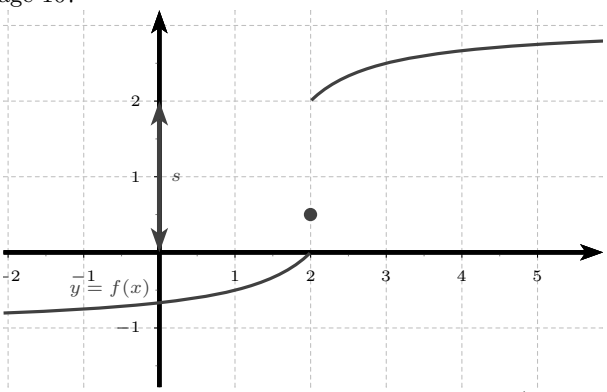
### 4.6.1 Fonctions strictement monotones

**Définition 5.**

Soit $I$ un intervalle, $f$ une fonction monotone sur $I$ et $a$ un point intérieur à $I$. On appelle **saut** de $f$ en $a$ la différence

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) - \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x).$$

Pour les points intérieurs revoir le théorème 9 page 139 et pour l'existence des limites, revoir le théorème 6 page 107




La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{1}{x-3} & \text{si} \quad x < 2 \\ 0,5 & \text{si} \quad x = 2 \\ 3 - \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

La fonction $f$ est strictement croissante sur les intervalles $]\ -\infty\ ,\ 2\ ]$ et $[\ 2\ ,\ +\infty\ [$ donc sur $\mathbb{R}$. C'est donc une injection.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = 0$. Le saut en $a = 2$, noté $s$, est donc égal à 2.

On voit sur cet exemple, qu'aucun réel de $]\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ [$ ni de $]\ \frac{1}{2}\ ,\ 2\ [$ n'admet d'antécédent par $f$.

**Remarque 6.**

Si $f$ est monotone sur un intervalle $I$ et si son saut en un point $a$ intérieur à $I$ est nul, alors $f$ est continue en $a$.

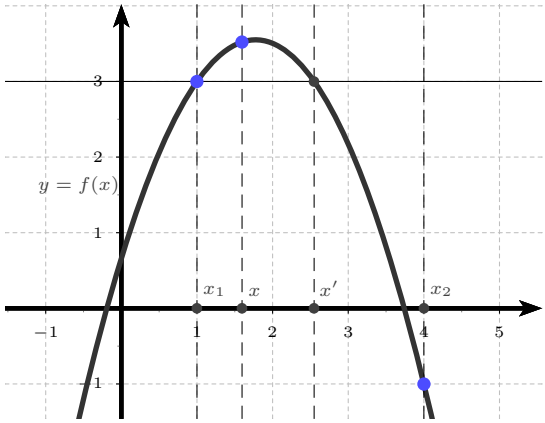
**Théorème 14 (trois pour le prix de deux)**
Soit $I$ un intervalle et $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois propositions

1. La fonction $f$ est continue sur $I$.
2. La fonction $f$ est strictement monotone sur $I$.
3. $J := f(I)$ est un intervalle et $f$ est une bijection de $I$ sur $J$.

Si deux des propositions sont vraies alors la troisième est vraie elle aussi.

**Démonstration 14**

1. et 2. $\Rightarrow$ 3. Puisque $f$ est continue sur $I$, on peut dire que $f(I)$ est un intervalle d'après le TVI (remarque 10 page 114). De plus $f$ est strictement monotone sur $I$ donc $f$ est une injection (voir remarque 3 page 353 du cours de seconde). Enfin toute fonction est une surjection sur son image (voir remarque 4 page 353 du cours de seconde).
2. et 3. $\Rightarrow$ 1. Soit $a$ un point intérieur à $I$. Si le saut en $a$ était non nul, tout réel $y$ strictement compris entre $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ – sauf peut-être $f(a)$ – n'aurait pas d'antécédent par $f$, ce qui est exclus car $f(I)$ est un intervalle. Donc le saut en $a$ de $f$ est nul et $f$ est continue en $a$. Dans le cas où $a$ est une borne de l'intervalle $I$, on raisonne de la même façon en supposant que la limite en $a$ est distincte de $f(a)$ et en remarquant que tout réel $y$ strictement compris entre cette limite et  n'aurait pas d'antécédent par $f$. Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et de ce fait $f$ est continue en $a$.
3. et 1. $\Rightarrow$ 2. Supposons que $f$ ne soit pas strictement croissante sur $I$. Il existe donc deux réels $x_1$ et $x_2$ appartenant à $I$ tels que
$$x_1 < x_2 \qquad \text{et} \qquad f(x_1) \leqslant f(x_2).$$
On peut exclure d'emblée le cas $f(x_1) = f(x_2)$ puisque $f$ est une bijection donc une injection.
Soit $x \in ]\ x_1\ ,\ x_2\ [$. Le cas $f(x) \geqslant f(x_1)$ est impossible. En effet, sinon, d'après le TVI, il existerait $x' \in [\ x\ ,\ x_2\ ]$ tel que $f(x') = f(x_1)$ et on n'aurait plus l'injectivité de $f$.




Pour des raisons symétriques, le cas $f(x) \leqslant f(x_2)$ est aussi impossible.
On a donc $f(x_2) < f(x) < f(x_1)$ et ce pour tout $x \in ]\ x_1\ ,\ x_2\ [$.
En recommençant le même raisonnement dans l'intervalle $]\ x\ ,\ x_2\ [$, on a pour tout $y \in ]\ x\ ,\ x_2\ [$, $f(x) < f(y) < f(x_1)$.
De ce fait, la fonction $f$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[\ x\ ,\ x_2\ ]$.
Le lecteur est invité à refaire le même raisonnement sur les intervalles $I \cap ]-\infty\ ,\ x_1\ ]$ et $I \cap ]\ x_2\ ,\ +\infty\ ]$.
Ainsi il aura complètement démontré que $f$, si elle n'est pas strictement croissante sur $I$ est strictement décroissante sur $I$. C'est bien dire qu'elle est strictement monotone sur $I$, ce qu'il fallait démontrer. □

**Théorème 15 (de la bijection)**
Soit $I$ un intervalle et $f$ une fonction continue et bijective de $I$ sur $J := f(I)$.
La bijection réciproque $f^{-1}$ est alors continue sur $J$.

**Démonstration 15**
En effet $f$ vérifie 1. et 3. du théorème précédent, donc elle vérifie 2. à savoir $f$ est strictement monotone sur $I$.

Maintenant $f^{-1}$ est strictement monotone sur $J$ (autrement dit elle vérifie 2.).

Prenons le cas où $f$ est strictement décroissante sur $I$. Soit $y_1 \neq y_2 \in J$. On a, en posant $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} < 0,$$

car $f$ est strictement décroissante sur $I$. Donc $f^{-1}$ est strictement décroissante sur $J$. Même chose dans le cas où $f$ est strictement croissante sur $I$.

Comme elle vérifie aussi 3. elle vérifie 1. C'est bien dire qu'elle est continue sur $J$. □

**Théorème 16 (de la bijection)**
Soit $I$ un intervalle et $f$ une fonction continue et bijective de $I$ sur $J := f(I)$. Soit $a \in I$ tel que

- $f$ est dérivable en $a$.

- $f'(a) \neq 0$.

La bijection réciproque $f^{-1}$ est alors dérivable en $f(a) \in J$. De plus, la dérivée de $f^{-1}$ en $f(a)$ est

$$f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

**Démonstration 16**

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $J$ qui converge vers $f(a)$. On va démontrer que $\dfrac{f^{-1}(t_n) - f^{-1}(f(a))}{t_n - f(a)}$ tend vers $\dfrac{1}{f'(a)}$ ce permettra de conclure grâce au théorème 3 page 103.

Or pour tout entier naturel $n$, $t_n \in J$ donc il existe $x_n \in I$ tel que $t_n = f(x_n)$. On a alors $f^{-1}(t_n) = x_n$ et $f^{-1}(f(a)) = a$. (revoir, s'il le faut, dans le cours de seconde, le théorème 4 page 354) Ainsi $\dfrac{f^{-1}(t_n) - f^{-1}(f(a))}{t_n - f(a)} = \dfrac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)}$ est l'inverse de $\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$. Comme $f$ est dérivable en $a$, elle est continue en $a$. De ce fait, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. De ce fait, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{-1}(t_n) - f^{-1}(f(a))}{t_n - f(a)} = \dfrac{1}{f'(a)}$ et ce pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $J$.

Ce qui suffit pour conclure. □

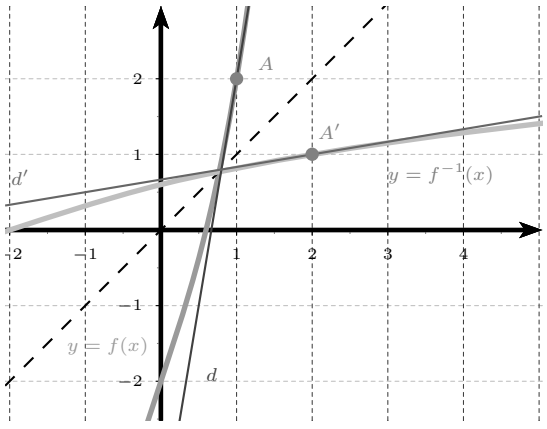
**Exemple 7**

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 3x - 2$.

- ▶ La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$. La fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus d'après les opérations sur les limites, on a

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

  L'image de $f$ est donc un intervalle (TVI) ni majoré ni minoré : c'est $\mathbb{R}$.
- ▶ La fonction $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, elle admet une bijection réciproque $g := f^{-1}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque la dérivée de $f$ ne s'annule jamais.
- ▶ On a $f(1) = 2$ donc $g(2) = 1$. De plus $f'(1) = 6$ donc $g'(2) = 1/6$. La tangente $d$ en $A$ à $f$ et la tangente $d'$ en $A$ à $g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



On peut utiliser l'approximation affine (voir paragraphe 4.1.2) pour calculer une valeur approchée de $g(2,01)$.

On a $g(2+h) = g(2) + hg'(2) + h\varepsilon(h)$. En négligeant $h\varepsilon(h)$ pour $h = 0,01$, on obtient $g(2) + 0,01 \times g'(2) = 1 + 0,01/6$ soit $1,001667$ comme valeur approchée de $g(2,01)$.

Un programme par dichotomie donne `1.001665280` comme valeur approchée à $10^{-9}$ près de $g(2,01)$.

```
def f(x):
    return -2 + x*(3+x*x)

a=1
b=2
for k in range(30):
    c=0.5*(a+b)
    if f(c)<2.01:
        a=c
    else:
        b=c
print(c)
```

# 4.7 Quiz

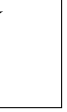
## 4.7.1 Énoncé

Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur $]-\infty\ ,\ +\infty[$ telles que $f(0) = g(0)$.

1. Si pour tout réel positif $x$ on a $f(x) \leqslant g(x)$ alors pour tout réel positif $x$ on a $f'(x) \leqslant g'(x)$.
2. Si pour tout réel positif $x$ on a $f'(x) \leqslant g'(x)$ alors pour tout réel positif $x$ on a $f(x) \leqslant g(x)$.
3. Si $f$ est impaire alors $f'$ est paire.
4. Si $f'$ est paire alors $f$ est impaire.
5. Si $f$ est croissante sur $]-\infty\ ,\ +\infty[$ alors la suite $(u_n)$ définie par $u_n = f(n)$ est croissante.
6. Si $f$ est croissante sur $]-\infty\ ,\ +\infty[$ alors la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

## 4.7.2 Corrigé

1. Faux On prend $f(x) = 0$ et $g(x) = \sin^2 x$. Bien qu'on ait $f(0) = g(0)$ et que pour tout réel positif $x$ on ait $f(x) \leqslant g(x)$ pour autant, sur $]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi[$ la fonction $g$ est strictement décroissante donc $g'$ prend des valeurs strictement négatives.
2. Vrai On considère $h(x) = g(x) - f(x)$, on a pour tout réel positif $x$, $h'(x) = g'(x) - f'(x) \geqslant 0$. On en déduit le tableau de variations pour $h$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $0$ |  |

On en déduit que pour tout réel positif $x$ on a $h(x) \geqslant 0$ soit $f(x) \leqslant g(x)$.

3. VRAI Dire que $f$ est impaire c'est dire que pour tout réel $x$ $f(-x) = -f(x)$ c'est-à-dire $h(x) = f(-x) - f(x) = 0$. En dérivant, on a d'une part $h'(x) = 0$ et d'autre part

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x-h) - f(x)}{h} - f'(x) \\ &= \lim_{h\to 0} -\frac{f(-x-h) - f(x)}{-h} - f'(x) \\ &= -f'(-x) - f'(x). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout réel $x$, $0 = f'(-x) + f'(x)$ soit $f'(-x) = -f(x)$. Donc $f'$ est bien impaire.

4. FAUX Contrexemple : $f(x) = 1$. $f'(x) = 0$. $f'$ est paire tandis que $f$ n'est pas paire.

5. VRAI On a pour tout entier $n$, $n \leqslant n+1$, donc, puisque $f$ est croissante sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$, $f(n) \leqslant f(n+1)$, soit $u_n \leqslant u_{n+1}$. C'est bien dire que la suite $(u_n)$ est croissante.

6. FAUX Contrexemple : $f(x) = -1 + x$ est croissante et $u_1 = -1$.

## 4.8 Exercices

**Exercice 1.**

On considere la fonction $f$ definie sur $]-\infty\,,\,0,5[\cup]0,5\,,\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+1}{6x-3}$.
Dans un repère du plan, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des tangentes parallèles à la droite $\Delta$ d'équation $y = -\dfrac{9}{8}x - 3$ ?
   Si oui, combien et lesquelles ?

**Exercice 2.**

Calculer la dérivée de la fonction $S$ définie sur $[\,3\,,\,+\infty\,[$ par :

$$\forall x \in [\,3\,,\,+\infty\,[,\ S(x) = x^2\sqrt{\frac{x-3}{x^2+3}}.$$

En déduire les variations de $S$ sur $[\,3\,,\,+\infty\,[$.

**Exercice 3.**

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}.$$

Montrer que $(u_n)$ est une suite strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
Voir l'exercice 2 page 327 du cours de seconde.

**Exercice 4.**

Étudier la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) := |x+1|\sqrt{|x^2-1|}.$$

**Exercice 5.**

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x^3+1}{4x^2-1}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 4x^3-3x-8$

1. Étudier les variations de $g$.
2. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ tel que $g(\alpha) = 0$.
3. Étudier le signe de $g$.
4. Étudier les variations de $f$.
5. Démontrer que la droite $(D)$ d'équation $y = \frac{x}{4}$ est asymptote à la courbe représentative $\Gamma$ de $f$. Étudier la position de $\Gamma$ par rapport à $(D)$.
6. Démontrer que $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$. En déduire le minimum de $f$ sur $\left]\ \frac{1}{2}\ ,\ +\infty\ \right[$.

**Exercice 6** (La trisectrice du charpentier)**.**

Soit $f$ la fonction définie sur $[-1,3[$ par

$$f(x) = (x-2)\sqrt{\frac{x+1}{3-x}}.$$

1. Étudier la fonction $f$ et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

**Indication 1.**

En attendant d'étudier le chapitre 5, on pourra vérifier que pour tout réel $x$,

$$x^2 - 4x + 1 = (x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3}).$$

2. Tracer le cercle $\mathcal{C}$ de centre $M\ \big(1\ ,\ 0\big)$ et de rayon 2.
3. Soit $x \in [-1,3[$, $A\ \big(x\ ,\ f(x)\big)$, $C_1$ le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x$ et d'ordonnée $y_1$ positive. Soit $C\ \big(1\ ,\ \ f(x)+y_1\big)$ et $G\ \big(0\ ,\ \ f(x)+y_1\big)$. Soit enfin $E$ le milieu de $[AC]$.
   (a) Calculer les distances $AO$, $OC$ et $AC$.
   (b) Démontrer que $\widehat{AOG} = 3\widehat{AOE}$.

**Exercice 7.**

Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $f$ définie par

$$\forall x \geqslant 0,\ f(x) = \frac{1}{27}(x-4)^2(x+1)^3.$$

**Exercice 8.**

1. Démontrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) := x^3 + x - 8,$$

est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Résoudre l'équation

$$\left[2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10; \quad \text{inconnue } x \in \mathbb{R}\right].$$

**Exercice 9** (Méthode de Newton)**.**

On cherche une solution d'une équation $[f(x) = 0\ ;\ \text{inconnue } x]$.
Pour cela on construit une suite $(u_n)$ par récurrence :

- on choisit $u_0 = a$ où $a$ est un nombre qu'on soupçonne être proche de la solution cherchée.
- on calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Encore faut-il que :

- la fonction $f$ soit dérivable ;
- que tous les $u_n$ que l'on calcule soient dans l'ensemble de définition de $f$ ;
- qu'ils n'annulent pas la fonction dérivée $f'$ ;
- que la suite $(u_n)$ converge.

Bref, dans le cas général, on ne peut pas parler d'algorithme. Dans la suite on suppose que la fonction $g := f'$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie et converge (voir conditions plus haut) vers une limite $\ell$, alors $f(\ell) = 0$.
2. Programmer pour calculer une valeur approchée à $10^{-10}$ près de l'équation $[x^3 + 3x - 2 = 2,01\ ;\ \text{inconnue } x]$. Combien d'itérations sont nécessaires ? Comparer avec la dichotomie de l'exemple 7 page 146
3. Que devient la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ lorsque la fonction $f$ est définie pour tout réel $x$ par $f(x) = x^3 - 2x + 2$ et que l'on prend $u_0 = 0$ ? Programmer pour calculer une valeur approchée à $10^{-10}$ près de l'équation $[x^3 - 2x + 2 = 0\ ;\ \text{inconnue } x]$. Combien d'itérations sont nécessaires ?

**Exercice 10.**

Soit la suite numérique $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n := \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+p}}.$$

On se propose de démontrer que la suite $(v_n)$ est croissante.

1. Démontrer que
$$\forall x \geqslant 0,\ 1 - \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leqslant 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{16}x^2.$$
2. En déduire que
$$\forall n \geqslant 1,\ 1 - \frac{p}{2n^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+p/n^2}} \leqslant 1 - \frac{p}{2n^2} + \frac{3p^2}{16n^4}.$$
3. On pose
$$v_n := 1 - \frac{n+1}{4n^2} \text{ et } w_n := 1 - \frac{n+1}{4n^2} + \frac{(n+1)(2n+1)}{32n^4}.$$
Démontrer que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. En déduire la limite de la suite $(v_n)$.
4. Démontrer que
$$\forall n \geqslant 1,\ 6n^4 + 17n^3 \geqslant n^2 + 5n + 1.$$
5. En déduire que
$$\forall n \geqslant 1,\ w_n \leqslant u_{n+1}.$$
6. Démontrer que la suite $(v_n)$ est croissante.

## 4.9 Solutions

**Solution 1**

1. On a, pour tout réel $x \neq \frac{1}{2}$,
$$f(x) = \frac{4x-2}{6x-3} + \frac{3}{6x-3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2x-1}.$$
On en déduit que, pour tout réel $x \neq \frac{1}{2}$,
$$f'(x) = 0 - \frac{2}{(2x-1)^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2}$$
2. Les tangentes parallèles à la droite $\Delta$ ont pour coefficient directeur $a = -\frac{9}{8}$. Soit $D_x$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x \neq \frac{1}{2}$. D'après le cours, son coefficient directeur est $f'(x)$.
Donc pour que $D_x$ soit parallèle à la droite $\Delta$, il faut et il suffit que $x \neq \frac{1}{2}$ et $-\frac{2}{(2x-1)^2} = -\frac{9}{8}$ soit

$\dfrac{1}{(2x-1)^2} = \dfrac{9}{16}$ soit $(2x-1)^2 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$ soit $2x-1 = \dfrac{4}{3}$ ou $2x-1 = -\dfrac{4}{3}$, soit $2x = \dfrac{7}{3}$ ou $2x = -\dfrac{1}{3}$ soit enfin $x = \dfrac{7}{6}$ ou $x = -\dfrac{1}{6}$. On vérifie bien que ces deux réels sont différents de $\dfrac{1}{2}$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet deux tangentes parallèles à la droite $\Delta$

- La droite $D_{\frac{7}{6}}$ passant par le point $A\ \left(\dfrac{7}{6}\ ;\ f\left(\dfrac{7}{6}\right)\right)$. Or

$$f\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{7}{3}-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}.$$

  Donc $D_{\frac{5}{6}}$ admet pour équation

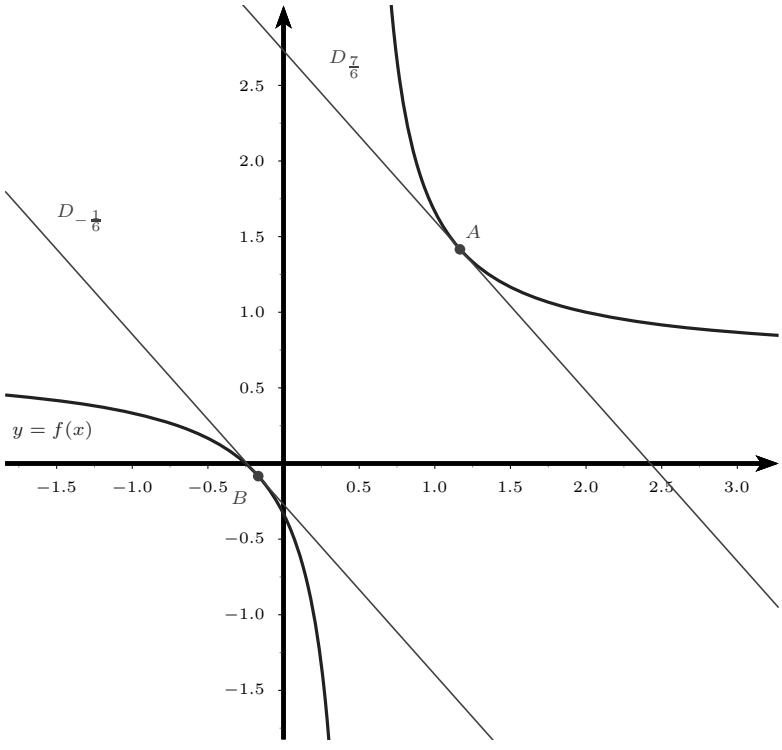
$$y - \frac{17}{12} = -\frac{9}{8}\left(x - \frac{5}{6}\right).$$

- La droite $D_{-\frac{1}{6}}$ passant par le point $B\ \left(\dfrac{1}{6}\ ;\ f\left(\dfrac{1}{6}\right)\right)$. Or

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{-\frac{1}{3}-1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12}.$$

  Donc $D_{-\frac{1}{6}}$ admet pour équation

$$y + \frac{1}{12} = -\frac{9}{8}\left(x + \frac{1}{6}\right).$$




Solutions

**Solution 2**
On a pour tout réel $x \in [\ 3\ ,\ +\infty\ [$, $\quad S(x) = \sqrt{\dfrac{x^4(x-3)}{x^2+3}}$.

On pose $U(x) = \dfrac{x^4(x-3)}{x^2+3}$. On a, pour tout réel $x \in ]\ 3\ ,\ +\infty\ [$, $\quad S'(x) = \dfrac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$.

Or $U(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) := x^5 - 3x^4$ et $v(x) := x^2 + 3$.

D'après les théorèmes généraux sur les fonctions dérivables, on a

$$U'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \text{ avec } u'(x) = 5x^4 - 12x^3 \text{ et } v'(x) = 2x. \text{ Donc :}$$

$$\begin{aligned} U'(x) &= \frac{(5x^4 - 12x^3)(x^2+3) - x^4 \times 2x(x-3)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{x^3(5x-12)(x^2+3) - 2x^2(x-3)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{x^3}{(x^2+3)^2}\left(5x^3 + 15x - 12x^2 - 36 - 2x^3 + 6x^2\right) \\ &= \frac{x^3}{(x^2+3)^2}\left(3x^3 - 6x^2 + 15x - 36\right) \\ &= \frac{3x^3}{(x^2+3)^2}\left(x^3 - 2x^2 + 5x - 12\right). \end{aligned}$$

De ce fait, on a, pour tout réel $x \in ]\ 3\ ,\ +\infty\ [$,

$$S'(x) = \frac{3x^3(x^3 - 2x^2 + 5x - 12)}{2(x^2+3)^2\sqrt{\frac{x^4(x-3)}{x^2+3}}} = \frac{3x^3(x^3 - 2x^2 + 5x - 12)}{2(x^2+3)\sqrt{(x^4(x-3))(x^2+3)}}.$$

Pour tout $x > 3$, on a $3x^3 > 0$ et $2(x^2+3)\sqrt{(x^4(x-3))(x^2+3)} > 0$.

Ainsi, $S'(x)$ est du signe de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 12$.

La fonction $f$ définie sur $[\ 3\ ,\ +\infty\ [$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 12$ est dérivable sur $]\ 3\ ;\ +\infty\ [$ et

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5.$$

En posant $a = 3$, $b = -4$ et $c = 5$ ainsi que $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 60 = -44 < 0$.

De ce fait, on a $x^3 - 2x^2 + 5x - 12$ du signe de $a$ – c'est-à-dire strictement positif – pour tout réel $x$ donc *a fortiori* pour tout $x \geqslant 3$.

| $x$ | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | 20 | ↗ | $+\infty$ |

En particulier, on a pour tout $x > 3$, $f(x) > 20 > 0$, puis $S'(x) > 0$.

Donc la fonction $S$ est strictement croissante sur $[\ 3\ ,\ +\infty\ [$.

**Solution 3**

Deuxième méthode : $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5} = \dfrac{2x^2+10-9}{x^2+5} = 2 - \dfrac{9}{x^2+5}$.

La fonction $f$ est dérivable et $f'(x) = 0 - \dfrac{-9 \times 2x}{x^2+5} = \dfrac{18x}{(x^2+5)^2} \geqslant 0$ sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$.

La fonction $f$ est croissante sur cet intervalle, donc la suite qui est une restriction de $f$ à $\mathbf{N}$ est aussi croissante.

**Solution 4**

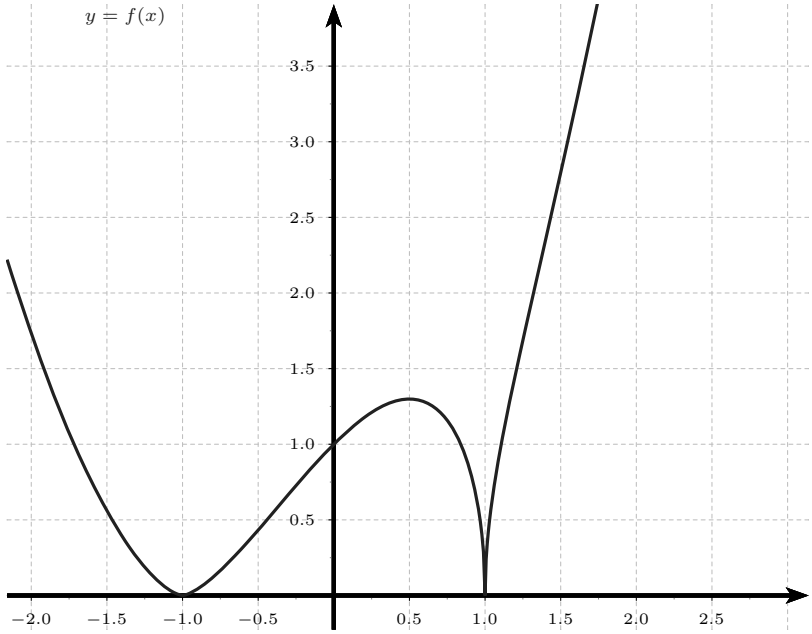
On se débarrasse des valeurs absolues en travaillant dans des intervalles sur lesquels $x-1$ et $x^2-1$ gardent un signe constant.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-(x+1)\sqrt{x^2-1}$ | $0$ | $(x+1)\sqrt{1-x^2}$ | $0$ | $(x+1)\sqrt{x^2-1}$ | |

- $\forall x \in ]\ -\infty\ ,\ -1\ [,\ f'(x) = -\left(\sqrt{x^2-1} + \dfrac{2x(x-1)}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = -\dfrac{(x+1)(2x-1)}{\sqrt{x^2-1}} < 0.$
- $\forall x \in ]\ -1\ ,\ 1\ [,\ f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{2x(x-1)}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{(x+1)(1-2x)}{\sqrt{1-x^2}}.$
- $\forall x \in ]\ 1\ ,\ +\infty\ [,\ f'(x) = \sqrt{x^2-1} + \dfrac{2x(x-1)}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{(x+1)(2x-1)}{\sqrt{x^2-1}} > 0.$

On en déduit le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $?$ | $+$ | $0$ | $-$ | $?$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




Reste à étudier la dérivabilité en $-1$ et en $1$ :

- en $-1$ : $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{f(x)}{x+1} = \varepsilon(x)\sqrt{|x^2-1|}$, avec $\varepsilon(x) = -1$ pour $x < -1$ et $\varepsilon(x) = +1$ pour $x > -1$. Comme $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{|x^2-1|} = 0$ et que $\varepsilon$ est bornée, on a $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 0$, donc $f$ est dérivable en $-1$ et $f'(-1) = 0$.

- en $1$ : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{f(x)}{x-1} = \varepsilon(x)\dfrac{|x+1|\sqrt{|x+1|}}{\sqrt{|x-1|}}$, avec $\varepsilon(x) = -1$ pour $x < 1$ et $\varepsilon(x) = +1$ pour $x > 1$. Comme $\lim\limits_{x\to -1} |x+1|\sqrt{|x+1|} = 2\sqrt{2}$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ donc $f$ n'est pas dérivable en 1.

**Solution 5**

1. La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2-1) = 3(2x-1)(2x+1).$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-7$ | ↘ | $-9$ | ↗ | $+\infty$ |

2. $\star$ La fonction $g$ est continue sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

⋆ La fonction $g$ est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
⋆ 0 appartient à l'intervalle $[g(\frac{1}{2}), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[$.

On en déduit – via le théorème de la bijection – que l'équation $[g(x) = 0$ ; inconnue $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[]$ admet une unique solution, notée $\alpha$.

3. Par lecture du tableau de variations de $g$ on obtient sans difficulté :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

4. Les variations de $f$ s'en déduisent :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

5. On calcule pour $x \notin \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$,

$$f(x) - \frac{x}{4} = \frac{x^3+1}{4x^2-1} - \frac{x}{4} = \frac{4(x^3+1) - x(4x^2-1)}{4(4x^2-1)} = \frac{4+x}{4(4x^2-1)}.$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \frac{x}{4} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{4} = 0$. C'est dire que la droite $(D)$ est asymptote à $\Gamma$.
On a $g(1) = -7 < 0$, donc $1 < \alpha$. On obtient le tableau de signes

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - \frac{x}{4}$ | | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $\Gamma$ est au-dessous de l'asymptote $(D)$ sur $]-\infty, 4]\cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et est au-dessus sur $[4, -\frac{1}{2}]\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$.

6. On calcule

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{3}{8}\alpha &= \frac{\alpha^3+1}{4\alpha^2-1} - \frac{3}{8}\alpha \\ &= \frac{8(\alpha^3+1) - 3\alpha(4\alpha^2-1)}{8(4\alpha^2-1)} \\ &= \frac{-4\alpha^3+3\alpha+8}{8(4\alpha^2-1)} = -\frac{g(\alpha)}{8(4\alpha^2-1)} = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$. On en déduit que le minimum de $f$ sur $\left]\ \frac{1}{2}\ ,\ +\infty\ \right[$ est $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$.

**Solution 6 (La trisectrice du charpentier)**

1. On a $\forall x \neq 3$, $\dfrac{x+1}{3-x} = \dfrac{x-3}{3-x} + \dfrac{4}{3-x} = -1 + \dfrac{4}{3-x}$ de dérivée $\dfrac{4}{(3-x)^2}$.
   La fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $]-1,3[$ et pour tout réel $x \in ]-1,3[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} + (x-2) \times \frac{4}{(3-x)^2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}} \\ &= \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} + \frac{x-2}{x+1} \times \frac{2}{3-x} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{3-x}} \\ &= \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} \left(1 + \frac{2(x-2)}{(x+1)(3-x)}\right) \\ &= \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} \frac{(x+1)(3-x) + 2x - 4}{(x+1)(3-x)} \\ &= \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} \frac{3x - x^2 - x + 3 + 2x - 4}{(x+1)(3-x)} \\ &= \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x+1)(3-x)}, \end{aligned}$$

   du signe de $-x^2 + 4x - 1 = -(x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3})$.

| $x$ | $-1$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\sqrt{6\sqrt{3}-9}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   Pour $x = 2 - \sqrt{3}$ on a $x - 2 = -\sqrt{3}$ et

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{3-x} &= \frac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \\ &= \frac{(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2} \\ &= 2\sqrt{3} - 3. \end{aligned}$$

   Donc le minimum vaut $-\sqrt{6\sqrt{3}-9}$.
2. Voir figure
3. (a) On a clairement, puisque le repère est orthonormé, $y_1^2 = 4 - (x-1)^2 = (x+1)(3-x)$. On en déduit

$$AC^2 = (x-1)^2 + y_1^2 = 4.$$

   On en déduit que $AC = 2$ quelle que soit l'abscisse $x$ de $A$.

On a aussi

$$\begin{aligned} AO^2 &= x^2 + (x-2)^2 \frac{x+1}{3-x} \\ &= \frac{3x^2 - x^3 + (x^2 - 4x + 4)(x+1)}{3-x} \\ &= \frac{3x^2 - x^3 + x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4}{3-x} \\ &= \frac{4}{3-x}, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} f(x) + y_1 &= (x-2)\sqrt{\frac{x+1}{3-x}} + \sqrt{(x+1)(3-x)} \\ &= (x-2)\sqrt{\frac{x+1}{3-x}} + (3-x)\sqrt{\frac{x+1}{3-x}} \\ &= \sqrt{\frac{x+1}{3-x}}. \end{aligned}$$

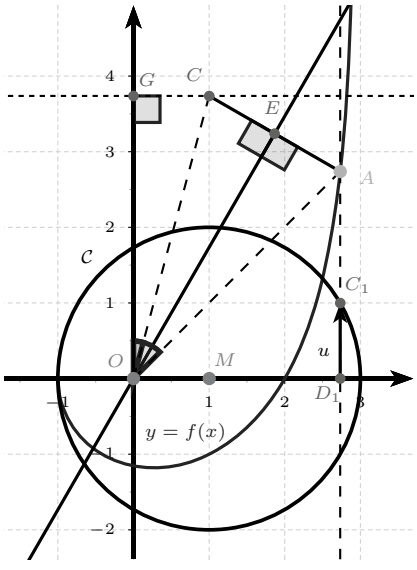
On en déduit que

$$OC^2 = 1 + (f(x) + y_1)^2 = 1 + \frac{x+1}{3-x} = \frac{4}{3-x}.$$

(b) On a $OA = OC$ donc $(OE)$ est la médiatrice de $[AC]$. En considérant les trois triangles $OEA$, $OEC$ et $OGC$ rectangles en $E, E$ et $G$ respectivement, on a

$$\sin \widehat{AOE} = \frac{1}{OA} = \frac{1}{OC} = \sin \widehat{COE} = \sin \widehat{COG}.$$

Le résultat demandé en résulte.



**Solution 7**
La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par application des opérations sur les fonctions dérivables. De plus $\forall x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{27}\left[2(x-4)(x+1)^3 + 3(x-4)^2(x+1)^2\right] = \frac{(x-4)(x+1)^2}{27}(2x-8+3x-12)$$
$$= \frac{5(x-4)(x+1)^2(x+2)}{27}.$$

On en déduit le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\frac{16}{27}$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**Solution 8**

1. • La fonction $f$ est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables.
   • De plus $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. De ce fait $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
   • Enfin on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Pour ces trois raisons, la fonction $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) := 2f(x) + 3f^{-1}(x),$$
est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions strictement croissantes. Elle est donc injective et l'équation $g(x) = 10$ admet au plus une solution.
De plus $f(2) = 2 = f^{-1}(2)$ donc $g(2) = 10$. Donc $\mathscr{S} = \{2\}$.

**Solution 9 (Méthode de Newton)**

1. Puisque la fonction $h\ :\ x \longmapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ est continue en $\ell$ la suite converge d'une part vers $\ell$ et d'autre part vers $h(\ell) = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$. On en déduit que $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$ d'où $f(\ell) = 0$.

2.
```
def f(x):
    return -2 + x*(3+x*x) -2.01

def fp(x):
    return 3*(1+x*x)

eps=1e-10
n=0
a=1
while f(a+eps)*f(a-eps)>0:
    a=a-f(a)/fp(a)
```

```
    n=n+1
print(a)
print(n)
```

En prenant $u_0 = 1$ on obtient `1.0016652793203435` soit $1,0016652793$ comme valeur approchée à $10^{-10}$ et ce en 2 itérations contre 30 pour la dichotomie. En prenant $u_0 = 1$ on a besoin de 5 itérations.

3. On a $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, donc la suite oscille entre 0 (pour les indices pairs) et 1 (pour les indices impairs). Elle n'est donc pas convergente.

```
def f(x):
    return 2 + x*(-2+x*x)

def fp(x):
    return -2+3*x*x

eps=1e-10
n=0
a=0.5
while (f(a+eps)*f(a-eps)>0):
    a=a-f(a)/fp(a)
    n=n+1
print(a)
print(n)
```

En prenant $u_0 = 1/2$ on obtient $-$`1.769292354251341` soit $-1,7692923543$ comme valeur approchée à $10^{-10}$ et ce en 8 itérations.

**Solution 10**

1. Il suffit de faire deux études de fonctions sur $[0, +\infty[$ .
2. On a $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{p}{n^2}}}$
3. La suite $(v_n)$ tend vers 1.
4. Largement vrai (par une étude de fonction).
5. Il s'agit de prouver que pour tout $n \geqslant 1$,
$$w_n = 1 - \frac{n+1}{4n^2} + \frac{(n+1)(2n+1)}{32n^4} \leqslant u_{n+1} = 1 - \frac{n+2}{4(n+1)^2}.$$
6. Comme $v_n \leqslant w_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$, la suite $(v_n)$ est bien croissante.

## 4.10 Problèmes

**Problème 4 (Inégalité de Nesbitt)**

1. **Suites géométriques**
On considère une suite géométrique $(u_n)_n$ de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \neq 1$. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n(q) = q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Solutions

(a) Donner une expression simple pour $S_n(q)$.

(b) On suppose de plus que $-1 < q < 1$.
Démontrer que la suite $(S_n(q))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que sa limite vaut

$$S(q) = \frac{q}{1-q}. \tag{4.1}$$

2. **Une inégalité**
Soit $a, b$ et $c$ trois nombres strictement positifs, vérifiant $a \leqslant b \leqslant c$.
On se propose de démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n \tag{4.2}$$

(a) Soit $m > 0$. Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $[\ 0\ ,\ m\ ]$ par

$$f(x) = (m+x)^n + (m-x)^n.$$

(b) En déduire que

$$b^n + c^n \geqslant 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^n. \tag{4.3}$$

(c) Soit $M > 0$. Étudier les variations de la fonction $g$ définie sur $\left[\ 0\ ,\ \frac{M}{2}\ \right]$ par

$$g(h) = 2(M+h)^n + (M-2h)^n.$$

(d) Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcl} M & + & h & = & \dfrac{b+c}{2} \\ M & - & 2h & = & a \end{array} \right.$.

(e) Conclure.

(f) Démontrer que

$$\forall a, b, c, c \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a^n + b^n + c^n + d^n}{4} \geqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n.$$

3. **Inégalité de Nesbitt**
Soit $a, b$ et $c$ trois nombres strictement positifs.
On se propose de démontrer que pour tout entier naturel,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}, \tag{4.4}$$

inégalité due à A.M. Nesbitt en 1903. On suppose dans un premier temps que $a+b+c=1$.

(a) Démontrer que pour tout entier $n$ non nul,

$$S_n(a) + S_n(b) + S_n(c) \geqslant 3S_n\left(\frac{1}{3}\right).$$

(b) Quelle inégalité obtient-on lorsqu'on prend les limites des deux membres ?

(c) Démontrer l'inégalité de Nesbitt lorsque $a+b+c=1$.

(d) Démontrer l'inégalité de Nesbitt lorsqu'on ne suppose plus $a+b+c=1$.

**Problème 5 (De la suite dans les idées 2)**
Ce problème est conçu pour servir de suite au problème 2 page 130 traité dans le cours de seconde. Il peut être traité indépendamment.

Soit $\varphi$ la fonction définie sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$ par

$$\varphi(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = \alpha$ et pour tout entier naturel $n$, $w_{n+1} = \varphi(w_n)$ est convergente.

1. Démontrer que pour tout réel $x \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [$, $\varphi(x) \geqslant 1$.
2. Démontrer que la fonction $\varphi$ est décroissante sur l'intervalle $[\ 1\ ,\ +\infty\ [$.
3. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = x$ d'inconnue $x \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [$ admet une unique solution que l'on notera $x_0$.
4. Démontrer que $x_0$ est aussi solution de l'équation $x^4 - 2x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
5. Démontrer que pour tout réel $x \in [\ 1\ ,\ +\infty\ [$, $\varphi'(x) \geqslant -\dfrac{1}{10}$.
6. En déduire que pour tout réel $x \in [\ 1\ ,\ +\infty\ [$,
   $|\varphi(x) - x_0| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \dfrac{1}{10}|x - x_0|$.
7. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_0$.
8. Écrire un programme qui calcule $x_0$ à $10^{-9}$ près.

**Problème 6 (De la suite dans les idées 3)**
Ce problème est conçu pour servir de suite aux problèmes 2 page 130 (cours de seconde) et 5 page 163. Il reprend les notations et résultats de ces deux problèmes.

Soit $a, b, c, d$ des nombres réels positifs, avec $b > 0$ et $d > 0$, et vérifiant $\dfrac{a}{d} \geqslant \dfrac{c}{b}$ et $ad \leqslant bc$.

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$, $d_0 = d$ et pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + c_n^2}$, $b_{n+1} = \sqrt{b_n^2 + d_n^2}$, $c_{n+1} = a_n + c_n$, $d_{n+1} = b_n + d_n$. On pose aussi lorsque $n$ est pair : $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ et $v_n = \dfrac{c_n}{d_n}$. Lorsque $n$ est impair, on pose : $u_n = \dfrac{c_n}{d_n}$ et $v_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

1. Démontrer que les suites $\left(\dfrac{a_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{b_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
2. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
3. Démontrer que les suites $\left(\dfrac{a_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{b_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la limite précédente.

Soit $0 < x \leqslant 1$. On considère les suites définies par $a_0 = x$, $b_0 = 1$, $c_0 = 1$, $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + c_n^2}$, $b_{n+1} = \sqrt{b_n^2 + d_n^2}$, $c_{n+1} = a_n + c_n$, $d_{n+1} = b_n + d_n$.

Enfin, on appelle $\lambda(x)$ la limite de la suite $\left(\dfrac{a_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Démontrer que pour tout réel $0 < x \leqslant 1$, on a $x \leqslant \lambda(x) \leqslant 1$.
5. Calculer $\lambda(1)$. Démontrer que la fonction $\lambda$ est dérivable en 1. Calculer $\lambda'(1)$.
6. Écrire un programme qui calcule $\lambda\left(\frac{1}{2}\right)$ à $10^{-9}$ près.

## 4.11 Corrigés

**Correction 4 (Inégalité de Nesbitt)**

1. **Suites géométriques**

   (a) On rappelle que, pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ :

   $$S_n(q) = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} = q\frac{1-q^n}{1-q}.$$

   (b) Lorsque $-1 < q < 1$, la suite $q^n$ converge vers 0. En conséquence, la suite $S_n(q)$ converge et sa limite est $S(q) = q\dfrac{1-0}{1-q} = \dfrac{q}{1-q}$.

2. **Une inégalité**

   (a) La fonction $f$ est dérivable. On a pour tout réel $x$ de $[0\ ,\ m]$,
   $f'(x) = n(m+x)^{n-1} - n(m-x)^{n-1} = n\left((m+x)^{n-1} - (m-x)^{n-1}\right)$. Comme $x$ est positif, $m - x \leqslant m + x$ et $(m-x)^{n-1} \leqslant (m+x)^{n-1}$ et par suite $f'$ est positive sur l'intervalle $[0\ ,\ m]$. Donc $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ,\ m]$.

   (b) Traduit en français, le résultat précédent dit que lorsqu'on a deux nombres positifs $m + x$ et $m - x$ dont la somme est constante et égale à $2m$, la somme de leurs puissances $n$-ièmes est minimum lorsque $x$ est nul, c'est-à-dire lorsque ces nombres sont égaux, donc égaux à leur moyenne.

   Donc on pose $m = \dfrac{b+c}{2}$. On a besoin de définir un $x \geqslant 0$. Le problème étant symétrique en $b$ et $c$, pour fixer les idées, on suppose $c \geqslant b$, et on pose $x = \dfrac{c-b}{2}$. Ainsi on a $m + x = c$ et $m - x = b$.

   D'après la question précédente, $f(x) \geqslant f(0)$. Soit $(m+x)^n + (m-x)^n \geqslant m^n + m^n$ soit encore $c^n + b^n \geqslant 2\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^n$.

   (c) La fonction $f$ est dérivable. On a pour tout réel $h$ de $[0\ ,\ \frac{M}{2}]$,
   $g'(h) = 2n(M+h)^n - 2n(M-2h)^n = 2n\left((M+h)^{n-1} - (M-2h)^{n-1}\right)$. Le signe de $g'(h)$ n'est pas évident sous cette forme. Donc on dérive à nouveau :
   $g''(h) = 2n(n-1)\left((M+h)^{n-2} + 2(M-2h)^{n-2}\right) \geqslant 0$.
   Donc $g'$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ,\ \frac{M}{2}]$. Or $g'(0) = 0$. Donc $g'(h) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0\ ,\ \frac{M}{2}]$.
   On en déduit que $g$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ,\ \frac{M}{2}]$. Un tableau de variations permet de mieux visualiser cette démarche.

   (d) On trouve sans difficulté $M = \dfrac{a+b+c}{3}$ et $h = \dfrac{b+c-2a}{6}$.

   (e) Pour fixer les idées, on suppose $a \leqslant b \leqslant c$. En prenant les valeurs de $M$ et $h \in [0\ ,\ \frac{M}{2}]$ ci-dessus, on sait que $g(h) \geqslant g(0)$. Soit en remplaçant $M + h$ par $\dfrac{b+c}{2}$ et $M - 2h$ par $a$,
   $2\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^n + a^n \geqslant 3\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^n$. Maintenant, en utilisant l'inégalité (4.3), on trouve bien l'inégalité (2) demandée.

(f) On va utiliser trois fois l'inégalité (4.3).
On pose $B = \dfrac{a+b}{2}$ et $C = \dfrac{c+d}{2}$.
On a donc $B^n + C^n \geqslant 2\left(\dfrac{B+C}{2}\right)^n$, avec $\dfrac{B+C}{2} = \dfrac{a+b+c+d}{4}$.
Par ailleurs $B^n = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{a^n+b^n}{2}$ et $C^n = \left(\dfrac{c+d}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{c^n+d^n}{2}$, ce qui donne le résultat annoncé en divisant tout par deux.

3. **Inégalité de Nesbitt**

(a) D'après l'inégalité (3), on a pour tout entier naturel $k$ compris entre 1 et $n$ :

$$a^k + b^k + c^k \geqslant 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^k.$$

En effectuant la somme de ces $n$ inégalités, on trouve bien

$$S_n(a) + S_n(b) + S_n(c) \geqslant 3S_n\left(\frac{a+b+c}{3}\right),$$

ce qui donne bien le résultat puisqu'on a supposé $a+b+c=1$.

(b) On a $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(a) + S_n(b) + S_n(c) = S(a) + S(b) + S(c) = \dfrac{a}{1-a} + \dfrac{b}{1-b} + \dfrac{c}{1-c}$. D'autre part $3S\left(\frac{1}{3}\right) = 3\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$.
À la limite, on conserve les inégalités larges : $\dfrac{a}{1-a} + \dfrac{b}{1-b} + \dfrac{c}{1-c} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

(c) Puisque $a+b+c=1$, on a $\dfrac{a}{1-a} = \dfrac{a}{a+b+c-a} = \dfrac{a}{b+c}$. Et ainsi de suite pour les deux autres fractions.

(d) On pose $A = \dfrac{a}{a+b+c}, B = \dfrac{b}{a+b+c}$ et $C = \dfrac{c}{a+b+c}$. On a $A+B+C=1$. Donc d'après la question précédente, $\dfrac{A}{B+C} + \dfrac{B}{C+A} + \dfrac{C}{A+B} \geqslant \dfrac{3}{2}$. En multipliant les numérateurs et dénominateurs des trois fractions à gauche par $a+b+c$ on trouve le résultat sous la forme la plus générale.

**Remarque 7.**

Il existe de nombreuses démonstrations de l'inégalité de Nesbitt. En voici une :
On pose $s := a+b+c$. On a $\forall t \in ]\ 0\ ,\ s\ [,\ \dfrac{ts}{s-t} \geqslant \dfrac{9t-s}{4}$ avec égalité seulement si $t = \dfrac{s}{3}$. En effet,

$$\begin{aligned} 4ts - (9t-s)(s-t) &= 4ts + s^2 - 10ts + 9t^2 \\ &= s^2 - 6ts + 9t^2 \\ &= (s-3t)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

En additionnant les trois inégalités obtenues pour $t = a$ puis $t = b$ et $t = c$ et en additionnant, on trouve

$$\frac{as}{s-a} + \frac{bs}{s-b} + \frac{cs}{s-c} \geqslant \frac{9a-s}{4} + \frac{9b-s}{4} + \frac{9c-s}{4},$$

soit

$$s\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geqslant \frac{9}{4}(a+b+c) - \frac{3s}{4},$$

soit, puisque $s = a+b+c > 0$,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{9}{4} - \frac{3}{4}.$$

De plus on a l'égalité uniquement dans les trois cas d'égalité, à savoir $a = \dfrac{s}{3}$, $b = \dfrac{s}{3}$ et $c = \dfrac{s}{3}$.

**Correction 5 (De la suite dans les idées 2)**

1. On a, pour tout nombre réel positif $x$,

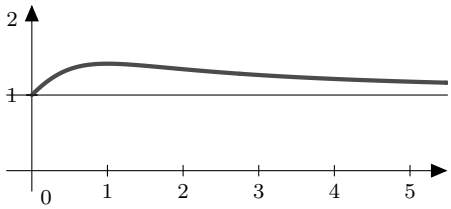
$$(\varphi(x))^2 = \frac{1+2x+x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 1 + \frac{2x}{1+x^2} \geqslant 1,$$

   Puisque $x$ est positif. Par suite, on a bien $\varphi(x) \geqslant 1$.

2. La fonction $\varphi$ est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. De plus, pour tout nombre réel positif $x$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{(1+x)\times 2x}{2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} \\ &= \frac{1+x^2-x-x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} \\ &= \frac{1-x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} \end{aligned}$$

   Donc pour $x \geqslant 1$ on a $\varphi'(x) \leqslant 0$. Par conséquent la fonction $\varphi$ est bien décroissante sur l'intervalle $[\ 1\ ,\ +\infty\ [$.




3. Pour $0 \leqslant x < 1$, on a $\varphi(x) \geqslant 1 > x$ donc l'équation $\varphi(x) = x$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[\ 0\ ,\ 1\ [$. Par ailleurs, la fonction $\psi\ :\ x \longmapsto \varphi(x) - x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[\ 1\ ,\ +\infty\ [$ comme somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante. On a $\psi(1) = \varphi(1) - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$ et $\psi(2) = -2 < 0$. En effet $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{9}{5} < 4$.
La fonction $\psi$ s'annule donc une fois et une seule ( en $x_0$) sur l'intervalle $[\ 1\ ,\ 2\ ]$.
Par stricte décroissance, la fonction $\psi$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[\ 1\ ,\ +\infty\ [$.
Le résultat demandé en découle.
4. Puisqu'on a $\dfrac{1 + x_0}{\sqrt{1 + x_0^2}} = x_0$ alors on a (en élevant au carré) :
$\dfrac{1 + 2x_0 + x_0^2}{1 + x_0^2} = x_0^2$ soit $1 + 2x_0 + x_0^2 = (1 + x_0^2)x_0^2$ soit encore $1 + 2x_0 = x_0^4$. Ce qu'il fallait vérifier.
5. Pour tout nombre réel positif $x$,

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} - \frac{3}{2}\,\frac{(1-x)\times 2x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5} = -\frac{1+x^2+3x-3x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5} = \frac{2x^2-3x-1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5}.$$

En anticipant sur le chapitre suivant, le trinôme $2x^2 - 3x - 1$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{4} > 1$ et $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{4} < 1$. Le trinôme étant négatif entre les racines, on obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $1$ | | $x_1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi''(x)$ | $\varphi''(1)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $\varphi'(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $\varphi'(x_1)$ | $\nearrow$ | $0$ |

De ce fait le minimum de $\varphi'$ sur $[\ 1\ ,\ +\infty\ [$ est atteint en $x_1$ avec $\varphi'(x_1) = -0,092$ à $10^{-3}$ près. Donc pour tout réel $x \in [\ 1\ ,\ +\infty\ [$, on a $0 \geqslant \varphi'(x) \geqslant -\dfrac{1}{10}$.
6. D'après la question précédente, on a pour tout réel $x \in [\ 1\ ,\ +\infty\ [$, $|\phi'(x)| = -\phi'(x) \leqslant \dfrac{1}{10}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, (théorème 12), on a

$$\forall x \in [\ 1\ ,\ +\infty\ [,\ |\varphi(x) - x_0| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant |x - x_0|,$$

la première égalité traduisant : $x_0 = \varphi(x_0)$.

7. On considère la suite $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n$ par $w'_n = |w_n - x_0|$. On a, pour tout entier $n$,

$$w'_{n+1} = |w_{n+1} - x_0| = |\varphi(w_n) - x_0| \leqslant \frac{1}{10}|w_n - x_0| = \frac{1}{10}w'_n.$$

Maintenant, une récurrence immédiate donne, pour tout entier $n$, $0 \leqslant w'_n \leqslant |w_0 - x_0|10^{-n}$. La suite $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers zéro. C'est bien dire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_0$.

8. D'après l'étude précédente, pour avoir une valeur de $x_0$ à $10^{-9}$ près, il suffit de prendre $w_n$ avec $n$ choisi pour avoir $w'_n < 10^{-9}$. Or on sait que $w'_n \leqslant w'_0 \times 10^{-n}$, donc pour avoir $w'_n < 10^{-9}$, il suffit de prendre $w'_0 < 1$ et $n = 9$. On sait que $1 < x_0 < 2$, donc il suffit de prendre $w_0 = 1,5$. Le programme qui suit (écrit en basic ti) est une réalisation de cet algorithme :

```
PROGRAM:XZERO
:1.5→ W
:For(K,1,9)
:(1+W)/√(1+W²)→ W
:End
:Disp W
```

La calculette affiche $1,395336994$.

**Correction 6 (De la suite dans les idées 3)**

1. On a pour tout entier $n$,

$$\frac{c_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n + c_n}{\sqrt{a_n^2 + c_n^2}} = \frac{1 + \frac{c_n}{a_n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c_n}{a_n}\right)^2}} = \varphi\left(\frac{c_n}{a_n}\right).$$

D'après la question 6. la suite $\left(w_n = \frac{c_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_0 \neq 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{1}{x_0}$.

De même, pour tout entier $n$,

$$\frac{d_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_n + d_n}{\sqrt{b_n^2 + d_n^2}} = \frac{1 + \frac{d_n}{b_n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d_n}{b_n}\right)^2}} = \varphi\left(\frac{d_n}{b_n}\right).$$

D'après la question 6. la suite $\left(w_n = \frac{d_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{d_n} = \dfrac{1}{x_0}$.

2. On va démontrer – par récurrence – que pour tout entier naturel $n$,

$$\mathcal{P}_n \ : \ u_0(x) \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant v_0 \ \text{ et } \frac{a_n}{d_n} \leqslant \frac{c_n}{b_n}.$$

Puisque $0 < x \leqslant 1$, on a $\dfrac{a_0}{b_0} = u_0 \leqslant v_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$. De plus $\dfrac{a_0}{d_0} \leqslant \dfrac{c_0}{b_0}$ fait aussi partie des hypothèses de départ. On a donc $\mathcal{P}_0$. Soit maintenant $n$ un entier pour lequel on a $\mathcal{P}_n$.

L'inégalité $\dfrac{a_{n+1}}{d_{n+1}} \leqslant \dfrac{c_{n+1}}{b_{n+1}}$ est la conséquence de l'inégalité (5.29) (problème 2 page 130 du cours de seconde) appliquée à $a = a_n$, $b = b_n$, $c = c_n$, et $d = d_n$. Pour les autres inégalités, deux cas se produisent :

**Premier cas** $n$ est pair. Donc $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ et $v_n = \dfrac{c_n}{d_n}$. Puisqu'on a $\mathcal{P}_n$ on peut donc affirmer que $\dfrac{a_n}{b_n} \leqslant \dfrac{c_n}{d_n}$. D'après l'inégalité (5.31) (problème 2 page 130 du cours de seconde) appliquée à

$a = a_n,\ b = b_n,\ c = c_n$, et $d = d_n$, on a $\dfrac{a_n}{b_n} \leqslant \dfrac{c_{n+1}}{d_{n+1}} \leqslant \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \dfrac{c_n}{d_n}$ c'est-à-dire puisque $n+1$ est impair, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

**Deuxième cas** $n$ est impair. Donc $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ et $v_n = \dfrac{c_n}{d_n}$. Puisqu'on a $\mathcal{P}_n$ on peut donc affirmer que $\dfrac{c_n}{d_n} \leqslant \dfrac{a_n}{b_n}$. D'après l'inégalité (5.32) (problème 2 page 130 du cours de seconde) appliquée à $a = c_n,\ b = d_n,\ c = a_n$, et $d = b_n$, on a $\dfrac{c_n}{d_n} \leqslant \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \dfrac{c_{n+1}}{d_{n+1}} \leqslant \dfrac{a_n}{b_n}$ c'est-à-dire puisque $n+1$ est pair, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

Dans les deux cas on obtient bien $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$ et par suite $\mathcal{P}_{n+1}$.

En résumé on a $\begin{cases} \mathcal{P}_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_n \Longrightarrow P_{n+1} \end{cases}$ Donc d'après le théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est convergente. Soit $\ell$ sa limite. De même, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par $\frac{c}{d} = v_0$, elle est convergente. Soit $L$ sa limite.
Maintenant, la suite $(v_{2n+1}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L^2$ d'une part.

D'autre part, pour tout entier $n$, $v_{2n+1}^2 = \dfrac{a_{2n}^2 + c_{2n}^2}{b_{2n}^2 + d_{2n}^2} = \dfrac{a_{2n}^2}{b_{2n}^2}\dfrac{1 + \left(\frac{c_{2n}}{a_{2n}}\right)^2}{1 + \left(\frac{d_{2n}}{b_{2n}}\right)^2}$. Cette dernière suite converge vers $\ell^2 \times \dfrac{1+x_0^2}{1+x_0^2} = \ell^2$. D'après l'unicité de la limite, on a $L^2 = \ell^2$. Comme $L$ et $\ell$ sont tous les deux positifs, on a bien $L = \ell$. Autrement dit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

3. Puisque la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\lambda(x)$, on a en particulier $u_0(x) \leqslant \lambda(x)$. Or $u_0(x) = 1$. Puisque la suite $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $\lambda(x)$, on a en particulier $v_0(x) \geqslant \lambda(x)$. Or $v_0(x) = x$. Le résultat demandé en résulte.
4. Le résultat est évident en considérant les suites d'indices pairs et impairs.
5. Lorsque $x = 1$, une récurrence immédiate donne pour tout entier $n$, $a_n = b_n$ et $c_n = d_n$. On en déduit que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Elle converge vers $\lambda(1)$. Donc $\lambda(1) = 1$.

   Pour $x > 1$, on a $u_2(x) \leqslant \lambda(x) \leqslant v_2(x)$. Or $u_2(1) = \lambda(1) = v_2(1)$, donc en divisant par $x-1$ qui est positif,
   $$\frac{u_2(x) - u_2(1)}{x-1} \leqslant \frac{\lambda(x) - \lambda(1)}{x-1} \leqslant \frac{v_2(x) - v_2(1)}{x-1}.$$
   Or les fonctions $u_2$ et $v_2$ sont dérivables en 1, donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{u_2(x) - u_2(1)}{x-1} = u_2'(1)$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{u_2(x) - u_2(1)}{x-1} = v_2'(1)$.
   Maintenant on a $u_2(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\left(1 + x + \sqrt{1+x^2}\right)$
   donc $u_2'(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ et
   $$u_2'(1) = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\,\frac{2+\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

De même $v_2(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{2x^2+2x+2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}$ donc $v_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ et $v_2'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$. D'après le théorème d'encadrement on peut dire que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\lambda(x)-\lambda(1)}{x-1}$ existe et vaut $\frac{1}{2}$, autrement dit la fonction $\lambda$ est dérivable en 1 et $\lambda'(1) = \frac{1}{2}$.

6.

D'après la croissance de la suite $(u_n(\frac{1}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ et la décroissance de la suite $(v_n(\frac{1}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ on a pour tout entier naturel $n$, $u_n(\frac{1}{2}) \leqslant \lambda(\frac{1}{2}) \leqslant v_n(\frac{1}{2})$. On est donc sûr que $v_n(\frac{1}{2})$ est une approximation de $\lambda(\frac{1}{2})$ à partir du moment où on a $v_n(\frac{1}{2}) - u_n(\frac{1}{2}) < 10^{-9}$. Le programme qui suit (toujours en basic ti) est une réalisation de cet algorithme :
Les variables `F`, `G`, `H` et `K` sont des variables temporaires qui stockent les résultats de `A`, `B`, `C` et `D` respectivement pendant que les calculs se font avec les anciennes valeurs de `A`, `B`, `C` et `D`. Suivant la parité de $n$ les valeurs de $v_n(\frac{1}{2})$ et $u_n(\frac{1}{2})$ sont calculées par `A/B` et `C/D` ou par `C/D` et `A/B`.

```
PROGRAM:LAMBDA
:.5→ A
:1→ B
:1→ C
:1→ D
:While (abs(A/B-C/D)>10^(-9))
:√(A²+C²)→ F
:√(B²+D²)→ G
:A+C→ H
:B+D→ K
:F→ A
:G→ B
:H→ C
:K→ D
:End
:Disp W
```

La calculette affiche 0.7656260388.

# Chapitre 5

# Second degré

## Sommaire


**5.1** Fonction polynôme du second degré . . . . . **172**
**5.2** Résolution d'une équation du second degré . . . . . **177**
**5.3** Factorisation et application à l'étude du signe . . . . . **180**
**5.4** Programmation . . . . . **181**
**5.5** Somme et produit des racines . . . . . **182**
**5.6** Fiche cuisine : le second degré . . . . . **184**
**5.7** Exercices . . . . . **185**
**5.8** Solutions . . . . . **193**
**5.9** Problème . . . . . **206**
**5.10** Corrigé . . . . . **207**

# 5.1 Fonction polynôme du second degré

## 5.1.1 Définition

**Définition 1.**

Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$.
On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout réel $x$. On pourra abréger fonction polynôme du second degré en **polynôme du second degré**, ou encore **trinôme du second degré**

**Exemples 1**

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5x^2 - 3x + 4 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 - 4 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (2x+3)(x-1) \end{array} .$$

En effet, pour tout réel $x$, $(2x + 3)(x - 1) = 2x^2 + x - 3$. De ce fait, $h$ est bien un polynôme du second degré.

De même $\begin{array}{rcl} k : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)^3 - (x-1)^3 \end{array}$ . est aussi un polynôme du second degré.

## 5.1.2 Unicité des coefficients

La propriété suivante, très utile, peut paraître évidente. Elle mérite une démonstration toutefois.

**Théorème 1**
Soient les deux polynômes du second degré $f$ et $g$ respectivement définis sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ pour tout réel $x$.
Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = g(x)$ alors $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

**Démonstration 1**
Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = g(x)$.

Alors on a notamment $f(0) = g(0)$ or $f(0) = c$ et $g(0) = c'$ donc $c = c'$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c$ soit $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ – puisque $c = c'$ – ou encore en factorisant, $x(ax + b) = x(a'x + b')$.

D'où pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ax + b = a'x + b'$ or on sait que deux fonctions affines qui prennent la même valeur en deux points sont égales (par deux points distincts passe une unique droite), donc $a = a'$ et $b = b'$. □

**Remarques 1.**

1. Il suffit que deux polynômes du second degré prennent les mêmes valeurs en trois points pour qu'on soit assuré de l'égalité de leurs coefficients.
2. Une démonstration plus générale (théorème 4 page 400) viendra, dans le cadre plus général des fonctions polynômes.

### 5.1.3 Mise sous forme canonique

**Théorème 2 (Forme canonique)**
Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Il existe un unique couple de nombres réels ( $\alpha$ , $\beta$ ) tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$, où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, et $\beta = f(\alpha)$.
Cette écriture est unique, c'est la **forme canonique**.

Forme canonique : du latin « canonicus » qui signifie conforme aux règles.

**Démonstration 2**
Commençons par l'unicité. On suppose qu'il existe quatre réels $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ pour lesquels pour tout réel $x$ on a

$$a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x-\alpha')^2 + \beta'$$

soit

$$(x-\alpha)^2 - (x-\alpha')^2 = \frac{\beta' - \beta}{a}.$$

En particulier – qui peut le plus peut le moins – on a en spécifiant $x = \alpha'$

$$(\alpha' - \alpha)^2 = \frac{\beta' - \beta}{a}.$$

De même, cette fois en spécifiant $x = \alpha'$,

$$-(\alpha - \alpha')^2 = \frac{\beta' - \beta}{a}.$$

On en déduit que $(\alpha' - \alpha)^2 = 0$ puis que $\alpha' = \alpha$. Enfin, on remarque que $\beta = f(\alpha) = f(\alpha') = \beta'$, ce qu'il s'agissait d'établir pour obtenir l'unicité.

Voyons l'existence : Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
On met en facteur le coefficient de $x^2$ : puisque $a \neq 0$, $\quad ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \dfrac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$
On transforme ensuite l'écriture des deux premiers termes du crochet pour se rapprocher du produit remarquable $A^2 + 2AB + B^2$, où $A = x$ et $B = \dfrac{b}{2a}$. La forme factorisée du produit remarquable va nous

fournir notre $(x-\alpha)^2$. Il vient :

$$\begin{aligned}
a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] &= a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4a\times c}{4a\times a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left(x-\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\alpha}\right)^2+\underbrace{\frac{-b^2+4ac}{4a}}_{\beta=f(\alpha)}.
\end{aligned}$$

On a bien pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$, où

$$\alpha=-\frac{b}{2a},\quad \text{et } \beta=\frac{-b^2+4ac}{4a}=f(\alpha).$$

**Remarque 2.**

Vérification : Pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= f\left(-\frac{b}{2a}\right)\\
&= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c\\
&= \frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c\\
&= \frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\\
&= \frac{-b^2+4ac}{4a}=\beta
\end{aligned}$$

**Exemple 2**
Déterminons la forme canonique de $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & & x & \longmapsto & f(x)=2x^2-6x+5 \end{array}$

**Première méthode :** appliquons la formule. On a un polynôme du second degré avec $a=2$, $b=-6$ et $c=5$.

Sa forme canonique est donc : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2\times 2} = \dfrac{3}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, la forme canonique est

$$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

**Deuxième méthode :** dans l'esprit de la démonstration ci-dessus, mettons le coefficient de $x^2$ en facteur, puis cherchons à **exhiber** un carré de la forme $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$.

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left[x^2 - 3x + \frac{5}{2}\right] = 2\left[x^2 - 2\times\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right].$$

On a mis en évidence le début de $a^2 - 2ab + b^2$, reste à en faire apparaître le dernier terme.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left[x^2 - 2\times\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{5}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2}\right] = 2\left[(x-\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}\right] \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 5.1.4 Sens de variation

**Théorème 3**
Les variations de la fonction polynôme du second degré $f$ définie par sa forme canonique $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ dépendent du signe de $a$ et de la valeur de $\alpha$.

**Si $a > 0$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\beta$ | ↗ | $+\infty$ |

$f$ admet un **minimum** atteint pour $x = \alpha$

**Si $a < 0$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\beta$ | ↘ | $-\infty$ |

$f$ admet un **maximum** atteint pour $x = \alpha$

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ s'obtiennent par application des règles de calcul sur les limites. Pour $a < 0$ :

$$\lim_{x\to+\infty} x - \alpha = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty} (x-\alpha)^2 = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty} a(x-\alpha)^2 = -\infty;\ \lim_{x\to+\infty} a(x-\alpha)^2 + \beta = -\infty.$$

**Exemple 3**
Soit $f : x \longmapsto -3x^2 + 2x - 7$. $f$ est un polynôme du second degré,
avec : $a = -3 < 0$, et $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{-6} = \dfrac{1}{3}$. Or $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{20}{3}$. D'après le théorème ci-dessus, on obtient le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-\frac{20}{3}$ | ↘ | $-\infty$ |

**Démonstration 3**
On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2a(x-\alpha)^2$.
Donc si $a > 0$, $\forall x \in ]\ -\infty\ ,\ \alpha\ [,\ f'(x) < 0$ et $\forall x \in ]\ \alpha\ ,\ +\infty\ [,\ f'(x) > 0$.
Si $a > 0$, $\forall x \in ]\ -\infty\ ,\ \alpha\ [,\ f'(x) > 0$ et $\forall x \in ]\ \alpha\ ,\ +\infty\ [,\ f'(x) < 0$. □

### 5.1.5 Représentation graphique

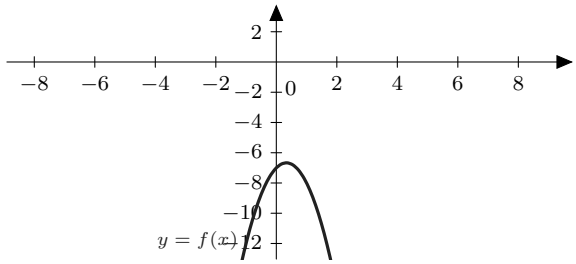
**Définition 2.**

La représentation graphique de la fonction polynôme du second degré $f$ de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une **parabole** de **sommet** $S(\alpha;\beta)$, et a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$ appelée **axe de la parabole**.

**Remarque 3.**

Une définition – plus consistante – des paraboles sera donnée dans le cours de terminale au chapitre 8 page 361.

**Exemple 4**
Représentation graphique de la fonction $f$ définie dans l'exemple précédent :
$f : x \mapsto -3x^2 + 2x - 7$. On a une fonction polynôme du second degré avec $a = -3 < 0$, donc on obtiendra une parabole en ∩. Sa forme canonique est $f(x) = -3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{20}{3}$, donc le sommet de la parabole est le point $S\left(\dfrac{1}{3}\ ,\ -\dfrac{20}{3}\right)$.




## 5.2 Résolution d'une équation du second degré

### 5.2.1 Étude du cas général

Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Résolvons l'équation

$$[ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{inconnue } x \in \mathbb{R}].$$

D'après le théorème 2, cette équation est équivalente à :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0. \tag{5.1}$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. Selon le signe de $\Delta$, trois cas de figure peuvent se produire :
**1er cas : si $\Delta > 0$.** Alors $\sqrt{\Delta}$ est bien définie, et l'équation (5.1) peut s'écrire comme une différence de deux carrés, ce qui va nous permettre d'utiliser la factorisation $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ et va nous ramener à une équation-produit. Il vient :

$$\begin{aligned}
& a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \\
\text{soit} \quad & a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] = 0 \\
\text{soit} \quad & a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \times \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0 \\
\text{soit} \quad & a\left[x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Donc les solutions de cette équation sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

**2e cas : si $\Delta = 0$.** Alors l'équation (5.1) devient $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, et admet une solution unique : $x = -\frac{b}{2a}$.
*On peut considérer que ces deux premiers cas n'en font qu'un, si l'on étudie $\Delta \geqslant 0$.*

**3e cas : si $\Delta < 0$.** Alors $\Delta$ n'admet pas de racine carrée. L'équation (5.1) devient $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, dont le premier membre est positif en tant que carré. Comme $4a^2 > 0$, le deuxième membre est du signe de $\Delta$, c'est-à-dire négatif.

On aboutit à la l'équation équivalente : $\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geqslant 0} = \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{<0}$ qui n'a pas de solution, et l'équation (5.1) n'admet donc aucune solution.

On a ainsi démontré le théorème suivant :

**Théorème 4**
Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, que l'on appellera **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
Le nombre de solutions de cette équation dépend du signe de $\Delta$.

- **Si $\Delta > 0$ :** L'équation admet deux solutions distinctes, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- **Si $\Delta = 0$ :** L'équation admet une solution unique, $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- **Si $\Delta < 0$ :** L'équation n'admet aucune solution.

**Définition 3.**

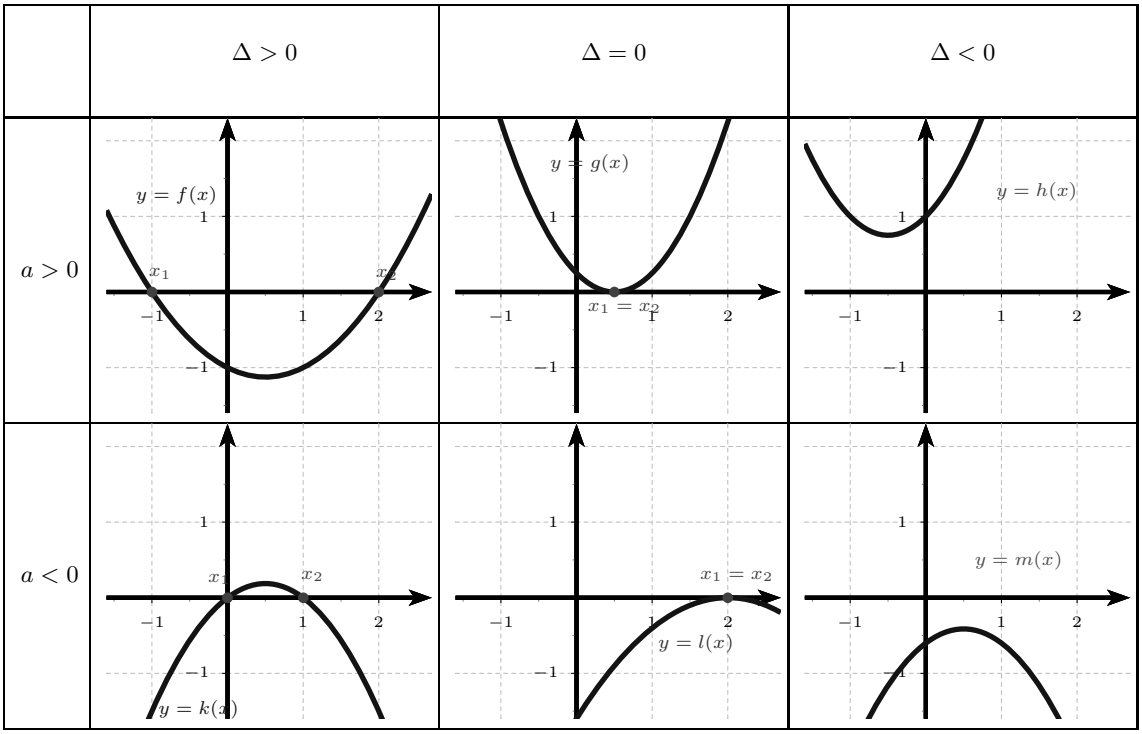
Soit $f$ un polynôme du second degré. Les solutions de l'équation $[f(x) = 0$; inconnue $x \in \mathbb{R}]$ sont appelées **racines** de l'équation. En généralisant les calculs effectués dans le deuxième cas de la démonstration ci-dessus pour $\Delta = 0$, on obtient encore deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ces deux solutions sont bien égales lorsque $\Delta = 0$ : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. On dit dans ce cas que $-\frac{b}{2a}$ est une **racine double** de l'équation.

### 5.2.2 Interprétation graphique

Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ et l'axe des abscisses.




### 5.2.3 Exemples

**Exemple 5**

1. Solutions de l'équation $x^2 + 5x + 1 = 0$
   Il s'agit d'une équation du second degré, avec $a = 1$, $b = 5$ et $c = 1$.
   On a donc $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 1 = 21$, on est dans le cas $\Delta > 0$.
   L'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}.$$

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \quad , \quad \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \right\}.$$

2. Racines de la fonction $f : x \mapsto 5x^2 + 6x + 2$
   Il s'agit d'une équation du second degré, avec $a = 5$, $b = 6$ et $c = 2$.
   On a donc $\Delta = 6^2 - 4 \times 5 \times 2 = -4$, on est dans le cas $\Delta < 0$.
   L'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$, la fonction n'a pas de racines réelles.
3. Vérification graphique

   On peut contrôler ses résultats graphiquement avec la calculatrice, en tapant
   $Y1 = ax^2 + bx + c$, puis en utilisant GRAPH pour estimer les abscisses des points où la courbe coupe l'axe des ordonnées ; attention, cette méthode ne donne que des résultats approchés.

## 5.3 Factorisation et application à l'étude du signe

### 5.3.1 Factorisation

**Théorème 5**
Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ se factorise éventuellement comme suit :

- Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où $x_1$ et $x_2$ sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où $x_0$ est la racine double du trinôme.
- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

**Démonstration 5**
Cette propriété découle des formes factorisées que nous avons exhibées lors de la démonstration du théorème 4 page 178. □

**Exemple 6**
Factorisons le trinôme $3x^2 - 5x + 2$. On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1$, donc $\Delta > 0$ et le polynôme a deux racines réelles distinctes, $x_1 = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = 1$.
On obtient donc la forme factorisée : $3x^2 - 5x + 2 = 3(x - \dfrac{2}{3})(x - 1)$.
*L'utilité principale d'une forme factorisée est d'étudier le signe de $f(x)$ en fonction de $x$.*

### 5.3.2 Étude du signe

**Théorème 6**
Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Le signe de ce polynôme dépend du signe de $\Delta$ et du signe de $a$.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme est du signe de $a$ à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme est toujours du signe de $a$. Il s'annule sans changer de signe en son unique racine.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme est toujours du signe de $a$.

**Démonstration 6 (Étude du cas général)**
Soient $a, b, c$ trois nombres réels tels que $a \neq 0$. Considérons le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$. Sa forme factorisée dépend du signe du discriminant $\Delta$, donc l'étude de son signe en dépend aussi (se référer aux interprétations graphiques du paragraphe 5.2.2).

**Si $\Delta > 0$ :** Avec les notations précédentes, on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où $x_1$ et $x_2$ sont les racines distinctes du trinôme. On peut supposer, quitte à intervertir les rôles de $x_1$ et $x_2$, que $x_1 < x_2$. On est donc ramené à l'étude du signe du produit $a(x - x_1)(x - x_2)$, qui découle de l'étude du signe de chacun de ses facteurs. On obtient le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $(x-x_1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $(x-x_2)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ | | Signe de a | $0$ | Signe de -a | $0$ | Signe de a | |

**Si $\Delta = 0$ :** Avec les notations précédentes, on a $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$, où $x_0$ est la racine double du trinôme. Comme un carré est toujours positif ou nul, $ax^2+bx+c$ est du signe de $a$, mais s'annule pour $x = x_0$ (sans changer de signe).

**Si $\Delta < 0$ :** Avec les notations précédentes, on a : $ax^2+bx+c = a\Big[\underbrace{\underbrace{\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2}_{\text{positif}} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{négatif}}}_{\text{positif}}\Big]$.

Donc dans ce dernier cas le trinôme est du signe de $a$ sur $\mathbb{R}$. □

**Exemple 7**

1. Étude du signe du polynôme $-x^2+4x-1$
   C'est un polynôme du second degré, avec $a=-1$, $b=4$, et $c=-1$. D'où $\Delta = 12 > 0$ ; ce polynôme admet deux racines réelles distinctes, $x_1 = 2-\sqrt{3}$ et $x_2 = 2+\sqrt{3}$. D'après ce qui précède, le polynôme est du signe de $a=-1$ à l'extérieur des racines, d'où le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $-x^2+4x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

2. Résolution de l'inéquation $3x^2-2x+1 \geqslant 0$.
   Le premier membre de cette inégalité est un polynôme du second degré, avec $a=3$, $b=-2$, et $c=1$. D'où $\Delta = -8 < 0$ ; ce polynôme n'admet aucune racine réelle, et il est donc toujours du signe de $a=3$, c'est-à-dire positif.
   Ainsi, l'inéquation proposée est toujours vraie, et l'on a $S = \mathbb{R}$.

**Interprétation graphique :**
On peut contrôler ses résultats graphiquement avec la calculatrice, en tapant $Y1 = ax^2+bx+c$, puis en utilisant GRAPH pour estimer les abscisses des points où la courbe représentative de la fonction est au-dessus (ou en-dessous) l'axe des ordonnées. Attention, cette méthode ne donne que des résultats approchés.

## 5.4 Programmation

Voici un programme donnant le discriminant et les éventuelles racines d'un polynôme du second degré s'écrivant sous la forme $Ax^2+Bx+C$ :

**Programme Python** :

```
from math import sqrt

a = float(input("a=?␣"))
b = float(input("b=?␣"))
c = float(input("c=?␣"))

delta = b**2-4*a*c

if delta > 0:
    print("Le␣trinome␣a␣deux␣racines␣:")
    print((-b-sqrt(delta))/(2*a))
    print((-b+sqrt(delta))/(2*a))
elif delta == 0:
    print("Le␣trinome␣a␣une␣racine␣double␣:")
    print(-b/(2*a))
else:
    print("Le␣trinome␣n'a␣pas␣de␣racines.",delta)
```

**Programme pour une TI** :

```
PROGRAM:DEGRE2
Disp "CALCUL DISCRIMINANT :"
Disp "AX^2+BX+C"
Prompt A,B,C
ClrHome
B^2-4×A×C→D
Disp "DISCRIMINANT",D
If abs(D)=0
Then
Disp "1 SOLUTION",-B/(2×A)
Else
If D>0
Then
Disp "2 SOLUTIONS"
Disp (-B-√(D))/(2×A)
Disp (-B+√(D))/(2×A)
Else
Disp "AUCUNE SOLUTION"
End
End
```

**Remarques 4.**

1. Sur une T.I. en français, la commande "ClrHome" s'appelle "EffEcr".
2. La fonction racine carrée `sqrt` se trouve dans la **bibliothèque** `math`. La ligne `from math import sqrt` se substitue à la définition de la fonction racine carrée par le mot réservé `def`.

   La commande `import math` permet de pouvoir utiliser toutes les fonctions de la bibliothèque `math`. Avec cette procédure, la fonction racine carrée s'appelle avec un préfixe : `math.sqrt`.

## 5.5 Somme et produit des racines

Soit $a, b, c$ trois nombres réels où $a \neq 0$. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout nombre réel $x$. On suppose que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. On appelle $x_1$ et $x_2$ les racines de $f$. On pose $S = x_1 + x_2$ et $S = x_1 \cdot x_2$.

D'après le théorème 5 page 180, on a pour tout réel $x$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. D'après le théorème 1 page 172, on peut identifier les coefficients : $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$.

On sait que $a \neq 0$ donc on déduit en divisant chaque membre de ces deux égalités que $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$.

Ainsi, dans le cas où $a = 1$, on a $b = -S$ et $c = P$.

**Conclusion** Si deux réels sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, alors ces deux réels ont pour somme $S$ et pour produit $P$.

Démontrons la réciproque de cette conclusion.

Soient deux réels $u$ et $v$ de somme $S$ et de produit $P$, alors ces deux réels sont les solutions de l'équation

$$[(x-u)(x-v)=0\,;\ \text{inconnue } x\in\mathbb{R}]$$

mais pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $\begin{array}{rcl}(x-u)(x-v) &=& x^2-(u+v)x+uv\\ &=& x^2-Sx+P\end{array}$

donc les deux réels $u$ et $v$ sont bien les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$.

Après la proposition directe, nous avons donc montré la réciproque, cela prouve l'équivalence suivante.

**Théorème 7**
Deux réels sont les solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$, si et seulement si ces deux réels ont pour somme $S$ et pour produit $P$.

Appliquons l'équivalence démontrée ci-dessus : Pour que deux nombres aient pour somme 60 et pour produit 851, il faut et il suffit que ces deux nombres soient les solutions de l'équation $x^2-60+851=0$.

Le calcul du discriminant, qui s'avère strictement positif, et des deux racines distinctes, donne les deux nombres demandés : 23 et 37.

1. Pour que deux nombres $x$ et $y$ aient pour somme 29 et pour produit 210, il faut et il suffit que ces deux nombres soient les solutions de l'équation $x^2-29x+210=0$.
   Le calcul du discriminant, qui s'avère strictement positif, et des deux racines distinctes, donne les deux nombres demandés : 14 et 15.
   Ainsi, le système a deux solutions : $\big(14\ ,\ 15\big)$ et $\big(15\ ,\ 14\big)$.
2. Les nombres $x$ et $y$ ont pour somme $-\dfrac{1}{6}$ et pour produit $-\dfrac{1}{6}$ si et seulement si ces deux nombres sont les solutions de l'équation $x^2-\dfrac{-1}{6}+\dfrac{-1}{6}=0$.
   Le calcul du discriminant, qui s'avère strictement positif, et donc des deux racines distinctes, donne les deux nombres demandés : $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.
   Ainsi, le système a deux solutions : $\left(-\dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{1}{3}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{3}\ ,\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

### 5.5.1 Racine évidente

On sait qu'il y a plus simple que de calculer le discriminant dans les cas favorables où une factorisation évidente apparaît (si $x$ est facteur commun ou si le trinôme est sous la forme d'une identité remarquable) ; le développement ci-dessus nous apporte un autre cas favorable.

En effet, si une racine $x_1$ est évidente, puisque le produit des racines est $P=\dfrac{c}{a}$ (et que la somme des racines est $S=-\dfrac{b}{a}$), on obtient alors la seconde racine $x_2$ par un calcul simple : $x_2=\dfrac{P}{x_1}$ (ou $x_2=S-x_1$).

Ce que l'on appelle une racine évidente est une valeur dont il est facile à vérifier qu'elle annule le trinôme ; cela peut être 1, $-1$, 2, $-2$ (voire 3, $\dfrac{1}{2}\ldots$ pour les plus courageux mais le but de cette méthode est de gagner du temps et des erreurs de calcul sur la méthode du discriminant donc il ne faut pas insister avec des valeurs trop nombreuses ou compliquées !).

Et si $x_1=1$ alors c'est très facile puisque $x_2=P$ !

**Exemple 8**

- très facile : pour $Q(x) = x^2 - 4x + 3$ on voit que $Q(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 0$ donc 1 est racine, l'autre racine est donc 3 ;
- une variante et un peu plus difficile : pour $R(x) = 2x^2 - 10x - 12$, on constate que $P = \dfrac{-12}{2} = -6$ et $S = -\dfrac{-10}{2} = 5$, on cherche donc les deux nombres dont 5 est la somme et 6 le produit, on peut essayer des valeurs entières et les seules décompositions en produit d'entiers de $-6$ sont $-2 \times 3$, $-3 \times 2$, $-1 \times 6$ et $-6 \times 1$ et le seul cas des quatre où la somme est 5 nous donne les deux racines : $-1$ et 6.

## 5.6 Fiche cuisine : le second degré

Trinôme du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

### 5.6.1 Forme canonique

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$

### 5.6.2 Racines

$\Delta < 0$ : pas de racines
$\Delta = 0$ : une seule racine, appelée racine double, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta > 0$ : deux racines distinctes, $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

### 5.6.3 Factorisation

$\Delta < 0$ : pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
$\Delta = 0$ : factorisation $f(x) = a(x - x_0)^2$
$\Delta > 0$ : factorisation $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

### 5.6.4 Sens de variation

$a > 0$, courbe en $\cup$, comme celle de la fonction carré. Variations $\searrow\nearrow$
$a < 0$, courbe en $\cap$, variations $\nearrow\searrow$

### 5.6.5 Extremum (maximum ou minimum)

L'extremum vaut $y = \beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$, et est atteint pour $x = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$

### 5.6.6 Étude du signe

$\Delta < 0$ : toujours du signe de $a$
$\Delta = 0$ : du signe de $a$, et s'annule pour $x = x_0$ (racine double)
$\Delta > 0$ : du signe de $a$ à l'extérieur des racines

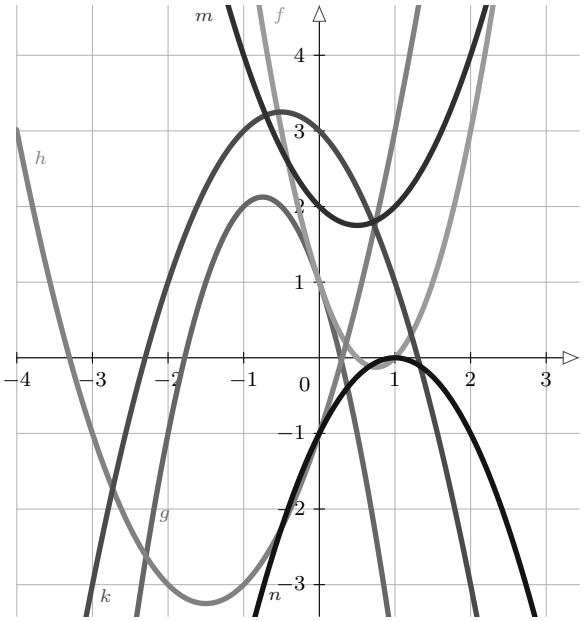
### 5.6.7 Utilisation des différentes formes

| Forme | forme développée $ax^2 + bx + c$ | forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ | forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)$ |
|---|---|---|---|
| Exemples d'utilisations | Calculer $f(0) = c$ | Trouver l'extremum<br>Calculer $f(\alpha) = \beta$ | Étudier le signe<br>Calculer $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$ |

## 5.7 Exercices

**Exercice 1.**

Pour chacune des six représentions de fonctions du second degré, donner le signe de chacun des coefficients ainsi que celui du discriminant $\Delta$.




**Exercice 2.**

Dans chacun des cas suivants, écrire le trinôme $f(x)$ sous sa forme canonique.

1. $f(x) := x^2 + 6x$.
2. $f(x) := -3x^2 + 6x - 2$.
3. $f(x) := x^2 + x - 1$.
4. $f(x) := 2x(x-3)$.

**Exercice 3** (forme canonique)**.**

Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) := x^2 - 6x + 5$.

1. Montrer que pour tout réel $x$, $\quad f(x) = (x-3)^2 - 4$.
2. En déduire une factorisation de $f(x)$.
3. Utiliser la forme la plus adaptée de $f(x)$ pour résoudre les questions suivantes :
   (a) Le minimum de la fonction $f$ est $-4$.
   (b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Calculer $f(3 - \sqrt{2})$.

**Exercice 4.**

Deux cubes sont tels que la somme des mesures de leurs côtés est égale à dix centimètres.
On note $x$ la mesure du côté de l'un d'entre eux.
Déterminez la valeur de $x$ pour laquelle la somme des volumes des deux cubes est minimale.

**Exercice 5.**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, en évitant de calculer le discriminant :

1. $x^2 - 9 + 4(x+3) = 0$.
2. $(7 - 2x)^2 + 1 = 0$.

**Exercice 6.**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, en calculant éventuellement le discriminant :

1. $-3x^2 + 7x + 1 = 0$
2. $3x^2 + \sqrt{12}x + 1 = 0$

**Exercice 7.**

Résoudre l'équation

$$[x^2 + |x-1| + x - 7 = 0;\ \text{inconnue } x \in \mathbb{R}\,] \qquad (\star)$$

**Exercice 8.**

On considère l'équation $(E) : x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 2\sqrt{2} - 4 = 0$.

1. Démontrer que $\Delta = (1 + 3\sqrt{2})^2$.
2. Résoudre l'équation $(E)$.

**Exercice 9** (Statistiques)**.**

Soit $x$ un nombre réel. On considère une série statistique constituée de quatre nombres 1, 2, 5 et le quatrième nombre sera noté, pour des raisons de commodité, $4x$.

1. Calculer, en fonction de $x$, la moyenne $m(x)$ de cette série.
2. Calculer, en fonction de $x$, la variance $V(x)$ de cette série. (Voir la définition 3 page 289 du cours de seconde pour la variance.)
3. Tracer la représentation graphique de la fonction $V$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de $x$ la variance $V(x)$ est-elle minimum ?
5. Écrire la série statistique dans ces cas.

### 5.7.1 Démonstration(s)

**Exercice 10.**

Soit $a, b, c$ trois nombres réels où $a \neq 0$. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout nombre réel $x$.

1. Montrer que si $a$ et $c$ sont de signes opposés alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.
2. Peut-on affirmer que si l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions alors $a$ et $c$ sont de signes opposés ?

**Exercice 11.**

Soit $a, b, c$ trois nombres réels où $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout nombre réel $x$.

1. Démontrer que 0 n'est pas racine de $f$.
2. On suppose de plus que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Démontrer que

$$x_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{\Delta}} \text{ et } x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{\Delta}}$$

sont les deux racines de$f$.

**Exercice 12.**

Soit $a, b, c, a', b', c'$ six nombres réels et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Démontrer que pour que l'on ait pour tout $x \in I$, $ax^2+bx+c = a'x^2+b'x+c'$ il faut et il suffit que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

### 5.7.2 Technique

**Exercice 13.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes en évitant de calculer le discriminant :

- $x^2 = 9$ ;
- $x^2 = -3$ ;
- $(x-5)^2 = 3$ ;
- $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$ ;
- $(3x+5)^2 = (x+1)^2$ ;
- $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$.

**Exercice 14.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $4x^2 - x - 3 = 0$ ;
- $(t+1)^2 + 3 = 0$ ;
- $x^2 + 10^{50}x + 25 \times 10^{98} = 0$ ;
- $x^2 + 3x = 0$ ;
- $x^3 + 2x^2 - 4x = 0$ ;
- $2(2x+1)^2 - (2x+1) - 6 = 0$.

**Exercice 15.**

On note $P(x) := -2x^2 - x + 1$.

1. Résoudre $P(x) = 0$.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Résoudre $P(x) \leqslant 0$.

**Exercice 16** (Changement d'inconnue)**.**

On cherche à résoudre $\left[x - \sqrt{x} - 2 = 0;\ \text{inconnue } x \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [\right]$.

1. Pour tout réel positif $x$, on pose $t = \sqrt{x}$. Ré-écrire l'équation précédente avec l'inconnue $t \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [$.
2. Résoudre l'équation ainsi obtenue.
3. En déduire les solutions de l'équation de départ.

**Exercice 17** (Avec un paramètre)**.**

Soit l'équation $(E)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$(m+1)x^2 + 4mx + m + 1 = 0.$$

où $m$ désigne un réel quelconque.

1. Que se passe-t-il si $m = -1$ ? Résoudre alors l'équation $(E)$.
2. Peut-on trouver $m$ pour que $-2$ soit solution de l'équation $(E)$ ?
3. On suppose désormais que $m \neq -1$.
   (a) Calculer le discriminant de l'équation $(E)$ en fonction de $m$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de $m$, l'équation $(E)$ admet-elle une seule racine ? La calculer.
   (c) Pour quelle(s) valeur(s) de $m$, l'équation $(E)$ admet-elle deux racines distinctes ? Dans ce cas, écrire la somme et le produit de ces racines.
   (d) Pour quelle(s) valeur(s) de $m$, a-t-on $(m+1)x^2+4mx+m+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ?

**Exercice 18.**

On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_0 = 6 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2.$$

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1,4x - 0,05x^2.$$
   (a) Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\ ,\ 8]$.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.
2. En déduire que la suite $(v_n)$ est convergente et déterminer sa limite $\ell$.

**Exercice 19.**

Trouver cinq nombres entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des trois premiers soit égale à la somme des carrés des deux derniers.

**Exercice 20.**

Soient $a$ et $b$ deux réels et $P(a,b) := (a+1)^2 - 4a(1-b)(1+ab)$.

Écrire $P(a,b)$ comme le carré d'un réel qu'on déterminera en fonction de $a$ et $b$.

**Exercice 21.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x^3 - 3x^2 + 13x + 15.$$

1. Montrer que $f(-1) = 0$.
2. Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.
3. (a) Terminer la factorisation de $f(x)$.
   (b) Résolvez l'inéquation $f(x) > 0$.

Une deuxième solution sera donnée à l'occasion de l'exercice 5 page 407.

### 5.7.3 Algorithmique

**Exercice 22.**

Faire tourner le programme 5.4 page 182 avec $a = 0,1$, $b = 0,6$ et $c = 0,9$.
Commentaire.

### 5.7.4 Géométrie

**Exercice 23** (Cercle de Carlyle)**.**

On se donne deux réels $p$ et $s$ vérifiant $s^2 - 4p > 0$.

1. Démontrer que l'équation

$$\left[x^2 - sx + p = 0, \quad \text{inconnue } x \in \mathbb{R}\right]$$

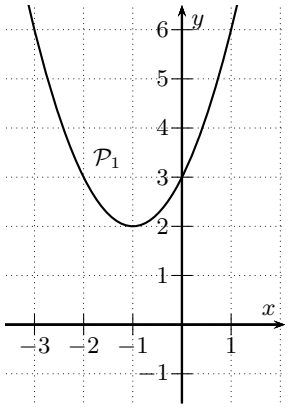
admet deux solutions notées $x_1 < x_2$.

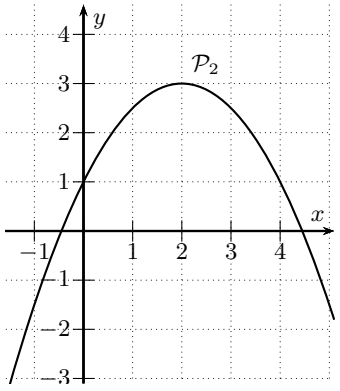
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit $F\left(0\ ;\ 1\right)$, $M\left(s\ ;\ p\right)$, $P\left(0\ ;\ p\right)$ et $S\left(s\ ;\ 0\right)$. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[FM]$.
Démontrer que $\mathcal{C}$ recoupe l'axe des abscisses en deux points $B$ et $C$ d'abscisses respectives $x_1$ et $x_2$.

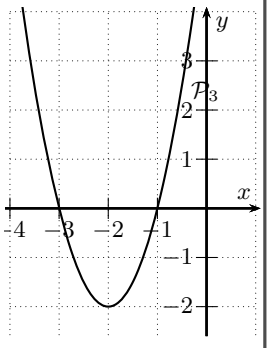
3. On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = \dfrac{1}{4}x^2$.
Démontrer que la droite $(BM)$ est tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse $2x_1$.

**Exercice 24.**

Chacune des trois paraboles est la représentation graphique d'une fonction trinôme du second degré. Déterminer chacune de ces fonctions.



**Exercice 25.**

On se donne trois nombres réels $a$, $b$ et $c$, distincts deux à deux.
Démontrer que $a$, $b$ et $c$ sont trois solutions distinctes de l'équation du second degré, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1.$$

Commentaire ?

**Exercice 26.**

Soient des réels $a > 0$ et $b > 0$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\cdots \quad \cfrac{}{a + \cfrac{b}{x}}}} = x \qquad \text{(2017 traits de fraction).}$$

**Exercice 27.**

Deux mobiles sont animés chacun d'un mouvement rectiligne uniforme dans un même plan. À 12 h, leur distance est 1 km ; à 13 h, leur distance est 2 km ; à 14 h, leur distance est 4 km. À quelle heure leur distance sera-t-elle minimum, et quel est ce minimum ? Même problème pour deux véhicules spatiaux animés chacun d'un mouvement rectiligne uniforme dans l'espace, mais pas nécessairement dans un même plan.

**Exercice 28** (Somme et Produit)**.**

1. Trouver deux nombres dont la somme vaut 20 et le produit vaut 51.
2. On choisit deux nombres S et P. À quelle condition S et P sont respectivement la somme et le produit de deux nombres ?
3. Proposer deux nombres S et P qui ne sont pas la somme et le produit de deux nombres.
4. Trouver deux nombres dont la somme et le produit valent 10.
5. Quels sont les entiers relatifs qui sont à la fois la somme et le produit de deux nombres et quels sont ces deux nombres ?

**Exercice 29.**

Soit $f(x) = 2x^2 + 7x + 2$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(f(x)) = x$.

### 5.7.5 Exercices descendus du grenier

Exercices de préparation au brevet élémentaire dans les années 1930.

**Exercice 30.**

Un rectangle est équivalent à un carré de 7,5 m de côté. Si l'on augmente ses dimensions de 0,5 m sa surface est augmentée de 8,75 m$^2$. Quelles sont ses dimensions ?

**Exercice 31.**

Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que leur produit soit les $\frac{63}{8}$ du carré du nombre intermédiaire.



## 5.8 Solutions

**Solution 1**

Pour $f$ : $a$ est positif (cuvette). Le minimum est réalisé au point d'abscisse $-\frac{b}{a} > 0$ donc $b < 0$. De plus, $f(0) = c = 1$ donc $c > 0$. La courbe coupe l'axe des ordonnées donc $\Delta > 0$. Même démarche pour les autres courbes.

| | $a$ | $-\frac{b}{a}$ | $b$ | $c$ | $\Delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $+$ | $+$ | $-$ | 1 | $+$ |
| $g$ | $-$ | $-$ | $-$ | 1 | $+$ |
| $h$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-1$ | $+$ |
| $k$ | $-$ | $-$ | $-$ | 3 | $+$ |
| $m$ | $+$ | $+$ | $-$ | 2 | $-$ |
| $n$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-1$ | 0 |

**Solution 2**

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6x \\ &= x^2 + 2 \times 3 \times x \\ &= \underbrace{x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2}\, - 3^2 \\ &= (x+3)^2 - 3^2 \\ &= (x+3)^2 - 9 \\ &= (x-(-3))^2 + (-9) \end{aligned}$$

On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a = 1$, $\alpha = -3$ et $\beta = -9$.

2.

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 6x - 2 \\ &= -3\left(x^2 - 2x + \frac{2}{3}\right) \\ &= -3\left(x^2 - 2 \times 1 \times x + \frac{2}{3}\right) \\ &= -3\left(\underbrace{x^2 - 2 \times 1 \times x + 1^2}\, - 1^2 + \frac{2}{3}\right) \\ &= -3\left((x-1)^2 - 1 + \frac{2}{3}\right) \\ &= -3\left((x-1)^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= -3(x-1)^2 - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -3(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a = -3$, $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

3.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x - 1 \\ &= x^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times x - 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \\ &= \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{5}{4}\right) \end{aligned}$$

On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a = 1$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{5}{4}$.

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x(x-3) \\ &= 2x^2 - 6x \\ &= 2(x^2 - 3x) \\ &= 2\left(\underbrace{x^2 - 2 \times \frac{3}{2} \times x + \left(\frac{3}{2}\right)^2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a = 2$, $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = -\frac{9}{2}$.

**Solution 3 (forme canonique)**

1. En développant, pour tout réel $x$,

$$(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5 = f(x),$$

ce qu'il suffisait de vérifier.

2. On en déduit que $f(x) = (x-3)^2 - 2^2 = (x-3-2)(x-3+2) = (x-5)(x-1)$.

3. (a) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-3)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant -4$. De plus $f(3) = -4$. C'est bien dire que $-4$ est le minimum de la fonction $f$ et que ce minimum est atteint en $x := 3$.

   (b) En écrivant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-5)(x-1)$, on voit que $f$ est négative entre les racines. $\mathscr{S} = [1\ ,\ 5]$.

   (c) En écrivant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)^2 - 4$, on a $(3 - \sqrt{2} - 3)^2 - 4 = 2 - 4 = 2$.

**Solution 4**

Notons $\mathscr{V}_1(x)$ le volume du cube d'arête $x$, et $\mathscr{V}_2(x)$ le volume du second cube.
On a : $\mathscr{V}_1(x) = x^3$ et $\mathscr{V}_2(x) = (10-x)^3$.
Notons $\mathscr{V}(x)$ la somme de ces deux volumes. Il vient :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}(x) &= \mathscr{V}_1(x) + \mathscr{V}_2(x) \\
&= x^3 + (10-x)^3 \\
&= x^3 + (10-x)(10-x)^2 \\
&= x^3 + (10-x)(100 - 20x + x^2) \\
&= \cancel{x^3} + 1000 - 200x + 10x^2 - 100x + 20x^2 - \cancel{x^3} \\
&= 30x^2 - 300x + 1000
\end{aligned}$$

On obtient un trinôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, dont la forme canonique est :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}(x) &= 30x^2 - 300x + 1000 \\
&= 30\left(x^2 - 10x + \frac{100}{3}\right) \\
&= 30\left((x-5)^2 - 25 + \frac{100}{3}\right) \\
&= 30\left((x-5)^2 + \frac{25}{3}\right) \\
&= 30(x-5)^2 + 250
\end{aligned}$$

Ce trinôme est donc minimal pour $x = \alpha = 5$, et son minimum est $\mathscr{V}_m in = \beta = 250$.
Ainsi, le somme des volumes des deux cubes est minimale pour $x = 5$, et est dans ce cas égale à $250cm^3$.

**Solution 5**

1.

$$\begin{aligned}
x^2 - 9 + 4(x+3) &= 0 \\
(x+3)(x-3) + 4(x+3) &= 0 \\
(x+3)\left[(x-3) + 4\right] &= 0 \\
(x+3)(x+1) &= 0,
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{S} = \{-3\ ,\ -1\}$.

Solutions

2.

$$\begin{aligned}(7-2x)^2+1 &= 0\\ (7-2x)^2 &= -1,\end{aligned}$$

donc $\mathscr{S}=\emptyset$, car le carré d'un nombre réel ne peut pas être strictement négatif.

**Solution 6**

1. $-3x^2+7x+1$ est un trinôme de la forme $ax^2+bx+c$, avec $a=-3$, $b=7$ et $c=1$.
   On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=7^2-4\times(-3)\times 1=49+12=61$.
   Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes.

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}=\left\{\frac{-7-\sqrt{61}}{-6};\frac{-7+\sqrt{61}}{-6}\right\}=\left\{\frac{7+\sqrt{61}}{6};\frac{7-\sqrt{61}}{6}\right\}.$$

2. $3x^2+\sqrt{12}x+1$ est un trinôme de la forme $ax^2+bx+c$, avec $a=3$, $b=\sqrt{12}$ et $c=1$.
   On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{12}\right)^2-4\times 3\times 1=12-12=0$.
   Comme $\Delta=0$, le trinôme possède une seule racine, dite « racine double ».

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}=\left\{\frac{-\sqrt{12}}{6}\right\}=\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{6}\right\}=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

**Solution 7**

L'équation est équivalente à

$$\begin{array}{rrcccccccccccccc} & x^2+(x-1)+x-7 & = & 0 & \text{et} & x & \geqslant & 1 & \text{ou} & x^2-(x-1)+x-7 & = & 0 & \text{et} & x & \leqslant & 1\\ \text{soit} & x^2+2x-8 & = & 0 & \text{et} & x & \geqslant & 1 & \text{ou} & x^2-6 & = & 0 & \text{et} & x & \leqslant & 1 \end{array}.$$

La première équation a un discriminant $\Delta=4+4\times 8=36$. Cette équation admet comme racines 2 et $-4$. Seule la racine 2 est supérieure ou égale à 1 et est solution de l'équation $(\star)$.

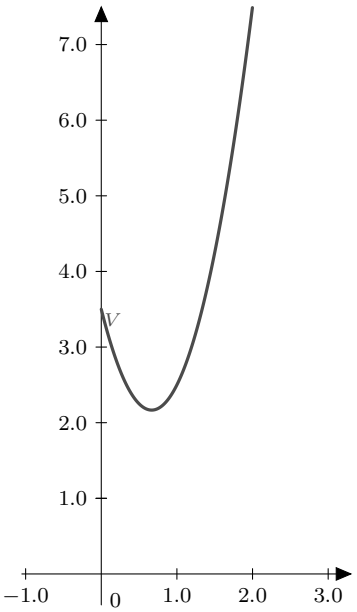
La deuxième équation a pour solutions $-\sqrt{6}$ et $\sqrt{6}$. Seule la racine $-\sqrt{6}$ est inférieure ou égale à 1 et est solution de l'équation $(\star)$.

$$\mathscr{S}=\left\{-\sqrt{6}\ ,\ 2\right\}.$$

**Solution 8**

1. $\Delta=(1-\sqrt{2})^2-4(-2\sqrt{2}-4)=1-2\sqrt{2}+2+8\sqrt{2}+16=19+6\sqrt{2}$
   De plus $(1+3\sqrt{2})^2=1+6\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2=1+6\sqrt{2}+18=19+6\sqrt{2}$
   Conclusion : $\Delta=(1+3\sqrt{2})^2$.
2. $\Delta>0$ donc l'équation $(E)$ admet deux solutions :
   $x_1=\dfrac{-(1-\sqrt{2})+(1+3\sqrt{2})}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{2}+1+3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$
   $x_2=\dfrac{-(1-\sqrt{2})-(1+3\sqrt{2})}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{2}-1-3\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$
   $\mathscr{S}=\{2\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\}$

**Solution 9 (Statistiques)**

1. On trouve $m(x) = \dfrac{1+2+5+4x}{4} = \dfrac{8+4x}{4} = 2+x$.
2. On trouve
$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{4}\left((1-2-x)^2 + (2-2-x)^2 + (5-2-x)^2 + (4x-2-x)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((-1-x)^2 + (-x)^2 + (3-x)^2 + (3x-2)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left((x^2+2x+1) + x^2 + (x^2-6x+9) + (9x^2-12x+4)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(12x^2 - 16x + 14\right) \\ &= 3x^2 - 4x + \frac{7}{2} \end{aligned}$$
3. 

4. En posant $a = 3$, $b = -4$ et $b = 3,5$, on a $V(x) = ax^2 + bx + c$. Puisque $a > 0$, la fonction $V$ admet un minimum, atteint en $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2\times 3} = \dfrac{2}{3}$.
5. Dans ce cas, la série s'écrit 1, 2, 5 et $\dfrac{8}{3}$.

## 5.8.1 Démonstration(s)

**Solution 10**

1. Supposons $a > 0$ et $c < 0$. On a alors $\Delta := b^2 - 4ac > 0$ car $4ac < 0$ et $b^2 \geqslant 0$. Même chose si $a < 0$ et $c > 0$.
2. Non, on ne peut pas l'affirmer dans la mesure où l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet les deux racines distinctes 1 et 2. Pour autant les coefficients $a$ et $c$ sont de signes opposés.

**Solution 11**

1. On a $f(0) = c \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de $f$.
2. En utilisant l'expression conjuguée,

$$x_1 = \frac{2c\left(-\sqrt{\Delta}+b\right)}{\Delta - b^2} = -2c\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{-4ac} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

De même,

$$x_1 = \frac{2c\left(\sqrt{\Delta}+b\right)}{\Delta - b^2} = -2c\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{-4ac} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

On aurait pu remarquer que les solutions des équations d'inconnues $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x) = 0 \text{ et } x^2 f(1/x) = 0$$

ont des solutions inverses les unes des autres et que ces équations ont les mêmes discriminants.

**Solution 12**

Le théoème 1 répond à la question lorsque $I := \mathbb{R}$. Sinon,

soit $\alpha := a' - a$, $\beta := b' - b$ et $\gamma := c' - c$. L'équation

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

admet tous les réels comme solutions. On a $\alpha = 0$ sinon on aurait plus de deux solutions à une équation du second degré ce qui contredit le théorème 4.

De même on a $\beta = 0$ puis $\gamma = 0$.

## 5.8.2 Technique

**Solution 13**

- $x^2 = 9$ ; $\mathscr{S} = \{-3; 3\}$ d'après le théorème 42 page 88 du cours de seconde.
- $x^2 = -3$ ; $\mathscr{S} = \varnothing$ car un carré est toujours positif.
- $(x-5)^2 = 3$ ; l'équation est équivalente à $x - 5 = \sqrt{3}$ ou $x - 5 = -\sqrt{3}$, donc $\mathscr{S} = \left\{5 - \sqrt{3}, 5 + \sqrt{3}\right\}$.
- $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$ ; l'équation est équivalente à $(5x - 4 - (3x + 7))(5x - 4 + 3x + 7) = 0$ soit $2x - 11 = 0$ ou $8x + 3 = 0$, donc $\mathscr{S} = \left\{\frac{11}{2}, -\frac{3}{8}\right\}$.
- $(3x+5)^2 = (x+1)^2$ ; l'équation est équivalente à $3x + 5 = x + 1$ ou $3x + 5 = -(x + 1)$, soit $2x = -4$ ou $4x = -6$, donc $\mathscr{S} = \left\{-2, -\frac{3}{2}\right\}$.
- $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$. En factorisant, l'équation est équivalente à $(2x - 1)(2x - 1 - x - (2x + 1)) = 0$ soit $(2x - 1)(-x - 2) = 0$. Donc $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}, -2\right\}$.

**Solution 14**

- $4x^2 - x - 3 = 0$ ; on a la racine évidente 1. Le produit des racines est $-\frac{3}{4}$. Donc $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{4}, 1\right\}$.
- $(t+1)^2 + 3 = 0$ ; pas de solution réelle (somme de deux carrés nulle).
- $x^2 + 10^{50}x + 25 \times 10^{98} = 0$ ; l'équation est équivalente à $x^2 + 2 \times 5 \times 10^{49}x + \left(5 \times 10^{49}\right)^2 = 0$ soit $\left(x - 5 \times 10^{49}\right)^2 = 0$. Donc $\mathscr{S} = \left\{5 \times 10^{49}\right\}$.
- $x^2 + 3x = 0$ ; l'équation est équivalente à $x(x + 3) = 0$, donc $\mathscr{S} = \{-3; 0\}$.
- $x^3 + 2x^2 - 4x = 0$ ; l'équation est équivalente à $x(x^2 + 2x - 4) = 0$. On pose $\Delta := 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 20 > 0$. D'après le théorème 4, l'équation $x^2 + 2x - 4 = 0$ admet deux solutions $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} = -1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{5}$. Finalement, $\mathscr{S} = \left\{-1 - \sqrt{5}, 0, -1 + \sqrt{5}\right\}$.

- $2(2x+1)^2-(2x+1)-6=0$. On pose $u:=2x+1$. On résout l'équation $2u^2-u-6=0$. Elle admet deux solutions $u_1=2$ et $u_2=-\dfrac{3}{2}$. On résout alors $2x+1=u_1=2$ soit $x=\dfrac{1}{2}$ et $2x+1=u_2=-\dfrac{3}{2}$ soit $x=-\dfrac{5}{4}$. Donc $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{5}{4},\dfrac{1}{2}\right\}$. En développant $2(2x+1)^2-(2x+1)-6=8x^2+6x-5$, on vérifie que $-\dfrac{5}{4}$ et $\dfrac{1}{2}$ sont solution en calculant la somme $-\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{4}$ et le produit $-\dfrac{5}{4}\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{8}$.

**Solution 15**

1. On a la racine évidente $-1$. Le produit des racines égale $-\dfrac{1}{2}$. Donc $\mathscr{S}=\left\{-1,\dfrac{1}{2}\right\}$.
2. On en déduit que $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=-2\,(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.
3. Le trinôme est du signe de $a:=-2$ à l'extérieur des racines. Donc $\mathscr{S}=]-\infty\ ,\ -1]\cup\left[\dfrac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$.

**Solution 16 (Changement d'inconnue)**

1. On est amené à résoudre l'équation
$$\left[t^2-t-2=0;\ \text{inconnue } t\in[\ 0\ ,\ +\infty\ [\ \right].$$
2. L'équation $\left[t^2-t-2=0;\ \text{inconnue } t\in\mathbb{R}\ \right]$ admet la racine évidente $-1$ et la racine 2 obtenue grâce au produit. La solution $-1$ n'est pas admissible. Donc $\mathscr{S}=\{2\}$.
3. L'équation de départ admet donc comme unique solution $2^2=4$.

**Solution 17 (Avec un paramètre)**

1. Si $m=-1$, alors l'équation $(E)$ s'écrit $-4x=0$, donc $\mathscr{S}=\{0\}$.
2. Dire que $-2$ soit solution de l'équation $(E)$, c'est dire que $(m+1)(-2)^2+4m\times(-2)+m+1=0$ soit $4m+4-8m+m+1=0$ soit $-3m+5=0$ soit $m=-\dfrac{5}{3}$.
3. (a) Le discriminant de l'équation $(E)$ égale $\Delta:=(4m)^2-4(m+1)^2=4(2m-m-1)(2m+m+1)=4(m-1)(3m+1)$.
   (b) L'équation $(E)$ admet une seule racine si et seulement si $\Delta=0$, si et seulement si $m=1$ ou $m=-\dfrac{1}{3}$.
   (c) L'équation $(E)$ admet deux racines distinctes si et seulement si $\Delta>0$, si et seulement si $m\in\left]-\dfrac{1}{3}\ ,\ 1\right[$.
   (d) On a $\forall x\in\mathbb{R}\ (m+1)x^2+4mx+m+1>0$ si et seulement si $\Delta<0$ et $m+1>0$, soit $m\in]1\ ,\ +\infty[$.

**Solution 18**

1. (a) La forme canonique de la fonction $f$ donne
   $f(x)=-0,05\left[(x-14)^2-196\right]$.
   La fonction trinôme $f$ a donc un extremum pour $x=14$ et cet extremum qui vaut $f(14)=9,8$ est un maximum car $-0,05<0$.
   La fonction est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ 14]$ donc notamment sur $[0\ ,\ 8]$.
   (On pouvait aussi étudier le signe de la dérivée de $f$).
   (b) **Enoncé :** Pour un entier naturel $n$, notons $P_n$ la proposition :
   $0\leqslant v_n<v_{n+1}\leqslant 8$.
   **Initialisation :** $v_0=6$,
   $v_1=1,4v_0-0,005v_0^2=1,4\times 6-0,05\times 6^2=8,4-1,8=6,6$.

On a bien $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant 8$.

**Hérédité** : supposons qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leqslant< v_p < v_{p+1} \leqslant 8$.

On a $v_{p+2} = f(v_{p+1})$. D'après la question précédente la fonction $f$ est croissante sur $[0\ ,\ 8]$ et d'après la proposition $P_n$, $v_n$ et $v_{n+1}$ sont dans cet intervalle ;
donc $0 \leqslant f(v_p) \leqslant f(v_{p+1}) \leqslant f(8)$ soit $0 \leqslant v_{p+1} \leqslant v_{p+2} \leqslant f(8)$.
Or $f(8) = 8$ donc l'hérédité est démontrée.

**Conclusion :** D'après le théorème de récurrence, on a pour tout entier naturel $n$,

$$0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8.$$

2. La question précédente montre que :
   - ▶ la suite $(v_n)$ est croissante ;
   - ▶ la suite $(v_n)$ est majorée par 8.

   D'après le théorème 19 page 59, la suite $(v_n)$ converge vers une limite $\ell$.

   La relation $v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$ entraîne par passage aux limites :

   $\ell = 1,4\ell - 0,05\ell^2$ donc $0,4\ell = 0,05\ell^2$ ; les deux solutions sont $\ell = 0$ (impossible car la suite est croissante à partir de $v_0 = 6$) et $\ell = 8$.

   La suite $(v_n)$ converge donc vers 8.

**Solution 19**

On appelle $n-2, n-1, n, n+1$ et $n+2$ les cinq entiers naturels consécutifs avec $n \geqslant 2$. On est amené à résoudre l'équation

$$\left[(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n-2)^2 + (n-2)^2;\ \text{inconnue } n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\right],$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{soit} & (n-2)^2 - (n+2)^2 + (n-1)^2 - (n+1)^2 + n^2 & = & 0 \\ \text{soit} & -8n + (-4n) + n^2 & = & 0 \\ \text{soit} & n(n-12) & = & 0. \end{array}$$

Comme 0 n'est pas une valeur admissible, l'unique solution est 12.

Ainsi, $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

**Solution 20**

1. On développe $P(a,b)$ suivant les puissances de $a$ :

$$\begin{aligned} P(a,b) &= a^2 + 2a + 1 - (1-b)(4a + 4a^2b) = a^2(1 - 4(1-b)b) + a(2 - 4 + 4b) + 1 \\ &= a^2(4b^2 - 4b + 1) + a(4b - 2) + 1. \end{aligned}$$

   On calcule $\Delta = 4(2b-1)^2 - 4(4b^2 - 4b + 1) = 0$ comme l'énoncé le laissait supposer.

   La racine double est $A = -\dfrac{4b-2}{2(4b^2 - 4b + 1)} = -\dfrac{1}{2b-1}$.

   Donc $P(a,b) = (4b^2 - 4b + 1)(a - A)^2 = (2b-1)^2\left(a + \dfrac{1}{2b-1}\right)^2 = ((2b-1)a + 1)^2$.

2. On développe $P(a,b)$ suivant les puissances de $b$ :

$$\begin{aligned} P(a,b) &= b^2(4a^2) + b(4a - 4a^2) - 4a + (a+1)^2 = 4b^2a^2 + 4ba(1-a) - 4a + a^2 + 2a + 1 \\ &= 4b^2a^2 + 4ba(1-a) + (a-1)^2. \end{aligned}$$

   On calcule $\Delta = 16a^2(a-1)^2 - 4 \times 4a^2(a-1)^2 = 0$ comme l'énoncé le laissait supposer.

La racine double est $B = -\dfrac{4a(1-a)}{2(4a^2)} = \dfrac{a-1}{2a}$.

Donc $P(a,b) = 4a^2(b-B)^2 = 4a^2\left(b - \dfrac{a-1}{2a}\right)^2 = (2ab - a + 1)^2$.

Afin d'éviter les divisions par zéro, on doit traiter à part les cas $b = \dfrac{1}{2}$ dans la première solution ou $a = 0$ dans la seconde.

En repérant $4b^2 - 4b + 1 = (2b-1)^2$ plus tôt dans la première solution, on trouvait directement

$$P(a,b) = a^2(4b^2 - 4b + 1) + a(4b-2) + 1 = a^2(2b-1)^2 + 2a(2b-1) + 1 = (a(2b-1)+1)^2.$$

**Solution 21**

1. On a $f(-1) = -(-1) - 3 - 13 + 15 = 0$.
2. Si $a$, $b$ et $c$ existent, alors ils vérifient
   - $f(0) = 15 = c$.
   - $-1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} \times \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2} = 1 \times a = a$.
   - $f(1) = -1 - 3 + 13 + 15 = 24 = 2(a+b+c) = 2(-1+b+15)$ soit $b = -2$.

   Il reste à effectuer que ces valeurs de $a$, $b$ et $c$ conviennent :

$$\begin{array}{rcccccc} (x+1)(-x^2-2x+15) & = & -x^3 & -2x^2 & +15x & & \\ & & & -x^2 & -2x & +15 & \\ \hline & = & -x^3 & -3x^2 & +13x & 15 & \end{array}$$

3.

(a) On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)(-x^2-2x+15)$. On peut achever la factorisation en trouvant les racines du polynôme du second degré : On pose $\Delta := (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 15 = 64 = 8^2 > 0$. Les racines sont $x_1 = \dfrac{2-8}{-2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{2+8}{-2} = -5$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -x^2 - 2x + 15 = -(x-3)(x+5) \text{ et } f(x) = -(x+1)(x-3)(x+5).$$

(b)

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-(x+1)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $(x-3)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x+5)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

La solution se lit sur la dernière ligne du tableau : $\mathscr{S} = ]-\infty\ ,\ -5\ [ \cup ]-1\ ,\ 3\ [$.

### 5.8.3 Algorithmique

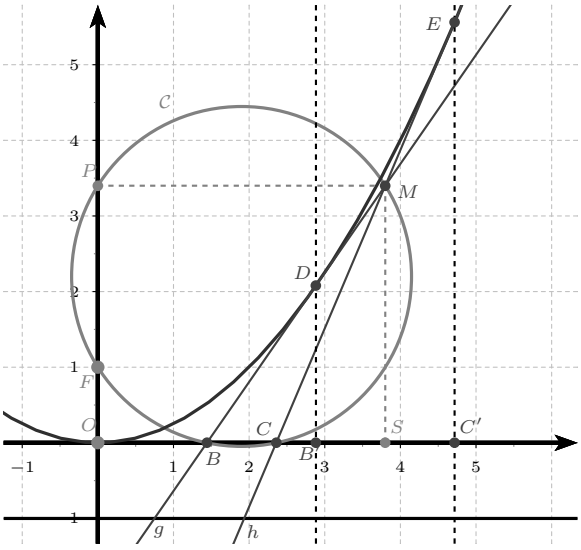
**Solution 22**

Bien que le discriminant soit nul, des erreurs d'arrondi – comme toujours – font que le programme trouve $-5.55e-17$ comme valeur approchée du discriminant. Donc pas de racine.

Il est possible d'avoir des variations entre les différents interpréteurs et les différents ordinateurs.

### 5.8.4 Géométrie

**Solution 23 (Cercle de Carlyle)**




1. Le discriminant de l'équation est $\Delta = (-s)^2 - 4p = s^2 - 4p > 0$. De ce fait cette équation admet deux racines distinctes.
2. Soit $\Omega\left(\frac{s}{2}, \frac{1+p}{2}\right)$ le centre de $\mathcal{C}$ et $R$ le rayon de $\mathcal{C}$. On a $R^2 = \Omega F^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Le carré de la distance de $\Omega$ à l'axe des abscisses est $d^2 := \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$. On a donc $R^2 - d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4} - p = \frac{\Delta}{4} > 0$. Donc $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points $B$ et $C$ d'abscisses $b$ et $c$ qui sont symétriques par rapport à leur médiatrice d'équation $x = s/2$. Donc $b + c = s$. De plus la puissance [a] de $O$ par rapport à $\mathcal{C}$ est $x_F \times x_P = 1 \times p = p$. Donc $bc = p$. Les nombres $b$ et $c$ sont déterminés par leur somme $s$ et leur produit $p$. Ce sont donc $x_1$ et $x_2$ les racines de notre équation.

*a.* C'est un raccourci. Voir le cas échéant le théorème 21 page 286 qui ne devrait pas tarder.

3. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{4}$. On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{x}{2}$. Une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse $2x_1$ est donc $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ soit $y - x_1^2 = x_1(x - 2x_1)$ soit encore $y + x_1^2 - xx_1 = 0$.

   Les coordonnées de $B$ vérifient cette équation. Les coordonnées de $M$ vérifient $p + x_1^2 - sx_1 = 0$ donc $M$ appartient aussi à cette tangente.

**Solution 24**

On écrit une équation de $\mathcal{P}_1$ : $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. On lit $f(0) = 3 = c$. Le minimum (car $a > 0$ est atteint en $x = -\frac{b}{2a} = -1$ donc $b = 2a$. Ce minimum est $f(-1) = a - b + 3 = 2$. Donc on a $a = 1$ et $b = 2$. Une équation de $\mathcal{P}_1$ est donc $y = x^2 + 2x + 3$.

On écrit une équation de $\mathcal{P}_2$ : $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. On lit $f(0) = 1 = c$. Le maximum (car $a < 0$ est atteint en $x = -\dfrac{b}{2a} = 2$ donc $b = -4a$. Ce minimum est $f(2) = 4a + 2b + 1 = 3$. Donc on a $-4a = 2$ soit $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = 2$. Une équation de $\mathcal{P}_2$ est donc $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

On écrit une équation de $\mathcal{P}_2$ : $y = f(x) = a(x + 3)(x + 1)$ grâce à la lecture des racines. On lit $f(-2) = -2 = a(-2 + 3)(-2 + 1) = -a$ d'où $a = 2$. Une équation de $\mathcal{P}_2$ est donc $y = 2(x + 3)(x + 1)$.

**Solution 25**

On vérifie facilement que $a$, $b$ et $c$ sont trois solutions de l'équation :
$\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1$. (deux quotients nuls et l'autre égal à 1).

On développe les numérateurs pour écrire l'équation sous la forme $Ax^2 + Bx + C = 1$. Puisqu'on a trois racines distinctes d'une telle équation, d'après le théorème 4, on a

- $A = 0 = \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} + \dfrac{1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$.
- $B = 0 = -\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)} - \dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)} - \dfrac{a+c}{(b-a)(b-c)}$.
- $C = 1 = \dfrac{ab}{(c-a)(c-b)} + \dfrac{bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{ac}{(b-a)(b-c)}$.

**Solution 26**

On commence par remarquer que l'équation s'écrit $\dfrac{A}{a + \frac{b}{x}} = x$ où $A$ est un nombre réel positif qui s'écrit sous forme de fraction (avec 2015 traits de fraction). Cette équation est équivalente à $a + \dfrac{Ax}{ax + b} = x$ soit $a(ax + b) + Ax = x(ax + b)$ c'est-à-dire une équation du second degré puisque $a \neq 0$.

Maintenant l'équation $(E)$ : $a + \dfrac{b}{x} = x$ admet pour solutions, les solutions de $ax + b = x^2$ soit $x^2 - ax - b = 0$. Cette dernière équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$.

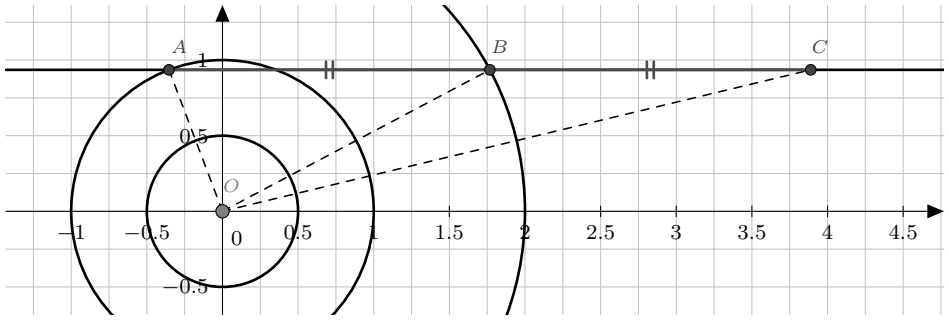
Puisque l'on a $a + \dfrac{b}{x_1} = x_1$, on peut – d'après le sanglier à la crème – remplacer dans cette égalité le $x_1$ du membre de gauche par $a + \dfrac{b}{x_1}$ soit

$$a + \frac{b}{a + \dfrac{b}{x_1}} = x_1$$

et ainsi de suite, jusqu'à obtenir 2017 traits de fractions. On peut faire le même travail pour $x_2$. Donc les deux solutions de $(E)$ sont deux solutions de l'équation de départ. Ce sont donc LES deux solutions de l'équation de départ.

**Solution 27**

On se place dans un référentiel lié à l'un des points – noté $O$, dans lequel l'autre mobile $M$ se déplace suivant un mouvement rectiligne uniforme. On choisit de plus les axes de ce référentiel pour que l'ordonnée soit constante égale à $m \geqslant 0$.




L'abscisse du point $M$ est $x = x_0 + vt$ en prenant l'origine des temps à 13h.

À 12h, le point $M$ est en $A$ et on a $t = -1$ et $x = x_0 - v$.

À 13h, le point $M$ est en $B$ et on a $t = 0$ et $x = x_0$.

À 12h, le point $M$ est en $C$ et on a $t = 1$ et $x = x_0 + v$.

On calcule $OM^2$ à ces trois instants :

$$\begin{aligned} t = -1 \ : \ (x_0 - v)^2 + m^2 &= 1^2 && \text{(i)} \\ t = 0 \ : \ (x_0)^2 + m^2 &= 2^2 && \text{(i))} \\ t = 1 \ : \ (x_0 + v)^2 + m^2 &= 4^2 && \text{(iii)} \end{aligned}$$

On soustrait l'égalité (i) de l'égalité (iii) : $(x_0 + v)^2 - (x_0 - v)^2 = 15$ soit $4x_0v = 15$.

On ré-écrit alors (i) : $x_0^2 - \dfrac{15}{2} + v^2 + m^2 = 1$. En soustrayant (ii), on trouve $v^2 = \dfrac{9}{2}$.

On déduit de $16v^2x_0^2 = 225$ l'égalité $x_0^2 = \dfrac{25}{8}$. Ensuite, en reprenant (ii), on trouve $m^2 = 4 - \dfrac{25}{8} = \dfrac{7}{8}$.

Donc la distance minimum est $m = \sqrt{\dfrac{7}{8}} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$. Cette distance minimum est atteinte lorsque l'abscisse $x = x_0 + vt$ est nulle, soit

$$\begin{aligned} t &= -\frac{x_0}{v} \\ &= -\frac{x_0 v}{v^2} \\ &= -\frac{15}{4} \times \frac{2}{9} \\ &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

c'est-à-dire à l'instant $-50$ min autrement dit à 12h10.

Dans l'espace, la solution est identique. Une fois un des deux mobiles fixé à l'origine du référentiel, tout se passe dans un plan. Dans un référentiel « fixe », on voit le plan en question se déplacer ...

**Solution 28 (Somme et Produit)**

1. Ces deux nombres sont racines de $x^2 - 20x + 51 = (x - 3)(x - 17)$.
2. On doit avoir un trinôme $x^2 - Sx + P$ qui admet deux racines. Donc le discriminant $\Delta := S^2 - 4P$ est positif ou nul soit $S^2 \geqslant 4P$.
3. Il suffit de prendre $P = 1 = S$.
4. Ces deux nombres sont racines de $x^2 - 10x + 10$. On pose $\Delta := 10^2 - 4 \times 10 = 60 > 0$. Les racines sont $\dfrac{10 - 2\sqrt{15}}{2} = 5 - \sqrt{15}$ et $5 + \sqrt{15}$.

5. Ces deux nombres sont racines de $x^2 - Px + P$. Le discriminant $\Delta := P^2 - 4P$ doit être positif. On pose $\Delta := \delta^2$. Les racines sont deux entiers $a := \dfrac{P-\delta}{2}$ et $b := \dfrac{P+\delta}{2}$. Comme $P = a + b$ est un entier, $\delta = P - 2b$ est aussi un entier.

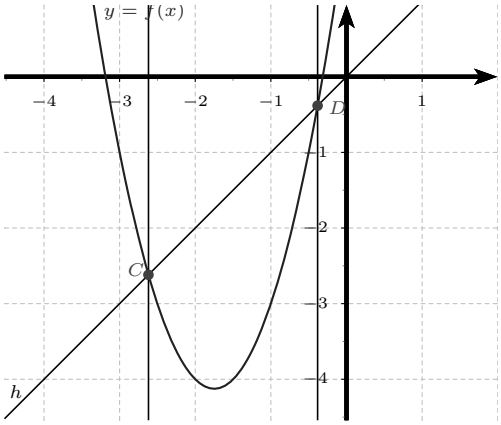
   Maintenant on écrit $\Delta + 4 = P^2 - 4P + 4 = (P-2)^2 = \delta^2 + 4$.

   Donc $(P-2)^2 - \delta^2 = (P - 2 - \delta)(P - 2 + \delta) = 4$. On peut écrire 4 comme produit de deux entiers de quatre façons différentes : $4 = 1 \times 4 = 2\times = -1 \times (-4) = -2 \times (-2)$.

   Les entiers $P - 2 - \delta$ et $P - 2 + \delta$ ont même parité. Donc $P - 2 - \delta = P - 2 + \delta = 2$ ou $P - 2 - \delta = P - 2 + \delta = -2$. On a $\delta = 0$ dans les deux cas. On trouve $P = 4$ dans le premier cas ( $a = 2 = b$ ) et $P = 0$ dans le premier cas ( $a = 0 = b$ ). Les entiers 0 et 2 sont les seuls possibles, et ils conviennent.

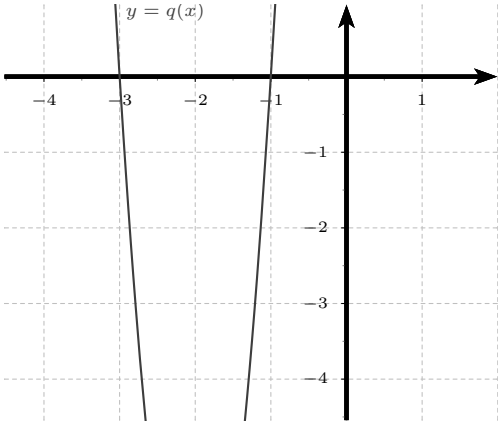
**Solution 29**

Faute de méthode générale, on va faire un pari : celui que l'équation $f(x) = x$ admette une solution.




Bingo ! On va déterminer ces deux solutions, en résolvant $2x^2 + 7x + 2 = x$ soit $x^2 + 3x + 1 = 0$. On calcule $\Delta := 3^2 - 4 \times \times 1 = 5 > 0$. On a donc deux solutions $x_1 := \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 := \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$. On a donc $f(f(x_1)) = f(x_1) = x_1$ et de même $f(f(x_2)) = f(x_2) = x_2$. Donc $x_1$ et $x_2$ sont solutions de $f(f(x)) = x$.

On sollicite à nouveau `Geogebra` pour tracer $q(x) := \dfrac{f(f(x)) - x}{x^2 + 3x + 1}$.



On récupère ce qui ressemble à une parabole qui pourrait s'annuler en $-3$ et $-1$. On vérifie par le calcul cet état de fait puisque

$$f(-1) = -3 \text{ et } f(-3) = -1.$$

On a donc $f(f(-1)) = f(-3) = -1$ et $f(f(-3)) = f(-1) = -3$. Donc $\mathscr{S} \subset \left\{-3, -1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

À moins d'avoir envie de développer $f(f(x)) - x$ et $4(x+3)(x+1)(x^2+3x+1)$ puis de démontrer l'égalité entre ces deux expressions, il faudra attendre le théorème 7 page 402 avant de se convaincre qu'il n'y a pas d'autre solution.

### 5.8.5 Exercices descendus du grenier

**Solution 30**

Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a $ab = 7,5^2 = 56,25$. De plus $(a+0,5)(b+0,5) - ab = 8,75$ donc $0,5(a+b) = 8,5$ soit $a + b = 17$. Donc $a$ et $b$ sont solutions positives de $x^2 - 17x + 56,25$.

On pose $\Delta := 17^2 - 4 \times 56,25 = 64 = 8^2 > 0$. Les racines sont $\frac{17-8}{2} = 4,5$ et $\frac{17+8}{2} = 12,5$.

Les dimensions du rectangle sont 12,5 m et 4,5 m.

**Solution 31**

Soient $n-1, n$ et $n+1$ les trois entiers consécutifs ($n \in \mathbb{N}^*$). Le produit de ces trois nombres égale d'une part $n(n^2-1)$ et d'autre part $\frac{63}{8}n^2$. On a donc $n(n^2-1) = \frac{63}{8}n^2$ soit puisque $n \neq 0$, $8n^2 - 63n - 8 = 0$.

On pose $\Delta := 63^2 - 4 \times 8 \times (-8) = 4225 = 65^2 > 0$. Les racines sont $\frac{63-65}{16} = -\frac{1}{8}$ qui n'est pas une valeur admissible et $\frac{63+65}{16} = 8 \in \mathbb{N}^*$.

Les entiers sont donc 7, 8 et 9.

## 5.9 Problème

**Problème 7**

On considère la fonction $f$ définie sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$ par

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

On va chercher des fonctions qui approchent la fonction $f$ suivant des sens qui seront précisés par la suite.

#### I. Moderato cantabile

1. Déterminer la dérivée $f'$ puis $f''$, la dérivée de $f'$, de la fonction $f$ sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$.
2. On se donne trois nombres réels $a, b$ et $c$. On considère la fonction $F_{a,b,c}(x) = a + \frac{b}{x+c}$.

   Déterminer $a, b$ et $c$ pour que l'on ait à la fois $f(1) = F_{a,b,c}(1)$, $f'(1) = F'_{a,b,c}(1)$ et $f''(1) = F''_{a,b,c}(1)$. On appellera $F$ la fonction $F_{a,b,c}$ ainsi obtenue avec ces valeurs de $a, b$ et $c$.
3. Donner des valeurs approchées de $|F(1,1) - f(1,1)|$ et de $|F(1,01) - f(1,01)|$ à $10^{-4}$ près.

#### II. Andantino

On considère les deux fonctions définies sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$ par

$$g(x) = \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{2}(x-1) \qquad \text{et} \qquad k(x) = g(x) + \frac{1}{8}(x-1)^2.$$

1. Étudier les variations de $g$ sur $[\,0\,,\,+\infty\,[$.
2. En déduire que pour tout réel $h > -1$,
$$\sqrt{1+h} \leqslant 1 + \frac{h}{2}.$$
3. En déduire que pour tout réel $h > -1$,
$$1 + \frac{\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1+h}{1+\frac{h}{2}} \leqslant \sqrt{1+h} \leqslant 1 + \frac{h}{2}.$$
4. Donner des valeurs approchées de $|g(1,1)|$ et de $|g(1,01)|$ à $10^{-4}$ près.

### III. Intermezzo

1. Démontrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \dfrac{1}{2}$.
2. Soit $b$ un nombre strictement positif. Déterminer les deux limites à droite :
$$\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$
3. Comment peut-on interpréter les résultats précédents ?

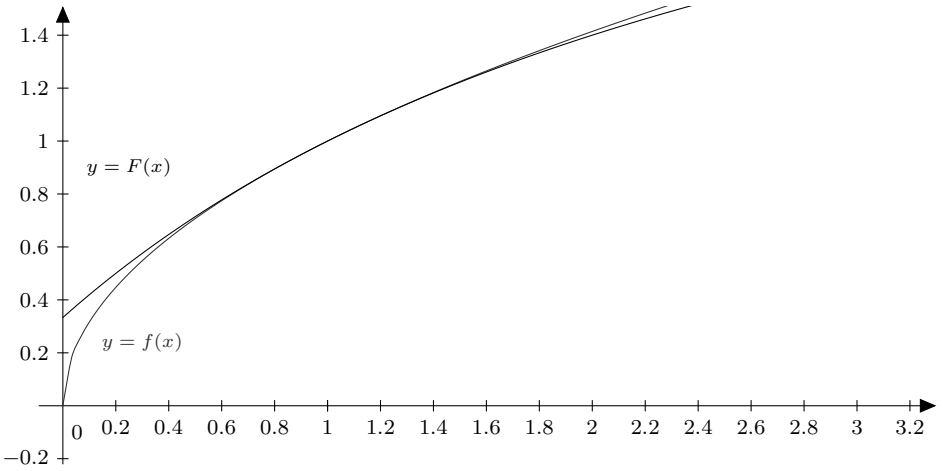
## 5.10 Corrigé

**Correction 7**

### I. Moderato cantabile

1. On a pour $x$ appartenant à $[\,0\,,\,+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{u(x)}$, et $f''(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2} = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$.
2. On a $F'_{a,b,c}(x) = -\dfrac{b}{(x+c)^2}$ et $F''_{a,b,c}(x) = \dfrac{2b}{(x+c)^3}$. Donc on est amené à résoudre le système :
$$\left\{\begin{array}{rcccl} F_{a,b,c}(1) & = & a+\dfrac{b}{1+c} & = & 1 \quad = \quad f(1) \\ F'_{a,b,c}(1) & = & -\dfrac{b}{(1+c)^2} & = & \dfrac{1}{2} \quad = \quad f'(1) \\ F''_{a,b,c}(1) & = & \dfrac{2b}{(1+c)^3} & = & -\dfrac{1}{4} \quad = \quad f''(1) \end{array}\right.$$
Soit en posant $d = c+1$,
$$\left\{\begin{array}{rcl} a+\dfrac{b}{d} & = & 1 \\ -\dfrac{b}{d^2} & = & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2b}{d^3} & = & -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$
Des deux dernières équations on déduit que $d = 4$ (donc $c = 3$). La deuxième équation donne alors $b = -8$ et la première donne $a = 3$.

On obtient donc $F(x) = 3 - \dfrac{8}{x+3}$.




3. On trouve $|F(1,1) - f(1,1)| = 2,84 \times 10^{-5}$ et $|F(1,01) - f(1,01)| = 3,09 \times 10^{-8}$.

## II. Andantino

1. On a pour $x \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. On en déduit le tableau de variations de $g$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

2. D'après la question précédente, on obtient $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x$ positif, par simple lecture du tableau de variations de $g$. On en déduit que $g(h+1) \leqslant 0$ pour tout réel $h > -1$, c'est-à-dire

$$\sqrt{1+h} \leqslant 1 + \frac{h}{2}.$$

3. En passant aux inverses dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1+h}} \geqslant \frac{1}{1+\frac{h}{2}}.$$

En multipliant par $1+h$ – qui est positif – on obtient bien

$$\frac{1+h}{1+\frac{h}{2}} \leqslant \sqrt{1+h} \leqslant 1 + \frac{h}{2}.$$

Par ailleurs, l'égalité $1+\dfrac{\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}} = \dfrac{1+h}{1+\frac{h}{2}}$ est simplement obtenue en réduisant au même dénominateur.

4. On trouve $|g(1,1)| = 1,19 \times 10^{-3}$ et $|g(1,01)| = 1,24 \times 10^{-5}$

### III. Intermezzo

1. Première méthode : D'après l'encadrement de la question **II**.3 on a

$$\frac{\frac{h}{2}}{1+\frac{h}{2}} \leqslant \sqrt{1+h} - 1 \leqslant \frac{h}{2},$$

donc pour $h > 0$,

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{h}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \leqslant \frac{1}{2},$$

et par suite, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \dfrac{1}{2}$ d'après le théorème d'encadrement.
De même pour $h < 0$,

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{h}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \geqslant \frac{1}{2},$$

et par suite, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \dfrac{1}{2}$, toujours d'après le théorème d'encadrement.

Comme les deux limites – à droite et à gauche – sont égales, on peut bien dire que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \dfrac{1}{2}$.

Deuxième méthode : $\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction $f$ entre 1 et $1+h$. Comme $f$ est dérivable en 1, ce taux d'accroissement admet une limite qui est $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$.

2. On a $\sqrt{b^2-4ac} = b\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}$ et par suite

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = b\,\frac{\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}-1}{2a} = -\frac{2c}{b}\,\frac{\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}-1}{-\frac{4ac}{b^2}}.$$

D'après la question précédente, en posant $h = -\frac{4ac}{b^2}$, on a

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \frac{\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}-1}{-\frac{4ac}{b^2}} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{c}{b}.$$

De même, en écrivant $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\dfrac{b}{a} - \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, on a $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ a>0}} -\dfrac{b}{a} = -\infty$ et par suite

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\infty.$$

3. Les nombres $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ sont les racines – lorsqu'elles existent – de l'équation $ax^2+bx+c=0$. En faisant $a=0$, on obtient une équation du premier degré qui n'admet plus qu'une racine : $-\frac{c}{b}$. Lorsqu'on fait tendre $a$ vers zéro, l'une des racines tend vers $-\infty$ et disparaît, l'autre tend vers cette racine : $-\frac{c}{b}$.

# Chapitre 6

# Trigonométrie

## Sommaire


**6.1** **Enroulement de la droite des réels** . . . . . **212**
**6.2** **Cosinus et sinus d'un réel $t$** . . . . . **216**
**6.3** **Lien avec la trigonométrie du triangle** . . . . . **219**
**6.4** **Formules de trigonométrie** . . . . . **221**
**6.5** **Fonctions trigonométriques** . . . . . **224**
**6.6** **Équations trigonométriques** . . . . . **230**
**6.7** **Fonction arctangente** . . . . . **234**
**6.8** **Méthodes** . . . . . **235**
**6.9** **Exercices** . . . . . **240**
**6.10** **Solutions** . . . . . **248**
**6.11** **Problèmes** . . . . . **261**
**6.12** **Corrigés** . . . . . **263**

Dans ce chapitre – très riche – on va définir une nouvelle unité pour les angles, retrouver la trigonométrie du collège et définir les fonctions trigonométriques.

La nouvelle unité – le radian – permet d'obtenir une écriture plus agréable des propriétés trigonométriques. Le théorème 15 page 226 n'existe plus lorsqu'on travaille en degrés, sans compter le théorème 16.

La présentation qui suit manque de rigueur mathématique. Les présentations rigoureuses des fonctions trigonométriques ne sont pas basées sur la géométrie mais sur l'analyse. Une telle démarche n'est pas l'objet de ce cours. Le lecteur curieux – qu'il soit à nouveau félicité pour cette attitude – pourra se référer au chapitre B page 467 du cours de terminale.

Le chapitre qui suit suppose que l'idée que l'on a du cercle est la bonne, et en particulier qu'il est en un seul morceau.

Le théorème crucial est le théorème 5 page 218. Derrière ce théorème se cache un théorème profond et puissant appelé théorème de relèvement.

Tout ce qui le précède a pour but de vous convaincre de la véracité de ce théorème.

Par la suite, il faudra se convaincre que le théorème 14 page 225 est vrai, ce qui est intuitivement évident. Mais évidence intuitive n'est pas démonstration !

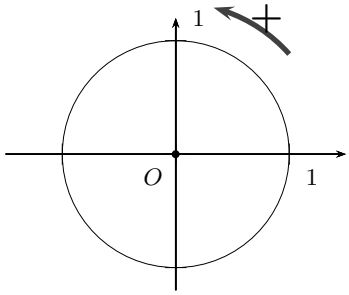
À partir de ces bases un peu chancelantes, on peut développer une théorie rigoureuse des fonctions sinus et cosinus. Les propriétés auxquelles on aboutit permettent de donner une nouvelle définition de ces fonctions. Restera à retrouver toutes les propriétés auxquelles on s'attend. Mais c'est une autre histoire.

## 6.1 Enroulement de la droite des réels

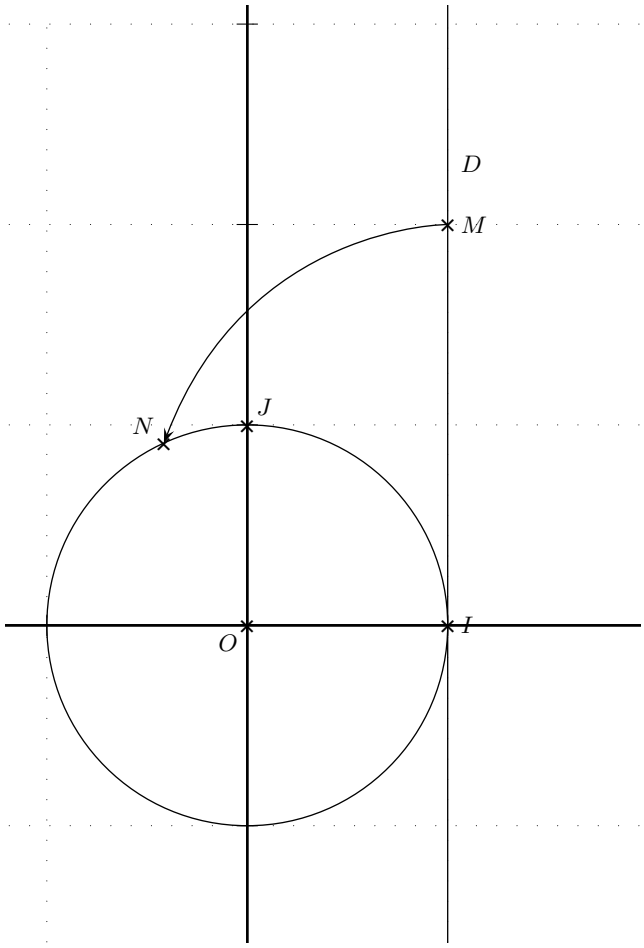
### 6.1.1 La moulinette trigonométrique

**Définition 1** (Orientation d'un cercle, du plan, cercle trigonométrique)**.**

On se place dans le plan.
- Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens trigonométrique** ou **sens direct** (ou **positif**). L'autre sens est appelé **sens indirect** (**négatif** ou **rétrograde**).
- Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- Lorsque le plan est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ )$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle orienté dans le sens direct, de centre $O$ et de rayon 1.




Soit un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon 1 et la droite $D$ d'équation $x = 1$ qui coupe l'axe $(Ox)$ en $I$, représentés sur la figure.
À tout nombre $a$, on associe le point $M$ de la droite $D$, d'abscisse 1 et d'ordonnée $a$.
« L'enroulement » de la droite $D$ autour du cercle $\mathcal{C}$ met en coïncidence le point $M$ avec un point $N$ de $\mathcal{C}$.
Plus précisément, si $t$ est positif, le point $N$ est tel que $\overset{\frown}{IN} = IM = t$, l'arc étant mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et, si $a$ est négatif, le point $N$ est tel que $\overset{\frown}{IN} = IM = |t|$, l'arc étant mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le point $N$ est le point du cercle $\mathcal{C}$ associé au nombre $t$.




1. Placer les points $M_t$ de la droite $D$ dont les ordonnées $t$ respectives sont : $0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; \pi; -\pi$.
2. Placer les points $N_t$ du cercle associés à ces nombres $t$.
3. Indiquer un nombre associé à chacun des points $I$, $J$, $B$ ( $-1$ , $0$) et $B'$ ( $0$ , $-1$ ).
4. Existe-t-il plusieurs nombres associés à un même point ? Donner quatre nombres associés au point $J$.

On sait que la longueur du cercle trigonométrique égale $2 \times \pi \times$ rayon $= 2\pi$ puisque le rayon vaut 1.
Donc, le point d'abscisse $2\pi$ de la droite des réels vient se « coller » sur le point $I$, et plus généralement,

tout point du cercle trigonométrique – repéré par le réel $t$ de la droite des réels – voit se coller sur lui $t + 2\pi$, $t - 2\pi$, $t + 2 \times 2\pi$, $t + 3 \times 2\pi$, ...

À chaque élément de la droite des réels – donc à chaque nombre réel $t$ – on va ainsi associer un unique point sur le cercle.

**Définition 2.**

Soit $t$ un nombre réel. On appelle **image** de $t$ le point du cercle trigonométrique sur lequel le point d'abscisse $t$ de la droite des réels vient se « coller ».

Deux réels $a$ et $b$ sont associés au même point du cercle, si et seulement s'il existe un entier $k$ tel que : $a - b = 2k\pi$. Le réel $a$ est alors égal au réel $b$ modulo $2\pi$ et on note : $a \equiv b[2\pi]$.

### 6.1.2 Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian

Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

**Définition 3.**

On appelle **vecteur normé** ou **unitaire** tout vecteur du plan de norme 1.

En particulier, un vecteur normé n'est pas le vecteur nul.

Soit $M$ l'image du point $I$ par une **rotation** de centre $O$. D'après le théorème 7 page 143 du cours de seconde, les deux vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont tous les deux normés. Autrement dit le point $M$ appartient au cercle trigonométrique.

**Théorème 1**
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur **non nul**. Le vecteur

$$\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} := \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$$

est un vecteur normé.

**Démonstration 1**
On pose $k = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}$. on sait que $k \neq 0$. D'après le théorème 8 page 224 du cours de seconde, on a

$$\left\| \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u} \right\| = \|k\overrightarrow{u}\| = |k|\,\|\overrightarrow{u}\| = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|} \times \|\overrightarrow{u}\| = 1,$$

ce qu'il fallait établir. □

**Définition 4.**

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul. On appelle mesure de l'angle entre $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{v}$ tout nombre réel noté $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{v})$ dont l'image sur le cercle trigonométrique est le point $M$ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}$.

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle **mesure** de l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) := (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}) .$$

L'unité s'appelle le **radian** dont l'abréviation est rad.

**Remarques 1.**

1. Les deux définitions de la mesure des angles sont compatibles, dans le sens où – lorsqu'on prend $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\imath}$ dans la deuxième définition – on retrouve bien les mesures de la première définition.
2. Les mesures des angles de vecteurs sont définies modulo $2\pi$.
3. Le radian est donc une unité de mesure angulaire, proportionnelle au degré et définie par :

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ.$$

4. Avec les notations de l'exemple précédent, la mesure qui a été choisie de l'angle $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}\right)$ en radian est égale à la longueur $\overset{\frown}{IN}$, c'est-à-dire à $t$.

Il n'y a pas unicité de la mesure d'un angle. On a vu plus haut qu'un point du cercle trigonométrique est l'image de plusieurs nombres réels. Cela se traduit par le théorème suivant :

**Théorème 2**
Pour que deux réels soient deux mesures d'un même angle, il faut et il suffit qu'ils soient égaux modulo $2\pi$.

Deux théorèmes qui permettent les calculs sur les angles :

**Théorème 3**
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$,

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \quad \text{et}$$

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) .$$

(Relation de Chasles)

Bien entendu, les égalités ci-dessus s'entendent à $2\pi$ près.

**Exemple 1**

- L'angle nul a des mesures qui sont des multiples entiers de $2\pi$ : 0, $2\pi$, $4\pi$, ..., mais aussi $-2\pi$, $-4\pi$, ...
- L'angle plat est repéré sur le cercle trigonométrique par le vecteur $-\overrightarrow{\imath}$. Ses mesures sont : $\pi$, $3\pi$, $5\pi$, ..., mais aussi $-\pi$, $-3\pi$, ...

Il y a deux angles droits chez les angles orientés ! un angle droit direct et un angle droit indirect.

- L'angle droit direct est repéré sur le cercle trigonométrique par le point $J$. Ses mesures sont : $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$, ..., mais aussi $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$, ...
- L'angle droit direct est repéré sur le cercle trigonométrique par le vecteur $-\overrightarrow{\jmath}$. Ses mesures sont : $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, ..., mais aussi $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{9\pi}{2}$, ...

**Remarque 2.**

À partir de ce chapitre et sauf mention contraire, tous les angles sont exprimés en radians.
À cet effet, il ne faut pas oublier de régler sa calculette en mode radian. Pour TI-83, touche mode (dernière ligne). `Python` et les tableurs parlent spontanément le radian !

$$1 \text{ rad } = 57,3^\circ \text{ à } 0,1^\circ \text{ près.}$$

**Définition 5** (Mesure principale)**.**

La **mesure principale** d'un angle orienté est la mesure de l'angle orienté appartenant à $]\,-\pi\,,\,\pi\,]$.

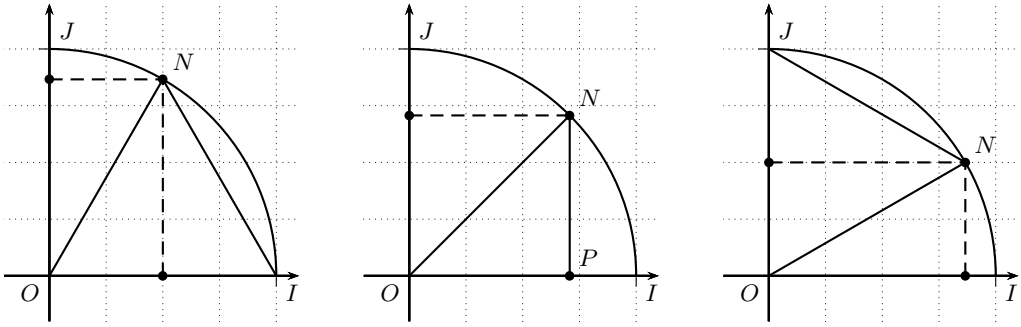
## 6.2 Cosinus et sinus d'un réel $t$

**Exemple 2**

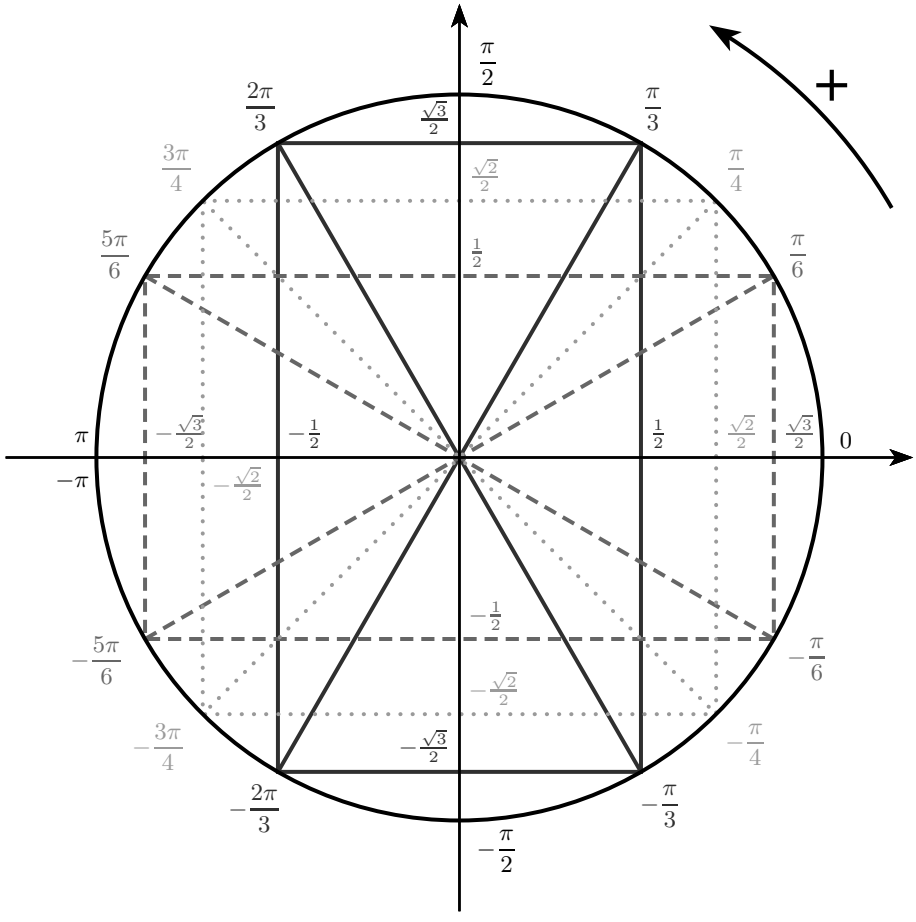
En s'aidant des schémas de la figure 2 page 217, compléter le tableau suivant :

| Mesure de l'arc $\overset{\frown}{IN}$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Abscisse de $N$ | | | | | | | |
| Ordonnée de $N$ | | | | | | | |

On pourra observer que les triangles $OIN$, $ONP$ et $ONJ$ ne sont pas quelconques lorsque $N$ est l'image respective des nombres $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.




Figures de l'exemple 2



**Définition 6.**

Soit $t$ un réel et $N\,(\,x_t\,,\;y_t\,)$ le point qui lui est associé par enroulement sur le cercle trigonométrique. Alors on a :

$$\cos t = x_t \quad \sin t = y_t \quad \text{et, quand } \cos t \neq 0, \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

En utilisant les symétries du cercle trigonométrique, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 4**
Pour tout réel $t$ on a :

- $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$
- $\cos(t + 2\pi) = \cos t$
- $\cos(-t) = \cos t$
- $\cos(\pi - t) = \cos(\pi + t) = -\cos t$
- $\sin(t + 2\pi) = \sin t$
- $\sin(-t) = -\sin t$
- $\sin(\pi - t) = \sin t$
- $\sin(\pi + t) = -\sin t$
- $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$
- $\tan(\pi + t) = \tan t$
- $\tan(-t) = -\tan t$

**Remarque 3.**

Il est d'usage de noter $\cos^2 t$ plutôt que $(\cos t)^2$.

### 6.2.1 Le cosinus et le sinus

#### Caractérisation sur le cercle trigonométrique

Soient un réel $t$ et $M$ le point du cercle trigonométrique associé à $t$. Les coordonnées de $M$ dans le repère sont :

$$M\;(\,\cos(t)\,,\,\sin(t)\,)\,.$$

Le théorème difficile et important est le suivant :

**Théorème 5**
Tout point du cercle trigonométrique est l'image d'au moins un réel.

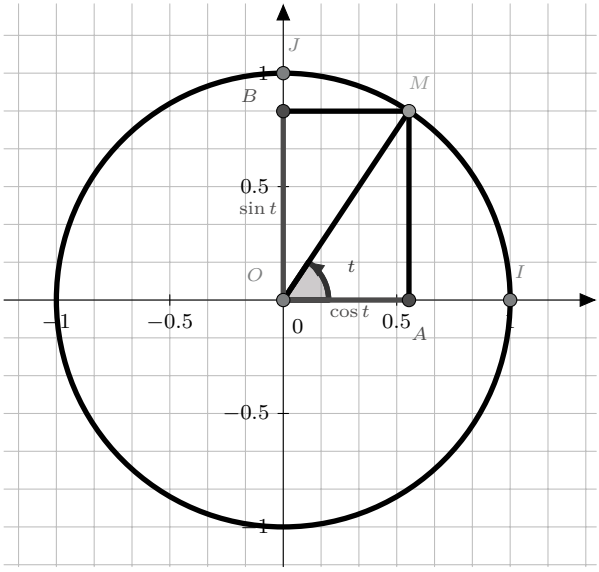
Autrement dit, quels que soient les nombres réels $x$ et $y$ vérifiant $x^2 + y^2 = 1$, il existe au moins un réel $t$ vérifiant

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{cases}$$

À défaut de démonstration, on pourra se **convaincre** que lors de l'enroulement de la droite réelle autour du cercle trigonométrique aucun point du cercle n'est oublié. Autrement dit, il n'y a pas de trous dans la droite, ni sur le cercle d'ailleurs.

On a vu que dès que $t$ est solution du système, $t + 2k\pi$ est aussi solution du système pour tout entier relatif $k$.

## 6.3 Lien avec la trigonométrie du triangle




Soit $\theta$ un angle aigu admettant une mesure $t$ comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ rad. Soit $M$ l'image de $t$ sur le cercle trigonométrique. Le triangle $OAM$ est rectangle en $A$, son hypoténuse est $OM$.

On a $0 < \cos t = OA$,
et $0 < \sin t = OB = AM$.

Par un agrandissement/réduction ou – ce qui revient au même – par le théorème de Thalès, on trouve (ou retrouve) le théorème suivant :

**Théorème 6**
Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu égale le quotient du côté adjacent par l'hypoténuse. Le sinus d'un angle aigu égale le quotient du côté opposé par l'hypoténuse.

Ici les angles n'ont plus besoin d'être des angles orientés.

### 6.3.1 Relations métriques dans le triangle

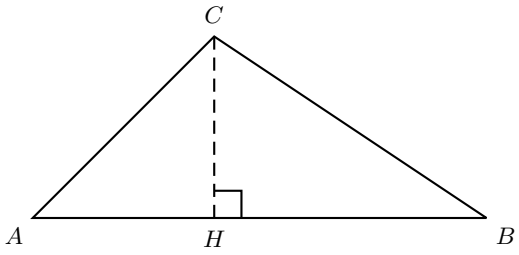
**Formule de l'aire**

**Théorème 7 (Formule de l'aire)**
Avec les conventions de notations vues plus haut :

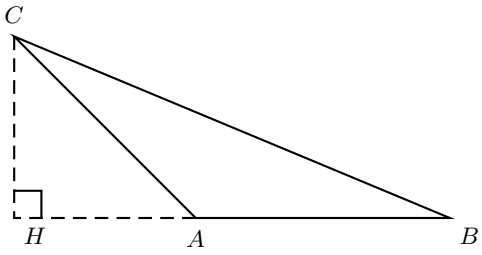
$$S = \frac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}\, ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \, \sin \widehat{C}$$

**Démonstration 7**
Deux situations sont à considérer :

Situation 1
(triangle *acutangle*)




Situation 2
(triangle *obtusangle*)




L'aire du triangle est donnée par : $S = \frac{1}{2} AB \times CH$.
Or $CH = AC \sin \widehat{A}$ (dans le triangle $ACH$ rectangle en $H$ situation 1) ou
$CH = AC \sin\left(\pi - \widehat{A}\right) = AC \sin \widehat{A}$ (dans le triangle $ACH$ rectangle en $H$ situation 2).
Dans les deux cas, $S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$.
En permutant les noms des sommets, on obtient les deux autres égalités. □

## Loi des sinus

**Théorème 8 (Loi des sinus)**
Avec les conventions de notation vues plus haut :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

**Démonstration 8**
D'après ce qui précède, on a : $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$.

En multipliant par $\frac{2}{abc}$, on obtient $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$.

Le triangle étant non aplati, les angles sont non nuls et les sinus de ces angles aussi, on peut donc inverser ces quotients : $\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ □

**Exemple 3**
Soit $ABC$ un triangle tel que $c = AB = 5$ cm, $\widehat{A} = 40°$ et $\widehat{B} = 30°$.

Alors $\widehat{C} = 180 - 40 - 30 = 110\,^\circ$ et, comme $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$,
on obtient $\frac{a}{\sin 40} = \frac{b}{\sin 30} = \frac{5}{\sin 110}$ puis $a = 3,42$ cm et $b = 2,66$ cm à $0,01$ cm près.

# 6.4 Formules de trigonométrie

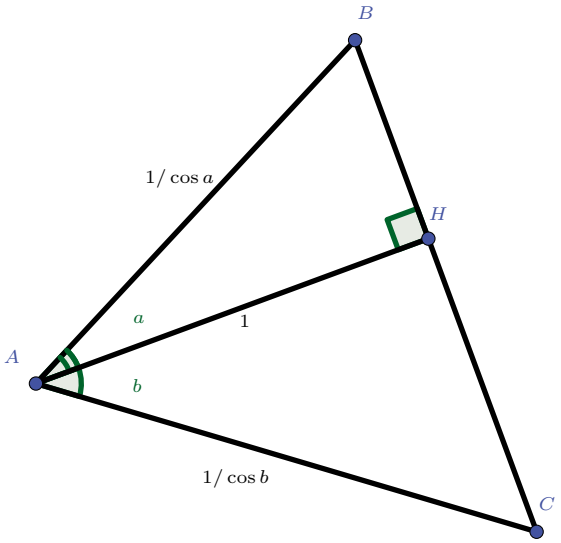
## 6.4.1 Formules d'addition

**Théorème 9**
Pour tous réels $a$ et $b$ on a :

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

En attendant une démonstration (voir 20 page 282) – plus rapide – avec le produit scalaire,

**Démonstration 9**



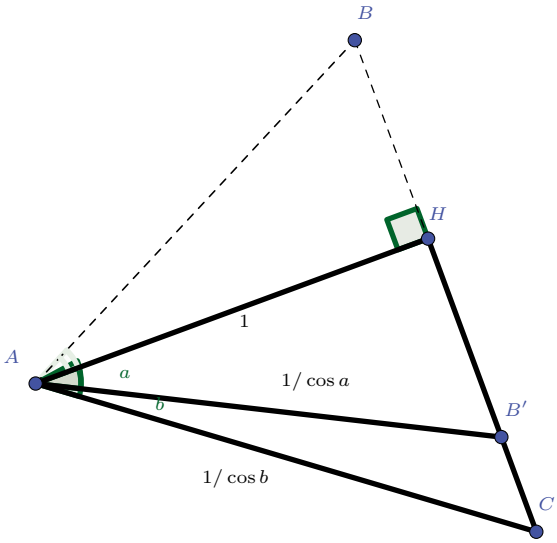

On se place dans le cas où $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$. Les nombres $a$ et $b$ sont alors des mesures d'angles aigus de triangles rectangles. En particulier, le cosinus et le sinus de ces deux nombres sont strictement positifs.

De plus, l'angle $\widehat{ABC}$ est complémentaire de l'angle $\widehat{BAH}$. Le sinus de l'un est donc le cosinus de l'autre.

On trouve $BH = \dfrac{\sin a}{\cos a}$ et $CH = \dfrac{\sin b}{\cos b}$ par trigonométrie dans les triangles $ABH$ et $ACH$ rectangles en $H$.

D'après la loi des sinus dans le triangle $ABC$,

$$\begin{array}{lrcl} & \dfrac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} & = & \dfrac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \\ \text{soit} & \dfrac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{\sin(a+b)} & = & \dfrac{\frac{1}{\cos b}}{\cos a} \\ \text{soit} & \sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \cos a \sin b, \end{array}$$




On se place dans le cas où $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$. Les nombres $a$ et $b$ sont alors des mesures d'angles aigus de triangles rectangles. En particulier, le cosinus et le sinus de ces deux nombres sont strictement positifs.

De plus, l'angle $\widehat{ABC}$ est complémentaire de l'angle $\widehat{BAH}$. Le sinus de l'un est donc le cosinus de l'autre.

On trouve $BH = \dfrac{\sin a}{\cos a}$ et $CH = \dfrac{\sin b}{\cos b}$ par trigonométrie dans les triangles $ABH$ et $ACH$ rectangles en $H$.

D'après la loi des sinus dans le triangle $ABC$,

$$\begin{array}{lrcl} & \dfrac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} & = & \dfrac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \\ \text{soit} & \dfrac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{\sin(a+b)} & = & \dfrac{\frac{1}{\cos b}}{\cos a} \\ \text{soit} & \sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \cos a \sin b, \end{array}$$

en multipliant les deux membres par $\cos a \cos b$.

Pour le sinus de la différence, on suppose de plus que $b \geqslant a$ pour réaliser la construction suivante. On a cette fois, d'après la loi des sinus dans le triangle $AB'C$,

$$\begin{array}{lrcl} & \dfrac{B'C}{\sin(\widehat{B'AC})} & = & \dfrac{AC}{\sin(\widehat{AB'C})} \\ \text{soit} & \dfrac{\frac{\sin b}{\cos b} - \frac{\sin a}{\cos a}}{\sin(b-a)} & = & \dfrac{\frac{1}{\cos b}}{\cos a} \\ \text{soit} & \sin(b-a) & = & \sin b \cos a - \sin a \cos b. \end{array}$$

Lorsque $b \leqslant a$ c'est le point $C$ dont on prend le symétrique par rapport à $(AH)$. On retrouve la même égalité.

On remarque que les deux égalités démontrées plus haut restent valables lorsque $a$ ou $b$ est nul ou égal à $\frac{\pi}{2}$, grâce à $\cos(0) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\sin(0) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Maintenant, pour $a$ et $b$ dans $[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$ on pose $a' = \frac{\pi}{2} - a$. On a démontré plus haut que $\sin(a' + b) = \sin a' \cos b + \cos a' \sin b$. Or $\sin a' = \sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$ et $\cos a' = \cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$.

Donc $\sin(\frac{\pi}{2} - a + b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ soit encore $\cos(b - a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

De même $\sin(a' - b) = \sin a' \cos b - \cos a' \sin b$ devient $\sin(\frac{\pi}{2} - a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ soit $\cos(b - a) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

On a bien démontré les quatre égalités pour $a$ et $b$ dans $[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$.

Pour étendre ces égalités pour toutes les valeurs de $a$ et $b$ dans $[\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$, on va se servir des symétries du théorème 4 page 218. Par exemple, pour $a \in [\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\ ]$, on pose $a' = -a \in [\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$. On a alors $\cos a' = \cos a$

et $\sin a' = -\sin a$. Ainsi pour $b \in [\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$, on a par exemple $\sin(a'+b) = \sin a' \cos b + \cos a' \sin b$ qui devient $\sin(b-a) = -\sin a \cos b + \cos a \sin b$ etc. Même manipulation lorsque $b \in [\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\ ]$.

Pour $a \in [\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ]$, on pose $a' = a - \pi \in [\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$. On a alors $\cos a' = -\cos a$ et $\sin a' = -\sin a$ etc. Même manipulation lorsque $b \in [\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\ ]$.

Enfin pour étendre ces égalités pour toutes les valeurs de $a$ et $b$, on utilise $\cos(t+2\pi) = \cos t$ et $\sin(t+2\pi) = \sin t$ le nombre de fois nécessaires pour obtenir des valeurs de $a$ et $b$ dans $[\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ]$. □

### 6.4.2 Formules de duplication

En posant $b = a$ dans les formules d'addition, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 10**
Pour tout réel $a$ on a :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

### 6.4.3 Formules de linéarisation

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

**Théorème 11**
Pour tout réel $a$ on a :

- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$.
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

En additionnant les deux premières formules d'addition, puis les deux dernières, on obtient :

**Théorème 12 (Transformation de produits en sommes)**
Pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right) \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)
\end{aligned}$$

**Théorème 13 (Transformation de sommes en produits)**
Pour tous réels $p$ et $q$, on a :

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \tag{6.1}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \tag{6.2}$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \tag{6.3}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \tag{6.4}$$

**Démonstration 13**
On utilise le théorème 12 en posant $p = a + b$ et $q = a - b$ soit $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $a = \dfrac{p-q}{2}$. □

## 6.5 Fonctions trigonométriques

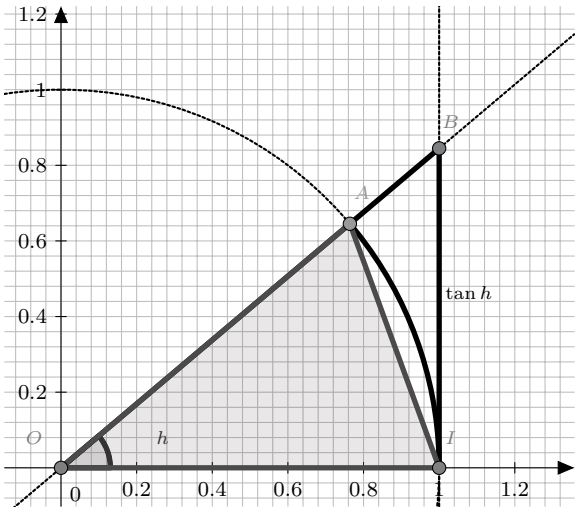
On définit trois nouvelles fonctions de référence : cosinus, sinus et tangente :

$$\begin{array}{rccc} \cos\ :\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \sin\ :\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \tan\ :\ \mathbb{R}\setminus\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$$

où $\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} := \left\{ x \in \mathbb{R} \ \middle|\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

### 6.5.1 Un encadrement géométrique

Soit $h$ un réel appartenant à l'intervalle $\left]\ 0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\ \right[$.




L'aire du triangle $OIA$ égale $\frac{1}{2}\sin h$.

L'aire du triangle $OIB$ égale $\frac{1}{2}\tan h$.

L'aire du secteur angulaire délimité par $\overset{\frown}{IA}$ égale $\frac{1}{2}h$.

On obtient alors

$$\frac{1}{2}\sin h \leqslant \frac{1}{2}h \leqslant \frac{1}{2}\tan h.$$

L'inégalité de droite – après division par $\frac{h}{2} > 0$ – donne

$$\frac{\sin h}{h} \leqslant 1.$$

L'inégalité de gauche – après multiplication par $2\frac{\cos h}{h} > 0$ – donne

$$\cos h \leqslant \frac{\sin h}{h}.$$

En mettant les inégalités bout à bout, on obtient l'encadrement

$$\boxed{\cos h \leqslant \frac{\sin h}{h} \leqslant 1}$$

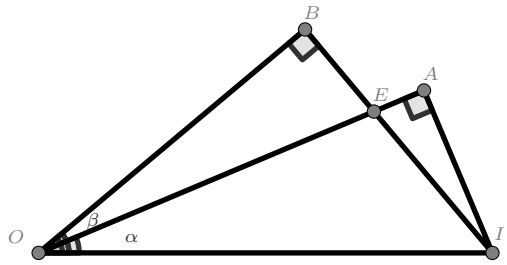
qui reste valide en changeant $h$ en son opposé, c'est-à-dire en fin de compte pour tout $h \neq 0$ de l'intervalle $]\ -\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ [$.

### 6.5.2 Continuité

Une **observation** du premier quadrant du cercle trigonométrique permet de constater que :

**Théorème 14**
la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$.

**Démonstration 14**




On considère un segment $[OI]$ et on construit sur ce segment deux triangles rectangles dont il est l'hypoténuse, $OIA$ avec $\widehat{IOA} = \alpha$ et $OIB$ avec $\widehat{IOB} = \beta$. On a alors $\sin\alpha = \dfrac{IA}{OI}$ et $\sin\beta = \dfrac{IB}{OI}$. Il s'agit donc de montrer que si $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $IA < IB$. Le fait que $\alpha$ est plus petit que $\beta$ signifie que la demi-droite $[OA)$ est dans le secteur $IOB$. Elle coupe donc le segment $[IB]$ en $E$. Le triangle $IAE$ est rectangle en $A$ et on a donc $IA < EI$. Comme $E$ est intérieur au segment $[IB]$, on a $IE < IB$, d'où le résultat. □ □

Comme la fonction sinus est surjective de $[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$ sur $[\ 0\ ,\ 1\ ]$ d'après le théorème 5 page 218, la fonction sinus est de ce fait continue sur $[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$.

De même, la fonction cosinus est continue sur $[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$ puisque pour tout réel $x \in [\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$,

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

| $x$ | $0$ → | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ ↗ | $1$ |

Grâce aux différentes formules de symétrie du théorème 4 page 218, on en déduit que les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$ tout entier.

### 6.5.3 Dérivabilité

Les résultats précédents permettent d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 15**
On a : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$

Autrement dit, pour avoir une valeur approchée de $\sin h$ lorsque la valeur absolue de $h$ est petite, il suffit de prendre $h$. Ceci n'est vrai que si on travaille en « mode radian ». Pour s'en convaincre, un tableau de valeurs à $10^{-5}$ près.

| $h$ | $0,01$ | $0,02$ | $0,03$ | $0,04$ | $0,05$ | $0,06$ | $0,07$ | $0,08$ | $0,09$ | $0,1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin h$ | $0,01$ | $0,02$ | $0,03$ | $0,04$ | $0,05$ | $0,06$ | $0,06999$ | $0,07999$ | $0,8999$ | $0,99998$ |

**Démonstration 15**
Pour $0 < |h| < \dfrac{\pi}{2}$ on a $\cos h \leqslant \dfrac{\sin h}{h} \leqslant 1$. Or la fonction cosinus est continue en zéro. Donc $\lim\limits_{h\to 0} \cos h = \cos(0) = 1$. De plus, $\lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$.

D'après le théorème d'encadrement, on a bien $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$. □

**Remarque 4.**

Le théorème précédent peut s'énoncer : « La fonction sinus est dérivable en zéro et son nombre dérivé égale 1 ».

En effet, si on pose $f(x) = \sin x$ pour tout réel $x$, on a bien pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sin h}{h},$$

et le résultat annoncé résulte de la définition du nombre dérivé d'une fonction en un point.

Nous allons généraliser ce résultat pour déterminer le nombre dérivé des fonctions sinus et cosinus en tout point, c'est-à-dire déterminer leurs fonctions dérivées.

**Théorème 16**
Si on note $f$ la fonction sinus et $g$ la fonction cosinus, ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus $f' = g$ et $g' = -f$.

**Démonstration 16**
Soit $x$ un nombre réel. Pour tout $h \neq 0$, d'après (6.1),
$\dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2\,\dfrac{\sin(h/2)}{h} \times \cos(x + h/2) = \dfrac{\sin(h/2)}{h/2} \times \cos(x + h/2)$.

Or on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ et – parce que la fonction cosinus est continue au point $x$, $\lim\limits_{h\to 0} \cos(x+h/2) = \cos x$.

D'après le théorème du produit des limites, on a bien $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$.

De même d'après (6.4),
$\dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -2\,\dfrac{\sin(h/2)}{h} \times \sin(x + h/2) = -\dfrac{\sin(h/2)}{h/2} \times \sin(x + h/2)$.

La fonction sinus est continue au point $x$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \sin(x + h/2) = \sin x$.

On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$. □

**Remarque 5.**

- Lorsque la fonction $h$ est la fonction sinus ou la fonction cosinus, on a pour tout réel $x$

$$h'(x) = h\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

De ce fait la fonction $h$ est dérivable autant de fois que l'on veut et, pour tout entier naturel $n$ on peut calculer la dérivée $n$-ième de $h$ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h^{(n)}(x) = h\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

- Soit $\omega > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f : t \longmapsto \sin(\omega t + \varphi)$ et $g : t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$. Les fonctions $f$ et $g$ sont $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$-périodiques. Lorsque $t$ représente le temps, exprimé en secondes, le nombre $\omega$ s'appelle la **pulsation** et s'exprime en rad s $^{-1}$ et la **fréquence** $f = \dfrac{1}{T}$ en hertz. $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \omega\cos(\omega t+\varphi) = \omega\sin(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$ et $g'(t) = -\omega\sin(\omega t+\varphi) = \omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$.

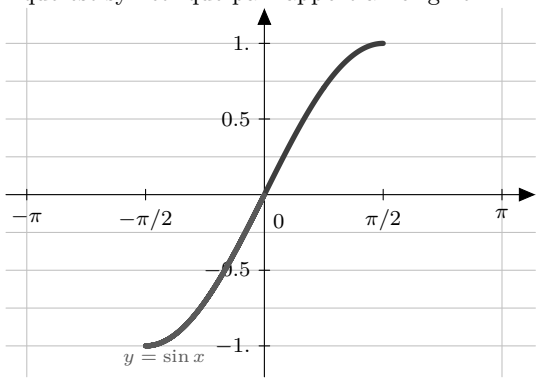
### 6.5.4 Symétries et variations

Les différentes égalités du théorème 4 page 218 se traduisent dans les tableaux de variations et les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin x$.

La fonction sinus est impaire, sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine.

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $-1$ | ↗ | $1$ |

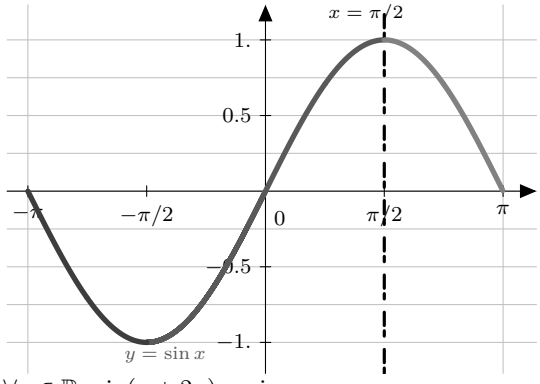



- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi - x) = \sin x$.

La représentation graphique de la fonction sinus est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$.

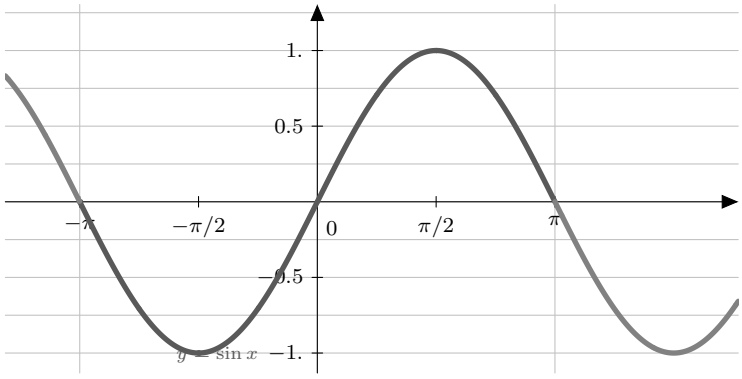
| $x$ | $\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

On complète la courbe entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ puis par symétrie par rapport à $O$.

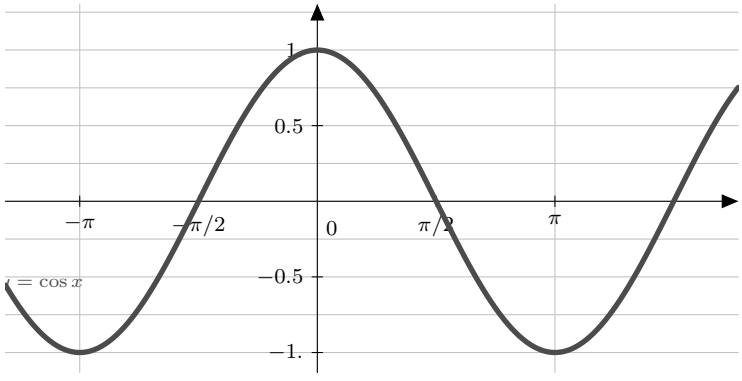



- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x + 2\pi) = \sin x.$

La représentation graphique de la fonction sinus est invariante par la translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{\imath}$. On dit que la fonction sinus est $2\pi$-périodique.




On peut faire le même travail pour la fonction cosinus. Elle est paire et $2\pi$-périodique. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$

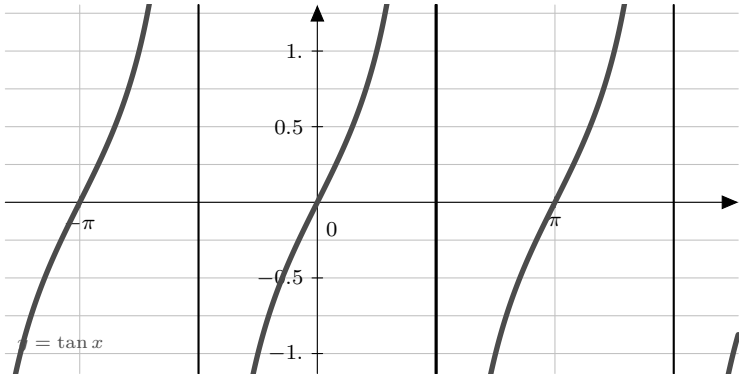



On peut faire le même travail pour la fonction tangente. Elle est impaire et $\pi$-périodique. De plus, pour

tout réel $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, le nombre dérivé en $x$ de la fonction tangente est

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

En particulier $\tan'(x) > 0$ ce qui entraîne que la fonction tangente est strictement croissante sur tout intervalle sur lequel elle est définie.




## 6.6 Équations trigonométriques

Il s'agit dans ce chapitre d'apprendre à résoudre dans un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ des équations en $x$ comportant un cosinus ou un sinus, c'est-à-dire à trouver tous les $x$ de l'intervalle $I$ vérifiant ce type d'équations.

### 6.6.1 $\sin x = 0$

Un premier résultat intermédiaire.

**Lemme 17**
L'équation

$$[\sin x = 0;\quad \text{inconnue } x \in \mathbb{R}.]$$

admet comme solutions les multiples entiers de $\pi$ :

$$\mathscr{S} = \pi\mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi\}$$

**Démonstration 17**

| $x$ | $-\pi/2$ | | $0$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $0$ | $+$ | $1$ | $+$ | $0$ |
| $\sin x$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

Dans un sens, pour tout entier $k$

$$\sin(k\pi) = \sin(0 + k\pi) = (-1)^k \sin(0) = 0,$$

donc $k\pi$ est solution.

La fonction sinus est strictement croissante donc injective sur l'intervalle DZ $= \left[ -\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right]$, donc l'équation

$$\left[\sin x = 0 \ \text{ inconnue } x \in \left[ -\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right]\right]$$

admet une unique solution à savoir 0.

Soit maintenant une solution de $\sin x = 0$. Soit $k$ la partie entière de $\frac{x}{\pi} - \frac{1}{2}$. L'entier $k$ a été choisi pour atterrir finement sur la DZ. En effet on a $k \leqslant \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} < k + 1$ soit $k\pi \leqslant x + \frac{\pi}{2} < k\pi + \pi$ soit $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - k\pi < -\frac{\pi}{2} + \pi$. On a donc $\sin(x - k\pi) = (-1)^k \sin x = 0$. Comme $x - k\pi \in$ DZ , cela veut dire que $x - k\pi = 0$ donc que $x$ est un multiple entier de $\pi$. □

Un deuxième résultat intermédiaire.

**Lemme 18**
L'équation

$$[\cos x = 0; \ \text{ inconnue } x \in \mathbb{R}.]$$

admet comme solutions les éléments de $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ :

$$\mathscr{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \ \mid \ \exists k \in \mathbb{Z},\, x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

**Démonstration 18**
Résoudre $\cos x = 0$ c'est résoudre $-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Les solutions $x$ vérifient donc $x - \frac{\pi}{2} = k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, ce qu'il s'agissait d'établir. □

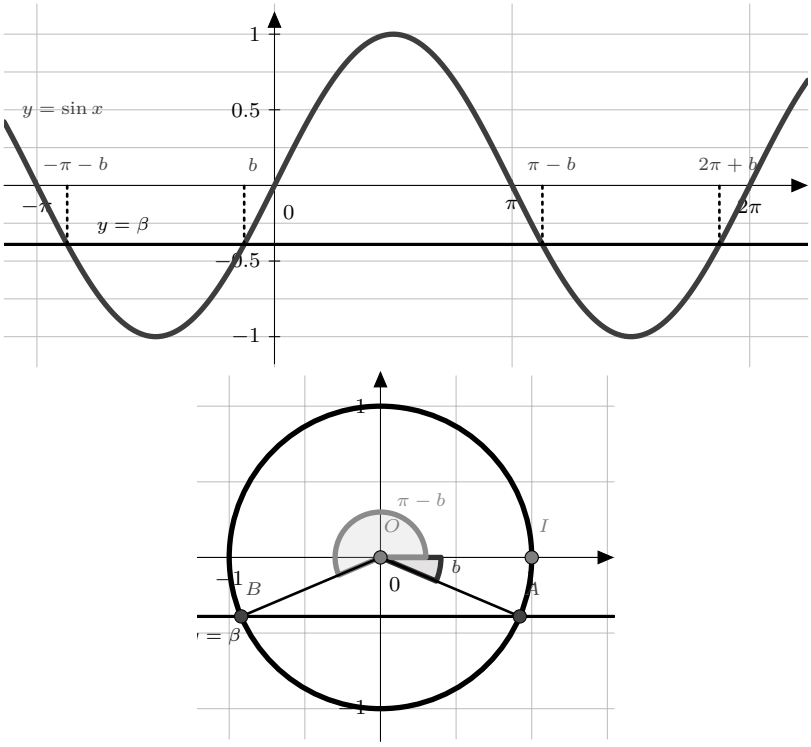
### 6.6.2 $\sin x = \beta$

**Théorème 19**
Soit une équation $\sin x = \beta$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Si on trouve un $b$ tel que $\sin b = \beta$ alors l'équation est équivalente à l'équation $\sin x = \sin b$ et les solutions de l'équation sont les réels $b + k \times 2\pi$ et les réels $\pi - b + k \times 2\pi$, où $k$ entier quelconque.

On obtient donc en général deux familles de solutions (sauf si $\beta = \pm 1$).

On ne peut donc résoudre ce type d'équation que si l'on connaît un réel $b$ particulier tel que $\sin x = \beta$.

Bien entendu, si $\beta \notin [\ -1\ ,\ 1\ ]$, alors l'équation n'admet pas de solution.




**Démonstration 19**
On va factoriser l'équation, mais pour cela on va rendre le membre de droite nul : Résoudre $\sin x = \beta$ c'est résoudre $\sin x - \sin = 0$ soit $2 \sin \dfrac{x-b}{2} \cos \dfrac{x+b}{2} = 0$ d'après (6.1). D'après les deux résultats intermédiaires c'est dire qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{x-b}{2} = k\pi$ ou qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{x+b}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, le résultat en découle après multiplication par 2. □

### 6.6.3 $\cos x = \alpha$

**Théorème 20**
Soit une équation $\cos x = \alpha$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Si on trouve un $a$ tel que $\cos x = \alpha$ alors l'équation est équivalente à l'équation $\cos x = \cos a$ et les solutions de l'équation sont les réels $a + k \times 2\pi$ et les réels $-a + k \times 2\pi$, où $k$ entier quelconque.

On ne peut donc résoudre ce type d'équation que si l'on connaît un réel $a$ particulier tel que $\cos x = \alpha$.

**Démonstration 20**
Résoudre $\cos x = \alpha$ c'est résoudre $\cos x - \cos a = 0$ soit $-2 \sin \dfrac{x-a}{2} \sin \dfrac{x+a}{2} = 0$ d'après (6.4). D'après le premier résultat intermédiaire c'est dire qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{x-a}{2} = k\pi$ ou qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{x+a}{2} = k\pi$, le résultat en découle après multiplication par 2. □

### 6.6.4 Équations se ramenant à $\cos(px) = \alpha$ ou $\sin(px) = \beta$

$p$ est un réel quelconque différent de 0.
La méthode est la même jusqu'à obtenir $px \equiv c \pmod{2\pi}$ ou bien $px = c + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
On a alors $x \equiv \frac{c}{p} \pmod{\frac{2\pi}{p}}$ ou bien $x = \frac{c}{p} + k \times \frac{2\pi}{p}, k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions ne sont donc plus « à un certain nombre de tours près ».

**Exemple 4**
Résoudre l'équation $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ :

1. dans $\mathbb{R}$ ;
2. dans $[0\,,\,2\pi]$ ;
3. dans $]-\pi\,,\,\pi]$.

---

1. On sait que $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad &\iff \quad \cos(2x) = \cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) \\
&\iff \quad 2x \equiv \tfrac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } 2x \equiv -\tfrac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \\
&\text{ou bien} \quad 2x = \tfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 2x = -\tfrac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\
&\iff \quad x \equiv \tfrac{3\pi}{8} \pmod{\pi} \text{ ou } x \equiv -\tfrac{3\pi}{8} \pmod{\pi} \\
&\text{ou bien} \quad x = \tfrac{3\pi}{8} + k \times \pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\tfrac{3\pi}{8} + k \times \pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

**Remarque 6.**

Les solutions obtenues sont « à un certain nombre de demi-tours près ».

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ x \equiv \frac{3\pi}{8} \pmod{\pi}, x \equiv -\frac{3\pi}{8} \pmod{\pi} \right\}$$

ou bien

$$\mathcal{S} = \left\{ x = \frac{3\pi}{8} + k \times \pi, x = -\frac{3\pi}{8} + k \times \pi, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. $x$ n'est solution que si $x \in \mathcal{S} \cap [0\,,\,2\pi]$.
   Un petit tableau peut nous y aider :

| $k$ | $\ldots$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3\pi}{8} + k \times \pi$ | $\ldots$ | $-\frac{13\pi}{8}$ | $-\frac{5\pi}{8}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{11\pi}{8}$ | $\frac{19\pi}{8}$ | $\frac{27\pi}{8}$ | $\ldots$ |
| $-\frac{3\pi}{8} + k \times \pi$ | $\ldots$ | $-\frac{17\pi}{8}$ | $-\frac{11\pi}{8}$ | $-\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{5\pi}{8}$ | $\frac{13\pi}{8}$ | $\frac{21\pi}{8}$ | $\ldots$ |

   Comme $[0\,,\,2\pi] = \left[0\,,\,\frac{16\pi}{8}\right]$, l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions est donc

$$\mathcal{S}' = \left\{ \frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \right\}$$

3. $x$ n'est solution que si $x \in \mathcal{S} \cap ]-\pi\,,\,\pi]$.
   Comme $]-\pi\,,\,\pi] = \left]-\frac{8\pi}{8}\,,\,\frac{8\pi}{8}\right]$, d'après le tableau précédent, l'ensemble $\mathcal{S}''$ des solutions est donc

$$\mathcal{S}'' = \left\{ -\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \right\}$$

## 6.7 Fonction arctangente

Comme application du théorème de la bijection, on étudie la réciproque de la fonction tangente. Attention, la fonction tangente n'étant pas injective, on restreint son ensemble de départ pour en faire une bijection.

Soit $f : \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \tan x$. La fonction $f$ est continue, dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$.

De plus $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$.

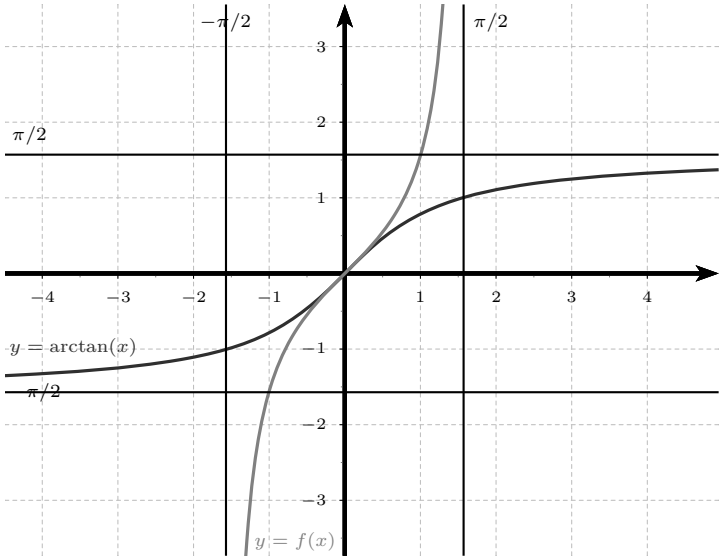
Donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ sur son image, qui est un intervalle, ni majoré car $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = +\infty$ ni minoré car $\lim\limits_{x \to -\pi/2} f(x) = -\infty$. Donc $f$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

**Définition 7.**

On appelle **arctangente** la bijection réciproque – notée arctan – de la fonction $f$.

Comme la dérivée de $f$ ne s'annule pas, la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus,

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}.$$




## 6.8 Méthodes

**Méthode 1** (Déterminer le cosinus et le sinus d'un angle associé)**.**

On sait déterminer le cosinus et le sinus des angles 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et de leurs angles associés.
Étape 1 : Identifier l'angle dont on connaît le cosinus et le sinus
On connaît, d'après le cours, le cosinus et le sinus des angles classiques.
Ils sont résumés dans le tableau suivant :

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Étape 2 : Utiliser une formule pour calculer le cosinus ou le sinus demandé
On sait que $\sin(-x) = -\sin x$ et que $\cos(-x) = \cos x$.
De plus, $\sin(x+2\pi) = \sin x$ et $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
On détermine quelle formule utiliser et on calcule la valeur demandée.

**Exemple 5**
Donner la valeur de $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et de $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

Étape 1 : Identifier l'angle dont on connaît le cosinus ou le sinus
On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Étape 2 : Utiliser une formule pour calculer le cosinus ou le sinus demandé
$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, donc $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(-2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, donc $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Méthode 2** (Montrer que deux points ont même image sur le cercle trigonométrique)**.**

Une infinité de points ont la même image sur le cercle trigonométrique.
Étape 1 : Calculer la différence entre les deux points
Si on veut montrer que $x_1$ et $x_2$ ont la même image sur le cercle trigonométrique, on calcule $x_2 - x_1$.
Étape 2 : Vérifier que la différence est un multiple de $2\pi$
Deux points ont la même image sur le cercle trigonométrique si et seulement si leur différence vaut un multiple de $2\pi$.
On vérifie que $x_2 - x_1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Dans ce cas, $x_1$ et $x_2$ ont la même image sur le cercle trigonométrique.

**Exemple 6**
Montrer que $\dfrac{2\pi}{5}$ et $-\dfrac{128\pi}{5}$ ont la même image sur le cercle trigonométrique.

Étape 1 : Calculer la différence entre les deux points
On calcule $\dfrac{2\pi}{5} - \left(-\dfrac{128\pi}{5}\right) = \dfrac{2\pi + 128\pi}{5} = \dfrac{130\pi}{5} = 26\pi$.
Étape 2 : Vérifier que la différence est un multiple de $2\pi$
On a $\dfrac{2\pi}{5} - \left(-\dfrac{128\pi}{5}\right) = \dfrac{130\pi}{5} = 26\pi = 13 \times 2\pi$
La différence des deux points est un multiple de $2\pi$.
Donc ces deux points ont la même image sur le cercle trigonométrique.

**Méthode 3** (Calcul de la mesure principale d'un angle $\alpha$)**.**

**Méthode 1 (plutôt pour les « petits » angles) :** Si l'angle est positif (respectivement négatif), soustraire (respectivement ajouter) $2\pi$ à l'angle jusqu'à obtenir une mesure principale.

**Méthode 2 (plutôt pour les « grands » angles) :**

1. Calculer $n$, partie entière de $\frac{\alpha}{2\pi}$.
2. Calculer $\alpha' = \alpha - 2n\pi$.
3. Si $-\pi < \alpha' \leq \pi$, alors la mesure principale est $\alpha'$ ; sinon la mesure principale est $\alpha' - 2\pi$.

**Exemple 7**
Calculer la mesure principale des angles :

1. $a = \dfrac{25\pi}{8}$ ; $a = -\dfrac{8\pi}{3}$ ;
2. $a = \dfrac{167\pi}{4}$ ; $a = \dfrac{-32\pi}{3}$.

---

1. $a = \dfrac{25\pi}{8} = \dfrac{9+16\pi}{8} = \dfrac{9\pi}{8} + 2\pi =$. Comme $-\pi < \dfrac{9\pi}{8} \leqslant \pi$ on peut écrire que $\dfrac{9\pi}{8}$ est la mesure principale de $a$.
   $a = -\dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{-6-2\pi}{3} = -2\pi - \dfrac{2\pi}{3}$. Comme $-\pi < -\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \pi$ on peut écrire que $-\dfrac{2\pi}{3}$ est la mesure principale de $a$.
2. $a = \dfrac{167\pi}{4}$. On a $167 = 20 \times 8 + 7 = 21 \times 8 - 1$. Donc $a = 42\pi - \dfrac{\pi}{4}$. Comme $-\pi < -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \pi$ on peut écrire que $-\dfrac{\pi}{4}$ est la mesure principale de $a$.
   $a = \dfrac{-32\pi}{3}$. On a $32 = 5 \times 6 + 2 = 6 \times 6 - 4$. Donc $a = -10\pi - \dfrac{2\pi}{3}$. Comme $-\pi < -\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \pi$ on peut écrire que $-\dfrac{2\pi}{3}$ est la mesure principale de $a$.

**Méthode 4** (Trouver un nombre dont on connaît le sinus et le cosinus)**.**

On se donne deux nombres $a$ et $b$. Trouver un réel $t$ tel que

$$\begin{cases} a &= \cos t \\ b &= \sin t \end{cases}$$

Premier cas : $a^2 + b^2 \neq 1$. D'après le théorème 4 page 218 ce système n'admet pas de solution.
Deuxième cas : $a^2 + b^2 = 1$. D'après le théorème 5 page 218 ce système admet une infinité de solutions.
Étape 1 : Déterminer un nombre $t'$ tel que $\cos t' = a$.
Étape 2 : Calculer $b' = \sin t'$.
Étape 3 (test) : Si $b' = b$, alors $t = t'$ convient.
Sinon $b' = -b$ et alors $t = -t'$ convient.

On peut rajouter n'importe quel multiple entier de $2\pi$ à toute solution.

**Exemple 8**
Trouver un réel $t$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{17}} &= \cos t \\ -\dfrac{4}{\sqrt{17}} &= \sin t \end{cases}$$

1. À la main (ou presque)

   [trig] [5] [1] [÷] [2nde] [x²] [1] [7] [>] [)] [entrer]

   1.325817664

   [trig] [1] [2nde] [(-)] [entrer]

   0.9701425001

   Le $b'$ trouvé est positif donc différent de $b$. Donc $-1,33$ est une solution à $0,01$ rad près.

2. Plus directement, toujours avec une TI-83 :

   [2nde] [◄►] [6] [1] [÷] [2nde] [x²] [1] [7] [>] [,]
   [(-)] [4] [÷] [2nde] [x²] [1] [7] [>] [)] [entrer]

   -1.325817664

3. En `Python` : Par l'intermédiaire de la fonction `atan2`. Attention à l'ordre des arguments !

```
from math import atan2
from math import sqrt

x=1/sqrt(17)
y=-4/sqrt(17)
print(atan2(y,x))
```

-1.3258176636680326

**Méthode 5** (Transformer $A\cos(\omega t+\varphi)$ en $a\cos(\omega t)+b\cos(\omega t)$)**.**

D'après le théorème 9 page 221, pour tous réels $A,\omega,t,\varphi$) on a

$$\begin{aligned} A\cos(\omega t+\varphi) &= A\left(\cos(\omega t)\cos\varphi-\sin(\omega t)\sin\varphi\right)\\ &= a\cos(\omega t)+b\cos(\omega t), \end{aligned}$$

en posant $a := A\cos(\omega t)\cos\varphi$ et $b := -A\sin(\omega t)\sin\varphi$.

**Méthode 6** (Transformer $a\cos(\omega t)+b\cos(\omega t)$ en $A\cos(\omega t+\varphi)$)**.**

Soit $a,b,\omega,t$ des réels. On suppose que $a$ ou $b$ n'est pas nul. On écrit alors
Étape 1 : On met $\sqrt{a^2+b^2}$ en facteur.

$$a\cos(\omega t)+b\cos(\omega t)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega t)-\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\omega t)\right)$$

Maintenant on a

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1.$$

Étape 2 : On applique la méthode 4 page 238 pour trouver un réel $\varphi$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} &= \cos\varphi\\ \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} &= \sin\varphi \end{cases}$$

Les nombres $\varphi$ et $A := \sqrt{a^2+b^2}$ conviennent.

## 6.9 Exercices

**Exercice 1** (Placer des points sur le cercle trigonométrique).

Placer les points suivants sur le cercle trigonométrique.

1. $\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{2\pi}{3}$, 0 et $\frac{3\pi}{4}$.
2. $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{4}$.
3. $-\frac{11\pi}{3}$, $\frac{40\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{3}$ et $-\frac{15\pi}{6}$.

**Exercice 2** (Identifier les points qui ont la même image sur le cercle trigonométrique).

Dire si les angles suivants ont la même image sur le cercle trigonométrique.

1. $\frac{11\pi}{4}$ et $\frac{123\pi}{4}$.
2. $-\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{25\pi}{3}$.
3. $\frac{3\pi}{15}$ et $-\frac{312\pi}{15}$.

**Exercice 3** (Déterminer le cosinus et le sinus des angles).

En utilisant les valeurs usuelles du cosinus et du sinus, déterminer le cosinus et le sinus des angles suivants.

1. $-\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{5\pi}{6}$
3. $\frac{4\pi}{3}$
4. $-\frac{\pi}{2}$

**Exercice 4** (Déterminer le cosinus d'un angle sachant son sinus).

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur du sinus d'un angle lorsque l'on connaît son cosinus et inversement.

1. Soit $x \in \left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ \right]$. On sait que $\sin(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$. Déterminer $\cos(x)$.
2. Soit $x \in [\ -\pi\ ,\ 0\ ]$. On sait que $\cos(x) = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$. Déterminer $\sin(x)$.

**Exercice 5.**

1. Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté dont une mesure est :

   (a) $\alpha = \dfrac{23\pi}{6}$ (c) $\gamma = \dfrac{23\pi}{3}$

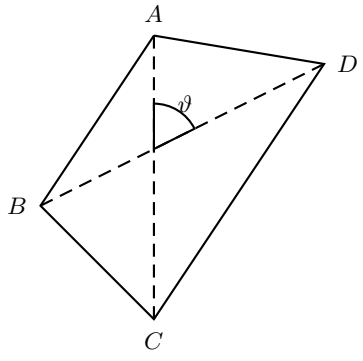
   (b) $\beta = -\dfrac{23\pi}{4}$ (d) $\delta = -\dfrac{23\pi}{2}$

2. Placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux réels : $\alpha$ ; $\beta$ ; $\gamma$ et $\delta$.
3. Compléter le tableau suivant en donnant des valeurs exactes.

| $x$ *radians* | $-\dfrac{\pi}{6}$ | | $-\dfrac{\pi}{3}$ | | | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| mesure en degrés | | $45^o$ | | $90^o$ | | |
| $\cos x$ | | | | | $-\dfrac{1}{2}$ | |
| $\sin x$ | | | | | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | |

**Exercice 6.**

$ABCD$ est un quadrilatère convexe. On note $\vartheta$ l'angle entre ses deux diagonales $(AC)$ et $(BD)$. Démontrer que l'aire $S$ du quadrilatère $ABCD$ est donnée par :




$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BD \sin \vartheta$$

**Exercice 7.**

Montrer que « $ABC$ est un triangle rectangle en $A$ si et seulement si $\sin^2 \widehat{A} = \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{C}$ ».

**Exercice 8.**

Montrer que, pour tous réels $a$ et $b$ : $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

**Exercice 9.**

Montrer que, pour tout réel $x$ : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$

**Exercice 10.**

Montrer que, pour tout réel $x$ différent de $k\frac{\pi}{2}$, où $k \in \mathbb{Z}$ : $\dfrac{\sin(3x)}{\sin x} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos x} = 2$.

**Exercice 11.**

En utilisant les formules d'addition, calculer une valeur exacte de $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{7\pi}{12}$.
*On pourra utiliser l'égalité* $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}$.

**Exercice 12.**

1. Calculer une valeur exacte de $\sin\dfrac{\pi}{12}$, de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ puis de $\tan\dfrac{\pi}{12}$.
2. Soit $x \in \left]0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x}$.
3. En déduire que $\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

**Exercice 13.**

Soit $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in \left]0\,,\, \frac{\pi}{2}\right[$ : $\tan x = \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$.
   En déduire une valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{8}$.
2. Démontrer que pour tout $x \in D$ : $\tan(\pi + x) = \tan x$. En déduire la valeur exacte de $\tan \frac{9\pi}{8}$.
3. Démontrer que pour tout $x \in D$ : $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
   En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$ puis de $\sin \frac{\pi}{8}$.
4. Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{8}$.

**Exercice 14** (d'après J.L. Friot)**.**

Soit $ABC$ un triangle isocèle en $A$. La bissectrice intérieure de $\widehat{B}$ coupe $(AC)$ en $D$. On pose $\beta = \widehat{CBD}$.

1. Calculer les longueurs $BC$, $BD$ et $AB$ en fonction de $\beta$ et $AB$.

On suppose désormais que

$$BC = DB + DA \tag{6.5}$$

2. Démontrer que la relation (6.5) est équivalente successivement à

$$\sin 4\beta \times \sin 3\beta = (\sin 4\beta + \sin \beta) \times \sin 2\beta \tag{6.6}$$

$$\cos 3\beta - \cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta \tag{6.7}$$

$$\sin 2\beta \times \sin 5\beta = \sin 2\beta \times \sin 4\beta \tag{6.8}$$

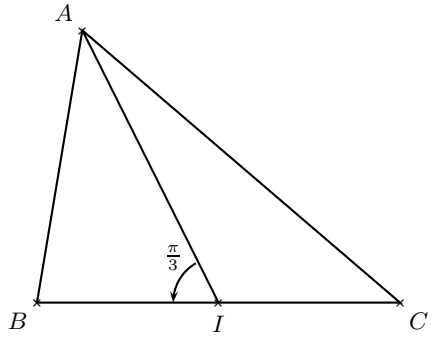
3. En déduire que $\beta = \frac{\pi}{9}$.

### 6.9.1 Angles orientés

**Exercice 15.**

$ABC$ est un triangle et $I$ est le milieu de $[BC]$.
On sait que $\left(\overrightarrow{IA}\,;\,\overrightarrow{IB}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

1. $\left(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{IB}\right)$ ;
2. $\left(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{IC}\right)$ ;
3. $\left(\overrightarrow{IA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)$.




**Exercice 16.**

$ABCD$ est un carré orienté dans le sens direct.
$E$ et $F$ sont les points tels que $CBE$ et $ABF$ sont des triangles équilatéraux orientés dans le sens direct.
Le but de cet exercice est de prouver que les points $D$, $E$ et $F$ sont alignés, à l'aide des angles orientés.

1. Faire un dessin.
2. (a) Montrer que $\left(\overrightarrow{AF}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.
   (b) En déduire que $\left(\overrightarrow{FD}\,;\,\overrightarrow{FA}\right) = \dfrac{5\pi}{12}$.
3. (a) Montrer que $\left(\overrightarrow{BE}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   (b) En déduire que $\left(\overrightarrow{FB}\,;\,\overrightarrow{FE}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
4. Montrer que $\left(\overrightarrow{FD}\,;\,\overrightarrow{FE}\right) = \pi$. Conclure.

### 6.9.2 Trigonométrie

**Exercice 17.**

Simplifier les expressions suivantes :
$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
$B = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x)$
$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
$D = \sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$
$E = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x)$

**Exercice 18.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
2. $\cos 3x = 0$ ;
3. $\cos 4x = -1$ ;
4. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ ;
5. $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
6. $\sin \frac{x}{2} = 0$ ;
7. $\sin 6x = -4$ ;
8. $\cos 2x = \cos x$ ;
9. $\cos 2x = \cos(3x + \pi)$ ;
10. $\sin x = \sin \frac{x}{3}$ ;
11. $\cos 2x = \sin 3x$ ;
12. $\cos x = -\sin 2x$ ;
13. $\sin 4x = -\cos 2x$ ;
14. $\tan x = \sqrt{3}$ ;
15. $\tan 2x = 1$ ;
16. $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$ .

**Exercice 19.**

Soit $\alpha = \frac{\pi}{7}$.
Démontrer que $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}$.

**Exercice 20** (Récurrence)**.**

1. Exprimer $\cos((n+1)^\circ)$ en fonction de $\cos(n^\circ), \cos(1^\circ)$ et $\cos\left((n-1)^\circ\right)$.
2. Démontrer que $\cos(1^\circ)$ est irrationnel.

**Exercice 21.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 0$, on a $-\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.
2. En déduire la limite de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

**Exercice 22.**

Soit $f$ la fonction définie sur $]\,1\,,\,+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{2x + \sin(x)}{x - 1}$.

1. Trouver un encadrement de la fonction $f$ sur $]\,1\,,\,+\infty\,[$.
2. En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

**Exercice 23.**

Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sin n}{n+1}\right)$.

**Exercice 24.**

Étudier la suite la suite $(u_n)$ définie par

$$u_0 = 1;\ \text{et}\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n).$$

Voir, dans le cours de seconde, les travaux dirigés 5 page 376.

**Exercice 25.**

Soit $\alpha$ un réel appartenant à $]0\,,\,\pi[$. Dériver la fonction $f$ définie par :

$$\forall \vartheta \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[,\ f(\vartheta) = \frac{\cos(\vartheta+\alpha) - \cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta+\alpha) + \sin(\vartheta)}.$$

**Exercice 26.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{6}\ \right[$ par

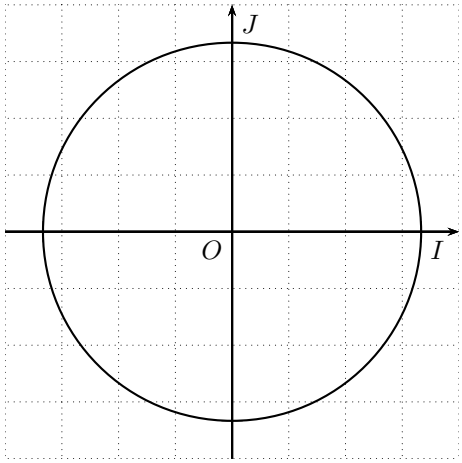
$$\forall x \in \left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{6}\ \right[,\ f(x) := \frac{\tan^3 x}{\tan(3x)}.$$

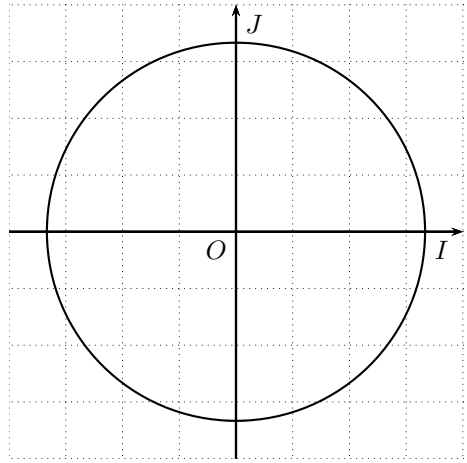
Déterminer les extrémums de $f$ sur $\left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{6}\ \right[$.

**Indication 1.**

On pourra exprimer $\tan(3x)$ et $\tan'(x)$ en fonction de $t := \tan x$.

FIGURE 6.1 – Cercles trigonométriques à découper et/ou colorier

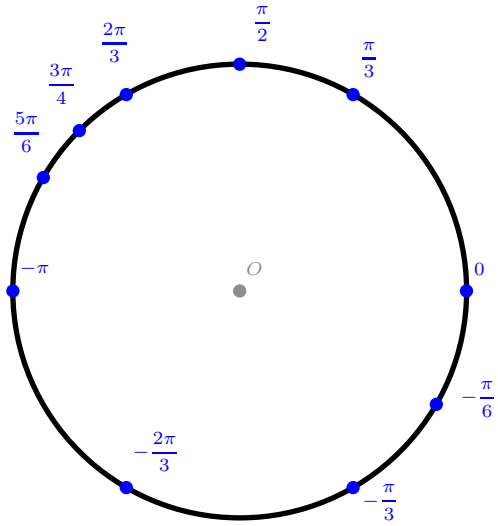


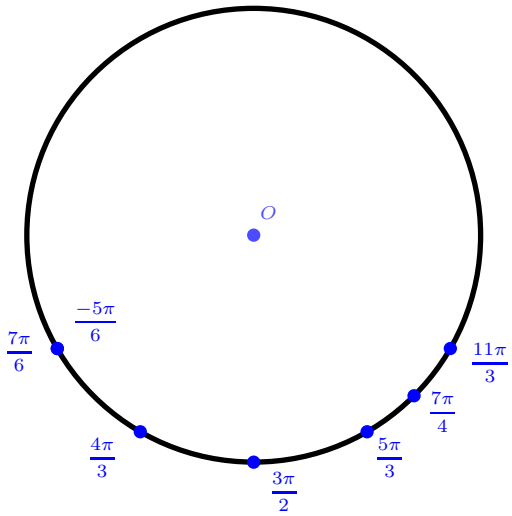
## 6.10 Solutions

**Solution 1 (Placer des points sur le cercle trigonométrique)**

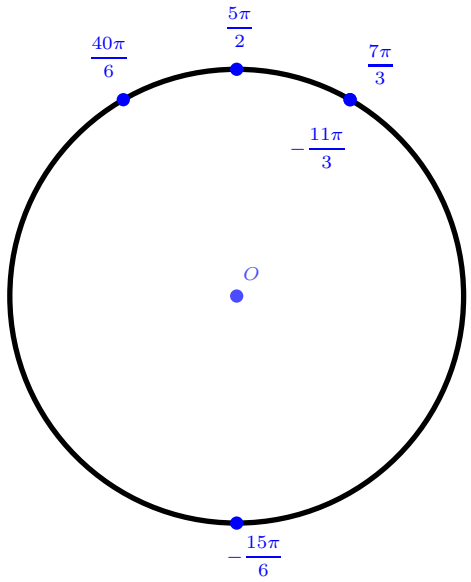
1.




2.



3.




**Solution 2 (Identifier les points qui ont la même image sur le cercle trigonométrique)**

1. Deux points ont la même image sur le cercle trigonométrique si et seulement si ils ont la même valeur à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.
   Pour savoir si $\frac{11\pi}{4}$ et $\frac{123\pi}{4}$ ont la même image, on calcule leur différence et on détermine si c'est un multiple de $2\pi$.
   $\frac{123\pi}{4} - \frac{11\pi}{4} = \frac{112\pi}{4} = 28\pi = 14 \times 2\pi$.
   On trouve bien un multiple de $2\pi$.
   $\frac{11\pi}{4}$ et $\frac{123\pi}{4}$ ont la même image sur le cercle trigonométrique.
2. De même, $\frac{25\pi}{3} - \left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{25\pi + 7\pi}{3} = \frac{32\pi}{3} = 10\pi + \frac{2}{3}\pi$.
   Or, $10\pi + \frac{2}{3}\pi$ n'est pas un multiple de $2\pi$.
   Donc $-\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{25\pi}{3}$ n'ont pas la même image sur le cercle trigonométrique.
3. De même, $\frac{3\pi}{15} - \left(-\frac{312\pi}{15}\right) = \frac{3\pi + 312\pi}{15} = \frac{315\pi}{15} = 21\pi$.
   Or, $21\pi$ n'est pas un multiple de $2\pi$.
   Donc $\frac{3\pi}{15}$ et $-\frac{312\pi}{15}$ n'ont pas la même image sur le cercle trigonométrique.

**Solution 3 (Déterminer le cosinus et le sinus des angles)**

1. On a $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De même $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. On a $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
3. On a $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. On a $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. De même $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

**Solution 4 (Déterminer le cosinus d'un angle sachant son sinus)**

1. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

   Comme ici, $\sin(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$, on obtient :

   $\cos^2(x) = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1+2\sqrt{3}+3}{9}\right) = \frac{9-4-2\sqrt{3}}{9} = \frac{5-2\sqrt{3}}{9}$

   Donc $\cos(x) = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{9}}$ ou $\cos(x) = -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{9}}$ .

   On sait que $x \in \left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ \right]$. Donc $\cos(x) \geqslant 0$.

   Ainsi, $\cos(x)$ ne peut pas valoir $-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{9}}$ car ce nombre est négatif.

   On obtient $\cos(x) = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{9}}$.

2. Étant donné que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on a $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

   Ainsi, $\sin^2(x) = 1 - \left(\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)^2 = 1 - \left(\frac{17-6\sqrt{17}+9}{16}\right) = \frac{16-26+6\sqrt{17}}{16}$

   $= \frac{6\sqrt{17}-10}{16} = \frac{3\sqrt{17}-5}{8}$.

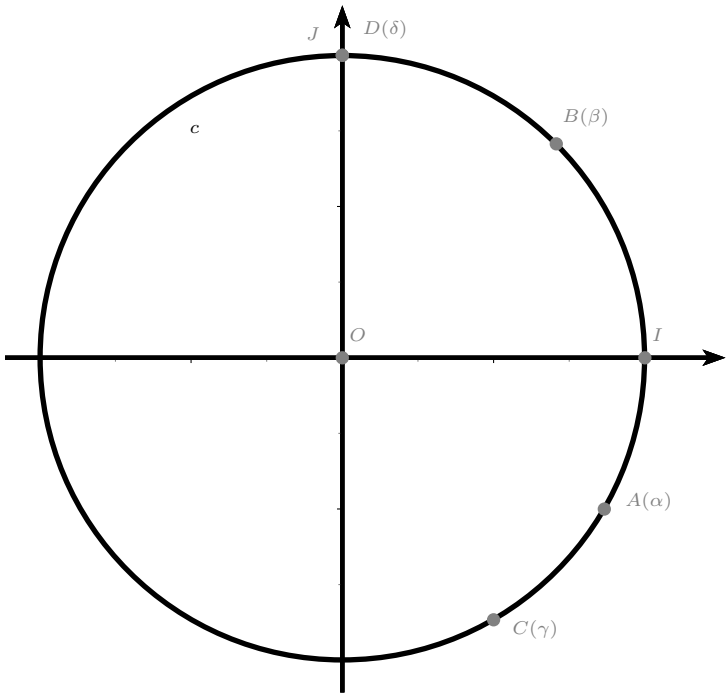
   Donc $\sin(x) = \sqrt{\frac{3\sqrt{17}-5}{8}}$ ou $\sin(x) = -\sqrt{\frac{3\sqrt{17}-5}{8}}$ .

   Et, comme $x \in [\ -\pi\ ,\ 0\ ]$, on sait que $\sin(x) \leqslant 0$. Ainsi, $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3\sqrt{17}-5}}{2\sqrt{2}}$ .

**Solution 5**

1. Déterminer la mesure principale en radians de l'angle orienté dont une mesure est :
   (a) On a $\alpha = 4\pi - \frac{\pi}{6}$. La mesure principale de $\alpha$ est donc $-\frac{\pi}{6}$.
   (b) On a $\beta = -6\pi + \frac{\pi}{4}$. La mesure principale de $\beta$ est donc $\frac{\pi}{4}$.
   (c) On a $\gamma = 8\pi - \frac{\pi}{3}$. La mesure principale de $\gamma$ est donc $-\frac{\pi}{3}$.
   (d) On a $\delta = -12\pi + \frac{\pi}{2}$. La mesure principale de $\delta$ est donc $\frac{\pi}{2}$.

2.




3.

| $x$ *radians* | $-\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| mesure en degrés | $-30°$ | $45°$ | $-60°$ | $90°$ | $120°$ | $690°$ |
| $\cos x$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\sin x$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

**Solution 6**

Soit $O$ le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

Le quadrilatère $ABCD$ est convexe donc son aire est la somme des aires des quatre triangles $AOD$, $COD$, $COB$ et $AOB$.

L'aire du triangle $AOD$ est $\frac{1}{2}OA \times OD \sin\vartheta$.

De même, l'aire du triangle $COD$ est $\frac{1}{2}OC \times OD \sin(\pi - \vartheta)$.

Comme $\sin(\pi-\vartheta)=\sin\vartheta$, on obtient l'aire du triangle $ACD$ : $\frac{1}{2}OA\times OD\sin\vartheta+\frac{1}{2}OC\times OD\sin\vartheta=\frac{1}{2}(AO+OC)\times OD\sin\vartheta=\frac{1}{2}AC\times OD\sin\vartheta$.

*Mutatis mutandis*, l'aire du triangle $ACD$ égale $\frac{1}{2}AC\times OB\sin\vartheta$.

En fin de compte, l'aire $S$ du quadrilatère $ABCD$ égale

$$S=\frac{1}{2}AC\times OD\sin\vartheta+\frac{1}{2}AC\times OB\sin\vartheta=\frac{1}{2}AC\times(OD+OB)\sin\vartheta=\frac{1}{2}AC\times DB\sin\vartheta.$$

**Solution 7**

Dans le triangle $ABC$, la loi des sinus s'écrit

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}=\frac{\sin\widehat{C}}{c}.$$

On en déduit

$$\frac{\sin^2\widehat{A}}{a^2}=\frac{\sin^2\widehat{B}}{b^2}=\frac{\sin^2\widehat{C}}{c^2}=\frac{\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}}{b^2+c^2}.$$

De ce fait

$$\sin^2\widehat{A}=\left(\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}\right)\times\frac{a^2}{b^2+c^2},$$

d'après le théorème 38 page 82 du cours de seconde.

On conclut que $ABC$ est un triangle rectangle en $A$ si et seulement si $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}=1$ si et seulement si $\sin^2\widehat{A}=\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}$.

**Solution 8**

Soient $a$ et $b$ deux réels. D'après les formules d'addition (théorème 9), on a $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$, et $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$. En effectuant le produit, on obtient

$$\begin{aligned}\sin(a+b)\sin(a-b)&=\sin^2 a\cos^2 b-\cos^2 a\sin^2 b\\&=\sin^2 a(1-\sin^2 b)-(1-\sin^2 a)\sin^2 b\\&=\sin^2 a-\sin^2 a\sin^2 b-\sin^2 b+\sin^2 a\sin^2 b\\&=\sin^2 a-\sin^2 b.\end{aligned}$$

**Solution 9**

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\cos^4 x-\sin^4 x&=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)\\&=\cos^2 x-\sin^2 x\\&=\cos(2x).\end{aligned}$$

**Solution 10**

Soit $x\in\mathbb{R}$, différent de $k\frac{\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$. En réduisant au même dénominateur, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(3x)}{\sin x}-\frac{\cos(3x)}{\cos x}&=\frac{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}\\&=\frac{\sin(3x-x)}{\frac{1}{2}\sin(2x)}\\&=2.\end{aligned}$$

**Solution 11**
On a

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

De même,

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

**Solution 12**

1. On écrit $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Toujours d'après les formules d'addition, on a

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

   De même,

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

   Enfin

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{6-2},$$

   grâce à l'expression conjuguée. Pour finir,

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{6-2\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{4} = 2-\sqrt{3}.$$

2. Soit $x \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$.
   On a $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$.
   Donc $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$.
3. En spécifiant $x := \frac{\pi}{12} \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\frac{\pi}{2} - x = \frac{5\pi}{12}$ et par suite,

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}.$$

**Solution 13**

1. Soit $x \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $2x \in ]0\,,\,\pi[$ et $\sin(2x) \neq 0$. De plus

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

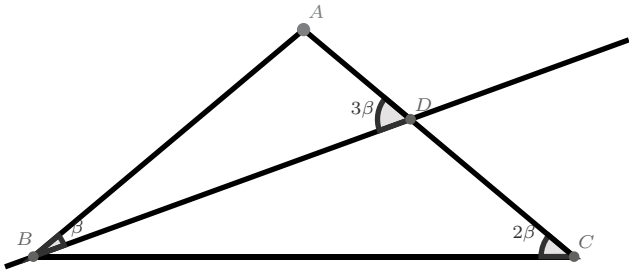
   En spécifiant $x := \frac{\pi}{8} \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $2x = \frac{\pi}{4}$ et

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1.$$

Solutions

2. Soit $x \in D$. On a
$$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$
En spécifiant $x := \frac{\pi}{8} \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{9\pi}{8}$. De plus $\tan\frac{9\pi}{8} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
3. Soit $x \in D$. On a
$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$
En spécifiant $x := \frac{\pi}{8} \in D$, on a
$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 2\sqrt{2}.$$
Donc $\cos^2 x = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{16 - 8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$.
Or $0 < x < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos x > 0$ et $\cos x = +\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$,
et $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$. Puisque $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a $\sin x > 0$
et $\sin x = +\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.
4. On a
$$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

**Solution 14 (d'après J.L. Friot)**




1. Dans le triangle $ABC$, d'après la loi des sinus,
$$\frac{AB}{\sin 2\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha},$$
avec $\pi = \alpha + 4\beta$. Donc $\sin\alpha = \sin 4\beta$. Donc
$$\boxed{BC = AB\,\frac{\sin 4\beta}{\sin 2\beta}}$$

Dans le triangle $ABD$, toujours d'après la loi des sinus,

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\widehat{ADB}}.$$

comme $\widehat{ADB} = \pi - \alpha - \beta = 3\beta$, on a

$$\boxed{BD = AB\,\frac{\sin 4\beta}{\sin 3\beta} \text{ et } AD = AB\,\frac{\sin\beta}{\sin 3\beta}}$$

2.

$$\begin{aligned}
BC = DB + DA &\iff AB\,\frac{\sin 4\beta}{\sin 2\beta} = AB\,\frac{\sin 4\beta}{\sin 3\beta} + AB\,\frac{\sin\beta}{\sin 3\beta}\\
&\iff \frac{\sin 4\beta}{\sin 2\beta} = \frac{\sin 4\beta + \sin\beta}{\sin 3\beta}\\
&\iff \sin 4\beta \times \sin 3\beta = (\sin 4\beta + \sin\beta) \times \sin 2\beta\\
&\iff \frac{1}{2}\left(\cos\beta - \cos 7\beta\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2\beta - \cos 6\beta + \cos\beta - \cos 3\beta\right)\\
&\iff -\cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta - \cos 3\beta\\
&\iff \cos 3\beta - \cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta\\
&\iff -2\sin(-2\beta)\sin(5\beta) = -2\sin(-2\beta)\sin(4\beta)\\
&\iff \sin(2\beta)\sin(5\beta) = \sin(2\beta)\sin(4\beta).
\end{aligned}$$

3. $\sin(2\beta) = 0$ se produit pour $\beta = \pi$ ce qui est impossible.
   Reste $\sin(5\beta) = \sin(4\beta)$ soit $5\beta = 4\beta + 2k\pi$ ce qui est impossible ou $5\beta = \pi - 4\beta + 2k\pi$ ou encore $9\beta = (2k+1)\pi$. On cherche $\beta$ positif. Pour $k \geqslant 1$ on a $\beta \geqslant \dfrac{\pi}{3}$ ce qui est impossible car on aurait $\pi = \alpha + 4\beta \geqslant 0 + \dfrac{4\pi}{3}$.
   Reste $k = 0$ et $\beta = \dfrac{\pi}{9}$.

## 6.10.1 Angles orientés

**Solution 15**

1. Le vecteur $\overrightarrow{IA}$ est remplacé par son opposé. Cela revient à ajouter ou retrancher $\pi$ à la mesure de l'angle. Ainsi la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{IB}\right)$ égale $\dfrac{\pi}{3} - \pi = -\dfrac{2\pi}{3}$.
2. D'après la relation de Chasles,

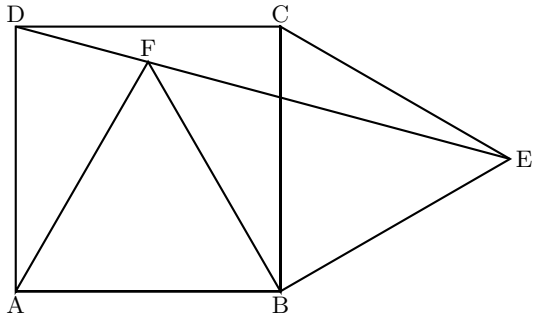
$$\left(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{IC}\right) = \left(\overrightarrow{AI}\,;\,\overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{IB}\,;\,\overrightarrow{IC}\right) = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}.$$

3. On a $\left(\overrightarrow{IA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{IA}\,;\,\overrightarrow{IB}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Solutions

**Solution 16**

1.




2. (a) D'après la relation de Chasles, $\frac{\pi}{2} = \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AF}\right) + \left(\overrightarrow{AF}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$ donc $\left(\overrightarrow{AF}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

   (b) On a $AD = AF$. Donc $ADF$ est isocèle en $A$ et $\left(\overrightarrow{FD}\,;\,\overrightarrow{FA}\right) = \left(\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DF}\right)$. Puisque $\left(\overrightarrow{AF}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{6}$ il reste $\left(\overrightarrow{FD}\,;\,\overrightarrow{FA}\right) + \left(\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DF}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Donc $\left(\overrightarrow{FD}\,;\,\overrightarrow{FA}\right) = \frac{5\pi}{12}$.

3. (a) D'après la relation de Chasles, $\left(\overrightarrow{BE}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \left(\overrightarrow{BE}\,;\,\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{DF}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

   (b) On a $BE = BF$. Donc $EBF$ est isocèle en $B$ et $\left(\overrightarrow{FB}\,;\,\overrightarrow{FE}\right) = \left(\overrightarrow{EF}\,;\,\overrightarrow{EB}\right)$. Puisque $\left(\overrightarrow{BE}\,;\,\overrightarrow{BF}\right) = \frac{\pi}{2}$ il reste $\left(\overrightarrow{FB}\,;\,\overrightarrow{FE}\right) + \left(\overrightarrow{EF}\,;\,\overrightarrow{EB}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Donc $\left(\overrightarrow{FB}\,;\,\overrightarrow{FE}\right) = \frac{\pi}{4}$.

4. D'après la relation de Chasles,

$$\left(\overrightarrow{FD}\,;\,\overrightarrow{FE}\right) = \left(\overrightarrow{FD}\,;\,\overrightarrow{FA}\right) + \left(\overrightarrow{FA}\,;\,\overrightarrow{FB}\right) + \left(\overrightarrow{FB}\,;\,\overrightarrow{FE}\right) = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi + 4\pi + 3\pi}{12} = \pi.$$

   Comme l'angle $\left(\overrightarrow{FD}\,;\,\overrightarrow{FE}\right)$ est plat, les les points $D$, $E$ et $F$ sont alignés.

## 6.10.2 Trigonométrie

**Solution 17**

Rappel : Pour sinus et cosinus, rajouter $\frac{\pi}{2}$ à l'argument c'est dériver et rajouter $\pi$ c'est prendre l'opposé.

$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x - sinx = 0.$
$B = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x) = -\sin x - \sin(-x) + \sin(-x) = \sin x.$
$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(-x) + \cos x = 2\cos x.$
$D = \sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x) = -\sin x - \cos x + \sin x = -\cos x.$
$E = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x) = 2\cos x + \cos(-x) - \cos x = 2\cos x.$

**Solution 18**

Dans toute la suite, $k$ désigne un entier relatif quelconque.

1. On résout $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ soit $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ soit $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$. Il y a 4 solutions sur le cercle unité.
2. On a $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ soit $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$. Il y a 6 solutions sur le cercle unité.

3. On a $4x = \pi + 2k\pi$ soit $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Il y a 4 solutions sur le cercle unité.

4. On résout $\sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ soit $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\pi - 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ soit $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{12} - k\pi$. Il y a 4 solutions sur le cercle unité.

5. On résout $\sin 3x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ soit $3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ soit $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{3}$. Il y a 6 solutions sur le cercle unité.

6. On a $\frac{x}{2} = k\pi$ soit $x = 2k\pi$. Il y a une solution sur le cercle unité.

7. Un peu de sérieux, il n'y a pas de solution.

8. On a $2x = x + 2k\pi$ ou $2x = -x + 2k\pi$ soit $x = 2k\pi$ ou $x = 2k\frac{\pi}{3}$ soit $x = 2k\frac{\pi}{3}$. Il y a 6 solutions sur le cercle unité.

9. On a $2x = 3x + \pi + 2k\pi$ ou $2x = -3x + \pi + 2k\pi$ soit $x = -\pi - 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{5} + 2k\frac{\pi}{5}$ soit $x = \frac{\pi}{5} + 2k\frac{\pi}{5}$. En effet pour obtenir la solution $\pi$ par exemple, il suffit de prendre $\frac{\pi}{5} + 2k\frac{\pi}{5}$ avec $k := 2$. Il y a en tout 10 solutions sur le cercle unité.

10. On a $x = \frac{x}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{x}{3} + 2k\pi$ soit $\frac{2x}{3} = 2k\pi$ ou $\frac{4x}{3} = \pi + 2k\pi$ soit $x = 3k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + k\frac{3\pi}{2}$. Attention, ici on ne peut pas raisonner sur le cercle unité. En effet $3\pi$ est solution, mais pas $\pi$ qui a pourtant la même image.

11. On résout $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ soit $2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi$ soit $5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$ soit $x = \frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}$ ou $x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$. Il y a 6 solutions sur le cercle unité. En effet il n'est pas possible d'obtenir la solution $\frac{\pi}{2}$ parmi les $\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

12. On résout $\cos x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ soit $x = 2x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -2x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ soit $x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$. Il y a en tout 7 solutions sur le cercle unité.

13. D'après la question précédente, on a $2x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}$ soit $x = -\frac{\pi}{4} - k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$. Il y a 14 solutions sur le cercle unité.

14. On résout $\tan x = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, soit $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. Il y a 2 solutions sur le cercle unité.

15. On résout $\tan 2x = \tan\frac{\pi}{4} = 1$, soit $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ soit $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$. Il y a 4 solutions sur le cercle unité.

16. On résout $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ soit $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ soit $2x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$ soit $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. Il y a 4 solutions sur le cercle unité.

**Solution 19**
On écrit $\frac{1}{\sin\alpha} - (\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}) = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha}$

et $\sin 3\alpha = \sin(7\alpha - 4\alpha) = \sin(\pi - 4\alpha) = \sin 4\alpha$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\alpha} - \left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha}\right) &= \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} \\
&= \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\sin 2\alpha(1 + 2\cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha} \\
&= \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1 + 2\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha} \\
&= \frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha - 2\cos 2\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha \sin 3\alpha} \\
&= \frac{2\cos 2\alpha \sin\alpha - 2\cos 2\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha \sin 3\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Soit $\dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\sin 2\alpha} + \dfrac{1}{\sin 3\alpha}$.

**Solution 20 (Récurrence)**

1. D'après les formules d'addition en trigonométrie, on a

$$\cos\left((n+1)^\circ\right) = \cos(n^\circ)\cos(1^\circ) - \sin(n^\circ)\sin(1^\circ)$$

$$\cos\left((n-1)^\circ\right) = \cos(n^\circ)\cos(1^\circ) + \sin(n^\circ)\sin(1^\circ).$$

   En effectuant la somme, on a

$$\cos\left((n+1)^\circ\right) = 2\cos(n^\circ)\cos(1^\circ) - \cos\left((n-1)^\circ\right).$$

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\cos(1^\circ)$ est rationnel. On va alors prouver par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1, \cos(n^\circ)$ est un rationnel. Notons, pour $n \geq 0$,

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \cos(n^\circ) \text{ est rationnel.}$$

   Prouvons que ( $\cos(1^\circ) \in \mathbb{Q}) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$. On sait que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$. Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k = 1, \ldots, n$, et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Alors, d'après la première question,

$$\cos\left((n+1)^\circ\right) = 2\cos(n^\circ)\cos(1^\circ) - \cos\left((n-1)^\circ\right).$$

   Mais, d'après $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$, on a $\cos(1^\circ), \cos(n^\circ)$ et $\cos\left((n-1)^\circ\right)$ sont des rationnels. L'ensemble des rationnels étant stable par addition et produit (théorème 34 page 79 du cours de seconde), on en déduit que $\cos\left((n+1)^\circ\right)$ est rationnel. Ainsi, d'après le théorème de récurrence, on a démontré (sous l'hypothèse que $\cos(1^\circ)$ est rationnel), que $\cos(n^\circ)$ est rationnel. En particulier, $\cos(45^\circ) = \sqrt{2}/2$ est rationnel : c'est une contradiction avec l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (théorème 47 page 91 du cours de seconde). C'est donc que l'hypothèse émise est fausse : $\cos(1^\circ)$ est irrationnel.

**Solution 21**

1. Pour tout réel $x$, on a $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

   Donc, pour tout réel $x \neq 0$, $-\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

2. On a

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad -\frac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

   Donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut 0.

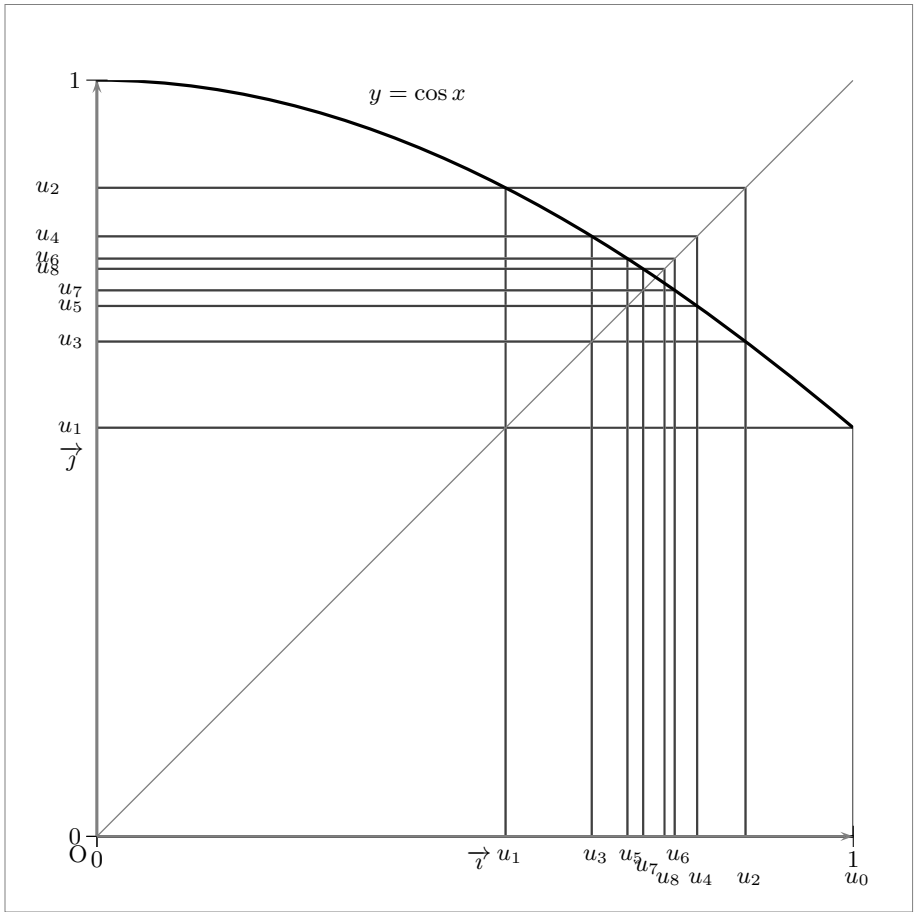
**Solution 22**
Soit $f$ la fonction définie sur $]\ 1\ ,\ +\infty\ [$ par $f(x) = \dfrac{2x + \sin(x)}{x - 1}$.

1. On encadre le sinus entre $-1$ et 1, et ça marche.
2. Théorème d'encadrement. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe et vaut 2.

**Solution 23**
On a $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{\sin n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème d'encadrement on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin n}{n+1} = 0$$

**Solution 24**



**Solution 25**
La fonction $f$ est dérivable sur $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ par application des théorèmes généraux. De plus, $\forall \vartheta \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} f'(\vartheta) &= \frac{(-\sin(\vartheta+\alpha)+\sin(\vartheta))(\sin(\vartheta+\alpha)+\sin(\vartheta)) - (\cos(\vartheta+\alpha)-\cos(\vartheta))(\cos(\vartheta+\alpha)+\cos(\vartheta))}{(\sin(\vartheta+\alpha)+\sin(\vartheta))^2} \\ &= \frac{\sin^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta+\alpha)-\left(\cos^2(\vartheta+\alpha)-\cos^2(\vartheta)\right)}{(\sin(\vartheta+\alpha)+\sin(\vartheta))^2} \\ &= \frac{\sin^2(\vartheta)+\cos^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta+\alpha)-\cos^2(\vartheta+\alpha)}{(\sin(\vartheta+\alpha)+\sin(\vartheta))^2} = 0. \end{aligned}$$

De ce fait la fonction $f$ est constante sur l'intervalle $\left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$.

En particulier, on a $\forall \vartheta \in \left]0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$, $f(\vartheta) = \lim_{\vartheta\to 0} f(\vartheta) = \frac{\cos(\alpha)-1}{\sin(\alpha)}$.
Vérifions-le directement en calculant pour tous réels $\vartheta$ et $\alpha$ :

$$\begin{aligned} &(\cos(\vartheta+\alpha)-\cos(\vartheta))\sin(\alpha) - (\sin(\vartheta+\alpha)+\sin(\vartheta))(\cos(\alpha)-1) \\ &= (\cos(\vartheta)\cos(\alpha)-\sin(\vartheta)\sin(\alpha)-\cos(\vartheta))\sin(\alpha) - (\sin(\vartheta)\cos(\alpha)+\cos(\vartheta)\sin(\alpha)+\sin(\vartheta))(\cos(\alpha)-1) \\ &= \cos(\vartheta)\left((\cos(\alpha)-1)\sin(\alpha)-\sin(\alpha)(\cos(\alpha)-1)\right) + \sin(\vartheta)\left(-\sin^2(\alpha)-(\cos(\alpha)+1)(\cos(\alpha)-1)\right) \\ &= \cos(\vartheta)\times 0 + \sin(\vartheta)\left(-\sin^2(\alpha)-\left(\cos^2(\alpha)-1\right)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Solution 26**

On a $\forall x \in \left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{6}\ \right[$, d'une part $\tan(3x) = \frac{3\tan(x)-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ et d'autre part $\tan'(x) = 1+\tan^2 x = 1+t^2$.

Donc $\forall x \in \left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{6}\ \right[$, $f(x) = \frac{t^3(1-3t^2)}{3t-t^3} = \frac{t^2(1-3t^2)}{3-t^2}$. D'après le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+t^2)\frac{(2t-12t^3)(3-t^2)+t^2(1-3t^2)\times 2t}{(3-t^2)^2} \\ &= \frac{1+t^2}{(3-t^2)^2}\left(6t-2t^3-36t^3+12t^5+2t^3-6t^5\right) \\ &= \frac{6t(1+t^2)}{(3-t^2)^2}\left(t^4-6t^2+1\right). \end{aligned}$$

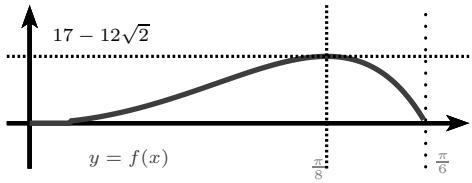
La dérivée de $f$ s'annule pour $t=0$ ou pour $t$ racine de $t^4-6t^2+1=0$.

Les racines de $u^2-6u+1=0$ sont $u_1 = 3-2\sqrt{2} > 0$ et $u_2 = 3+2\sqrt{2} > 0$. En constatant que $(1-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{2}$ et que $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$, les racines **positives** de $t^4-6t^2+1=0$ sont $t_1 = \sqrt{2}-1$ et $t_2 = 1+\sqrt{2}$.

De ce fait les extrémums de $f$ sur $\left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{6}\ \right[$ ne peuvent être réalisé qu'en $x_0 = 0 = \mathrm{Arctan}\,(0)$ ou $x_1 = \mathrm{Arctan}\,(t_1) = \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi}{8}$. En effet on a $x_2 = \mathrm{Arctan}\,(t_2) = \mathrm{Arctan}\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{3\pi}{8} > \frac{\pi}{6}$.

La fonction $f$ admet un minimum (relatif) en 0 et un maximum (absolu) en $x_1 = \dfrac{\pi}{8}$. Ce maximum égale

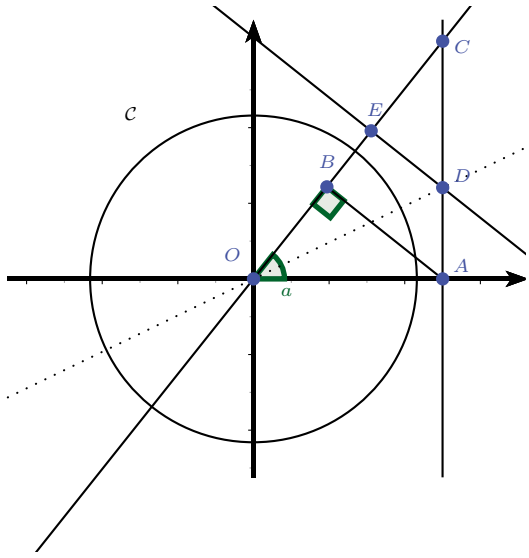
$$\begin{aligned} f(t_1) &= \frac{t_1^2(1-3t_1^2)}{3-t_1^2} \\ &= \frac{(3-2\sqrt{2})(1-9+6\sqrt{2})}{3-3+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{9\sqrt{2}-12-12+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= 17-12\sqrt{2} \\ &= (1-\sqrt{2})^4. \end{aligned}$$




# 6.11 Problèmes

**Problème 8 (Suites d'Archimède II)**
Ce problème complète le problème 2 page 91.

4. On va redémontrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et que leur limite commune est $\pi$.
   Soit $a \in \left]\, 0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\, \right[$.
   (a) Démontrer que
   $$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}, \quad \sin a = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \text{avec } t := \tan\frac{a}{2}.$$
   (b) Démontrer que
   $$\frac{1}{\tan\frac{a}{2}} = \frac{1}{\tan a} + \frac{1}{\sin a} \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\sin a \times \tan\frac{a}{2}}.$$
   (c) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right).$$
   (d) Conclure.
5. Interprétation géométrique des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. Soit $O$ un point du plan, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre $O$ et de rayon 1. Soit $a \in \left]\, 0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\, \right[$. On considère sur $\mathcal{C}$ des points $A$ et $E$, tels que $\widehat{AOE} = a$. La tangente à $\mathcal{C}$ en $A$ coupe la droite $(OE)$ en $C$. La tangente à $\mathcal{C}$ en $E$ coupe la droite $(AC)$ en $D$. Soit $B$ la projection orthogonale de $A$ sur $(OC)$.




(a) Montrer que $\widehat{AOD} = \dfrac{a}{2}$.

(b) Calculer les distances $AB$, $AC$, $AD$ et $AE$ en fonction du sinus ou de la tangente de $a$ ou de $\dfrac{a}{2}$.

(c) En déduire les égalités

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}, \tag{6.9}$$

$$AE = \sqrt{2AB \times AD}. \tag{6.10}$$

(d) Interpréter géométriquement les égalités (2.1) :

$$v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n \cdot v_{n+1}}$$

ainsi que les limites des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

**Problème 9 (Inégalité de Fejér-Jackson)**
On se propose de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \geqslant 0.$$

Ce théorème a été conjecturé par Fejér en 1910 et démontré par Jackson et Gronwall l'année suivante.
Le problème suit la démonstration d'Edmund Landau en 1932.
On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_n$ : pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \geqslant 0.$$

1. Vérifier $P_1$.
2. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in ]0, \pi]$,

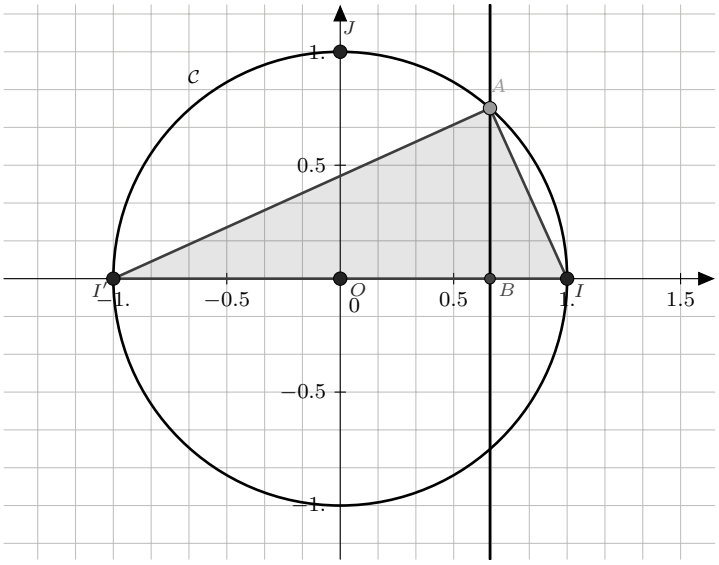
$$S_n'(x) = \cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. Soit $x \in ]0, \pi]$. Démontrer que si $S_n'(x) = 0$, alors

$$\sin(nx) = 2\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

   En déduire le signe de $\sin(nx)$ lorsque $S_n'(x) = 0$.
4. Soit $n \geqslant 2$. On suppose $P_{n-1}$. Démontrer que si $x_0 \in [0, \pi]$ réalise un minimum de $S_n(x)$, alors $S_n(x_0) \geqslant 0$. (*On pourra distinguer plusieurs cas*)
5. Conclure.

**Problème 10 (Formule d'approximation de Bhaskara)**




On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.
Soit $x \in ]\ 0\ ,\ \pi\ [$ et $A\ (\ \cos x\ ,\ \sin x\ )$ le point correspondant sur $\mathcal{C}$.
Soit $B\ (\ \cos x\ ,\ 0\ )$.
On considère le triangle $IAI'$ avec $I'\ (\ -1\ ,\ 0\ )$

1. En calculant l'aire du triangle $IAI'$ de deux façons différentes, démontrer que
$$\frac{1}{AB} = \frac{2}{AI \times AI'}.$$
2. En déduire que
$$\frac{1}{AB} < \frac{2}{x(\pi - x)}.$$
3. Tracer les représentations graphiques des fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \dfrac{x(\pi - x)}{2}$ sur $]\ 0\ ,\ \pi\ [$.
4. Déterminer deux réels $\alpha$ et $\beta$ pour que l'on ait
$$\frac{1}{AB} = \frac{2\alpha}{x(\pi - x)} + \beta$$
pour $x \in \left\{ \dfrac{\pi}{6}\ ,\ \dfrac{\pi}{2} \right\}$.
5. Tracer la représentation graphique des fonctions $f\ :\ x \longmapsto \sin x$ et $g\ :\ x \longmapsto \dfrac{1}{\dfrac{2\alpha}{x(\pi - x)} + \beta}$ sur $]\ 0\ ,\ \pi\ [$, où $\alpha$ et $\beta$ sont les deux réels déterminés à la question précédente.
6. Tracer la représentation graphique de la fonction $\ell\ :\ x \longmapsto f(x) - g(x)$ sur $]\ 0\ ,\ \pi\ [$

## 6.12 Corrigés

**Correction 8 (Suites d'Archimède)**

4. (a) D'après le théorème 10, spécifié pour $\dfrac{a}{2}$, on a
$$\sin(a) = \sin\left(2 \times \frac{a}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sin(a) &= 2\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)\\ &= 2t\times\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)},\end{aligned}$$

puisque pour tout réel $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,

$$\begin{aligned}1+\tan^2 x &= 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Finalement, on a bien

$$\sin(a)=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\tan(a) &= \frac{\sin(a)}{\cos(a)}\\ &= \frac{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}\\ &= \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)},\end{aligned}$$

en divisant numérateur et dénominateur par $\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)$. On a bien en fin de compte

$$\tan(a)=\frac{2t}{1-t^2}.$$

(b) D'après la question précédente, avec les mêmes notations,

$$\frac{1}{\tan a}+\frac{1}{\sin a}=\frac{1-t^2}{2t}+\frac{1+t^2}{2t}=\frac{1}{t}=\frac{1}{\tan\frac{a}{2}}.$$

À partir de $\sin(a)=2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)$ en multipliant les deux membres par $\tan\left(\frac{a}{2}\right)$, on a

$$\sin(a)\tan\left(\frac{a}{2}\right)=2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}=2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right).$$

Comme $a\in\left]\,0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\,\right[$, on a $\sin(a)>0$ et $\tan(a)>0$. On en déduit le résultat demandé.

(c) On considère les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n=2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\quad\text{et}\quad y_n=2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right).$$

On a $x_0 = 2^2 \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ et $y_0 = 2^2 \tan\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = 4$. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n := \frac{\pi}{2^{n+2}}$. On a $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.
De ce fait

$$\begin{aligned}\frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} &= 2 \times \frac{2^{n+2}\sin(a_n) 2^{n+2}\tan(a_n)}{2^{n+2}\sin(a_n) + 2^{n+2}\tan(a_n)} 2^{n+3} \\ &= 2 \times 2^{n+2} \frac{\sin(a_n)\tan(a_n)}{\sin(a_n) + \tan(a_n)} \\ &= 2^{n+3} \frac{1}{\frac{1}{\sin(a_n)} + \frac{1}{\tan(a_n)}} \\ &= 2^{n+3} \tan\left(\frac{a_n}{2}\right) \\ &= y_{n+1}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{x_n \cdot y_{n+1}} &= \sqrt{2^{n+2}\sin(a_n) \cdot 2^{n+3}\tan\left(\frac{a_n}{2}\right)} \\ &= 2^{n+2}\sqrt{2}\sqrt{\sin(a_n) \cdot \tan\left(\frac{a_n}{2}\right)} \\ &= 2^{n+2}\sqrt{2} \times \sqrt{2}\sin\left(\frac{a_n}{2}\right) \\ &= 2^{n+3}\sin\left(\frac{a_n}{2}\right) \\ &= x_{n+1}.\end{aligned}$$

On en déduit – via une récurrence sans difficulté – que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = x_n \qquad \text{et} \qquad u_n = y_n,$$

ce qu'il fallait vérifier.

(d) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n := \frac{\pi}{2^{n+2}}$, d'après la question précédente, on a : $u_n = \pi f(a_n)$ et $v_n = \pi g(a_n)$ en posant pour tout $x \in \left]\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ \right[$, $f(x) := \frac{\tan x}{x}$ et $g(x) := \frac{\sin x}{x}$.
D'après le théorème 15 on a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$. En divisant par $\cos x$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
Comme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, d'après le théorème 12 page 111, on a bien $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pi$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \pi$.

5. (a) Les triangles $OED$ et $OAD$ sont rectangles en $E$ et $A$ respectivement puisque les droites $(ED)$ et $(AD)$ sont tangentes à $\mathcal{C}$. D'après le théorème de Pythagore, on a $AD = \sqrt{OD^2 - OA^2} = \sqrt{OD^2 - OE^2} = ED$. Les deux points $O$ et $D$ sont donc équidistants de $A$ et $E$. La droite $(OD)$ est donc médiatrice de $[AE]$ dans le triangle $OAE$ isocèle en $O$. Elle est donc aussi bissectrice de $\widehat{AOE}$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) On a directement $AC = \tan a$ et $AD = DE = \tan\frac{a}{2}$. On a aussi $AE = 2AI$ où $I$ désigne le milieu de $[AE]$. Or $AI = \sin\frac{a}{2}$ donc $AE = 2\sin\frac{a}{2}$. Enfin dans le triangle $ABE$ rectangle en $B$, on a $\sin a = \frac{AB}{OA} = AB$.

(c) On a $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}=\dfrac{1}{\sin a}+\dfrac{1}{\tan a}=\dfrac{1}{\tan\frac{a}{2}}=\dfrac{1}{AD}$, d'après 6.9.

De même $\sqrt{2AB\times AD}=\sqrt{2\sin a\tan\frac{a}{2}}=2\sin\frac{a}{2}=AE$, d'après 6.10.

(d) On part d'un huitième de disque ($a=\frac{\pi}{4}$). On a $u_0=4$ la longueur d'une ligne polygonale circonscrite au cercle trigonométrique de sommets $\big(1\ ,\ 0\big),\big(1\ ,\ 1\big),\big(-1\ ,\ 1\big),\big(-1\ ,\ 0\big)$.
On a $v_0=2\sqrt{2}$ la longueur d'une ligne polygonale inscrite dans le cercle trigonométrique de sommets $\big(1\ ,\ 0\big),\big(0\ ,\ 1\big),\big(-1\ ,\ 0\big)$.

Ainsi $v_n$ est la longueur de la ligne polygonale inscrite de sommets $A_k\ \Big(\cos\big(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\big)\ ,\ \sin\big(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\big)\Big)$ pour $k\in[\![0,2^{n+2}]\!]$.
De même $v_n$ est la longueur de la ligne polygonale circonscrite de sommets $A_k\ \Big(\cos\big(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\big)\ ,\ \sin\big(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\big)\Big)$ et $D_k\ \Big(\tan\big(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}}\big)\ ,\ \text{cotan}\ \big(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}}\big)\Big)$, pour $k\in[\![0,2^{n+2}]\!]$.
En écrivant $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_n&=\pi\frac{2^{n+2}}{\pi}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\\&=\pi\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2^{n+2}}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$. D'après le théorème de composition des limites (théorème 3 page 103), on a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}=1$ et $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\pi$.

De même, puisque $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\pi$.

**Correction 9 (Inégalité de Fejér-Jackson)**

1. Pour $n=1$, on a bien $\dfrac{\sin x}{1}>0$ pour tous les $x$ de $]0\ ,\ \pi[$.
2. La fonction $S_n$ est dérivable sur $[0\ ,\ \pi]$ comme somme de fonctions dérivables.

   De plus pour tout $x\in]0\ ,\ \pi]$, $\qquad S_n'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

   Soit $x\in]\ 0\ ,\ \pi\ ]$. On va démontrer par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n$ :

$$C_n(x)-\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=0,$$

   où $C_n(x):=\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$.

   On a bien $\mathcal{H}_1$ puisque lorsque $n=1$, $\cos\big((n+1)\frac{x}{2}\big)\dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ se réduit à $\cos\big(2\frac{x}{2}\big)\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\cos(x)$.

   Soit $n\geqslant2$ tel que $\mathcal{H}_{n-1}$. On a donc

$$\begin{aligned}&C_n(x)-\cos\big((n+1)\tfrac{x}{2}\big)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\&=C_{n-1}(x)+\cos(nx)-\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\&=\cos\left(n\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}+\cos(nx)-\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

d'après $\mathcal{H}_{n-1}$. Donc :

$$C_n(x) - \cos\left((n+1)\tfrac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \cos\left(n\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\cos(nx)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(n\frac{x}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\cos(nx)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$- \frac{\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En développant et en simplifiant, on trouve

$$C_n(x) - \cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{-\cos^2\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(nx)\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \cos(2\alpha) + \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)$$

$$= 0 \qquad \text{en posant } \alpha := nx/2$$

On a bien établi $\mathcal{H}_n$.

Pour résumer, on a $\begin{cases} \mathcal{H}_1 \\ \forall n \geqslant 2,\ \mathcal{H}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{H}_n \end{cases}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a : $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{H}_n$ ce qu'il fallait démontrer.

Trois autres démonstrations seront données dans le cours de terminale à l'exercice 37 page 269.

3. En supposant $S_n'(x) = 0$ c'est-à-dire $\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 0$ on obtient en développant :

$$\frac{\cos\left(n\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 0, \quad \text{soit } \frac{1}{2}\sin(nx)\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin^2\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right).$$

Le résultat demandé s'en déduit. Par suite on a bien $\sin(nx) \geqslant 0$ puisque $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ sont positifs pour $x \in ]\,0\ ,\ \pi\,[$.

4. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$. $S_{n-1}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Plusieurs cas se présentent :
   - si $x_0 \in ]0, \pi[$, alors $S_n'(x_0) = 0$. D'après $\mathcal{P}_{n-1}$, $S_{n-1}(x_0) \geqslant 0$. D'après la question précédente, $\frac{\sin(nx_0)}{n} \geqslant 0$. Donc $S_n(x_0) = S_{n-1}(x_0) + \frac{\sin(nx_0)}{n} \geqslant 0$.
   - si $x_0 = 0$, alors $S_n(x_0) = 0$.
   - si $x_0 = \pi$, alors $S_n(x_0) = 0$.
5. D'après la question précédente, dans l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$, tous les minimums relatifs de $S_n$ sont strictement positifs. Donc la fonction $S_n$ est positive sur$[0, \pi]$.

   On a donc bien $\mathcal{P}_n$.

   Pour résumer, on a $\begin{cases} \mathcal{P}_1 \\ \forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_n \end{cases}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n$ ce qu'il fallait démontrer.

**Correction 10 (Formule d'approximation de Bhaskara)**

1. L'aire $\mathscr{A}$ du triangle $IAI'$ égale d'une part

$$\mathscr{A} = \frac{II' \times AB}{2} = \frac{2 \times AB}{2} = AB,$$

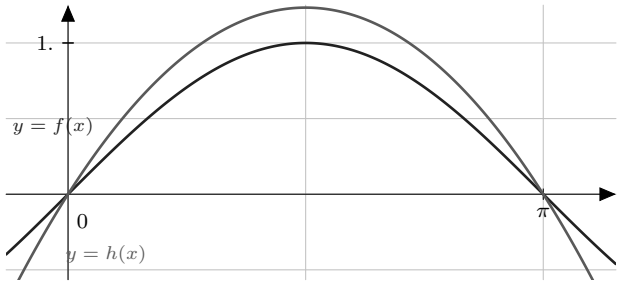
Solutions

et d'autre part

$$\mathscr{A} = \frac{AI' \times AI}{2}.$$

Donc $AB = \dfrac{AI' \times AI}{2}$ et

$$\frac{1}{AB} = \frac{2}{AI \times AI'}.$$

2. On a $0 < AI < x$ et $0 < AI' < \pi - x$, le résultat demandé en découle.
3. 

4. On résout le système

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{2\alpha}{\frac{\pi}{2}(\pi - \frac{\pi}{2})} + \beta = \dfrac{8\alpha}{\pi^2} + \beta & \text{pour } x = \dfrac{\pi}{2} \\ 2 = \dfrac{2\alpha}{\frac{\pi}{6}(\pi - \frac{\pi}{6})} + \beta = \dfrac{72\alpha}{5\pi^2} + \beta & \text{pour } x = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Ce qui donne par soustraction

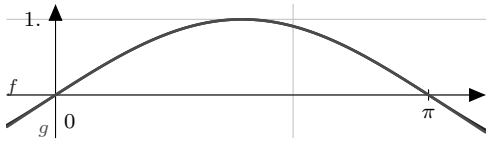
$$1 = \frac{72\alpha}{5\pi^2} - \frac{8\alpha}{\pi^2} = \frac{32\alpha}{5\pi^2},$$

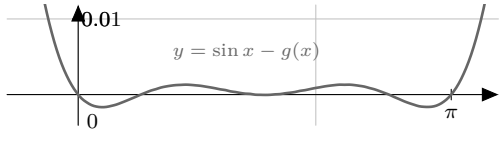
Soit $\alpha = \dfrac{5\pi^2}{32}$ puis $\dfrac{8\alpha}{\pi^2} = \dfrac{40\pi^2}{32\pi^2} = \dfrac{5}{4}$ et $\beta = -\dfrac{1}{4}$.

5. On a pour tout réel $x \in ]\,0\,,\,\pi\,[$,

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha}{x(\pi - x)} + \beta &= \frac{10\pi^2}{32x(\pi - x)} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{10\pi^2}{8x(\pi - x)} - 1\right) \\ &= \frac{1}{4}\,\frac{10\pi^2 - 8x(\pi - x)}{8x(\pi - x)} = \frac{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}{16x(\pi - x)}, \end{aligned}$$

d'où $g(x) = \dfrac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}$.

6. 




Bhaskara est un mathématicien indien du septième siècle.

# Chapitre 7

# Produit scalaire

## Sommaire


| | | |
|---|---|---|
| **7.1** | **Activités** | **271** |
| **7.2** | **Calculs avec le produit scalaire** | **273** |
| **7.3** | **Un peu de géométrie** | **275** |
| **7.4** | **Équations cartésiennes de droites et de cercles** | **277** |
| **7.5** | **Relations métriques dans le triangle** | **280** |
| **7.6** | **Formules de trigonométrie** | **282** |
| **7.7** | **Lignes de niveau** | **283** |
| **7.8** | **Puissance d'un point par rapport à un cercle** | **285** |
| **7.9** | **Exercices** | **287** |
| **7.10** | **Solutions** | **296** |
| **7.11** | **Problèmes** | **308** |
| **7.12** | **Corrigés** | **311** |

Ce chapitre fait appel à la notion d'angle de vecteurs, voir 6.1.2 page 214.

On va s'intéresser dans ce chapitre à la quantité $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$.

D'après le théorème de Pythagore, ce nombre réel est clairement nul lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Que devient-il lorsque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont plus orthogonaux ?

Peut-il être positif ? négatif ?

**Définition 1.**

On appelle **produit scalaire de deux vecteurs** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le **nombre réel**, noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, défini par :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

La présence du coefficient $\frac{1}{2}$ sera justifiée ultérieurement.

**Remarque 1.**

- Le mot *scalaire* provient du latin *scala* qui signifie *échelle*. Il a plusieurs significations aussi bien en mathématiques qu'en physique. Il faut le comprendre ici comme un nombre et son nom souligne le fait que, **si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ est lui un nombre**.
- On précisera systématiquement que c'est un produit *scalaire*, car nous verrons au paragraphe 8.9 page 340 un autre produit de deux vecteurs qui est un vecteur.

**Définition 2.**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont perpendiculaires.

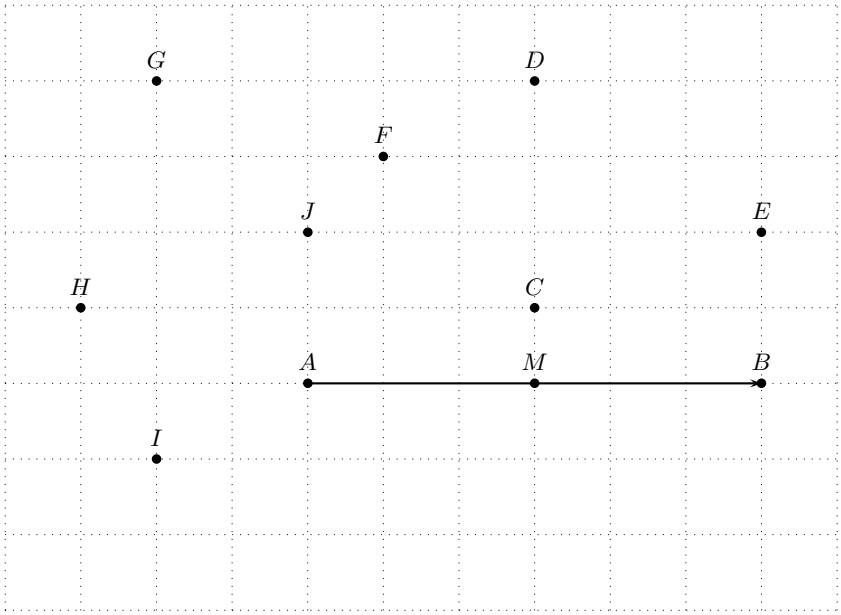
**Remarque 2.**

Si deux vecteurs non nuls sont orthogonaux, toutes les droites qu'ils dirigent respectivement sont perpendiculaires.

# 7.1 Activités

**Activité 1**
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Prouver que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

**Activité 2**
1. Compléter le tableau ci-dessous en utilisant la figure ci-dessous.




| $\vec{u}$ | $\|\vec{u}\|^2$ | $\vec{v}$ | $\|\vec{v}\|^2$ | $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ | $\vec{u} \cdot \vec{v}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{AB}$ | | $\overrightarrow{AA}$ | | | |
| | | $\overrightarrow{AC}$ | | | |
| | | $\overrightarrow{AD}$ | | | |
| | | $\overrightarrow{AB}$ | | | |
| | | $\overrightarrow{AE}$ | | | |
| | | $\overrightarrow{AF}$ | | | |
| | | $\overrightarrow{AG}$ | | | |
| | | $\overrightarrow{AH}$ | | | |
| | | $\overrightarrow{AI}$ | | | |
| | | $\overrightarrow{AJ}$ | | | |

2. Conjecturer des réponses aux questions suivantes :
   (a) Dans quel(s) cas un produit scalaire est-il positif ? négatif ? nul ?
   (b) Existe-t-il des points différents qui donnent le même produit scalaire ?
   À quelle configuration géométrique les points concernés semblent-ils appartenir ?
   (c) Que peut-on dire du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires ?
   (d) Que peut-on dire du produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux ?

**Activité 1**

Par construction, le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

De ce fait,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \iff \frac{1}{2}\left(AD^2 - AB^2 - AC^2\right) = 0 \iff AD^2 = AB^2 + AC^2 \iff ABD \text{ est rectangle en } D.$$

Donc pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.

**Activité 2**

1. En prenant comme unité celle du quadrillage,

| $\overrightarrow{u}$ | $\|\overrightarrow{u}\|^2$ | $\overrightarrow{v}$ | $\|\overrightarrow{v}\|^2$ | $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2$ | $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{AB}$ | 36 | $\overrightarrow{AA}$ | 0 | 36 | 0 |
| | | $\overrightarrow{AC}$ | 10 | 82 | 18 |
| | | $\overrightarrow{AD}$ | 25 | 97 | 18 |
| | | $\overrightarrow{AB}$ | 36 | 144 | 36 |
| | | $\overrightarrow{AE}$ | 40 | 148 | 36 |
| | | $\overrightarrow{AF}$ | 10 | 58 | 6 |
| | | $\overrightarrow{AG}$ | 20 | 32 | -12 |
| | | $\overrightarrow{AH}$ | 10 | 10 | -18 |
| | | $\overrightarrow{AI}$ | 5 | 17 | -12 |
| | | $\overrightarrow{AJ}$ | 4 | 40 | 0 |

2. (a) Un produit scalaire est
   - positif lorsqu'ils forment un angle aigu.
   - négatif lorsqu'ils forment un angle obtus.
   - nul lorsqu'ils forment un angle droit. (déjà vu à l'activité 1)

   (b) Des points situés sur une même droite perpendiculaire à la droite $(AB)$ semblent donner le même produit scalaire.

(c) La valeur absolue du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires semble égaler le produit de leurs normes.

(d) Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul. (déjà vu à l'activité 1)

## 7.2 Calculs avec le produit scalaire

### 7.2.1 Autres expressions du produit scalaire

**Théorème 1**
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormal où $\overrightarrow{u}(x\,,\,y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,,\,y')$ alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.
2. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$.

**Remarque 3.**

1. Si l'un des vecteurs est égal au vecteur nul, l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v})$ n'est pas défini.
2. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, il n'a pas de direction.
3. Dans tous les cas, si l'un des vecteurs est nul, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$.
4. Le produit scalaire de deux vecteurs d'une certaine façon est une mesure du défaut d'orthogonalité entre ces deux vecteurs.

**Démonstration 1**

1. On a $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ et, parce que le repère est orthonormé, $\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2$, $\|\overrightarrow{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$ et $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y'^2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2xx' + 2yy'\right) \\
&= xx' + yy'.
\end{aligned}$$

2. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et $O$, $A$ et $B$ trois points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $-\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. Dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux c'est dire que $OAB$ est rectangle en $O$. C'est aussi dire que $OA^2 + OB^2 = AB^2$, soit $\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|-\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2$ soit encore $\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2$ soit enfin $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

### 7.2.2 Calcul de produits scalaires

**Théorème 2**
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2.$$

**Remarque 4.**

Autrement dit, on va pouvoir calculer des longueurs par des calculs de produits scalaires. On peut ainsi passer aisément des longueurs aux vecteurs et réciproquement, permettant ainsi de faire appel aux vecteurs, et à leur souplesse, dans bien des démonstrations concernant les longueurs.

**Démonstration 2**
En effet $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(4\|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\|\overrightarrow{u}\|^2\right) = \|\overrightarrow{u}\|^2$. □

**Théorème 3 (Règles de calcul)**
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs et $k$ un réel.

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
2. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$
3. $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

**Démonstration 3**

1. L'expression donnant le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est symétrique en $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2. On se place dans un repère orthonormé. On considère les coordonnées des différents vecteurs. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$. On a successivement $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$. On a alors

   $$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy'' = xx' + yy' + xx'' + yy'' = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}.$$

3. La démarche est identique à la précédente. □

**Théorème 4 (Identités remarquables)**
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

1. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
2. $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

**Démonstration 4**
En appliquant le deuxième point du théorème précédent on obtient facilement ces résultats. □

**Théorème 5 (Produit scalaire et coordonnées)**
Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé. Soit $\vec{u}(x\,,\,y)$ un vecteur.

$$x = \vec{u} \cdot \vec{\imath} \qquad \text{et} \qquad y = \vec{u} \cdot \vec{\jmath}$$

**Démonstration 5**
$\vec{u} \cdot \vec{\imath} = x \times 1 + y \times 0 = x$ et $\vec{u} \cdot \vec{\jmath} = x \times 0 + y \times 1 = y$ □

### 7.2.3 Encore d'autres expressions pour le produit scalaire

Elles sont plus anecdotiques. Leurs vérifications ne posent aucun problème.

**Théorème 6**
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.

## 7.3 Un peu de géométrie

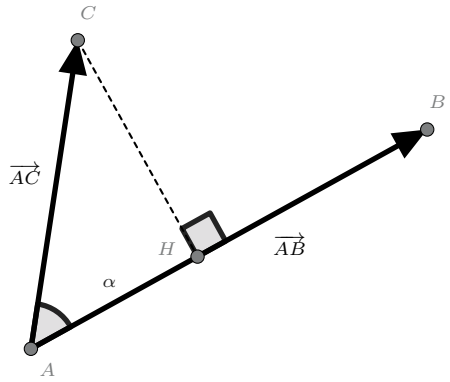
**Théorème 7 (Cas de trois points)**
Soit $A$, $B$ et $C$ trois points du plan.

1. Lorsque $A$ et $B$ distincts, soit $H$ le projeté orthogonal de $C$ sur la droite $(AB)$ :
   - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.
   - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés.
2. Lorsque $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

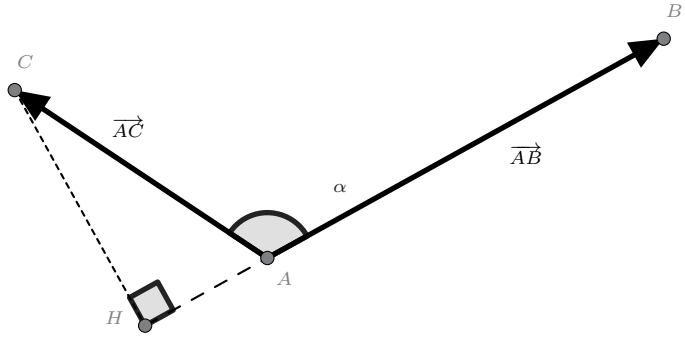
**Démonstration 7**

1. On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$. Or par définition du projeté orthogonal, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux. De ce fait $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$. Maintenant, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires : il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB}$. De ce fait $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = k\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$.
   - Lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, $k \geqslant 0$ et $AH = kAB$.
   - Lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, $k \leqslant 0$ et $AH = |k|AB = -kAB$.

   Dans les deux cas, le résultat en découle.
2. Avec les notations précédentes, lorsque $k \geqslant 0$,




On a bien $AH = AC\cos\alpha = AC\cos\widehat{BAC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH = AC\cos\widehat{BAC}$.




On a cette fois $AH = -AC\cos\alpha = -AC\cos\widehat{BAC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH = AC\cos\widehat{BAC}$. □

**Théorème 8**
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan distincts du vecteur nul. On a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

C'est une simple application du théorème précédent. Simple ? Oui, à condition de remarquer que l'angle non orienté $\widehat{BAC}$ a le même cosinus que les deux angles orientés $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.

Puisque la valeur absolue d'un cosinus est comprise entre 0 et 1 on obtient le très important théorème suivant :

**Théorème 9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**
Quels que soient les vecteurs du plan $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,

$$|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|,$$

et il y a égalité uniquement lorsque les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

**Démonstration 9**
Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est le vecteur nul, l'inégalité est une égalité claire. De plus les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Sinon c'est une application du théorème 8. Le cas d'égalité ne se produit alors que si le cosinus est égal à 1 ou à $-1$, c'est-à-dire lorsque les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. □

Application : L'**inégalité triangulaire** 1 page 136 avait été énoncée dans le cours de seconde, mais n'avait pas été démontrée.

**Théorème 10 (Inégalité triangulaire)**
Soit $A$, $B$ et $C$ trois points du plan. On a l'inégalité suivante entre les distances :

$$AC \leqslant AB + BC.$$

De plus, pour que $AC = AB + BC$, il faut et il suffit que le point $B$ appartienne au segment $[AC]$.

**Démonstration 10**
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\overrightarrow{u} := \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} := \overrightarrow{BC}$,

$$\begin{array}{lrcl}
\text{soit} & 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} & \leqslant & 2\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{BC}\| \\
\text{soit} & \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \|\overrightarrow{BC}\|^2 & \leqslant & \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\
\text{soit} & \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\|^2 & \leqslant & \left(\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|\right)^2 \\
\text{soit} & \|\overrightarrow{AC}\|^2 & \leqslant & \left(\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|\right)^2 \\
\text{soit} & AC^2 & \leqslant & (AB+BC)^2 \\
\text{soit} & AC & \leqslant & AB+BC.
\end{array}$$

# 7.4 Équations cartésiennes de droites et de cercles

## 7.4.1 Équations cartésiennes de droites

Le produit scalaire nous permet d'obtenir d'une autre manière l'équation cartésienne d'une droite.

**Définition 3.**

Le plan est muni d'un repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$. On appelle **vecteur normal** à une droite $\mathcal{D}$ tout vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

**Théorème 11**
Soient $\mathcal{D}$ une droite, $A$ un point de cette droite et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à cette droite. $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

**Démonstration 11**
Si $M$ est un point de $(\mathcal{D})$ distinct de $A$, alors $\overrightarrow{AM}$ a une direction orthogonale à celle de $\overrightarrow{n}$ donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$. En outre, si $M=A$, on a évidemment $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

Réciproquement, si $M$ est un point vérifiant $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$, alors $(AM)$ est une droite perpendiculaire à la direction de $\overrightarrow{n}$ et qui passe par $A$ donc $(AM)$ et $\mathcal{D}$ sont confondues d'où $M\in\mathcal{D}$. □

**Théorème 12**
Soit $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé du plan.
- Toute droite admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où $a$, $b$ et $c$ sont trois réels avec $(a,b)\neq(0,0)$.
- Réciproquement, soient $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$, l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(-b,a)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\left(a\ ,\ b\right)$.

**Démonstration 12**
- Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et soit $A$ un point de cette droite de coordonnées $(x_A,y_A)$. Alors $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires si et seulement si $v(x-a)-u(y-b)=0$ c'est-à-dire $vx-uy-va+ub=0$ ce qui est bien une équation de la forme cherchée.
- Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Si $b\neq0$, l'équation $ax+by+c=0$ s'écrit $y=\dfrac{-a}{b}x-\dfrac{c}{b}$. Le point $A$ de coordonnées $\left(b\ ,\ -a-\dfrac{c}{b}\right)$ appartient donc à $\mathcal{D}$. Par suite $M\left(x\ ,\ y\right)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si $a(x-b)+b(y+\dfrac{c}{b}+a)=0$ c'est-à-dire $ax+by+c=0$. Les points de la droite sont donc bien les points vérifiant l'équation $ax+by+c=0$. Le cas où $b=0$ et alors $a\neq0$ d'après l'hypothèse $(a,b)\neq(0,0)$ se traite de la même manière. □

**Exemple 1**
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x+2y-5=0$. L'équation réduite de la droite est $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$. Les vecteurs de coordonnées $(1,-\dfrac{3}{2})$ et $(-2,3)$ sont des vecteurs directeurs de la droite.

**Exemple 2**
Soit $\mathcal{D}$ la droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et passant par $A$ de coordonnées $(-1,4)$. Alors $M\left(x\ ,\ y\right)$ appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$ si et seulement si $3(x+1)+2(y-4)=0$ si et seulement si $3x+2y-5=0$ qui est donc une équation de la droite $\mathcal{D}$.

Pour convaincre le lecteur de l'efficacité du produit scalaire, rappelons le théorème 5 page 387 déjà vu dans le cours de seconde :

**Théorème 13**
Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Soit $D$ et $D'$, deux droites admettant des équations réduites. Pour que $D$ et $D'$ soient perpendiculaires, il faut et il suffit que le produit de leurs coefficients directeurs égale $-1$.

**Démonstration 13**
Soit $m$ et $m'$ les coefficients directeurs respectifs de $D$ et $D'$. Dire que deux droites sont perpendiculaires c'est dire qu'elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux. Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ dirigent les droites $D$ et $D'$. Leur produit scalaire est $1+mm'$ puisque le repère est orthonormé. Pour qu'il soit nul, il faut et il suffit que $mm'=-1$. □

**Théorème 14 (Distance d'un point à une droite)**
Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O};\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ **orthonormé**.
Soit $\mathcal{D}: ax+by+c=0$ une droite et $A\ (x_A, y_A)$ un point quelconque du plan.

La distance de $A$ à $\mathcal{D}$, notée $d(M,\mathcal{D})$ est

$$d(\mathrm{A},(d)) = AH = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

où $H$ est le projeté orthogonal de $A$ sur la droite $\mathcal{D}$.

**Démonstration 14**
En effet, si $M\left(x\ ,\ y\right)$ est un point quelconque de la droite $\mathcal{D}$, et si on note $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(a,b)$, alors la valeur absolue du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ est donnée par les deux expressions :

- $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{n}| = |a(x-x_\mathrm{A})+b(y-y_\mathrm{A})| = |ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+c|$ ( $ax+by=-c$ car $M$ est un point de $\mathcal{D}$)
- $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{n}| = AH\times||\overrightarrow{n}|| = AH\times\sqrt{a^2+b^2}$.

Le résultat découle de l'égalité des deux expressions de $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}$ □

## 7.4.2 Cercle et produit scalaire

Le produit scalaire nous permet d'obtenir un autre type d'équation cartésienne de cercle.

**Théorème 15**
Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

**Démonstration 15**
$M\in\mathcal{C}$ et $M$ distinct de $A$ et $B$ si et seulement si $MAB$ est un triangle rectangle c'est à dire si et seulement si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux. Les cas $M=A$ et $M=B$ sont évidents. □

On en déduit le théorème suivant :

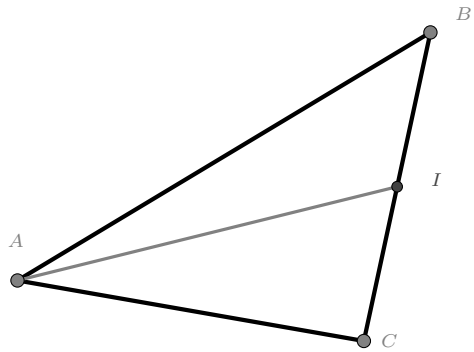
**Théorème 16**
Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ **orthonormé**.
Soit $A(x_a\,,\,y_a)$ et $B(x_b\,,\,y_b)$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
Alors tout point $M$ de $\mathcal{C}$ a ses coordonnées qui vérifient $(x-x_a)(x-x_b)+(y-y_a)(y-y_b)=0$.

## 7.5 Relations métriques dans le triangle

### 7.5.1 Théorème de la médiane

**Théorème 17**
Soit $ABC$ un triangle. Soit $I$ le milieu de $[BC]$. Alors :

$$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}.$$




**Démonstration 17**

$$\begin{aligned}
AB^2+AC^2 &= (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})^2+(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})^2\\
&= \overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{IC}^2+2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC}\\
&= 2AI^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{AI}.(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})\\
&= 2AI^2+2(\frac{1}{2}BC)^2\\
&= 2AI^2+\frac{1}{2}BC^2
\end{aligned}$$

### 7.5.2 Théorème d'Al Kashi

**Théorème 18 (d'Al Kashi)**
Soit $ABC$ un triangle. On note $a := BC$, $b := AC$, $c := AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{C} = \widehat{BCA}$.
Alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$

Ce théorème était appelé loi des cosinus. C'est ainsi qu'il est appelé de nos jours dans le reste du monde.

**Démonstration 18**

$$\begin{aligned} a^2 &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 \\ &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \\ &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ &= c^2 + b^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= c^2 + b^2 - 2bc\cos(\widehat{A}) \end{aligned}$$

**Remarque 5.**

Par permutation des côtés on a aussi :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B}) \text{ et}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$$

### 7.5.3 Formule de Héron

**Théorème 19 (de Héron)**
Soit $ABC$ un triangle. On note $a := BC$, $b := AC$, $c := AB$.
On pose $s := \dfrac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre de $ABC$.
L'aire du triangle $ABC$ égale

$$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

**Démonstration 19**
D'après la formule de l'aire 6.3.1 page 219, on a $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.

D'après le théorème d'Al Kashi, $\cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{ab}{2}\sqrt{1-\cos^2\widehat{C}} \\
&= \frac{ab}{2}\sqrt{\left(1-\cos\widehat{C}\right)\left(1+\cos\widehat{C}\right)} \\
&= \frac{ab}{2}\sqrt{\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab-a^2-b^2+c^2)\,(2ab+a^2+b^2-c^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(c^2-(a-b)^2)\,((a+b)^2-c^2)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)2s} \\
&= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}.
\end{aligned}$$

## 7.6 Formules de trigonométrie

On redémontre les formules du théorème 9 page 221 qui avaient été pénibles à démontrer en leur temps.

**Théorème 20 (formules d'addition)**
Quels que soient les réels $a$ et $b$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

$$\sin(a-b) = \cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)$$

**Démonstration 20**
Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre $O$ et muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$. $A$ et $B$ sont les points du cercle tels que $(\vec{\imath},\overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{\imath},\overrightarrow{OB}) = b$ en radians. Donc $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.
D'après la relation de Chasles pour les angles orientés on a : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA},\vec{\imath}) + (\vec{\imath},\overrightarrow{OB})$ donc $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = b-a$.

Or $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ d'une part et $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\times OB\times\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = OA\times OB\times\cos(b-a)$ d'autre part. D'où la formule $\cos(b-a) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.

La formule

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

s'obtient en prenant $-a$ au lieu de $a$.

On a en outre

$$\begin{aligned}\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) &= \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(-b) + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin(-b)\\ &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\end{aligned}$$

et la dernière formule s'en déduit. □

Les autres formules de trigonométries en découlent. Voir 6.4 page 221.

## 7.7 Lignes de niveau

### 7.7.1 Exemple 1

Soient deux points $A$ et $B$ distincts du plan, on cherche les points $M$ qui sont tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = k, \tag{7.1}$$

où $k$ est un réel.

Soit $M$ un point vérifiant cette relation et $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur $(AB)$, alors on a : $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = k$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \text{si } k > 0, \quad AH = \dfrac{k}{AB} \text{ et } H \text{ est du même côté de } A \text{ que } B, \\ \\ \text{si } k < 0, \quad AH = -\dfrac{k}{AB} \text{ et } H \text{ est du côté opposé à } B \text{ par rapport à } A, \end{cases}$$

ce qui permet de placer le point $H$ de manière unique sur la droite $(AB)$ donc tout point $M$ solution de l'équation (7.1) a pour projeté orthogonal le point $H$ ainsi défini.

Ainsi l'ensemble des points $M$ vérifiant cette équation est inclus dans la droite $\Delta$ perpendiculaire à la droite $(AB)$ et qui passe par le point $H$.

Autrement dit, si $S$ est l'ensemble solution de (7.1), on a $S \subset \Delta$.

Mais nous devons nous demander si réciproquement tout point de cette droite vérifie l'équation (7.1) : a-t-on $\Delta \subset S$ ?

Soit un point $M$ de cette droite, alors $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur la droite $(AB)$,
si nous sommes dans le cas $k > 0$, $AH = \dfrac{k}{AB}$ et $H$ est du même côté de $A$ que $B$, alors on a bien $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = k$,
et de même dans l'autre cas.

On a donc bien $\Delta \subset S$.

La double inclusion est équivalente à une égalité donc l'ensemble solution de (7.1) est bien $\Delta$.

Dans la détermination d'un lieu, il est important de veiller à la réciproque pour avoir la double inclusion. Une autre manière de raisonner est à base d'équivalences mais il faut alors veiller à ce que les équivalences soient valides à toutes les étapes du raisonnement.

### 7.7.2 Exemple 2

Soient deux points $A$ et $B$ du plan, on cherche les points $M$ qui sont tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k, \tag{7.2}$$

où $k$ est un réel.

On pose $I$ milieu de $[AB]$, l'équation (7.2) est équivalente aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) &= k \\ \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + IM^2 &= k \\ -AI^2 + IM^2 &= k \end{aligned}$$

(On aurait pu déduire directement la dernière équation du théorème de la médiane).

On cherche donc les points $M$ qui sont tels que : $IM^2 = k + AI^2$

**Cas 1** $k + AI^2 < 0$, *i.e.* $k < -AI^2$, alors $IM^2 < 0$, il n'existe pas de ligne de niveau dans ce cas là.

**Cas 2** $k = -AI^2$, alors $IM^2 = 0$ et $I$ est donc confondu avec $M$.

**Cas 3** $k + AI^2 > 0$, *i.e.* $k > -AI^2$, alors $IM^2 = k + AI^2$, *i.e.* $IM = \sqrt{k + AI^2}$. L'ensemble des points $M$ est un cercle de centre $I$ et de rayon $\sqrt{k + AI^2}$.

**Cas particulier :** si $k = 0$, la solution est le cercle de diamètre $[AB]$.

### 7.7.3 Exemple 3

Soient deux points $A$ et $B$ du plan, on cherche les points $M$ qui sont tels que

$$MA^2 - MB^2 = k, \tag{7.3}$$

où $k$ est un réel.

On pose $I$ milieu de $[AB]$, l'équation (7.3) est alors équivalente aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 &= k \\ 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} &= k \end{aligned}$$

On retrouve un résultat précédent, en effet les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} &= k \\ (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 &= k \\ (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}) \cdot \overrightarrow{BA} &= k \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA} &= k \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} &= k - \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve une équation du type de (7.1) avec une nouvelle constante en deuxième membre...

### 7.7.4 Exemple 4

Soient deux points $A$ et $B$ du plan, on cherche les points $M$ qui sont tels que

$$MA^2 + MB^2 = k, \tag{7.4}$$

où $k$ est un réel.

Posons $I$ milieu de $[AB]$, l'équation (7.4) est alors équivalente aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 &= k\\ MI^2+IA^2+2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA}+MI^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} &= k\\ 2MI^2+2IA^2 &= k.\end{aligned}$$

Les points $M$ solutions de (7.4) sont donc ceux tels que $2MI^2+2IA^2=k$, ou tels que $IM^2=\dfrac{k-2IA^2}{2}$.

**Cas 1** Si $k=2IA^2$ alors $I$ et $M$ sont confondus.

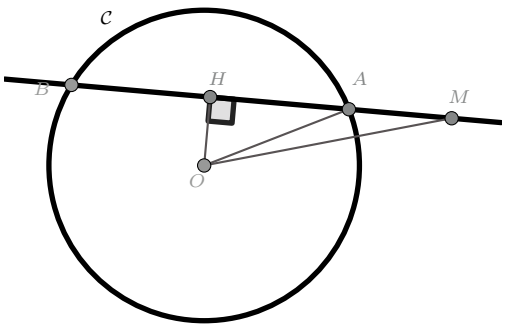
**Cas 2** Si $k<2IA^2$ alors il n'y a pas de solution.

**Cas 3** Si $k>2IA^2$ alors l'ensemble des points $M$ solutions de (7.4) est le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-2IA^2}{2}}$.

## 7.8 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$ et de rayon $R$. Soit $M$ un point du plan. On trace une droite passant par $M$ qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points $A$ et $B$.

On cherche à calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.




Soit $H$ le milieu de $[AB]$. Les points $O$ et $H$ sont à égale distance de $A$ et $B$ donc appartiennent à la médiatrice de $[AB]$. En particulier l'angle $\widehat{MOH}$ est droit.

Par ailleurs puisque $H$ est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{HA}=-\overrightarrow{HB}$. Tout est en place :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}\right)\\ &= MH^2-HA^2\end{aligned}$$

D'après le théorème de Pythagore on a :
$MH^2=OM^2-OH^2$ dans le triangle $OHM$ et $HA^2=MA^2-OH^2$ dans le triangle $OHM$. Donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= OM^2-OH^2-(MA^2-OH^2)\\ &= OM^2-MA^2\\ &= OM^2-R^2\end{aligned}$$

On est en mesure d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 21**
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$ et de rayon $R$. Soit $M$ un point du plan. On trace une droite passant par $M$ qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points $A$ et $B$ (éventuellement confondus).

Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ égale $OM^2 - R^2$. Il ne dépend pas du choix de la droite. On l'appelle **puissance du point $M$ par rapport au cercle $\mathcal{C}$**.

**Remarque 6.**

Le signe de la puissance d'un point par rapport à un cercle permet de savoir si ce point est à l'intérieur ou à l'extérieur de ce cercle.

**Théorème 22 (Axe radical)**
Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centres respectifs $A$ et $B$.

L'ensemble des points $M$ qui ont même puissance par rapport à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est une droite perpendiculaire à la droite $(AB)$ et appelée **axe radical** des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

**Démonstration 22**
On se place dans un repère orthonormé dans lequel $A\ \left(0\ ,\ 0\right)$ et $B\ \left(d\ ,\ 0\right)$. Soient $r_1$ et $r_2$ les rayons respectifs de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Soit $M\ \left(x\ ,\ y\right)$ un point du plan.

La puissance de $M$ par rapport à $\mathcal{C}_1$ est $x^2 + y^2 - r_1^2$. La puissance de $M$ par rapport à $\mathcal{C}_2$ est $(x-d)^2 + y^2 - r_2^2$.

On a l'égalité entre les deux puissances si et seulement si

$$\begin{array}{rrcl} & x^2 + y^2 - r_1^2 & = & (x-d)^2 + y^2 - r_2^2 \\ \text{soit} & -r_1^2 & = & -2dx + d^2 - r_2^2 \\ \text{soit} & 2dx & = & d^2 - r_2^2 + r_1^2. \end{array}$$

Puisque $d \neq 0$, on a bien l'équation d'une droite « verticale » c'est-à-dire perpendiculaire à la droite $(AB)$.□

**Théorème 23 (Centre radical)**
Les axes radicaux de trois cercles de centres non alignés concourent en un point appelé **centre radical** des trois cercles.

**Démonstration 23**
Les axes radicaux de deux des trois cercles sont sécants. Leur point d'intersection a même puissance par rapport aux trois cercles. Il appartient donc au troisième axe radical. □

## 7.9 Exercices

### 7.9.1 Applications des définitions et propriétés

**Exercice 1.**

1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même norme et sont tels que $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \dfrac{5\pi}{6} \quad (2\pi)$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Déterminer la norme de $\overrightarrow{u}$.
2. $ABC$ est un triangle et $AB = 2$, $AC = 6$ et $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$. Déterminer $BC$.

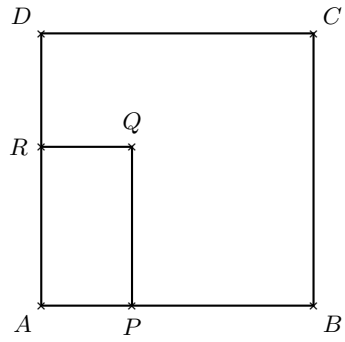
**Exercice 2.**

1. Déterminer $\|2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}\|^2$ sachant que $\|\overrightarrow{u}\|^2 = 2$ et $\|\overrightarrow{v}\|^2 = 4$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 3$.
2. On donne $ABC$ tel que $AB = 9$, $BC = 4$ et $AC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

**Exercice 3.**

Soit $ABCD$ un carré de sens direct. On construit un rectangle $APQR$ de sens direct tel que :
– $P \in [AB]$ et $R \in [AD]$ ;
– $AP = DR$.

1. Justifier que :
$\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ}.\left(\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP}\right)$.
2. En déduire que les droites $(CQ)$ et $(PR)$ sont perpendiculaires.



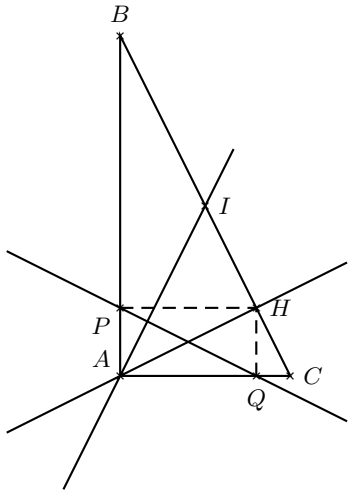

**Exercice 4.**

Soient $G$ et $H$ deux points distincts du plan et $I$ le milieu du segment $[GH]$.
Démontrer que pour tout point $M$ on a $MG^2 - MH^2 = 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{HG}$.

**Exercice 5.**

$ABC$ est un triangle rectangle en $A$. Le point $H$ est le pied de la hauteur issue de $A$ ; $I$ est le milieu de $[BC]$ ; $P$ et $Q$ sont les projetés orthogonaux de $H$ respectivement sur $(AB)$ et $(AC)$.

1. Montrer que $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}$.
2. Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA}$ et que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$.
4. Que peut-on en déduire pour les droites $(AI)$ et $(PQ)$ ?




**Exercice 6.**

$ABC$ est un triangle équilatéral de côté 5 cm. $I$ est le milieu de $[BC]$.
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;
2. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$ ;
3. $\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AI}$.

**Exercice 7.**

$ABC$ est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$. Ce triangle est-il rectangle ?

**Exercice 8.**

$MNPQ$ est un carré avec $MN = 6$. Le point $I$ est le centre du carré.
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{QP}$ ;
2. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN}$ ;
3. $\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IP}$ ;
4. $\overrightarrow{QI} \cdot \overrightarrow{NI}$.

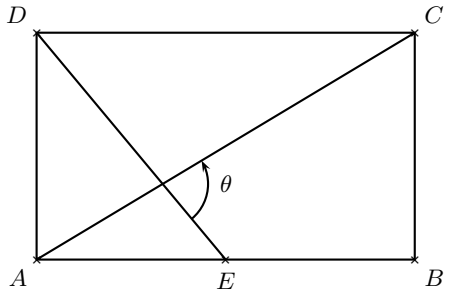
**Exercice 9.**

$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. En déduire $BD$

**Exercice 10.**

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$. $E$ est le milieu de $[AB]$.

1. Calculer les longueurs $AC$ et $DE$.
2. En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}$.
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC}\right)$ en degrés à 0,01 près.




**Exercice 11.**

Le but de cet exercice est de démontrer, à l'aide du produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Soit $ABC$ un triangle. On note $A'$, $B'$ et $C'$ les projetés orthogonaux respectifs de $A$, $B$ et $C$ sur $(BC)$, $(AC)$ et $(AB)$. On note $H = (BB') \cap (CC')$.

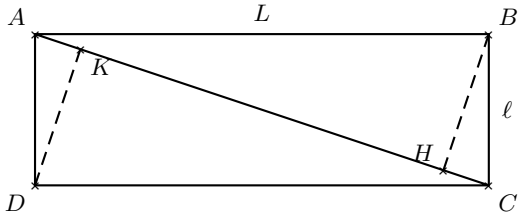
1. Que valent les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}$ ?
2. Calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Conclure.

**Exercice 12.**

À quelle condition sur les points $A$, $B$ et $C$ a-t-on : $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = (AB + AC)^2$ ?

**Exercice 13.**

$ABCD$ est un rectangle de longueur $L$ et de largeur $l$. Soient $H$ et $K$ les projetés orthogonaux des sommets $B$ et $D$ sur la diagonale $(AC)$.




1. Calculer $HK$ en fonction des longueurs des côtés $L$ et $\ell$.
   *On pourra évaluer de deux manières le produit scalaire* $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}$.
2. Comment choisir $L$ et $\ell$ pour avoir $AC = 2HK$ ?
   Exprimer alors l'aire du parallélogramme $BHDK$ en fonction de l'aire du rectangle $ABCD$.

**Exercice 14.**

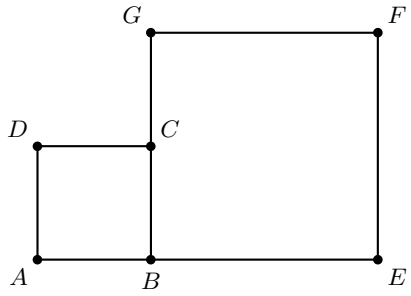
$ABCD$ est un losange de sens direct et de centre $O$. On donne $AC = 10$ et $BD = 6$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. On note $P$ le projeté orthogonal de $D$ sur la droite $(AB)$. Calculer $AP$.
3. En déduire la hauteur $h$ du losange si l'on choisit comme base le côté $[AB]$.

**Exercice 15.**

$B$ est un point appartenant à $[AE]$. $ABCD$ et $BEFG$ sont des carrés situés dans le même demi-plan par rapport à $(AE)$, comme sur la figure ci-contre.

Montrer que $(EC)$ est la hauteur issue de $E$ dans le triangle $AEG$.



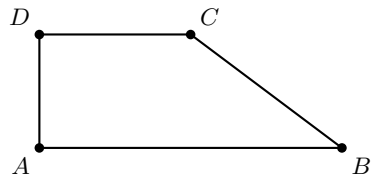

**Exercice 16.**

Construire à la règle graduée et au compas le triangle $KLN$ tel que $KL = 3$, $KN = 6$ et $\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KN} = 9$.

**Exercice 17.**

$ABCD$ est un trapèze rectangle de base $AB = 2a$ et $CD = a$ et de hauteur $AD = h$.

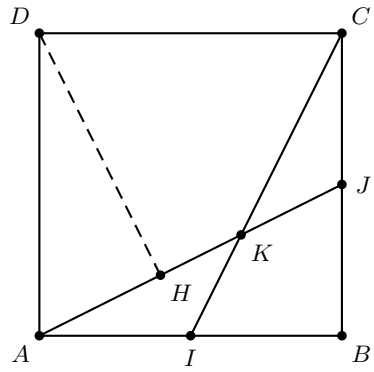
1. Exprimer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de $a$ et de $h$.
2. Existe-t-il une valeur de $h$ telle que les diagonales $(AC)$ et $(BD)$ soient perpendiculaires ?




**Exercice 18.**

$ABCD$ est un carré de côté $a$, $I$ et $J$ sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. Le point $H$ est le projeté orthogonal de $D$ sur la droite $(AJ)$ et $K$ le point d'intersection des segments $[AJ]$ et $[CI]$.

1. En exprimant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AD}$ :
   (a) Calculer la longueur $AH$ en fonction de $a$ ;
   (b) En déduire la distance du point $D$ à la droite $(AJ)$ en fonction de $a$.
2. En exprimant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{CI}$, déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{JKI}$ puis donner la valeur approchée à 0,1° près par défaut de la mesure de $\widehat{JKI}$.




## 7.9.2 Équations cartésiennes

*Dans tous les exercices de ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormal.*

**Exercice 19.**

Les vecteurs $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

**Exercice 20.**

On donne $A\ (1\,,\,2)$, $B\ (2\,,\,1)$ et $C\ (-3\,,\,0)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $C$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

**Exercice 21.**

Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5\,,\,1)$ et tangent à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x+y-4=0$.

**Exercice 22.**

On considère un triangle $ABC$ avec $A\ (-1\,,\,2)$, $B\ (3\,,\,1)$ et $C\ (2\,,\,4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de $A$ dans le triangle $ABC$.

**Exercice 23.**

On donne $\Omega\ \left(2\,,\,-3\right)$.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega$ et de rayon $r=5$.
2. Démontrer que le point $A\ (-2\,,\,0)$ est un point du cercle $\mathcal{C}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en $A$ au cercle $\mathcal{C}$.

**Exercice 24.**

Soit $A\ \left(3\,,\,5\right)$. Chercher une équation de la tangente en $A$ au cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$, origine du repère, et passant par $A$.

**Exercice 25.**

Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ du plan dont les coordonnées $(x\,,\,y)$ vérifient :

$$(x-3)(x+2)+(y-1)(y-4)=0.$$

**Exercice 26.**

Soit $\Gamma$ l'ensemble des points $M\ \left(x\ ,\ y\right)$ qui vérifient $x^2+y^2-4x+8y-5=0$. Que peut-on dire de $\Gamma$ ?

**Exercice 27.**

1. Dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}k\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}k-1\\3\end{pmatrix}$. Déterminer la ou les valeur(s) de $k$, si elles existent, telles que les deux vecteurs soient orthogonaux.
2. Les points $A$, $B$, $C$ ont pour coordonnées respectives $\left(1\ ,\ 1\right)$, $\left(3\ ,\ 4\right)$ et $\left(3-k\ ,\ -1\right)$, où $k$ est un réel.
   (a) Déterminer $k$ afin que le triangle $ABC$ soit rectangle en $A$.
   (b) Démontrer que le triangle $ABC$ est alors isocèle en $A$.

**Exercice 28.**

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\ \left(\alpha\ ,\ \beta\right)$ et ayant $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.
2. $ABCD$ est un carré, $I$ est le milieu de $[CB]$ et $J$ celui de $[AB]$. Montrer que les droites $(AI)$ et $(DJ)$ sont perpendiculaires.
3. Le cercle $\mathcal{C}$ a pour diamètre $[AB]$ avec $A\ \left(2\ ,\ 2\right)$ et $B\ \left(6\ ,\ -2\right)$. Déterminer une équation de la tangente en $B$ au cercle $\mathcal{C}$.
4. $(d)$ est une droite dont une équation est $y=x-1$ et $A$ est le point qui a pour coordonnées $\left(2\ ,\ 3\right)$. On note $H$ le projeté orthogonal du point $A$ sur $(d)$.
   (a) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{AH}$ ?
   (b) Déterminer les coordonnées du point $H$.
   (c) Calculer la distance $AH$ (qui est la distance du point à la droite...)

**Exercice 29.**

Soit $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{\imath}+y\overrightarrow{\jmath}$. Démontrer que $x=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\imath}$ et $y=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\jmath}$

**Exercice 30.**

Soit $A$, $B$, $C$ et $M$ quatre points du plan.

1. Démontrer l'**identité de Jacobi** :
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$
2. En déduire une nouvelle démonstration du théorème 27 page 156 du cours de seconde : Les trois hauteurs d'un triangle $ABC$ sont concourantes.

**Exercice 31** (Encore ?)**.**

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Démontrer que pour tout réel $x$,
$$x^2\|\overrightarrow{u}\|^2+2x|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|+\|\overrightarrow{v}\|^2\geqslant 0.$$
2. En calculant un discriminant, démontrer que
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\leqslant\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.$$
3. En changeant $\overrightarrow{u}$ en $-\overrightarrow{u}$, démontrer que
$$-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\leqslant\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.$$
4. En déduire que
$$|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|\leqslant\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.$$
5. Quel théorème avez-vous démontré ?

**Exercice 32.**

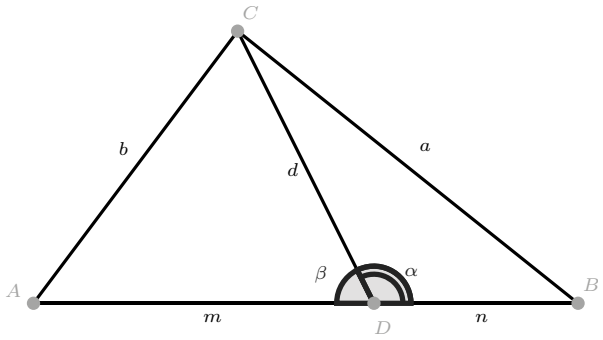
On considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non parallèles et d'équations normales respectives :
$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0 \text{ et } x\cos\theta'+y\sin\theta'-p'=0$$
où $p,p'\in\mathbb{R}$ et $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$, $\theta\neq\theta'$ $[\pi]$.

1. Déterminer une équation de chacune de leurs bissectrices.
2. Montrer que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont des vecteurs unitaires qui dirigent les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ alors les vecteurs $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u'}$ dirige chacune de ces deux bissectrices.
3. Montrer que ces deux bissectrices sont perpendiculaires.

**Exercice 33** (Théorème de Stewart)**.**

Soit $ABC$ un triangle avec $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Soit $D$ un point du segment $[AB]$.
On pose $m := AD$ et $n := BD$.
Démontrer que

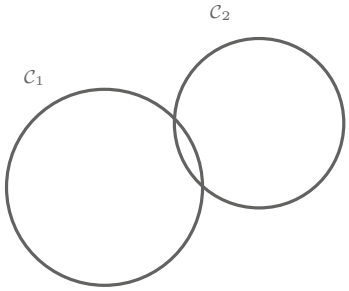
$$c(mn + d^2) = ma^2 + nb^2.$$

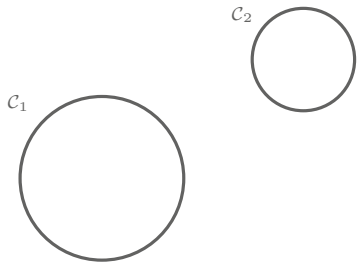



## 7.9.3 Axe radical

**Exercice 34.**

Construire l'axe radical des deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dans les deux cas.



**Exercice 35.**

Soit $ABC$ un triangle acutangle, $H$ son orthocentre, $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[BC]$, $E$ et $F$ les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}$ issue de $A$.
On se propose de démontrer que $E$, $F$ et $H$ sont alignés.
Pour cela on considère le milieu $D$ de $[BC]$, les pieds $A'$, $B'$ et $C'$ des hauteurs issues respectivement de $A$, $B$ et $C$. On considère aussi les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AD]$.

1. Démontrer que $(AA')$ est l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
2. Démontrer que $(BB')$ est l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}$.
3. Démontrer que $(EF)$ est l'axe radical de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}$.
4. Conclure.

## 7.10 Solutions

### 7.10.1 Applications des définitions et propriétés

**Solution 1**

1. On a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\dfrac{5\pi}{6} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Donc $\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\| = 4$ ce qui donne $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 2$.
2. On écrit $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) = AB^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + AC^2$.
   Or $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2\times 6\times\cos\dfrac{\pi}{3} = -6$. Donc $BC^2 = 4 - 12 + 36 = 28$ et $BC = 2\sqrt{7}$.

**Remarque 7.**

On a simplement redémontré à la main la formule d'Al Kashi.

**Solution 2**

1. On écrit $\|2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}\|^2 = 4\|\overrightarrow{u}\|^2 - 12\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + 9\|\overrightarrow{v}\|^2 = 4\times 2 - 12\times 3 + 9\times 16 = 116$.
2. On écrit $16 = BC^2 = \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right) = AB^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + AC^2 = 81 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 49$.
   D'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{130-16}{2} = \dfrac{114}{2}57$.

**Solution 3**

1. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}$. Il ne reste plus qu'à remplacer pour obtenir $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ}\cdot\left(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}\right)$.
2. En poursuivant le calcul, on a $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{AP}$.
   Or $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DR}+\overrightarrow{RQ}$. Donc $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{AR}$.
   Comme les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AR}$ sont orthogonaux, leur produit scalaire $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AR}$ est nul. De la même façon, $\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{AR} = 0$. Il ne reste plus que $\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{AR} = -DR\times AR = -AP\times PB$.

De la même façon,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AP} + \underbrace{\overrightarrow{DR}\cdot\overrightarrow{AP}}_{=0} + \overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{AP}\\ &= -AP\times CD + RQ\times AP\\ &= -AP\times AB + AP\times AP.\end{aligned}$$

En fin de compte, on obtient

$$\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{PR} = -AP\times PB + AP\times AB - AP^2 = AP(AB-PB-AP) = 0.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont orthogonaux. C'est bien dire que les droites $(CQ)$ et $(PR)$ sont perpendiculaires.

**Remarque 8.**

En se plaçant dans le repère orthonormé $(A;B,D)$ les cordonnées de $P$ sont $\begin{pmatrix}a\ ,\ 0\end{pmatrix}$ pour un certain $a\in]0,1[$. De ce fait on a $R\ \begin{pmatrix}0\ ,\ 1-a\end{pmatrix}$ puis $Q\ \begin{pmatrix}a\ ,\ 1-a\end{pmatrix}$. On calcule les coordonnées des vecteurs

$$\overrightarrow{CQ}\begin{pmatrix}a-1\\-a\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-a\\1-a\end{pmatrix}.$$

Puisque le repère est orthonormé, on a

$$\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{PR} = -a(a-1) - a(1-a) = 0.$$

La conclusion est identique.

**Solution 4**

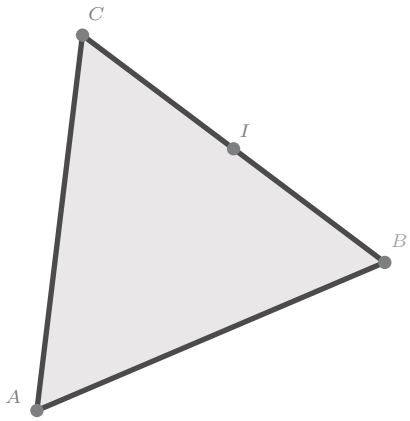
On écrit l'égalité remarquable

$$MG^2 - MH^2 = \left(\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MH}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}\right) = \underbrace{\overrightarrow{HG}}_{Chasles}\cdot\left(\underbrace{2\overrightarrow{MI}}_{I \text{ est milieu de } [GH]}\right).$$

**Solution 5**

1. On écrit $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI}$ puisque $I$ est le milieu de $[BC]$. Le résultat demandé en découle après division par 2.
2. On écrit $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PH}) = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{PH}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PH}$.
   Comme $Q$ est le projeté orthogonal de $H$ sur $(AC)$, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$.
   Comme $P$ est le projeté orthogonal de $H$ sur $(AB)$, on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PH}=0$.
   Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}=0$ ce qu'il fallait vérifier.
   De même $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{HA}) = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{HQ}+\overrightarrow{QA}) = \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{HQ}) = 0$.
3. On a $2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH} = (-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH} = 0$ puisque $H$ est le pied de la hauteur issue de $A$.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux, donc les droites $(AI)$ et $(PQ)$ sont perpendiculaires.

**Solution 6**




1. D'après la relation de Chasles,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}+0\\ &= BI\times BC\\ &= 12,5\text{ cm}^2\end{aligned}$$
2. De même,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}\right)\\ &= CA^2+0\\ &= 25\text{ cm}^2\end{aligned}$$
3. On a $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux, $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AI}=0$.

**Solution 7**
**Première solution** : On a

$$BC^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=BA^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2=BA^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AC^2=5.$$

Donc $BC^2+AB^2=AC^2$. D'après la réciproque de Pythagore, le triangle $ABC$ est rectangle en $B$.
**Deuxième solution** : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=-AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4+4=0$. Donc les côtés $(AB)$ et $(BC)$ sont perpendiculaires : le triangle $ABC$ est rectangle en $B$.

**Solution 8**
Pour changer, on se place dans un repère orthonormé d'origine $M$ lié au carré $MNPQ$ dans lequel on a $N\ \left(6\ ,\ 0\right)$, $P\ \left(6\ ,\ 6\right)$, $Q\ \left(0\ ,\ 6\right)$ et $I\ \left(3\ ,\ 3\right)$. On a alors

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{PN}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{QI}=\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{IP}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\text{ et }\overrightarrow{NI}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}.$$

On en déduit

1. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{QP}=6\times 6+0\times=36$ ;
2. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PN}=6\times 0+0\times(-6)=0$ ;
3. $\overrightarrow{IN}\cdot\overrightarrow{IP}=3\times 3+(-3)\times 3=0$ ;
4. $\overrightarrow{QI}\cdot\overrightarrow{NI}=3\times(-3)+(-3)\times 3=-18$.

**Solution 9**
On pose $\overrightarrow{u}:=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}:=\overrightarrow{AD}$. On a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. On a donc

$$49=\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2=16+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+25.$$

Donc $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=49-16-25=8$.

Maintenant $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$. Donc

$$BD^2 = \|\overrightarrow{BD}\|^2 = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{u}\|^2 = 25 - 8 + 16 = 33.$$

Finalement $BD = \sqrt{33}$.

**Solution 10**

1. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $ABC$ rectangle en $B$ on a $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25 + 9 = 34$. On en déduit que $AC = \sqrt{34}$. De même, $DE^2 = 3^2 + 2,5^2 = 15,25$ donc $AC = \sqrt{15,25}$.
2. $$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= 0 + \frac{1}{2}AB^2 - AD^2 + 0\\ &= 12,5 - 9 = 3,5.\end{aligned}$$
3. On a $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}}{AC\times DE} = \dfrac{3,5}{\sqrt{34}\times\sqrt{15,25}} = 0,1537$ à $10^{-4}$ près ce qui donne $\pm 81,16°$ comme mesure de $\theta$ à 0,01 près. Le produit scalaire, le cosinus d'un angle ne permettent pas de voir le sens de cet angle, visiblement direct par ailleurs.

**Solution 11**

1. La hauteur $(BH)$ est perpendiculaire au côté $(AC)$ donc $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$. De même $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.
2. $$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}\right)\cdot\overrightarrow{BA} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}\right)\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BA}}_{=0} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \underbrace{\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}}_{=0}\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{0} = 0.\end{aligned}$$
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux, donc les les droites $(AH)$ et $(BC)$ sont perpendiculaires, donc $H$ appartient à la hauteur issue de $A$. Les trois hauteurs de $ABC$ sont concourantes en $H$.

**Solution 12**

On effectue la différence

$$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 - (AB + AC)^2 = AB^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + AC^2 - AB^2 - 2AB.AC - AC^2 = 2AB.AC(\cos\widehat{BAC} - 1).$$

Ainsi pour qu'on ait $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = (AB + AC)^2$, il faut et il suffit que $\cos\widehat{BAC} = 1$ c'est-à-dire que $A$, $B$ et $C$ sont alignés et $A$ n'est pas entre $B$ et $C$.

Solutions

**Solution 13**

1. D'une part

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KD}\right)\\ &= 0+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{HK}+0\\ &= CA\times HK.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= 0-\ell^2+L^2+0\\ &= L^2-\ell^2.\end{aligned}$$

Comme $CA=\sqrt{L^2+\ell^2}$, on en déduit que $HK=\dfrac{L^2-\ell^2}{CA}=\dfrac{L^2-\ell^2}{\sqrt{L^2+\ell^2}}$.

2. On aura $AC=2HK=2\dfrac{L^2-\ell^2}{CA}$ lorsque $CA^2=L^2+\ell^2=2L^2-2\ell^2$ soit lorsque $3\ell^2=L^2$ ou $L=\sqrt{3}\ell$.
L'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme $BHDK$ égale $BH\times HK$ par exemple en le découpant en deux triangles rectangles $BHK$ et $DHK$. Or $BH$ est la hauteur de $ABC$ issue de $B$ donc en calculant le double de l'aire de $ABC$ de deux façons différentes, on a $L\times\ell=BH\times\sqrt{L^2+\ell^2}$.
Donc $\mathscr{A}=\dfrac{L\times\ell}{\sqrt{L^2+\ell^2}}\dfrac{L^2-\ell^2}{\sqrt{L^2+\ell^2}}=\dfrac{L\ell(L^2-\ell^2)}{\sqrt{L^2+\ell^2}}$.

**Remarque 9.**

On constate – avec soulagement – que le résultat trouvé est homogène à $\dfrac{[L]^4}{[L]^2}$ c'est-à-dire à une aire. Cette vérification devrait être systématique. Elle évite bien des mauvaises surprises.

**Solution 14**

1. On écrit un peu brutalement peut-être,

$$AC^2-DB^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=AB^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+AD^2-AB^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-AD^2,$$

soit $AC^2-DB^2=4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. On en déduit $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{100-36}{4}=16$.

2. On écrit $16=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PD}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}+0=AB\times AP$. Il est temps de calculer $AB=AD$. On reprend $100=AC^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=AB^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+AD^2$. Donc $2AB^2=100-2\times16=68$ ce qui donne $AB=\sqrt{34}$.
Donc $AP=\dfrac{16}{\sqrt{34}}$.
3. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $ADP$ rectangle en $P$ on a $AD^2=h^2+AP^2$ soit

$$h^2=34-\frac{16^2}{34}=\frac{34^2-16^2}{34}=\frac{(34-16)(34+16)}{34}=\frac{18\times50}{34}=\frac{900}{34}.$$

Donc $h = \dfrac{30}{\sqrt{34}}$.

**Remarque 10.**

On aurait pu aussi considérer le milieu $I$ des diagonales, calculer $AB$ comme hypoténuse de $AIB$ puis trouver $h$ en calculant l'aire de $ABD$ de deux façons différentes.

**Solution 15**

On se place dans le repère orthonormé $(B; E, G)$. On pose $a = AB$. On a alors $E\ \left(1\ ,\ 0\right)$, $C\ \left(0\ ,\ a\right)$, $A\ \left(-a\ ,\ 0\right)$ et $G\ \left(0\ ,\ 1\right)$. On obtient

$$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-1\\ a\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-1\\ a\end{pmatrix}.$$

Puisque le repère est orthonormé, on a $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AG} = -1\times a + a\times 1 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux, donc les les droites $(EC)$ et $(AG)$ sont perpendiculaires, donc $C$ appartient à la hauteur issue de $E$ dans le triangle $AEG$.

1. On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = AB\times AF\times\cos\widehat{BAF} = cb\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -bc\sin\theta$.
2. Déjà vu : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI}$ puisque $I$ est le milieu de $[BC]$. Le résultat demandé en découle après division par 2.
3. On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = 0 - bc\sin\theta$.
   De même, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}+0 = -bc(-\sin\theta) = bc\sin\theta$.
   On en déduit que $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{EF} = -bc\sin\theta + bc\sin\theta = 0$ puis, après division par 2,

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{EF} = 0.$$

   De ce fait, $(AI)$ est bien la hauteur issue de $A$ dans le triangle $AEF$.

**Solution 16**

On calcule $NL^2 = \left(\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{NK}\right)\cdot\left(\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{NK}\right) = KL^2 - 2\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{KN}+NK^2 = 36-18+9 = 27$. On peut donc construire le triangle $KLN$ dont on connaît les longueurs des trois côtés. On gagne du temps en remarquant que $KLN$ est rectangle en $L$.

**Solution 17**

1. On prend un repère orthonormé lié au trapèze $ABCD$ dans lequel $A\ \left(0\ ,\ 0\right)$, $B\ \left(2a\ ,\ 0\right)$, $C\ \left(a\ ,\ h\right)$ et $D\ \left(0\ ,\ h\right)$. On a alors $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}a\\ h\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2a\\ h\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = -2a^2+h^2$.
2. Les diagonales $(AC)$ et $(BD)$ soient perpendiculaires si seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux, soit $-2a^2+h^2 = 0$ soit $h = \sqrt{2}\,a$.

**Solution 18**

1. D'une part $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{HD} = AH\times AJ+0$.
   D'autre part $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AD} = 0+BJ\times AD$.
   (a) D'après le théorème de Pythagore, $AJ = \dfrac{a}{2}\sqrt{5}$. On a donc $a\times\dfrac{a}{2}\sqrt{5} = \dfrac{a}{2}\times a$ ce qui donne $AH = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Solutions

(b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $ADH$ rectangle en $H$, on a $a^2 = \frac{a^2}{5} + HD^2$ qui donne $HD = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

2. D'une part

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BI}\\ &= -\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BI} + \underbrace{\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BI}}_{=0}\\ &= -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\\ &= -a^2.\end{aligned}$$

D'autre part $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{CI} = AJ\times CI\cos\widehat{JKI}$, soit $\frac{a}{\sqrt{5}}\times\frac{a}{\sqrt{5}}\times\cos\widehat{JKI} = -a^2$ soit encore $\cos\widehat{JKI} = -\frac{4}{5}$ ce qui donne $\widehat{JKI} = 143,1^\circ$ à $0{,}1^\circ$ près.

### 7.10.2 Équations cartésiennes

**Solution 19**

Leur produit scalaire $3\times 6+(-2)\times 9$ est nul, donc ils sont orthogonaux. Très simple, mais avez-vous pensé à signaler dans votre rédaction que le repère était orthonormé ?

**Solution 20**

On calcule $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Donc une équation de la droite $\mathcal{D}$ s'écrit $x-y=c$. Les coordonnées de $C$ sont solution de cette équation, soit $c=-3-0$ ce qui donne

$$x-y=-3.$$

**Solution 21**

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est normal à la droite $\mathcal{D}$. Donc la perpendiculaire $\mathcal{D}'$ à $\mathcal{D}$ passant par $\Omega$ admet pour équation $x-y=c$ avec $c=5-1=4$. Le point $A$ d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ appartient au cercle. Ses coordonnées $\left(x\ ,\ y\right)$ vérifient $\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 4\\ x & - & y & = & 4\end{array}\right.$ Soit $A\ \left(4\ ,\ 0\right)$. La distance $\Omega A = \sqrt{(4-5)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$ est le rayon du cercle. Une équation de ce cercle est donc

$$(x-5)^2+(y-1)^2=2.$$

**Solution 22**

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$. C'est un vecteur normal de la médiatrice de $[AB]$ laquelle admet donc une équation $4x-y=c$. Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont solution de cette équation donc $c=4\times 1-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$. Donc
$$4x-y=\frac{5}{2}$$
est une équation de la médiatrice de $[AB]$.

2. On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. C'est un vecteur normal de la hauteur issue de $A$ laquelle admet donc une équation $-x+3y=c$. Les coordonnées de $A$ sont solution de cette équation donc $c=-(-1)+3\times 2=7$. Donc
$$-x+3y=7$$

est une équation de la hauteur issue de $A$.

**Solution 23**

1. Par exemple : $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.
2. $(x_A-2)^2+(y_A+3)^2=(-4)^2+3^2=25$. Donc $A\in\mathcal{C}$.
3. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ est normal à la tangente en $A$ à $\mathcal{C}$. Donc cette tangente admet $-4x+3y=c$ comme équation, avec $c=-4\times(-2)+3\times 0=8$.
   La tangente en $A$ à $\mathcal{C}$ admet comme équation
$$-4x+3y=8.$$

**Solution 24**

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ est normal à la tangente. Elle admet donc une équation $3x+5y=a$. Les coordonnées de $A$ sont solution de cette équation, donc $a=3\times 3+5\times 5=34$.

**Solution 25**

Soit $A\ \left(3\ ,\ 1\right)$ et $B\ \left(-2\ ,\ 4\right)$. L'ensemble $\Gamma$ est l'ensemble des points $M$ vérifiant $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

**Solution 26**

L'ensemble $\Gamma$ est le cercle de centre $\Omega\ \left(1\ ,\ 2\right)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

**Solution 27**

1. On a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=k(k-1)-6=k^2-k-6=(k-3)(k+2)$. Pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que $k=3$ ou $k=-2$.
2. (a) On calcule $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-k\\-2\end{pmatrix}$. On en déduit $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2(2-k)-6=-2k-2$. Pour que le triangle $ABC$ soit rectangle en $A$, il faut et il suffit que $k=-1$.
   (b) On trouve $AB=AC=\sqrt{13}$.

**Solution 28**

1. Une équation de $\mathcal{D}$ est $a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$ ou $ax+by=a\alpha+b\beta$.
2. On se place dans le repère orthonormé $(A;B,D)$. On a $A\ \left(0\ ,\ 0\right)$, $D\ \left(1\ ,\ 1\right)$, $I\ \left(1\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ et $J\ \left(\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$. On en déduit que $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ puis que $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}=1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-1)=0$. Donc les droites $(AI)$ et $(DJ)$ sont perpendiculaires. Voir aussi l'exercice 18.
3. Puisque les coordonnées de $A$ et $B$ ont changé par rapport à la question précédente, c'est que le repère a changé lui-aussi, et pas forcément en mieux ...
   Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ est normal à la tangente en $B$ au cercle $\mathcal{C}$. Donc cette dernière admet $4x-4y=4\times 6+4\times 2=32$ comme équation.
4. Nouvelle question, nouvelles coordonnées pour $A$, nouveau repère.
   (a) Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal à $(d)$. Il est donc orthogonal à $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
   (b) On pose $H\ \left(x\ ,\ y\right)$. Puisque $H\in(d)$, on a $H\ \left(x\ ,\ x-1\right)$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x-1\\x-4\end{pmatrix}$.
   L'égalité $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u}=0$ donne $2x-6=0$ soit $x=3$ et $H\left(3\ ,\ 2\right)$.

(c) On a $AH = \sqrt{2}$.

**Solution 29**

Puisque le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{\imath}\ ,\ \overrightarrow{\jmath}\ )$ est orthonormé, on a $\|\overrightarrow{\imath}\| = 1$ et $\overrightarrow{\imath} \cdot \overrightarrow{\jmath} = 0$. De ce fait

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\imath} &= (x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}) \cdot \overrightarrow{\imath} \\ &= (x\overrightarrow{\imath}) \cdot \overrightarrow{\imath} + (y\overrightarrow{\jmath}) \cdot \overrightarrow{\imath} \\ &= x(\overrightarrow{\imath} \cdot \overrightarrow{\imath}) + y(\overrightarrow{\jmath} \cdot \overrightarrow{\imath}) \\ &= x \times 1 + y \times 0 = x.\end{aligned}$$

On trouve de même $y = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\jmath}$.

Ce résultat très simple peut être utile en sciences physiques par exemple.

**Solution 30**

1. D'après la relation de Chasles et les règles de calcul sur le produit scalaire 3 page 274

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{0} + \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

2. Soit $M$ le point d'intersection de la hauteur de $ABC$ issue de $A$ et de la hauteur issue de $B$. Puisque $M$ appartient à la hauteur issue de $A$, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Puisque $M$ appartient à la hauteur issue de $A$, on a $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Or l'identité de Jacobi stipule que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ soit ici $0 + 0 + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ce qui signifie que $M$ appartient aussi à la hauteur issue de $C$.

**Solution 31 (Encore ?)**

1. On écrit, pour tout réel $x$, $\|x\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 \geqslant 0$ et ce pour tout réel $x$. En développant $\|\overrightarrow{w}\|^2 = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{w} := x\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, on obtient bien

$$x^2\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2x|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| + \|\overrightarrow{v}\|^2 \geqslant 0$$

et ce pour tout réel $x$.

2. En posant $a := \|\overrightarrow{u}\|^2$, $b := 2|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}|$, $c := \|\overrightarrow{v}\|^2$ et $\Delta := b^2 - 4ac$, on a donc pour tout réel $x$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$. D'après le théorème 6 page 180, on a donc $\Delta \leqslant 0$. Le résultat demandé en résulte.

3. En posant $\overrightarrow{u'} := -\overrightarrow{u}$, l'inégalité de la question précédente s'écrit

$$\overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{v} \leqslant \|\overrightarrow{u'}\|.\|\overrightarrow{v}\|,$$

soit

$$(-\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} \leqslant \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|,$$

soit encore

$$-(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) \leqslant \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.$$

4. On pose $\alpha := \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v}$. Les deux questions précédentes permettent d'écrire

$$\alpha \leqslant \|\overrightarrow{u'}\|.\|\overrightarrow{v}\| \text{ et } -\alpha \leqslant \|\overrightarrow{u'}\|.\|\overrightarrow{v}\|.$$

De ce fait on a

$$\max(\alpha, -\alpha) \leqslant \|\overrightarrow{u'}\|.\|\overrightarrow{v}\|.$$

Or $\max(\alpha, -\alpha) = |\alpha|$ d'après la définition 7 page 71 de la valeur absolue vue dans le manuel de seconde. Le résultat demandé en résulte.

5. Le présent exercice est une démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 9).

**Solution 32**

1. Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned}
&M \text{ est un point d'une des bissectrices aux deux droites}\\
\Longleftrightarrow &d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}')\\
\Longleftrightarrow &\frac{|x\cos\theta + y\sin\theta - p|}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{|x\cos\theta' + y\sin\theta' - p'|}{\cos^2\theta' + \sin^2\theta'}\\
\Longleftrightarrow &|x\cos\theta + y\sin\theta - p| = \left|x\cos\theta' + y\sin\theta' - p'\right|\\
\Longleftrightarrow &x\cos\theta + y\sin\theta - p = x\cos\theta' + y\sin\theta' - p' \text{ ou } x\cos\theta + y\sin\theta - p = -(x\cos\theta' + y\sin\theta' - p')\\
\Longleftrightarrow &(\cos\theta - \cos\theta')x + (\sin\theta - \sin\theta')y = p - p' \text{ ou } (\cos\theta + \cos\theta')x + (\sin\theta + \sin\theta')y = p + p'\\
\Longleftrightarrow &-2\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\sin\frac{\theta-\theta'}{2}x + 2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\sin\frac{\theta-\theta'}{2}y = p - p'\\
&\qquad \text{ou } 2\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}x + 2\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}y = p + p'\\
\Longleftrightarrow &-\sin\frac{\theta+\theta'}{2}x + \cos\frac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p-p')}{\sin\frac{\theta-\theta'}{2}} \text{ ou } \cos\frac{\theta+\theta'}{2}x + \sin\frac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p+p')}{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}
\end{aligned}$$

ce qui est licite car $\theta \neq \theta'$ $[\pi]$. Les équations des deux bissectrices sont donc :

$$\boxed{-\sin\frac{\theta+\theta'}{2}x + \cos\frac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p-p')}{\sin\frac{\theta-\theta'}{2}}} \qquad \boxed{\cos\frac{\theta+\theta'}{2}x + \sin\frac{\theta+\theta'}{2}y = \frac{2(p+p')}{\cos\frac{\theta-\theta'}{2}}}$$

2. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont unitaires, on peut supposer que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ et que $\overrightarrow{u}'\begin{pmatrix}\cos\theta'\\ \sin\theta'\end{pmatrix}$ alors

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}' = \begin{pmatrix}\cos\theta + \cos\theta'\\ \sin\theta + \sin\theta'\end{pmatrix} = 2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta+\theta'}{2}\\ \sin\frac{\theta+\theta'}{2}\end{pmatrix}$$

qui dirige clairement la première bissectrice. De même :

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}'\begin{pmatrix}\cos\theta - \cos\theta'\\ \sin\theta - \sin\theta'\end{pmatrix} = 2\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\\ \cos\frac{\theta+\theta'}{2}\end{pmatrix}$$

qui dirige la deuxième.

3. Comme $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}') \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}') = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}'\|^2 = 0$, les deux bissectrices sont perpendiculaires.

**Remarque 11.**

On vient de redémontrer que dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires...

**Solution 33 (Théorème de Stewart)**
On remarque que $\alpha + \beta = \pi$. et donc que

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta) \tag{7.5}$$

Avec la loi des cosinus, dans le triangle ADC, on trouve

$$b^2 = m^2 + d^2 - 2md\cos(\beta).$$

En isolant le cosinus, on obtient

$$\cos(\beta) = \frac{m^2 + d^2 - b^2}{2md}.$$

Avec la loi des cosinus, mais cette fois-ci dans le triangle CDB, on obtient

$$\cos(\alpha) = \frac{n^2 + d^2 - a^2}{2nd}.$$

Ce qui implique en vertu de (7.5) que

$$\frac{n^2 + d^2 - a^2}{2nd} = \frac{b^2 - m^2 - d^2}{2md}.$$

En réduisant au même dénominateur

$$\frac{mn^2 + md^2 - ma^2}{2mnd} = \frac{nb^2 - nm^2 - nd^2}{2mnd},$$

ce qui fait

$$mn^2 + md^2 - ma^2 = nb^2 - nm^2 - nd^2,$$

ou de manière équivalente

$$mn^2 + nm^2 + md^2 + nd^2 = ma^2 + nb^2.$$

En factorisant une fois, on obtient

$$mn(n+m) + (m+n)d^2 = ma^2 + nb^2,$$

puis une seconde fois

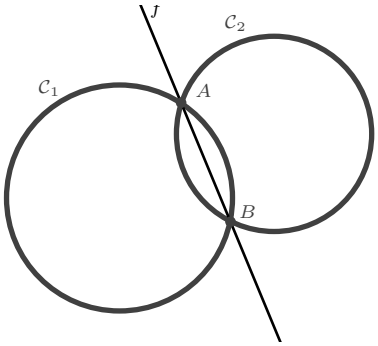
$$(mn + d^2)(n+m) = ma^2 + nb^2.$$

Et comme $m + n = c$, on obtient finalement

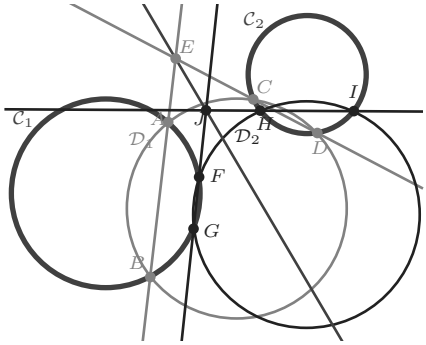
$$c(mn + d^2) = ma^2 + nb^2.$$

## 7.10.3 Axe radical

**Solution 34**

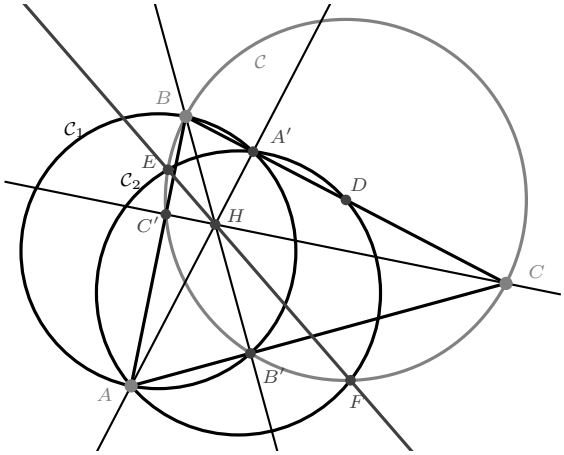



Les points $A$ et $B$ ont même puissance (nulle) par rapport à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Donc l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est la droite $(AB)$.




On trace un cercle $\mathcal{D}_1$ qui recoupe les cercles $\mathcal{C}_1$ en $A$ et $B$ et $\mathcal{C}_2$ en $C$ et $D$. Le point d'intersection $E$ de $(AB)$ et $(CD)$ est donc le centre radical de $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. En particulier il appartient à l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
On recommence avec un autre cercle $\mathcal{D}_2$ sécant à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ pour obtenir un autre point $J$ de l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
La droite $(EJ)$ est donc l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

**Solution 35**




1. Le coté $(A'B)$ est perpendiculaire à la hauteur $(A'B)$ donc $A'$ est un point du cercle de rayon $[AB]$ c'est-à-dire le cercle $\mathcal{C}_1$. Voir le théorème 32 page 161 du cours de secondaire. Les points $A$ et $A'$ appartiennent aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, donc $(AA')$ est l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (voir exercice précédent).

2. De même, $B$ appartient à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}_1$. De plus, $(BB')$ est perpendiculaire à $(AC)$ donc $B'$ appartient à $\mathcal{C}_1$ et de même, $(BB')$ est perpendiculaire à $(AC)$ donc $B'$ appartient à $\mathcal{C}$.
3. Par construction, les points $E$ et $F$ appartiennent à $\mathcal{C}$. Puisque $(AE)$ est une tangente au cercle $\mathcal{C}$ de centre $D$, on a $(AE)$ est perpendiculaire à $(ED)$ donc $E$ appartient à $\mathcal{C}_2$. De même, $F$ appartient aussi à $\mathcal{C}_2$.
4. L'orthocentre $H$ est l'intersection des axes radicaux $(AA')$ et $(BB')$. Donc le troisième axe radical $(EF)$ passe aussi par le centre radical $H$. C'est bien dire que $E$, $F$ et $H$ sont alignés.

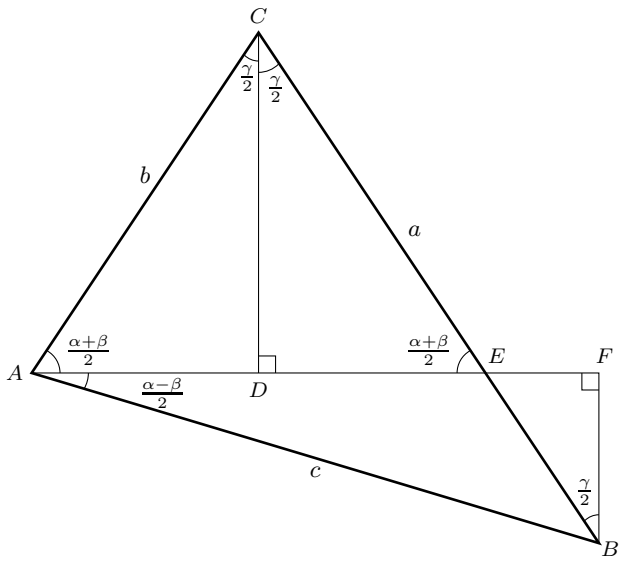
## 7.11 Problèmes

**Problème 11 (Formules de Mollweide)**
Soit $ABC$ un triangle. On pose $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$. On pose aussi, $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

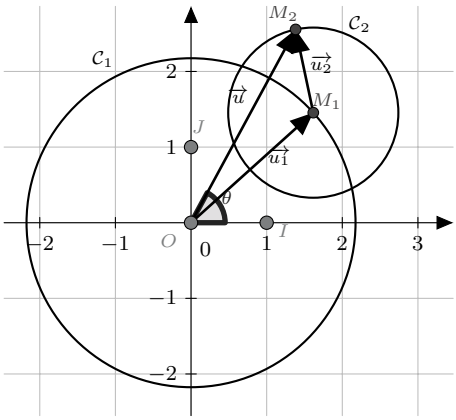
En s'aidant de la figure, démontrer les formules de Mollweide :

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{a-b}{c} \tag{7.6}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{a+b}{c}. \tag{7.7}$$



**Problème 12 (Al-Kashi fait de la robotique)**




Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère un robot composé de deux tiges de longueur fixe.

Une première tige, de longueur $L$ peut tourner autour de $O$. L'extrémité de la tige est en $M_1$ ( $x$ , $y$ ). On note $\vec{u_1} = \overrightarrow{OM_1}$ et $\alpha = (\vec{\imath}, \vec{u_1})$.

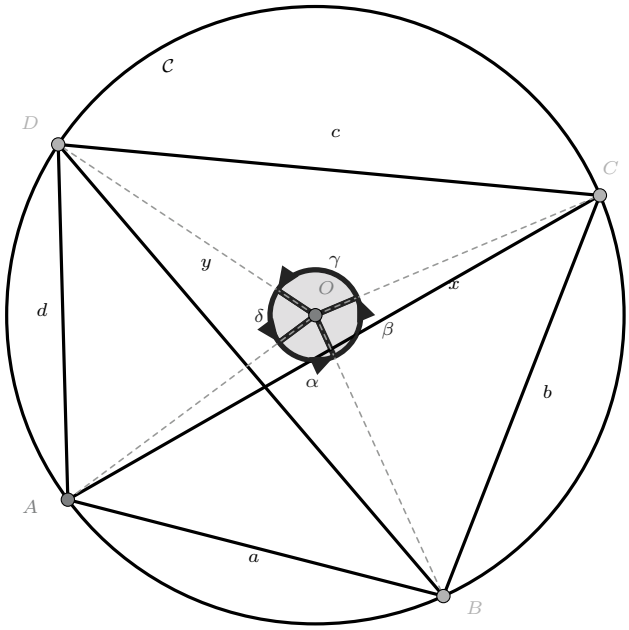
Une deuxième tige, de longueur $\ell < L$ peut tourner autour de $M_1$. L'extrémité de la tige est en $M_2$ ( $X$ , $Y$ ). On note $\vec{u} = \overrightarrow{OM_2}$, $\vec{u_2} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\theta = (\vec{\imath}, \vec{u})$ et $\beta = (\vec{\imath}, \vec{u_2})$.

On pose aussi $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

On se donne deux réels $X$ et $Y$. Le problème est de savoir s'il existe deux angles $\alpha$ et $\beta$ tels que $M_2$ ( $X$ , $Y$ ) soit l'extrémité du robot et si oui, déterminer ces deux angles $\alpha$ et $\beta$ en fonction de $X$ et de $Y$. Bien entendu, les longueurs $L$ et $\ell$ sont connues.

1. Quels sont les points $M_2$ du plan qui ne peuvent pas être atteints par le robot ?
2. Parmi les points $M_2$ du plan qui peuvent être atteints par le robot quels sont ceux qui peuvent être atteints de deux façons ? d'une seule façon ?
3. Écrire la relation entre $X$, $r$ et $\theta$. Écrire de même la relation entre $Y$, $r$ et $\theta$.
4. Écrire la relation entre $x$, $L$ et $\alpha$. Écrire de même la relation entre $y$, $L$ et $\alpha$.
5. Écrire la relation entre $X$, $L$, $\ell$, $\alpha$ et $\beta$. Écrire de même la relation entre $Y$, $L$, $\ell$, $\alpha$ et $\beta$.
6. Quelle relation entre $r$, $L$, $\ell$, $\alpha$ et $\theta$ obtient-on dans le triangle $OM_1M_2$ ?
7. Écrire un programme `Python` déterminant une valeur de $\alpha$ et $\beta$ en fonction de $X$, $Y$, $L$ et $\ell$ pour que $M_2$ ( $X$ , $Y$ ) soit l'extrémité du robot.

**Problème 13 (Théorème de Ptolemée)**




CNS portant sur les longueurs des côtés d'un quadrilatère pour que celui soit inscriptible. Dans la suite, on parlera de quadrilatère pour quadrilatère inscriptible.

On considère un quadrilatère $ABCD$ convexe, c'est-à-dire que ses diagonales se coupent à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que $ABCD$ est inscrit dans un cercle de centre $O$. On pose

$$\begin{cases} a = AB \\ b = BC \\ c = CD \\ d = DA \\ a = AC \\ y = BD \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \alpha = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \\ \beta = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) \\ \gamma = \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) \\ \delta = \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right) \end{cases}$$

1. Écrire le théorème de d'Al-Kashi dans chacun des triangles $ADC$, $ABC$, $BAD$ et $BCD$.
2. Que peut-on dire des angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$ ? des angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BAD}$ ?
3. En déduire le calcul de $x$ et de $y$.
4. Démontrer le **théorème de Ptolemée** Si $ABCD$ est un quadrilatère convexe alors

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

Voir aussi l'exercice 41 page 330 du cours de terminale.

## 7.12 Corrigés

**Correction 11 (Formules de Mollweide)**
On va démontrer l'égalité de Molweide (7.7).

Pour commencer on considère le triangle $ABC$ de la figure.

On construit la bissectrice de $\widehat{ACB}$ et sa perpendiculaire en $A$ qui recoupe le côté $[CB]$ en $E$.

La perpendiculaire en $B$ à la droite $(AE)$ coupe $(AE)$ en $F$.
De ce fait le triangle $ACE$ est isocèle en $C$.

En conséquence, $2\widehat{CAD} + \gamma = \pi = \alpha + \beta + \gamma$ and ainsi $\widehat{CAD} = (\alpha + \beta)/2 = \widehat{CED}$.

De plus $\widehat{BAD} + \widehat{CAD} = \alpha$, donc $\widehat{BAD} = (\alpha - \beta)/2$.

Dans le triangle $BEF$, rectangle en $F$, on a $\widehat{BEF} = \widehat{CED}$ puisqu'ils sont opposés par le sommet $E$. Donc $\widehat{EBF} = \pi/2 - (\alpha + \beta)/2 = \gamma/2$.

Dans le triangle $ABF$, on sait que

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{AF}{AB} = \frac{AF}{c}. \tag{7.8}$$

En considérant successivement les triangles $ACD$, $DCE$ and $EBF$, on obtient les égalités

$$\begin{aligned}
\sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{b} \quad &\Longrightarrow \quad AD = b\sin\frac{1}{2}\gamma \\
= \frac{DE}{CE} = \frac{DE}{b} \quad &\Longrightarrow \quad DE = b\sin\frac{1}{2}\gamma \\
= \frac{EF}{BE} = \frac{EF}{a-b} \quad &\Longrightarrow \quad EF = (a-b)\sin\frac{1}{2}\gamma.
\end{aligned}$$

À quoi il faut ajouter $AF = AD + DE + EF = (a+b)\sin\frac{\gamma}{2}$. En le substituant dans (7.8), on obtient bien l'égalité de Molweide (7.7).

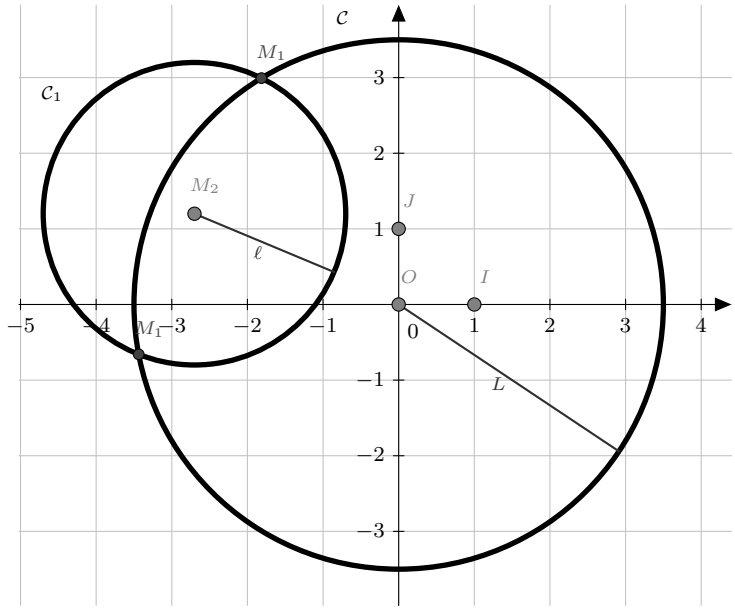
**Correction 12 (Al-Kashi fait de la robotique)**

1. Les points $M_2$ pour lesquels $L - \ell < r < L + \ell$ ne peuvent pas être atteints par le robot.

2. Si $r = L - \ell$ ou $r = L + \ell$. Il n'y a qu'une seule solution.

   Soit $L - \ell < r < L + \ell$.

   Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $O$ et de rayon $L$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $M$ et de rayon $\ell$. L'intersection de ces deux cercles est constituée de deux points qui sont les deux possibilités pour le point $M_1$.




3. On a $X = r\cos\theta$ et $Y = r\sin\theta$.
4. On a $x = L\cos\alpha$ et $y = L\sin\alpha$.
5. On a $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}\ell\cos\beta\\ \ell\sin\beta\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}L\cos\alpha + \ell\cos\beta\\ L\sin\alpha + \ell\sin\beta\end{pmatrix}$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} X &= L\cos\alpha &+ &\ell\cos\beta\\ Y &= L\sin\alpha &+ &\ell\sin\beta \end{cases}$$

6. Dans le triangle $OM_1M_2$, d'après le théorème 18 d'Al Kashi page 281, on a $\ell^2 = r^2 + L^2 - 2rL\cos(\theta - \alpha)$ soit
$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{r^2 + L^2 - \ell^2}{2rL}.$$
7. 
```
import math

L=3.5
l=2.
X=-2.7
Y=1.2

r=math.sqrt(X*X+Y*Y)
if (r<L-l) or (r>L+l):
    print('pas de solution')
else:
    theta=math.atan2(Y,X)
    c=(r*r+L*L-l*l)/(2*r*L)
    alpha=theta+math.acos(c)
```

```
beta=(math.atan2(Y-L*math.sin(alpha),X-L*math.cos(alpha)))
print('alpha␣=␣',alpha)
print('beta␣=␣',beta)
```

**Correction 13 (Théorème de Ptolemée)**
Le théorème de d'Al-Kashi permet d'écrire

$$\left\{\begin{array}{rcll} x^2 &=& c^2+d^2-2cd\cos\widehat{ADC} & [1]\\ x^2 &=& a^2+b^2-2ab\cos\widehat{ABC} & [2]\end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{rcll} y^2 &=& a^2+d^2-2ad\cos\widehat{BAD} & [1']\\ y^2 &=& b^2+c^2-2bc\cos\widehat{BCD} & [2']\end{array}\right.$$

En multipliant respectivement [1], [2], [1'] et [2'] par $ab$, $cd$, $bc$ et $ad$ et en remarquant que $\cos\widehat{ABC}=-\cos\widehat{ADC}$ (resp. $\cos\widehat{BCD}=-\cos\widehat{BAD}$) puisque les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$ sont supplémentaires (resp. $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BAD}$),

$$\left\{\begin{array}{rcl} abx^2 &=& abc^2+abd^2-2abcd\cos\widehat{ADC}\\ cdx^2 &=& cda^2+cdb^2+2abcd\cos\widehat{ADC}\end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{rcl} bcy^2 &=& bca^2+bcd^2-2abcd\cos\widehat{BAD}\\ adady^2 &=& b^2+adc^2+2abcd\cos\widehat{BAD}\end{array}\right.$$

En effectuant la somme des deux égalités de chacune des accolades :

$$(ab+cd)x^2=abd^2+abc^2+cda^2+cdb^2=(ac+bd)(ad+bc) \text{ soit } \boxed{x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

$$(ad+bc)y^2=bca^2+bcd^2+adb^2+adc^2=(ac+bd)(ab+cd) \text{ soit } \boxed{y^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

Effectuons le produit des expressions de $x^2$ et $y^2$ encadrées ci-dessus pour obtenir le théorème de Ptolemée.

$$x^2y^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{(ab+cd)(ad+bc)}=(ac+bd)^2 \text{ soit } \boxed{xy=ac+bd}$$

Remarque : on a aussi

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\times\frac{ad+bc}{(ac+bd)(ab+cd)}=\frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2} \text{ soit } \boxed{\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}}$$

# Chapitre 8

# Géométrie dans l'espace

## Sommaire


| | | |
|---|---|---|
| **8.1** | **Solides de référence** | **315** |
| **8.2** | **Caractérisation des droites et plans de l'espace** | **318** |
| **8.3** | **Positions relatives dans l'espace** | **320** |
| **8.4** | **Vecteurs de l'espace** | **323** |
| **8.5** | **Coordonnées dans l'espace** | **330** |
| **8.6** | **Produit scalaire** | **331** |
| **8.7** | **Plans et droites perpendiculaires** | **336** |
| **8.8** | **Équation de plan** | **339** |
| **8.9** | **Produit vectoriel** | **340** |
| **8.10** | **Sphères** | **347** |
| **8.11** | **Méthodes** | **350** |
| **8.12** | **Quiz** | **362** |
| **8.13** | **Vrai ou faux** | **363** |
| **8.14** | **Exercices** | **365** |
| **8.15** | **Solutions** | **379** |


La géométrie dans l'espace est utile dans de nombreux domaines. Par exemple :

- L'imagerie médicale.
- L'architecture.
- La mécanique et la construction.
- L'infographie et les jeux vidéos.
- La mécanique céleste.

Plus encore qu'en géométrie plane, les notions de point, droite, plan seront considérées de façon intuitive.

## 8.1 Solides de référence

### 8.1.1 La perspective cavalière

La **perspective** cavalière ou parallèle est une forme de représentation des solides.

Une droite de l'espace est représentée soit par une droite du plan, soit par un point du plan.

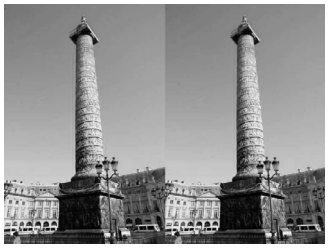
La perspective cavalière a la propriété de conserver le parallélisme. Autrement dit, si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites parallèles de l'espace, alors elles sont représentées dans le plan soit par deux droites parallèles, soit par deux points.

La perspective cavalière a la propriété de conserver les milieux. Autrement dit, si $A$ et $B$ sont deux points de l'espace représentés respectivement par les points $A'$ et $B'$ du plan, alors le milieu $I$ du segment $[AB]$ est représenté dans le plan par le milieu du segment $[A'B']$.

Un point de la perspective représente une droite de l'espace.

**Remarque 1.**

La perspective cavalière n'est pas la perspective du dessin d'art ou de la photographie.



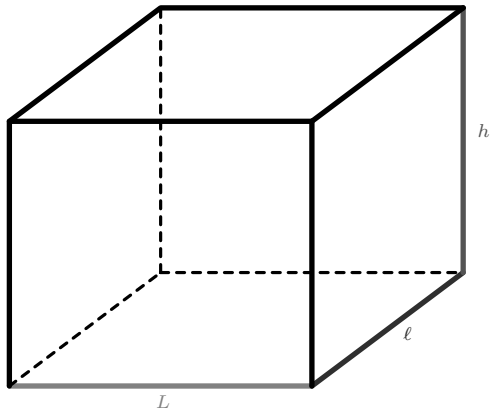
Deux photographies identiques côte à côte.

### 8.1.2 Le parallélépipède rectangle et le cube

Toutes les faces d'un parallélépipède rectangle (aussi appelé pavé droit) sont des rectangles. De plus, ses faces opposées sont parallèles.
Le volume $V$ d'un parallélépipède rectangle est égal à :

$$V = L \times \ell \times h.$$

Un cube est un parallélépipède dont les faces sont des carrés.




**Remarque 2.**

Par un agrandissement (ou une réduction) d'un facteur $k$, les aires sont multipliées par $k^2$ et les volumes par $k^3$.

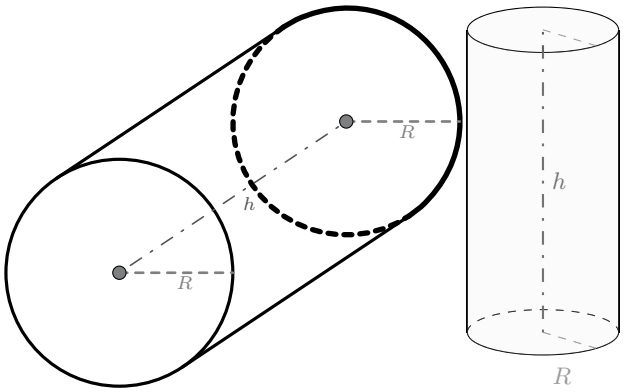
### 8.1.3 Le cylindre

On définit un cylindre à partir de deux bases circulaires parallèles de rayon $R$, telles que le projeté orthogonal du centre d'une base sur l'autre en soit également le centre. On appelle hauteur $h$ du cylindre la distance entre les centres des deux bases. Le volume $V$ d'un cylindre est égal à :

$$V = h \times \pi R^2.$$

Exemple fondamental : Le volume d'une **pizza** de rayon $z$ et d'épaisseur $a$ est

$$V = \pi\, zza.$$

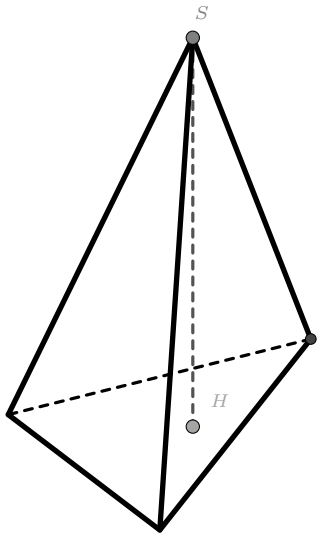



### 8.1.4 La pyramide et le tétraèdre

On définit une **pyramide** à partir d'une base polygonale d'aire $B$ et d'un sommet $S$. Soit $H$ le projeté orthogonal de $S$ sur la base, on appelle hauteur $h$ de la pyramide la longueur $SH$. Le volume $V$ d'une pyramide est égal à :

$$V = \frac{1}{3} \times h \times B.$$

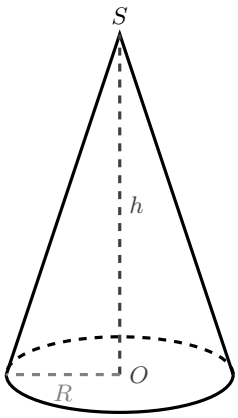
Une démonstration a été donnée à l'occasion de l'exemple 9 page 63 dans le cas où la base est carrée. Cette démonstration s'adapte sans problème aux autres bases.
Un **tétraèdre** est une pyramide dont la base est un triangle.



### 8.1.5 Le cône de révolution

On définit un cône de révolution à partir d'une base circulaire de rayon $R$ et d'un sommet $S$, tel que le projeté orthogonal $H$ de $S$ sur le disque de base soit le centre de ce disque. On appelle hauteur $h$ du cône la longueur $SH$. Le volume $V$ d'un cône de révolution est égal à :

$$V = \frac{1}{3} \times h \times \pi R^2.$$




La démonstration de l'exemple 9 page 63 s'adapte ici aussi sans problème.

### 8.1.6 La sphère

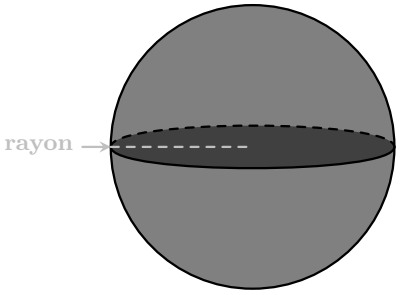
**Définition 1.**

Soit $O$ un point de l'espace et $R$ un réel strictement positif.
On appelle sphère de centre $O$ et de rayon $R$ l'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant

$$OM = R.$$

On appelle boule de centre $O$ et de rayon $R$ l'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant

$$OM \leqslant R.$$




Le volume $V$ d'une boule de rayon $R$ est égal à :

$$V = \frac{4}{3} \times \pi R^3.$$

L'aire d'une sphère de rayon $R$ est égale à :

$$A = 4\pi R^2.$$

## 8.2 Caractérisation des droites et plans de l'espace

On commence par donner un cahier des charges de la géométrie dans l'espace, autrement dit des axiomes. Ce sont des propositions (de bon sens) admises pour pouvoir fonder cette géométrie. Nous avions déjà vu le cinquième postulat d'Euclide page 136 dans le cadre du cours de seconde.

**Axiomes 1.**

1. Par deux points distincts $A$ et $B$ passe une droite et une seule. Elle est notée $(AB)$ ou $(BA)$. Cet axiome est déjà un axiome de la géométrie plane.
2. Par trois points **non alignés** $A$, $B$ et $C$ passe un plan et un seul. Il est noté $(ABC)$ ou $(BAC)$ ou ...
3. Si deux points $A$ et $B$ appartiennent à un plan $\Pi$, alors la droite $(AB)$ est incluse dans le plan $\Pi$.
4. Les théorèmes de la géométrie plane (Pythagore, Thalès, trigonométrie, etc.) s'appliquent dans tous les plans de l'espace.
5. Si deux plans distincts ont un point en commun, alors ils ont une droite de points communs.

Ce dernier axiome est indispensable pour faire de la géométrie en trois dimensions. En effet en quatre dimensions cet axiome n'est pas vérifié. Ainsi, l'axiome 5 permet de faire la différence entre la dimension 3 et les dimensions supérieures.

L'axiome 4 est très important. Il incite à ramener les problèmes de géométrie dans l'espace à des problèmes de géométrie plane. Le secret de la géométrie dans l'espace est de multiplier les vues (face, droite, dessus, etc.) d'une figure et d'appliquer les théorèmes de la géométrie plane à ces vues.

**Théorème 1**
Il existe un unique plan de l'espace contenant

1. une droite et un point extérieur à cette droite,
   **ou**
2. deux droites sécantes.

**Démonstration 1**

1. On choisit deux points $A$ et $B$ sur la droite et on appelle $C$ le point extérieur. Les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés. Donc d'après l'axiome 2 il existe un unique plan $\Pi$ contenant $A$, $B$ et $C$. De plus d'après l'axiome 1 le plan $\Pi$ contient la droite $(AB)$.
2. Soit $A$ le point d'intersection des deux droites. On choisit un point $B$ sur une des droites et $C$ un autre point sur l'autre droite. D'après l'axiome 2 il existe un unique plan $\Pi$ contenant $A$, $B$ et $C$. De plus d'après l'axiome 1 (deux fois) le plan $\Pi$ contient la droite $(AB)$ et la droite $(AC)$. On a bien l'existence et l'unicité de $\Pi$. □

**Définition 2.**

On dit que des objets (droites, points, etc.) sont **coplanaires** s'ils sont inclus dans un même plan.

**Définition 3.**

On dit que deux droites sont **parallèles** si elles sont coplanaires et parallèles dans un plan au sens de la géométrie plane. Autrement dit elles sont disjointes ou confondues.

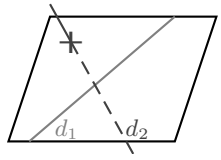
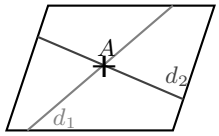
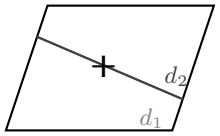
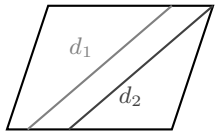
**Théorème 2**
Il existe un unique plan de l'espace contenant deux droites parallèles non confondues.

**Démonstration 2**
L'existence est assurée par la définition 3 des droites parallèles.
L'unicité par le théorème 1.2. □

En résumé, un plan est défini :
- par trois points non alignés (axiome 1)
- par une droite et un point extérieur à cette droite (théorème 1.2.)
- par deux droites sécantes (théorème 1.1.)
- par deux droites parallèles non confondues (théorème 2).

## 8.3 Positions relatives dans l'espace

### 8.3.1 Position relative de deux droites

| **non coplanaires** | coplanaires | coplanaires | coplanaires |
|---|---|---|---|
| non parallèles | non parallèles | parallèles | parallèles |
| | **sécantes** | **égales** | **strictement parallèles** |
|   |   |   |   |
| Aucun point commun | Un seul point commun | Tous les points en commun | Aucun point commun |

On dit aussi de deux droites égales qu'elles sont **confondues**.

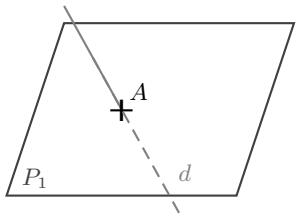
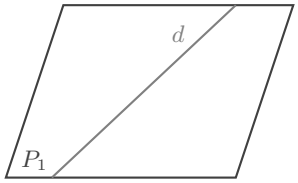
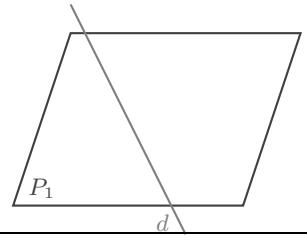
### 8.3.2 Position relative d'une droite et d'un plan

Dès qu'une droite admet deux points communs avec un plan, d'après l'axiome 3 toute la droite est incluse dans le plan.

**Définition 4.**

On dit qu'une droite est **strictement parallèle** à un plan si elle n'admet aucun point commun avec ce plan. Autrement dit la droite et le plan sont disjoints.
On dit qu'une droite est **parallèle** à un plan si elle est strictement parallèle ou incluse dans ce plan.

Une droite de l'espace peut être :

| | parallèle au plan | parallèle au plan |
|---|---|---|
| **sécante** au plan | **incluse** dans le plan | **strictement parallèle** au plan |
|   |   |   |
| Un seul point commun | Une droite de points communs | Aucun point commun |

**Théorème 3**
Soit $d$ une droite sécante à un plan $P$. Toute droite $d'$ parallèle à $d$ est sécante au plan $P$.

**Démonstration 3**
On peut toujours supposer que les droites $d$ et $d'$ sont distinctes. Soit $A$ le point d'intersection de $d$ et $P$.

Soit $\Pi$ le plan contenant les droites $d$ et $d'$. L'intersection des plans $\Pi$ et $P$ contient le point $A$, donc toute une droite $\Delta$ d'après l'axiome 5 La droite $\Delta$ est sécante à la droite $d$ donc à la droite $d'$. Soit $B$ le point d'intersection de $\Delta$ et $d'$. L'intersection de $P$ et de $d'$ contient au moins le point $B$. Imaginons qu'elle contienne aussi un autre point $B'$, alors l'intersection de $\Pi$ et $P$ contiendrait la droite $(AB)$ et le point $B'$ donc les deux plans seraient confondus ce qui n'est pas compatible avec le fait que $d$ est sécante au plan $P$.

Finalement $d'$ est sécante au plan $P$ et $B$ est le point d'intersection. □

**Théorème 4**
Si une droite $d$ est parallèle à une droite $d'$ d'un plan $P$ alors la droite $d$ est parallèle au plan $P$.

**Démonstration 4**
Si $d = d'$ il n'y a rien à démontrer. Sinon on considère le plan $\Pi$ contenant les droites $d$ et $d'$. Soit $M$ un point commun à $d$ et à $P$. Le point $M$ n'appartient pas à $d'$. Donc l'intersection des plans $\Pi$ et $P$ contient la droite $d'$ et un point $M \notin d'$. D'après l'axiome 2 $\Pi = P$ donc $d \subset P$ dès que leur intersection est non vide. C'est bien dire que la droite $d$ est parallèle au plan $P$. □

**Théorème 5**
Soit $d$ une droite parallèle à un plan $P$. Pour tout point $A \in P$ la parallèle à $d$ passant par $A$ est incluse dans $P$.

**Démonstration 5**
On peut toujours supposer que $d$ est une droite strictement parallèle à un plan $P$.

Soit $\Pi$ le plan contenant le point $A$ et la droite $d$. Les plans $\Pi$ et $P$ ont le point $A$ en commun donc tout une droite $d'$ de points communs d'après l'axiome 5. Les droites $d$ et $d'$ sont parallèles. En effet comme elles sont coplanaires, elles auraient un point commun sinon. Ce point appartiendrait à la droite $d$ et au plan $P$ ce qui était exclus au départ. □

### 8.3.3 Position relative de deux plans

**Définition 5.**

On dit que deux plans sont **strictement parallèles** s'ils n'admettent aucun point commun. Autrement dit les deux plans sont disjoints.
On dit que deux plans sont **parallèles** s'ils sont strictement parallèles ou égaux.

L'intersection de deux plans $P$ et $P'$ peut être vide si les plans $P$ et $P'$ sont strictement parallèles.

Dès que l'intersection de deux plans $P$ et $P'$ contient deux points distincts $A$ et $B$ alors elle contient la droite $(AB)$ d'après l'axiome 3.

L'intersection des deux plans ne peut pas être réduite à un unique point d'après l'axiome 5. On peut s'en **convaincre** en positionnant une feuille de papier au-dessus d'un bureau.

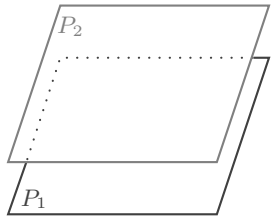
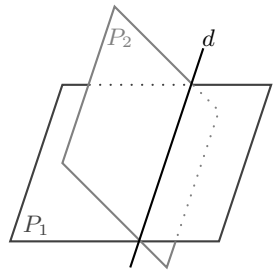
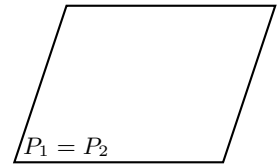
On dit aussi de deux plans égaux qu'ils sont **confondus**.

**Définition 6.**

On dit que deux plans sont **sécants** s'ils admettent une droite de points communs.

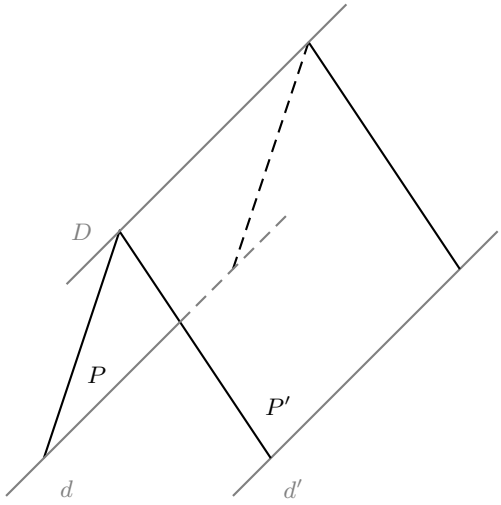
Dès que l'intersection de deux plans $P$ et $P'$ contient une droite et un point qui n'appartient pas à cette droite, alors ces plans sont confondus, d'après l'axiome 4.

On a donc trois possibilités pour l'intersection de deux plans.

| strictement parallèles | sécants | égaux |
|---|---|---|
|   |   |   |
| Aucun point commun | Une droite de points communs | Un plan de points communs |

### 8.3.4 Théorème du toit

**Théorème 6 (du toit)**
Soient deux plans $P$ et $P'$ ayant pour intersection la droite $D$. D'après le théorème du toit, si $d$ appartenant à $P$ et $d'$ appartenant à $P'$ sont parallèles, alors ces deux droites sont également parallèles à $D$.




**Démonstration 6**
On peut supposer $d$ et $d'$ disjointes. Soit $\Pi$ le plan contenant $d$ et $d'$. Les droites $d$ et $D$ appartiennent au plan $P'$ donc elles sont parallèles ou sécantes, il en est de même pour $d'$ et $D$ ou $d$ et $d'$ .
Supposons que $d$ et $D$ soient sécantes en $M$. $d = P' \cap \Pi$ donc $M \in \Pi$ $D = P \cap P'$ donc $M \in P$ D'où $M \in P \cap \Pi = d'$ donc $d'$ et $d$ sont sécantes en $M$.
Par contraposée, si $d'$ et $d$ sont parallèles, alors $d$ et $D$ ne sont pas sécantes. Comme elles sont coplanaires elles sont parallèles. □

## 8.4 Vecteurs de l'espace

On va généraliser les résultats des vecteurs du plan aux vecteurs de l'espace.

**Définition 7.**

Soient $A$ et $B$ deux points de l'espace.
On appelle **translation qui transforme $A$ en $B$** la transformation qui à tout point $M$ de l'espace associe l'unique point $M'$ tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.
Autrement dit le quadrilatère $ABM'M$ est un parallélogramme
On dit que la translation qui transforme $A$ en $B$ est la **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

**Remarque 3.**

Les sommets d'un parallélogramme de l'espace sont coplanaires. En effet deux droites parallèles de l'espace sont coplanaires.

En traduisant la caractérisation des parallélogrammes à l'aide du milieu des diagonales, on obtient :

**Théorème 7**
Soit $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace. Le point $D$ est l'image du point $C$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

### 8.4.1 Propriétés des vecteurs

La plupart des propriétés des vecteurs du plan (chapitre 7 section 7.2.2 du cours de seconde) se généralisent à tout l'espace, simplement en invoquant l'axiome 4.

**Théorème 8**
Quel que soit le point $A$ de l'espace, on a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Quels que soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace, on a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \text{si et seulement si } ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

La **norme** d'un vecteur de l'espace $\overrightarrow{u}$ – à savoir la distance $AB$ entre deux points $A$ et $B$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ – ne dépend pas du choix de $A$ et $B$.

De même trois points de l'espace sont toujours coplanaires. On en déduit le théorème suivant :

**Théorème 9 (relation de Chasles)**
Soient $A$, $B$ et $C$ trois points distincts de l'espace.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Pour la même raison,

**Théorème 10**
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

En retranscrivant lettre pour lettre la démonstration du théorème 6 page 222 du cours de seconde, on démontre le théorème suivant :

**Théorème 11**
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. On a

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$

**Définition 8.**

Deux vecteurs dont la somme égale le vecteur nul sont appelés vecteurs opposés. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés, on a donc $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ et on note $\vec{u} = -\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$.

D'après la relation de Chasles, pour tous points $A$ et $B$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. On en déduit que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

**Théorème 12**
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

Le produit d'un vecteur par un réel s'effectue dans un plan (et même sur une droite).

**Théorème 13**
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tous réels $k$ et $\ell$ on a

- $0\vec{u} = \vec{0}$.
- $k\vec{0} = \vec{0}$.
- $(k + \ell)\vec{u} = k\vec{u} + \ell\vec{u}$.
- $k(\ell\vec{u}) = (k\ell)\vec{u}$.
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

### 8.4.2 Vecteurs colinéaires

Toujours parce qu'on peut se restreindre à un plan, on a :

**Théorème 14**
Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace.

- Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

On en déduit le théorème suivant qui n'est pas si évident à démontrer directement à partir des axiomes. Il suffit de raisonner sur la colinéarité de vecteurs directeurs.

**Théorème 15**
Soit $d_1$, $d_2$ et $d_3$ trois droites de l'espace.

Si $d_1$ et $d_2$ sont parallèles et que $d_2$ et $d_3$ sont parallèles, alors $d_1$ et $d_3$ sont parallèles.

Un théorème de géométrie plane qui se généralise dans l'espace :

**Théorème 16**
On se donne une droite $D$ de l'espace. Par un point $M$ donné de l'espace passe une droite et une seule parallèle à $D$.

**Démonstration 16**
On se place dans un plan contenant $M$ et $D$. Grâce à l'axiome 4 on peut appliquer le cinquième postulat d'Euclide page 136 dans le cours de seconde. □

### 8.4.3 Points coplanaires

Soit $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace.

Si les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés, alors $A$, $B$, $C$ et $D$ sont toujours coplanaires. (Axiome 2.)

Sinon ( $A$ ; $B$ , $C$ ) est un repère du plan $(ABC)$.

Si $D$ appartient au plan $(ABC)$, alors il a des coordonnées ( $\alpha$ , $\beta$ ) dans ce repère. Cela se traduit par l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Inversement, s'il existe deux nombres réels $\alpha$ et $\beta$ tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC},$$

alors on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD'}$ où $D'$ est le point du plan $(ABC)$ de coordonnées ( $\alpha$ , $\beta$ ) dans le repère ( $A$ ; $B$ , $C$ ). De ce fait $D = D'$ et le point $D$ appartient à $(ABC)$.

Comme conséquence on a le théorème suivant :

**Théorème 17**
L'image d'un plan $P$ par une translation est un plan parallèle à $P$.

**Démonstration 17**
Soit ( $A$ ; $B$ , $C$ ) un repère du plan $P$ et $\overrightarrow{u}$ le vecteur de la translation. Soit $A'$, $B'$ et $C'$ les images respectives de $A$, $B$ et $C$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On a

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{u}.$$

Soit $P'$ le plan $(A'B'C')$.

Soit $M$ un point du plan $P$ et $M'$ l'image de $M$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Soit ( $\alpha$ , $\beta$ ) les coordonnées de $M$ dans le repère ( $A$ ; $B$ , $C$ ). On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A'M'} &= \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM'} \\
&= -\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{u} \\
&= \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \\
&= \alpha\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B}\right) + \beta\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'C}\right) \\
&= \alpha\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{u}\right) + \beta\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{u}\right) \\
&= \alpha\overrightarrow{A'B'} + \beta\overrightarrow{A'C'}
\end{aligned}$$

Donc $M'$ appartient au plan $P'$.

Inversement, tout point $M'$ du plan $P'$ est l'image d'un point $M$ du plan $P$, à savoir l'image de $M'$ par la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.

Maintenant deux cas se présentent :

- Il existe deux réels $a$ et $b$ tels que
$$\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}.$$
Dans ce cas, en reprenant les notations plus haut :
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM'} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} \\
&= a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \\
&= (a+\alpha)\overrightarrow{AB} + (b+\beta)\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$
Donc le point $M'$ appartient à $P$. Donc $P' \subset P$ donc $P' = P$.
- Il n'existe pas de réels $a$ et $b$ tels que
$$\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}.$$
Dans ce deuxième cas, on prend un point $M \in P \cap P'$. Puisque $M \in P$, il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

Puisque $M \in P'$, il existe deux réels $\alpha'$ et $\beta'$ tels que

$$\overrightarrow{A'M} = \alpha'\overrightarrow{A'B'} + \beta'\overrightarrow{A'C'}$$
$$\alpha'\overrightarrow{AB} + \beta'\overrightarrow{AC},$$

d'après le calcul ci-dessus. On en déduit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{AA'}\\ &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A'M}\\ &= \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} - \left(\alpha'\overrightarrow{AB} + \beta'\overrightarrow{AC}\right)\\ &= (\alpha - \alpha')\overrightarrow{AB} + (\beta - \beta')\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

ce qui est impossible. Donc il n'y a pas de point commun à $P$ et $P'$ : ils sont strictement parallèles.□

Inversement on a :

**Théorème 18**
Soit $P$ et $P'$ deux plans parallèles. Il existe une translation qui transforme $P$ en $P'$.

**Démonstration 18**
Soit ( $A$ ; $B$ , $C$ ) un repère du plan $P$ et $A'$ un point de $P'$. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'}$. L'image de $A$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est le point $A'$.

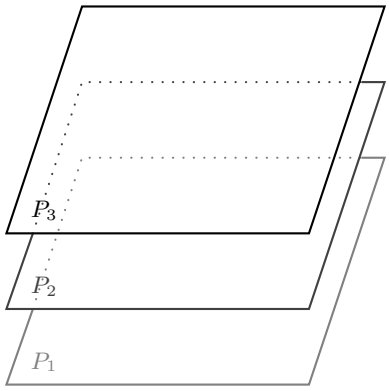
L'image par une translation d'une droite est une droite qui lui est parallèle. (voir le théorème 18 page 229 dans le cours de seconde). Donc l'image $B$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est un point $B'$ qui appartient à la parallèle à $(AB)$ passant par $A'$. D'après le théorème 5 page 322, $B' \in P'$.

De même l'image $C$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est un point $C'$ qui appartient au plan $P'$.

Maintenant les droites $(A'B')$ et $(A'C')$ ne sont pas confondues (sinon $(AB)$ et $(AC)$ le seraient) donc ( $A'$ ; $B'$ , $C'$ ) est un repère du plan $P'$.

Donc la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ transforme le plan $P$ en un plan qui contient $A'$, $B'$ et $C'$. C'est le plan $P'$ d'après l'axiome 2. □

**Théorème 19**
Soit $P_1$, $P_2$, et $P_3$ trois plans.
Si $P_1$ est parallèle à $P_2$ et que $P_2$ est parallèle à $P_3$ alors $P_1$ est parallèle à $P_3$.



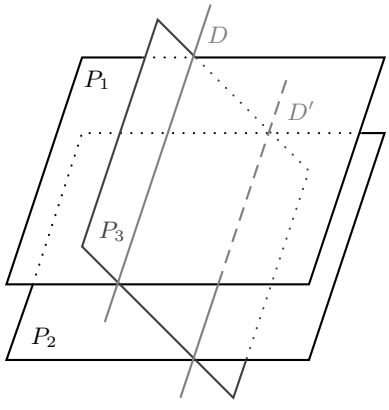

**Démonstration 19**
D'après le théorème 18 il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $P_2$ est l'image de $P_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et un vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $P_3$ est l'image de $P_2$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.
Donc $P_3$ est l'image de $P_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. Donc $P_1$ est parallèle à $P_3$ d'après le théorème 17. □

**Théorème 20**
Soit $P$ un plan et $A$ un point de l'espace. Il existe un unique plan passant par $A$ parallèle à $P$.

**Démonstration 20**
**Unicité :** Deux tels plans sont parallèles d'après le théorème précédent. Comme ils ont le point $A$ en commun, ils sont égaux.

**Existence :** Soit $B$ un point du plan $P$. L'image du plan $P$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ est un plan parallèle à $P$. De plus il contient l'image de $B$, c'est-à-dire le point $A$. □

**Théorème 21**
Si deux plans $P_1$ et $P_2$ sont parallèles, tout plan $P_3$ sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont des droites parallèles.




**Démonstration 21**
Supposons pour fixer les idées que $P_3$ est sécant à $P_1$ et n'est pas sécant à $P_2$. Alors $P_3$ est parallèle à $P_2$.
Soit alors $D = P_1 \cap P_3$ et $D' = P_2 \cap P_3$. Ces deux droites sont coplanaires puisqu'elles sont incluses dans le plan $P_3$. Supposons qu'elles admettent un point $M$ en commun. Ce point appartient donc à la fois aux plans $P_1$ et $P_2$ qui sont réputés parallèles. Donc $P_1 = P_2$ et $D = D'$.
Donc $D$ et $D'$ sont deux droites coplanaires disjointes ou confondues : elles sont bien coplanaires.□

## 8.5 Coordonnées dans l'espace

**Définition 9** (Projections)**.**

Soit $d$ une droite sécante à un plan $P$. Soit $M$ un point de l'espace. D'après le théorème 16 page 326 il existe une unique droite $d_M$ passant par $M$ et parallèle à $d$.
D'après le théorème 3 page 321 $d_M$ est sécante au plan $P$. Le point d'intersection de $d_M$ et $P$ s'appelle le **projeté de $M$ sur le plan $P$ parallèlement à $d$.**

**Définition 10** (Repère de l'espace)**.**

On appelle **repère de l'espace** toute liste $(\mathrm{O;I,J,K})$ de quatre points $O$, $I$, $J$ et $K$ non coplanaires.
Le point $O$ s'appelle l'origine du repère $(\mathrm{O;I,J,K})$.
On appelle **repère orthogonal** du plan tout repère $(\mathrm{O;I,J,K})$ tel que les triangles $OIJ$, $OJK$ et $OKI$ sont rectangles en $O$.
On appelle **repère orthonormé** ou **repère orthonormal** de l'espace tout repère $(\mathrm{O;I,J,K})$ tel que les triangles $OIJ$, $OJK$ et $OKI$ sont rectangles et isocèles en $O$.

**Théorème 22 (Coordonnées dans un repère)**
Soit $(\mathrm{O;I,J,K})$ un repère de l'espace. Pour tout point $M$ de l'espace, il existe un unique triple de réels $(\ x\ ,\ y\ ,\ z\ )$ tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ} + z\,\overrightarrow{OK}.$$

$x$ s'appelle l'abscisse, $y$ s'appelle l'ordonnée et $z$ s'appelle la cote.

**Démonstration 22**
**Unicité :** Si $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OM} = x'\overrightarrow{OI} + y'\overrightarrow{OJ} + z'\overrightarrow{OK}$ alors par soustraction

$$\overrightarrow{0} = (x-x')\overrightarrow{OI} + (y-y')\overrightarrow{OJ} + (z-z')\overrightarrow{OK},$$

puis

$$(x-x')\overrightarrow{OI} + (y-y')\overrightarrow{OJ} = (z'-z)\overrightarrow{OK}.$$

Soit $M$ le point de l'espace défini par

$$\overrightarrow{OM} = (z'-z)\overrightarrow{OK}.$$

Les points $O, K$ et $M$ sont alignés donc $M$ appartient à la droite $(OK)$. La droite $(OK)$ est sécante au plan $(OIJ)$ puisqu'elle contient le point $O$ qui appartient à $(OIJ)$ et le point $K$ qui n'y appartient pas.

De plus comme

$$\overrightarrow{OM} = (x-x')\overrightarrow{OI} + (y-y')\overrightarrow{OJ},$$

les points $O$, $I$, $J$ et $M$ sont coplanaires. Donc $M = O$ et $z = z'$. On en déduit

$$\overrightarrow{0} = (x-x')\overrightarrow{OI} + (y-y')\overrightarrow{OJ},$$

ce qui entraîne $x = x'$ et $y = y'$ d'après l'unicité des coordonnées dans le repère $(O; I, J)$.

**Existence :** Soit $M$ un point de l'espace et $H$ le projeté de $M$ sur le plan $(OIJ)$ parallèlement à $(OK)$. Soient $(\ x\ ,\ y\ )$ les coordonnées de $H$ dans le repère $(O; I, J)$, on a

$$\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}.$$

De plus les points $M$ et $H$ appartiennent à une droite parallèle à la droite $(OK)$, donc $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires. Donc il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{HM} = z\overrightarrow{OK}$.

D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} \\ &= x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

### 8.5.1 Représentations paramétriques

La représentation paramétrique d'une droite du plan(11.3.3 page 384) déjà vue dans le cours de seconde, se généralise sans problème dans l'espace.

Soit $(D)$ une droite de l'espace, $A$ et $B$ deux points distincts de $(D)$.

On a vu qu'un point $M\ (\ x\ ,\ y\ ,\ z\ )$ de l'espace appartient à $(D)$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$. En revenant à la définition de la colinéarité des vecteurs, c'est dire qu'il existe un réel $t$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. En traduisant à l'aide des coordonnées et en notant $A\ (\ a\ ,\ b\ ,\ c\ )$ on obtient une **représentation paramétrique** de la droite $(D)$ :

$$\boxed{\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).}$$

Chaque valeur du **paramètre** $t \in \mathbb{R}$ donne un point de la droite. Inversement, chaque point $M$ de la droite admet un paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Même chose pour un plan de l'espace, mais cette fois il y a deux paramètres.

On se donne un plan $P$ de l'espace par un repère $(\ A\ ;\ B\ ,\ C\ )$. Un point $M\ (\ x\ ,\ y\ ,\ z\ )$ de l'espace appartient à $(D)$ si et seulement si il existe deux réels $u$ et $v$ tels que $\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$.

En posant $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ , $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ et $A\ (\ a\ ,\ b\ ,\ c\ )$ l'égalité vectorielle se traduit par

$$\boxed{\begin{cases} x = a + \alpha u + \alpha' v \\ y = b + \beta u + \beta' v \\ z = c + \gamma u + \gamma' v \end{cases} \qquad ((u, v) \in \mathbb{R}^2).}$$

## 8.6 Produit scalaire

L'espace est rapporté à un repère **orthonormé** $(O; I, J, K)$.

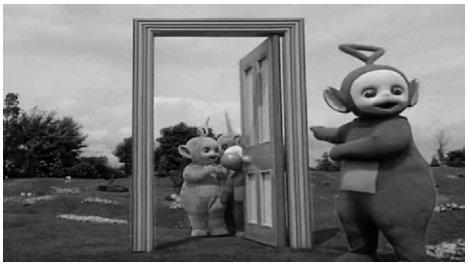
### 8.6.1 Norme

La **norme** d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de l'espace est la norme de ce vecteur dans n'importe quel plan contenant $A$ et $B$ en vertu de l'axiome 4. C'est la distance $AB$. On la note $\|\overrightarrow{AB}\|$.

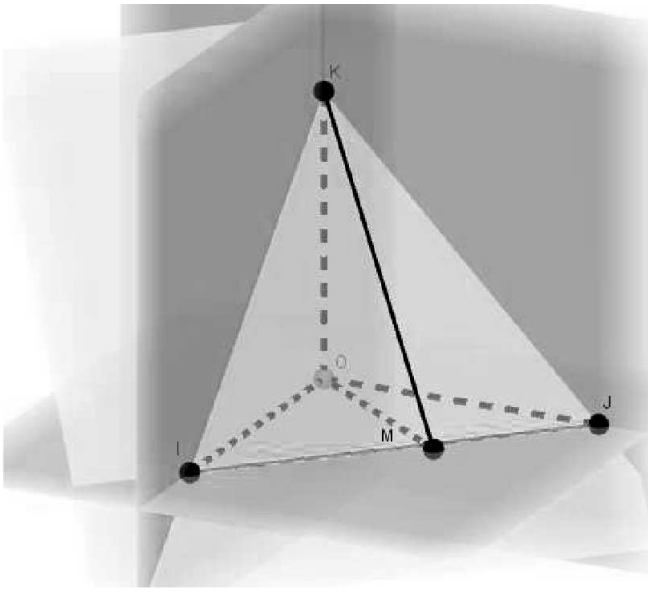
### 8.6.2 La porte !

Une porte – rectangulaire – est fermée. Elle se trouve donc dans le plan du mur, lequel est supposé vertical, n'est-ce pas ? On suppose que le plancher est en pente. Suivant le sens de la pente on ne peut pas ouvrir la porte, ou bien on peut ouvrir la porte mais alors le bas de la porte est en l'air. C'est ce que dit le théorème suivant :

**Théorème 23 (de la porte)**
La droite $(OK)$ est perpendiculaire à toute droite $d$ du plan $(OIJ)$ passant par $O$.



Tinky Winky explique aux jeunes mathématiciens que lorsqu'on ouvre la porte à angle droit, on peut constater que le bas de la porte appartient bien au plan horizontal et qu'ainsi – d'après le théorème de la porte – le bas de la porte reste en contact avec le sol tout au long de l'ouverture de la porte. Il signale aussi qu'en vertu de l'axiome 4, on peut calculer la distance entre deux points dans n'importe plan qui les contient. Merci Tinky Winky.



**Démonstration 23**
On va supposer que la droite $d$ coupe le segment $[IJ]$. On appelle $M$ le point d'intersection de $d$ et de $[IJ]$.

Dans le plan $(OIJ)$ on a $IJ = \sqrt{2}$. De même dans le plan $(OJK)$ on a $KJ = \sqrt{2}$ et dans le plan $(OKI)$ on a $IK = \sqrt{2}$ toujours d'après le théorème de Pythagore. De ce fait le triangle $IJK$ est équilatéral.

Dans le plan $(OIJ)$ on a $OM^2 = OI^2 + IM^2 - 2IM\cos\frac{\pi}{4} = 1 + IM^2 - IM\sqrt{2}$ d'après la loi des cosinus (théorème 18 page 281) dans le triangle $OIM$. De même dans le triangle $OJM$, $OM^2 = 1 + JM^2 - JM\sqrt{2}$.

En ajoutant les deux égalités et compte tenu de ce que $IM + JM = \sqrt{2}$, on a

$$2OM^2 = 2 + IM^2 + JM^2 - 2 = IM^2 + JM^2.$$

Dans le plan $(IJK)$ on a $KM^2 = KI^2 + IM^2 - 2IM\cos\frac{\pi}{3} = 2 + IM^2 - IM\sqrt{2}$ d'après la loi des cosinus dans le triangle $KIM$. De même dans le triangle $KJM$, $KM^2 = 2 + JM^2 - JM\sqrt{2}$. En ajoutant les deux égalités et compte tenu de ce que $IM + JM = \sqrt{2}$, on a

$$2KM^2 = 4 + IM^2 + JM^2 - 2 = IM^2 + JM^2 + 2 = 2OM^2 + 2OK^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore dans le plan $(OMK)$ le triangle $OMK$ est rectangle en $O$. Donc les droites $d$ et $(OM)$ sont perpendiculaires.

Dans le cas où $d$ ne coupe pas le segment $[IJ]$ le lecteur scrupuleux pourra refaire le même travail en remplaçant $I$ par le point $I'$ ( $-1$ , $0$ , $0$ ). □

### 8.6.3 Distance dans un repère orthonormé

**Théorème 24**
Soit $A$ ( $x_A$ , $y_A$ , $z_A$ ) et $B$ ( $x_B$ , $y_B$ , $z_B$ ). On a

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \text{ et}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

**Démonstration 24**
Soit $C$ le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$. On a $C$ ( $x_B - x_A$ , $y_B - y_A$ , $z_B - z_A$ ). Soit $M$ ( $x_B - x_A$ , $y_B - y_A$ , $0$ ). Puisque $\overrightarrow{OC} = (x_B - x_A)\overrightarrow{OI} + (y_B - y_A)\overrightarrow{OJ}$ les points $O$, $I$, $J$ et $M$ sont coplanaires autrement dit $M \in (OIJ)$.

Si $M \neq O$, alors d'après le théorème de la porte, les droites $(OK)$ et $(OM)$ sont perpendiculaires. Il en est de même pour $(MC)$ lorsque $M \neq C$. En effet $(MC)$ est parallèle à $(OK)$ puisqu'elles sont toutes les deux dirigées par $\overrightarrow{OK}$ et que dans un plan, si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. D'après le théorème de Pythagore dans le plan $(OMC)$ on a $OC^2 = OM^2 + MC^2 = OM^2 + (z_B - z_A)^2$. Puis, d'après le théorème de Pythagore dans le plan $(OIJ)$ on a $OM^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.

Ces égalités restent vraies si $M = O$ ou $M = C$. (on travaille alors dans un plan). On conclut en remarquant que

$$OM = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} = AB.$$

### 8.6.4 Produit scalaire

**Définition 11.**

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points de l'espace.
On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant $A$, $B$ et $C$.

**Théorème 25**
Soit $A$, $B$ et $C$ trois points de l'espace.
On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2\right)$.

**Démonstration 25**
En effet cette égalité a lieu dans le plan donc dans n'importe quel plan en vertu de l'axiome 4. □

**Définition 12.**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soit $A$, $B$ et $C$ trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ que l'on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant $A$, $B$ et $C$. Autrement dit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

Autrement dit, le produit scalaire de deux vecteurs ne dépend pas du point $A$ choisi. En effet, dans le théorème 25, la norme des vecteurs ne dépend pas des représentants choisis.

**Définition 13.**

On appelle **vecteurs orthogonaux** deux vecteurs – du plan ou de l'espace – dont le produit scalaire est nul.

**Théorème 26**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Rappelons à toutes fins utiles que le repère doit être **orthonormé**.

**Démonstration 26**

En effet on a $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\\z-z'\end{pmatrix}$. Donc d'après le théorème 24,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left((x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2-(x-x')^2-(y-y')^2-(z-z')^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left((x+x')^2-(x-x')^2+(y+y')^2-(y-y')^2+(z+z')^2-(z-z')^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left((2x)\times(2x')+(2y)\times(2y')+(2z)\times(2z')\right)\\&=xx'+yy'+zz'\end{aligned}$$

**Théorème 27 (Règles de calcul)**
Pour tous vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, pour tout réel $k$,

- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$.
- $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=k\times(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})$.
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\|\overrightarrow{u}\|^2$.
- $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$.
- $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2$.
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})=\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$.
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$.

**Démonstration 27**
Seule la dernière égalité reste à établir. En effet toutes les autres ont déjà été établies dans le plan et sont valables dans tout plan. On pose $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}&=(x+x')x''+(y+y')y''+(z+z')z''\\&=(xx''+yy''+zz'')+(x'x''+y'y''+z'z'')\\&=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}.\end{aligned}$$

### 8.6.5 Coordonnées dans un repère orthonormé

On est toujours le repère orthonormé $(\mathrm{O};\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K})$.

**Théorème 28**
Soit $M\ (\ x\ ,\ y\ ,\ z\ )$ un point de l'espace. On a

$$x=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OI},\qquad y=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OJ},\qquad z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OK}.$$

**Démonstration 28**
En effet, on a par définition des coordonnées dans un repère,

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK},$$

de ce fait,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OI} &= \left(x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}\right)\cdot\overrightarrow{OI}\\ &= x\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}\cdot\overrightarrow{OI} + z\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OI}\\ &= x\left\|\overrightarrow{OI}\right\| + y\times 0 + z\times 0\\ &= x.\end{aligned}$$

Ainsi de suite pour les autres coordonnées. □

## 8.7 Plans et droites perpendiculaires

### 8.7.1 Droites perpendiculaires

**Définition 14.**

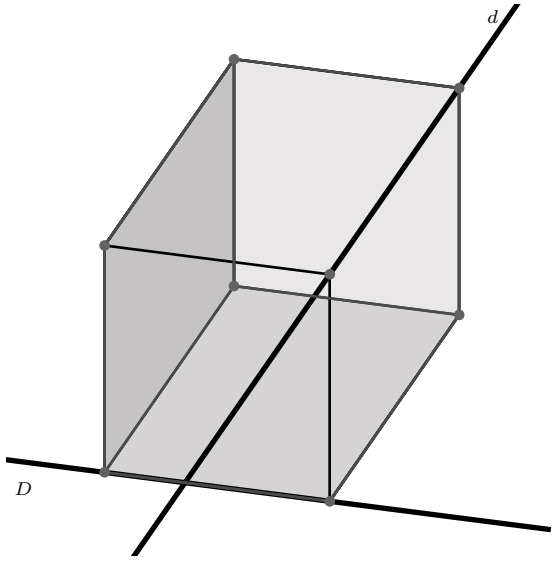
On appelle **droites perpendiculaires** deux droites **sécantes** qui sont perpendiculaires dans le plan qui les contiennent.

**Définition 15.**

On appelle **droites orthogonales** deux droites telles qu'une parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque est fausse.
Les droites $d$ et $D$ sont orthogonales. Elles ne sont pas sécantes donc elles ne sont pas perpendiculaires.

Pour que deux droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit qu'elles soient orthogonales et coplanaires.
Si deux droites sont orthogonales, toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.



**Théorème 29**
Pour que deux droites de l'espace soient orthogonales, il faut et il suffit qu'elles admettent des vecteurs directeurs orthogonaux.

### 8.7.2 Droite et plan perpendiculaires

**Définition 16.**

On dit qu'une droite est **perpendiculaire** lorsqu'elle est orthogonale à toute les droites incluses dans ce plan. On dit aussi que le plan est **perpendiculaire** à cette droite.

**Théorème 30**
Toute droite perpendiculaire à un plan est sécante à ce plan.

**Démonstration 30**
Sinon elle serait parallèle à ce plan, donc parallèle à une droite de ce plan (théorème 5 page 322). Ces deux droites auraient donc un vecteur directeur commun (puisque parallèles) orthogonal à lui-même (puisque orthogonales) Soit $\overrightarrow{u}$ ce vecteur. On aurait ainsi $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 = \|\overrightarrow{u}\|^2$. Donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ce qui est impossible pour un vecteur directeur. □

**Théorème 31 (de la porte − 2)**
Pour qu'une droite $d$ soit perpendiculaire à un plan $P$, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites sécantes $d_1$ et $d_2$ de ce plan.

**Démonstration 31**
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite $d$. Il s'agit de démontrer que $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à tous les vecteurs directeurs des droites du plan $P$.

Soit $A$ le point d'intersection de $d_1$ et $d_2$. Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur directeur de $d_1$ et $\overrightarrow{AC}$ un vecteur directeur de $d_2$. ( $A$ ; $B$ , $C$ ) est un repère du plan $P$. Puisque que $d$ est perpendiculaire à $d_1$, on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. De même $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur d'une droite quelconque du plan $P$. Il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tel que

$\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. D'après le théorème 27, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{u}\cdot\left(\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{u}\cdot\left(\alpha\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{u}\cdot\left(\beta\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \alpha\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \alpha\times 0+\beta\times 0\\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait vérifier.

La réciproque est évidente. □

**Théorème 32**
Si une droite $d$ est perpendiculaire à un plan $P$, alors toute droite parallèle à $d$ est perpendiculaire à $P$.

Inversement si deux droites sont perpendiculaires à un plan $P$, alors elles sont parallèles.

Si un plan $P$ est perpendiculaire à une droite $d$, alors tout plan parallèle à $P$ est perpendiculaire à $d$.

Inversement si deux plans sont perpendiculaires à une droite $d$, alors ils sont parallèles.

**Définition 17.**

Soit $P$ un plan, $d$ une droite perpendiculaire et $M$ un point de l'espace. Le projeté du point $M$ sur le plan $P$ parallèlement à $d$ s'appelle le projeté orthogonal de $M$ sur $P$. Ce projeté ne dépend pas du choix de la droite $d$ une droite perpendiculaire à $P$.

### 8.7.3 Plan médiateur

**Définition 18.**

Soit $A$ et $B$ deux points distincts de l'espace. On appelle **plan médiateur** du segment $[AB]$ l'unique plan perpendiculaire à $(AB)$ passant par le milieu de $[AB]$.

**Théorème 33**
Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le lieu des points de l'espace situés à égale distance de $A$ et de $B$.

**Démonstration 33**
Soit $M$ un point de l'espace tel que $AM = BM$, alors $M$ appartient à la (droite) médiatrice de $[AB]$ dans un plan contenant $A$, $B$ et $M$. Comme ce plan contient aussi le milieu $I$ de $[AB]$, le point $M$ appartient au plan perpendiculaire à $(AB)$ passant par $I$, c'est-à-dire au plan médiateur de $[AB]$.

Inversement si $M$ appartient au plan perpendiculaire à $(AB)$ passant par $I$, alors la droite $(MI)$ est perpendiculaire à $(AB)$ et passe par le milieu de $[AB]$. C'est donc la (droite) médiatrice de $[AB]$ dans un plan contenant $A$, $B$ et $M$. De ce fait $AM = BM$, d'après le théorème 3 page 139 du cours de seconde. □

### 8.7.4 Vecteur normal à un plan

**Définition 19.**

Soit $P$ un plan de l'espace. On appelle **droite normale** au plan $P$ toute droite perpendiculaire à $P$.
On appelle **vecteur normal** au plan $P$ tout vecteur directeur d'une droite normale au plan $P$.

**Théorème 34**
Soit $P$ un plan de l'espace. Il existe une droite $d$ normale à $P$.

**Démonstration 34**
Soit ( $A$ , $B$ , $C$ ) un repère de $P$, $P_1$ le plan médiateur de $[AB]$ et $P_2$ le plan médiateur de $[AC]$. Ces deux plans ne sont pas disjoints car le centre $\Omega$ du cercle circonscrite à $ABC$ dans le plan $(ABC)$ appartient à $P_1 \cap P_2$. Ils sont disjoints car tout point de la médiatrice de $[AB]$ dans le plan $(ABC)$, distinct de $\Omega$, n'appartient pas à $P_2$.

L'intersection de $P_1$ et $P_2$ est une droite $d$. Puisque $d \subset P_1$, $d$ est perpendiculaire à $(AB)$. Puisque $d \subset P_2$ $d$ est perpendiculaire à $(AC)$. Donc $d$ est perpendiculaire à deux droites sécantes de $P$ donc d'après le deuxième théorème de la porte, $d$ est normale à $P$. □

D'après le théorème 32, deux plans sont parallèles si et seulement si ils ont un vecteur normal commun.

## 8.8 Équation de plan

On se donne un point $A$ ( $a$ , $b$ , $c$ ) de l'espace. Un plan passant par $A$ est le lieu des points $M$ ( $x$ , $y$ , $z$ ) tels que $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal à un vecteur normal $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$. Ce qui se traduit par

$$\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0,$$

soit

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta,$$

avec $\delta = \alpha a + \beta b + \gamma c$.

Inversement, si $(\ \alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma\ ) \neq (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ )$ alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ n'est pas le vecteur nul. Il dirige une droite.

Soit $\delta$ un nombre réel.

L'équation

$$\big[\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta, \qquad \text{inconnue } (\ x\ ,\ y\ ,\ z\ ) \in \mathbb{R}^3,\big]$$

admet au moins une solution : Pour fixer les idées, on a $\alpha \neq 0$ et dans ces conditions $(\ \frac{d}{\alpha}\ ,\ 0\ ,\ 0\ )$ est une solution. Soit $A\ (\ a\ ,\ b\ ,\ c\ )$ où $(\ a\ ,\ b\ ,\ c\ )$ est une solution. L'équation devient alors $\alpha x+\beta y+\gamma z = \alpha a+\beta b+\gamma c$ soit $\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des coordonnées des points du plan passant par $A$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

**Définition 20.**

Soit $(\ \alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma\ ) \neq (\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ )$ et $\delta \in \mathbb{R}$. $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ s'appelle une **équation de plan**. .

**Remarque 4.**

Soit $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ une équation d'un plan $P$. Pour tout $k \neq 0$, $(k\alpha)x+(k\beta)y+(k\gamma)z=k\delta$ est aussi une équation du même plan $P$.

## 8.9 Produit vectoriel

### 8.9.1 Orientation de l'espace

On va donner une idée intuitive de l'orientation dans l'espace.

**Définition 21.**

On dit que deux repères orthonormés de l'espace ont la même **orientation** lorsqu'ils sont superposables.

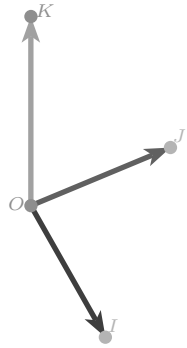
Le lecteur devra se **convaincre** qu'il existe deux orientations possibles et deux seulement pour les repères orthonormés.

Pour le plan, on avait orienté en choisissant comme sens positif le sens trigonométrique c'est-à-dire celui qui passe de $\overrightarrow{OI}$ à $\overrightarrow{OJ}$

**Définition 22.**

Orienter l'espace, c'est choisir parmi les deux familles de repères orthonormés l'une d'entre elles. Tout repère de cette famille élue sera appelé repère direct. Les autres repères indirects.

L'orientation qui a été choisie par les physiciens est celle dite « des trois doigts » ou celle du « bonhomme d'Ampère ».




Ci-contre le repère $(O; I, J, K)$ est direct. La règle des trois doigts dit que lorsque le pouce, l'index et le majeur de la main **droite** sont deux à deux perpendiculaires, le pouce est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{OI}$, l'index par le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ et le majeur par le vecteur $\overrightarrow{OK}$.

Ou un bonhomme, traversé par le vecteur $\overrightarrow{OK}$ des pieds à la tête, regardant $\overrightarrow{OI}$, a le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ à sa **gauche**.

Tout ça concerne les physiciens. Une telle orientation est **obligatoire** pour eux. Les mathématiques c'est la liberté. On peut choisir l'orientation que l'on veut.

Ce à quoi les physiciens répondent aux matheux : « Choisissez l'orientation que vous voulez, mais ne venez pas vous plaindre si vous vous trompez de signe dans vos calculs. »

Forts de ce sage conseil issu d'une longue expérience, nous choisirons l'orientation des physiciens pour la suite.

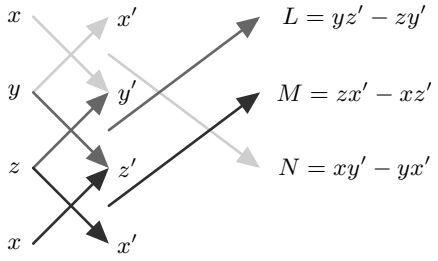
## 8.9.2 Produit vectoriel

L'espace est rapporté à un repère $(O; I, J, K)$ orthonormé direct.

**Définition 23.**

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. On définit le **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ comme étant le vecteur défini par ses coordonnées $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}L\\M\\N\end{pmatrix}$ avec

$$\begin{cases} L = yz' - zy' \\ M = zx' - xz' \\ N = xy' - yx' \end{cases}$$




Disposition pratique des calculs :

On copie la première ligne dans la quatrième et on effectue la différence des produits en croix. En anglais, le produit vectoriel s'appelle « cross product ».

### 8.9.3 Propriétés

**Théorème 35**
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

**Démonstration 35**

En posant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) &= x(yz' - zy') + y(zx' - xz') + z(xy' - yx') \\
&= xyz' - xzy' + yzx' - yxz' + zxy' - zyx' \\
&= x'(yz - zy) + y'(-xz + zx) + z'(xy - yx) \\
&= 0 \\
&\text{et} \\
\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) &= x'(yz' - zy') + y'(zx' - xz') + z'(xy' - yx') \\
&= x'yz' - x'zy' + y'zx' - y'xz' + z'xy' - z'yx' \\
&= x(-y'z' + z'y') + y(x'z' - z'x') + z(-x'y' + y'x') \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qu'il suffisait de vérifier. □

On vérifie sans problème :

**Théorème 36 (Règles de calcul)**
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, pour tout réel $k$,
- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$,
- $\overrightarrow{u} \wedge (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$,
- $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$,
- $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OK}$, $\quad \overrightarrow{OJ} \wedge \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OI}$, $\quad$ et $\overrightarrow{OK} \wedge \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$.

**Exemple 1**
Soit $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$, on a alors

$$L = 0;\ M = 0;\ N = \sin\vartheta,\ \text{donc}\ \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \sin\vartheta\,\overrightarrow{OK}.$$

On a un angle de mesure $\vartheta$ entre les angles $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, soit $\left(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \vartheta \bmod 2\pi$. Le produit vectoriel donne le sinus de l'angle dans ce cas précis.

Ce résultat est général :

**Théorème 37**
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}}\right) \equiv \vartheta \bmod 2\pi$.

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = |\sin\vartheta|\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|.$$

C'est un travail pour `Xcas` :
On prend $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$.
On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}L\\M\\N\end{pmatrix}$.
On calcule `NN`, le carré de la norme de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
On calcule `PS`, le carré de la norme de $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
C'est $\cos^2\vartheta\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$.
On calcule `MM`. C'est $\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$.

**Xcas en ligne**. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
L:=y1*z2-z1*y2; M:= z1*x2-x1*z2; N := x1*y2-x2*y1
                [y1z2 − z1y2, z1x2 − x1z2, x1y2 − x2y1]
NN:= L^2+M^2+N^2
          (y1z2 − z1y2)^2 + (z1x2 − x1z2)^2 + (x1y2 − x2y1)^2
PS:=(x1*x2+y1*y2+z1*z2)^2
                    (x1x2 + y1y2 + z1z2)^2
MM:=(x1^2+y1^2+z1^2)*(x2^2+y2^2+z2^2)
                (x1^2 + y1^2 + z1^2)(x2^2 + y2^2 + z2^2)
simplify(PS+NN-MM)
                              0
```

Après simplification, `Xcas` trouve que `NN` = `MM` − `PS`, soit

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|(1-\cos^2\vartheta)\\ &= \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\sin^2\vartheta,\end{aligned}$$

ce qu'il suffisait de vérifier.

Le problème est que l'on n'a pas ainsi une définition géométrique précise du produit vectoriel. On connaît la direction (vecteur orthogonal à deux vecteurs) et la longueur. En revanche on n'a pas le sens. Pour cela on va donner une définition approximative et admettre le résultat faute d'outils appropriés.

**Définition 24.**

On appelle **base directe** toute liste $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de trois vecteurs tels que en écartant le pouce de la main **droite** et en repliant le majeur :
- le vecteur $\overrightarrow{u}$ dirige le pouce,
- le vecteur $\overrightarrow{v}$ dirige l'index,
- le vecteur $\overrightarrow{w}$ dirige le majeur.

**Remarque 5.**

Le lecteur imprudent qui aurait choisi d'ignorer la convention d'orientation des physiciens sera prié de remplacer sa main droite par la main gauche dans la définition ci-dessus.

**Théorème 38**

- Pour que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires, il faut et il suffit que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- Si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors ( $\overrightarrow{u}$ , $\overrightarrow{v}$ , $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ ) est une base directe.

La première partie est évidente dans la mesure ou le sinus de l'angle entre deux vecteurs colinéaires est nul. On constate que la colinéarité de deux vecteurs de l'espace – c'est-à-dire savoir si un tableau 3 lignes par 2 colonnes est de proportionnalité – revient à vérifier trois égalités de produits en croix.

La seconde partie est admise comme signalé plus haut.

### 8.9.4 Distance d'un point à un plan

**Définition 25.**

Soit $P$ un plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ et $A$ ( $a$ , $b$ , $c$ ) un point de l'espace. On appelle distance de $A$ au plan $P$ la plus petite des distances $AM$ lorsque $M$ est un point du plan $P$.

Soit $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $H$ le projeté de $A$ sur le plan $P$ parallèlement à $\overrightarrow{n}$.

Enfin, soit $M$ un point quelconque de $P$. Puisque $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $P$, le triangle $AHM$ est rectangle en $H$ et $AM \geqslant AH$. Donc la distance de $A$ au plan $P$ existe bien est est égale à $AH$.

Maintenant soit $\overrightarrow{N} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\overrightarrow{n}$. Rappelons que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ puisque $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal. On a $\left\|\overrightarrow{N}\right\| = 1$. Soit ( $H$ ; $Q$ , $R$ ) un repère orthonormé de $P$. Soit $S$ tel que $\overrightarrow{HS} = \overrightarrow{N}$. Le repère ( $H$ ; $Q$ , $R$ , $S$ ) est alors un repère orthonormé de l'espace. On écrit les coordonnées de $A$ dans ce repère : $A$ ( $a'$ , $b'$ , $c'$ ). La distance cherchée est $AH = |c'|$. Or d'après le théorème 28 page 335,

$$\begin{aligned} c' &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{N} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\left((x_H - a)\alpha + (y_H - b)\beta + (z_H - c)\gamma\right) \end{aligned}$$

où ( $x_H$ , $y_H$ , $z_H$ ) sont les coordonnées de $H$ **dans le repère** (O; I, J, K). Comme le point $H$ appartient au plan $P$, on a $\alpha x_H + \beta y_H + \gamma z_H = \delta$ et

$$\begin{aligned} AH &= |c'| \\ &= \left|\frac{\delta - \alpha a - \beta b - \gamma c}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\right| \\ &= \frac{|\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}. \end{aligned}$$

**Remarque 6.**

- On constate – avec soulagement – que lorsque le point $A$ appartient au plan $P$, alors $\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta = 0$ et la distance de $A$ à $P$ est nulle.
- La formule est à rapprocher de celle donnant la distance d'un point à une droite dans le plan (théorème 14 page 279).
- Cette démonstration fait intervenir deux repères orthonormés : celui de départ, $(\mathrm{O}; \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ et un second, construit pour les besoins de la démonstration. Cette démonstration mérite d'être étudiée en détail.

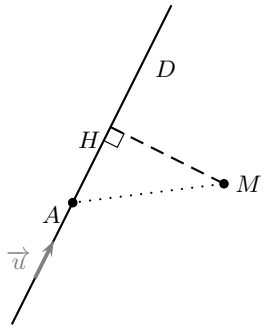
### 8.9.5 Distance entre deux droites

Voir méthode 8 page 356.

### 8.9.6 Distance d'un point à une droite de l'espace

**Théorème 39**
Soit $D$ une droite passant par un point $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$. La distance d'un point $M$ à la droite $D$ est donnée par

$$d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$




**Démonstration 39**
Si $H$ désigne le projeté orthogonal de $M$ sur $D$, alors $d(M, D) = MH$. Or

$$\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\| = \|(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}\| = MH \, \|\vec{u}\|,$$

d'où le résultat attendu, par division des deux membres par $\|\vec{u}\|$, non nul par hypothèse. □

### 8.9.7 Plans perpendiculaires

**Définition 26.**

Un plan $Q$ est perpendiculaire à un plan $P$ si il existe une droite de $Q$ orthogonale à $P$.

**Théorème 40**
Si $Q$ est perpendiculaire à un plan $P$ alors $P$ est perpendiculaire à $Q$.

**Démonstration 40**
Soit $d$ une droite de $Q$ orthogonale à $P$. Les plans $P$ et $Q$ sont sécants. (Sinon ils seraient parallèles et la droite $d$ serait orthogonale à toutes les droites de $P$, donc à celles de $Q$, donc à elle-même, ce qui n'est pas possible) Soit $d_1 = P \cap Q$. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $d$ et $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur directeur de $d_1$. Le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u_1}$ est un vecteur directeur d'une droite $d_2$ orthogonale à $d$ donc parallèle à $P$. Toute droite de $P$ parallèles à $d_2$ est orthogonale à deux droites sécantes de $Q$ et, d'après le théorème de la porte, est orthogonale à $Q$. □

On en déduit le théorème suivant :

**Théorème 41**
Si $P$ et $Q$ admettent des vecteurs normaux qui sont orthogonaux alors ils sont des plans perpendiculaires.

**Exemple 2**
Les plans $P$ d'équation $2x-y+z=1$ et $Q$ d'équation $x+3y+z=-2$ **dans un repère orthonormé** sont perpendiculaires.

En effet $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{m}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux à $P$ et $Q$ respectivement. On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m} = 2\times 1 - 1\times 3 + 1\times 1 = 0$. Donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{m}$ sont orthogonaux. De ce fait $P$ et $Q$ sont des plans perpendiculaires.

De plus $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{m}$ est un vecteur directeur de $P \cap Q$.

### 8.9.8 Aires

On se souvient (6.3.1 page 219) que l'aire du triangle $ABC$ est

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{A}BC.$$

Cela se traduit par le théorème suivant :

**Théorème 42**
$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$, ce qui permet un calcul direct lorsqu'on connaît les coordonnées des sommets dans un repère orthonormé.

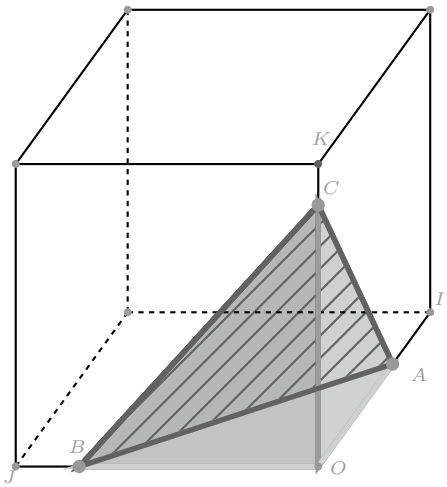
**Exemple 3 (Théorème de Gua)**
On considère un coin de cube $OABC$ c'est-à-dire que ( $O$ ; $A$ , $B$ , $C$ ) est un repère orthogonal. On a l'égalité entre les carrés des aires :

$$\mathscr{A}^2_{ABC} = \mathscr{A}^2_{ACO} + \mathscr{A}^2_{ABO} + \mathscr{A}^2_{BCO}.$$

On se place dans un repère orthonormé (O; I, J, K) lié au coin de cube. On pose $A$ ( $a$ , $0$ , $0$ ), $B$ ( $0$ , $b$ , $0$ ) et $C$ ( $0$ , $0$ , $c$ ). On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-a\\0\\c\end{pmatrix}, \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}bc\\ac\\bc\end{pmatrix}$$

Donc $\mathscr{A}^2_{ABC} = \dfrac{1}{4}(b^2c^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$. Le résultat en découle lorsqu'on sait que $\dfrac{1}{4}b^2c^2 = \mathscr{A}^2_{BCO}$, etc.




L'aire du parallélogramme qui s'appuie sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est

$$\mathscr{A} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}.$$

### 8.9.9 Volumes

Le volume du parallélépipède qui s'appuie sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est

$$\mathscr{A} = \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|.$$

On peut échanger les rôles des points $B$, $C$ et $D$.

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est

$$\mathscr{A} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|.$$

## 8.10 Sphères

On se place dans un repère orthonormé (O; I, J, K).

### 8.10.1 Équation d'une sphère

On a vu la définition d'une sphère (définition 1 page 318). Soit $A$ ( $a$ , $b$ , $c$ ) un point de l'espace et $R$ un réel strictement positif.

Un point $M$ ( $x$ , $y$ , $z$ ) appartient à la sphère de centre $O$ et de rayon $R$ si et seulement si $OM^2 = R^2$ soit

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Inversement, si

$$x^2+\alpha x+y^2+\beta y+z^2+\gamma z=d, \tag{8.1}$$

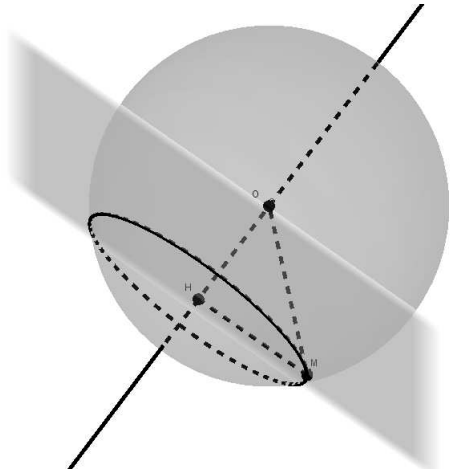
soit $\left(x+\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{\beta}{2}\right)^2+\left(x+\dfrac{\gamma}{2}\right)^2=d+\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}$.

- ▶ Si $d+\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}>0$, alors (1) est une équation de la sphère de centre $M\left(\dfrac{\alpha}{2}\,,\,\dfrac{\beta}{2}\,,\,\dfrac{\gamma}{2}\right)$.
- ▶ Si $d+\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}=0$, alors (1) est une équation du point $M\left(\dfrac{\alpha}{2}\,,\,\dfrac{\beta}{2}\,,\,\dfrac{\gamma}{2}\right)$.
- ▶ Si $d+\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}>0$, alors (1) n'a pas de solution.

### 8.10.2 Intersection d'un plan et d'une sphère

On considère un plan $P$ et une sphère $\mathcal{S}$ de centre $O$ et de rayon $R$. Soit $d$ la distance de $O$ à $P$ et $H$ le projeté orthogonal de $O$ sur le plan $P$.

- Si $d>R$, alors l'intersection de $P$ et de $\mathcal{S}$ est vide.
- Si $d=R$, alors l'intersection de $P$ et de $\mathcal{S}$ est réduite au point $H$. On dit alors que le plan $P$ est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.
- Si $d<R$, alors l'intersection de $P$ et de $\mathcal{S}$ est un cercle de centre $H$ et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$.



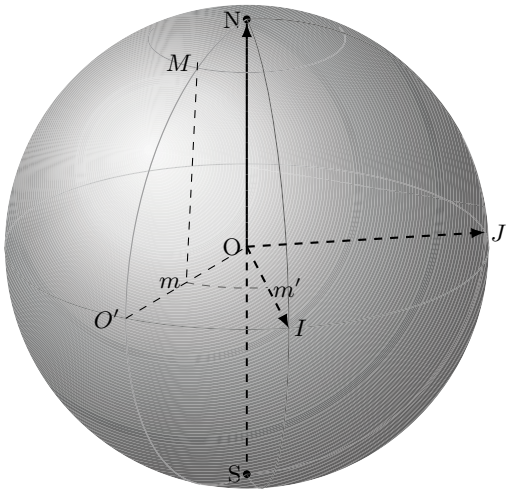

**Définition 27.**

On appelle grand cercle d'une sphère $\mathcal{S}$ l'intersection de $\mathcal{S}$ avec un plan passant par son centre.

Un grand cercle d'une sphère a le même rayon que la sphère elle-même.

### 8.10.3 Coordonnées sur la sphère

On se place dans un repère orthonormé direct ( $O$ ; $I$ , $J$ , $N$ ) avec $N$ comme pôle nord. Le plan d'équation $z = 0$ est le plan équatorial.
Soit $M$ un point de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $O$ et de rayon $R$. On construit le projeté $m$ orthogonal de $M$. Le point $m$ est repéré sur le plan équatorial par $Om = R\sin\vartheta$ et par l'angle $\varphi = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{Om}\right)$.
L'angle $\varphi$ s'appelle la longitude. Il est mesuré entre 0 et $2\pi$.
Dans le plan $(OIJ)$ les coordonnées de $m$ sont ( $R\cos\varphi$ , $R\sin\varphi$ ).
L'angle $\vartheta$ s'appelle la co-latitude. Il est mesuré entre 0 et $\pi$.
La cote de $M$ égale $Om = R\cos\vartheta$. En fin de compte




$$\boxed{M\ (\ R\sin\vartheta\cos\varphi\ ,\ R\sin\vartheta\sin\varphi\ ,\ R\cos\vartheta\ )}$$

Le dessin ci-dessus fait apparaître le **méridien** du point $M$. C'est le grand cercle passant par $M$, le pôle nord et le pôle sud. Il fait apparaître aussi le parallèle du point $M$. C'est l'intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan parallèle au plan équatorial passant par $M$. Ce n'est pas un grand cercle en général.

### 8.10.4 Puissance d'un point par rapport à une sphère

L'intersection d'une droite et d'une sphère est vide ou bien l'intersection d'une droite et d'un cercle. Autrement dit, elle est constituée de zéro, un ou deux points.

**Théorème 43**
Soit $\mathcal{S}$ de centre $O$ et de rayon $R$. Soit $A$ un point de l'espace. Une droite passant par $A$ coupe $\mathcal{S}$ en deux points $M$ et $M'$.

Le nombre $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}$ ne dépend pas de la droite choisie. Il égale $AO^2 - R^2$. On l'appelle **puissance de $A$ par rapport à $\mathcal{S}$** .

Lorsqu'une droite passant par $A$ coupe $\mathcal{S}$ en un seul point $T$, on a $OT^2 = AO^2 - R^2$.

**Démonstration 43**
On se place dans un plan $P$ contenant $A$, $O$ et $M$. Ce plan contient $M'$ en vertu de l'axiome 2. Il coupe $\mathcal{S}$ suivant un grand cercle dont le rayon est $R$ par conséquent. La puissance de $A$ par rapport à ce grand cercle est $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'} = AO^2 - R^2$. (voir le théorème 21 page 286)

Toujours dans ce plan l'égalité $OT^2 = AO^2 - R^2$ est encore un calcul de puissance par rapport au grand cercle. □

## 8.11 Méthodes

**Méthode 1** (Déterminer l'intersection de deux plans de l'espace).

Deux plans peuvent être strictement parallèles (dans ce cas, leur intersection est vide), être confondus (dans ce cas, leur intersection est un plan) ou être sécants (dans ce cas, leur intersection est une droite).
Étape 1 : Déterminer deux points appartenant aux deux plans
On détermine deux points $A$ et $B$ qui appartiennent à la fois au premier et au deuxième plan.
Étape 2 : Déterminer l'intersection des deux plans
Si ces deux points ont pu être trouvés, l'intersection entre les deux plans est, au moins, la droite $(AB)$.

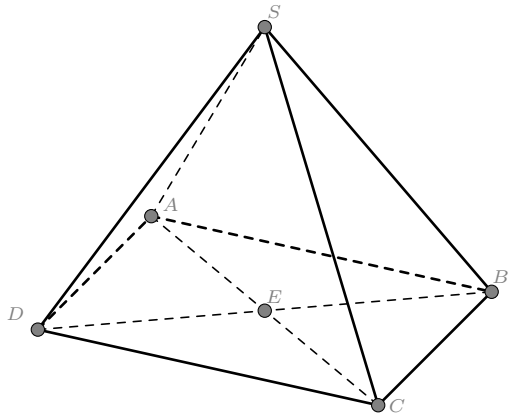
**Exemple**

On considère une pyramide $ABCDS$, régulière à base carrée, de sommet $S$. On appelle $E$ le point d'intersection des diagonales de la base.

Déterminer l'intersection des plans $(SAC)$ et $(SBD)$.

Étape 1 : Déterminer deux points appartenant aux deux plans
On réalise une figure.

$E \in (AC)$ car $E$ est le milieu de $[AC]$. Donc $E \in (SAC)$.
De même, $E \in (BD)$ car $E$ est le milieu de $[BD]$. Donc $E \in (SBD)$.
$S \in (SBD)$ et $S \in (SAC)$.
Ainsi, les points $E$ et $S$ appartiennent aux deux plans $(SAC)$ et $(SBD)$.



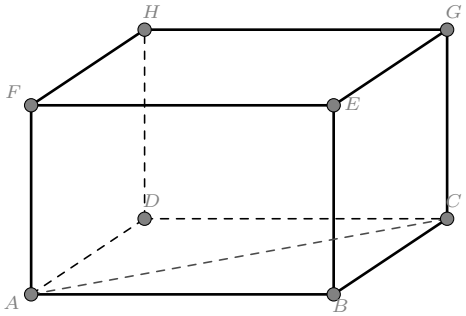

Étape 2 : Déterminer l'intersection des deux plans
L'intersection de $(SAC)$ et $(SBD)$ est la droite $(ES)$.

**Méthode 2** (Montrer qu'une droite et un plan sont parallèles).

Dans l'espace, une droite et un plan peuvent être parallèles. Dans ce cas, leur intersection est vide.
Étape 1 : Trouver un plan parallèle
On souhaite montrer que la droite $\Delta$ et le plan $P$ sont parallèles.
On détermine un plan $P'$ qui est parallèle à $P$ et qui contient $\Delta$.
Étape 2 : Montrer que la droite et le plan sont parallèles
Dans ce cas, $\Delta \,//\, P$.

**Exemple**

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Montrer que la droite $(AC)$ est parallèle au plan $(EFG)$.




Étape 1 : Trouver un plan parallèle
On réalise une figure.
Comme le quadrilatère est un parallélépipède rectangle, on sait que les plans $(ABC)$ et $(EFG)$ sont parallèles.
De plus $(AC)$ est incluse dans le plan $(ABC)$.
Étape 2 : Montrer que la droite et le plan sont parallèles
Donc la droite $(AC)$ est bien parallèle au plan $(EFG)$.

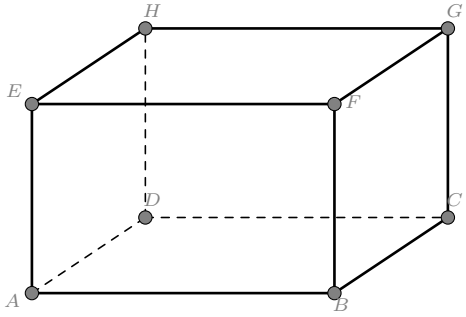
**Méthode 3** (Montrer que deux droites de l'espace sont parallèles)**.**

Il existe deux méthodes pour montrer que deux droites de l'espace sont parallèles. On peut montrer qu'elles sont toutes deux parallèles à une même droite ou qu'elles sont coplanaires et n'ont pas de point d'intersection.
**Méthode 1 :** En utilisant une troisième droite.
Étape 1 : Trouver une droite parallèle aux deux droites.
On veut montrer que $d_1$ // $d_2$. On détermine une droite $\Delta$ telle que $d_1$ // $\Delta$ et $d_2$ // $\Delta$.
Étape 2 : Conclure sur le parallélisme des deux droites
Dans ce cas, $d_1$ // $d_2$.
**Méthode 2 :** En montrant qu'elles ne se coupent pas.
Étape 1 : Montrer que les droites sont coplanaires
On montre d'abord que les droites $d_1$ et $d_2$ sont coplanaires.
Étape 2 : Montrer que les deux droites sont parallèles
On montre ensuite qu'elles n'ont pas de point d'intersection : elles sont donc parallèles.

**Exemple 4**

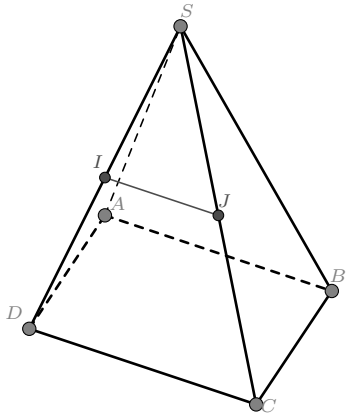
**Méthode 1 :** En utilisant une troisième droite

On considère le parallélépipède rectangle $ABDCEFGH$. Montrer que $(EH)$ // $(BC)$.




Étape 1 : Trouver une droite parallèle aux deux droites.
La face $EFGH$ est un rectangle donc $(EH)$ // $(FG)$. La face $FGCB$ est un rectangle donc $(FG)$ // $(BC)$. Ainsi, $(EH)$ et $(BC)$ sont toutes deux parallèles à $(FG)$.
Étape 2 : Conclure sur le parallélisme des deux droites.
D'après le théorème 15, on a donc, $(EH)$ // $(BC)$.

**Méthode 2 :** En montrant qu'elles ne se coupent pas
Soit une pyramide à base carrée $ABCDS$. On note $S$, son sommet.
Soit $I$, le milieu de $[AS]$ et $J$, le milieu de $[BS]$.
Montrer que $(AB)$ // $(IJ)$.




Étape 1 : Montrer que les droites sont coplanaires
On réalise une figure.
$I \in (AS)$ et $J \in (SB)$ donc la droite $(IJ)$ appartient au plan $(ASB)$.
De plus, $(AB)$ appartient au plan $(ASB)$.
Donc $(IJ)$ et $(AB)$ sont coplanaires.
Étape 2 : Montrer que les deux droites sont parallèles
Dans le triangle $ABS$, on a $I$, milieu de $[AS]$ et $J$, milieu de $[BS]$. Donc, d'après le théorème des milieux, on obtient :
$(AB)$ // $(IJ)$

**Méthode 4** (Montrer que deux plans de l'espace sont parallèles)**.**

Il y a deux méthodes possibles pour montrer que deux plans sont parallèles. Soit on montre qu'ils sont tous deux parallèles à un même plan, soit on utilise le parallélisme de deux droites du plan.
**Méthode 1 :** En utilisant un troisième plan
Étape 1 : Trouver un plan parallèle aux deux premiers
On cherche à montrer que deux plans $P_1$ et $P_2$ sont parallèles.
On détermine un plan $Q$ tel que $P_1$ // $Q$ et $P_2$ // $Q$.
Étape 2 : Conclure sur le parallélisme des plans
Ainsi, $P_1$ et $P_2$, tous deux parallèles à $Q$, sont parallèles.
**Méthode 2 :** En utilisant le parallélisme des droites du plan
Étape 1 : Montrer qu'une droite de $P_1$ et une droite de $P_2$ sont parallèles
On choisit une droite de $P_1$ qui est parallèle à une droite de $P_2$.
Étape 2 : Montrer le parallélisme de deux autres droites
On choisit une deuxième droite de $P_1$ sécante à la première et on détermine une droite de $P_2$ qui lui est parallèle.
Étape 3 : Conclure
Deux droites sécantes de $P_1$ sont parallèles à deux droites sécantes de $P_2$. Dans ce cas, les plans $P_1$ et $P_2$ sont parallèles.

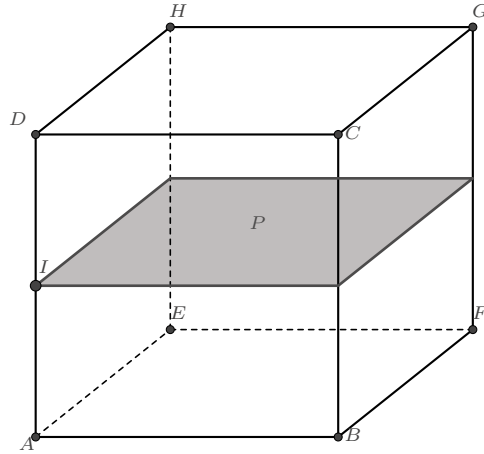
**Exemple 5**

**Méthode 1 :** En utilisant un troisième plan

On considère un cube $ABCDEFGH$. $I$ est le milieu du segment $[AE]$. On trace le plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan $(ABC)$ passant par $I$.

Montrer que $\mathcal{P}$ et $(EFG)$ sont deux plans parallèles.

Étape 1 : Trouver un plan parallèle aux deux premiers




On construit une figure.

On sait que $ABCDEFGH$ est un cube, donc le plan $(ABC)$ et le plan $(EFG)$ sont parallèles.

On sait que $\mathcal{P}$ est un plan parallèle à $(ABC)$.

$(EFG)$ et $\mathcal{P}$ sont tous deux parallèles au plan $(ABC)$.

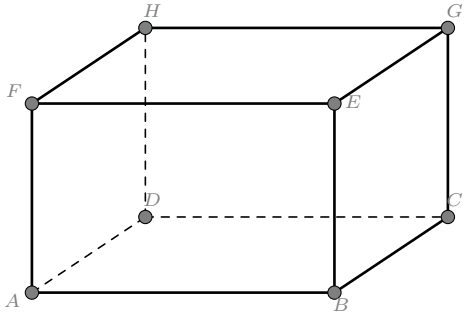
Étape 2 : Conclure sur le parallélisme des plans

$(EFG)$ et $\mathcal{P}$ sont donc parallèles.

**Méthode 2 :** En utilisant le parallélisme des droites du plan

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

Montrer que les plans $(ADE)$ et $(BCF)$ sont parallèles.




Étape 1 : Montrer qu'une droite de $P_1$ et une droite de $P_2$ sont parallèles

La face $ABEF$ du parallélépipède est un rectangle donc $(AE)$ // $(BF)$.

Étape 2 : Montrer le parallélisme de deux autres droites

La face $ABCD$ du parallélépipède est un rectangle donc $(AD)$ // $(BC)$. De plus, $(AD)$ et $(AE)$ sont deux droites sécantes et $(BC)$ et $(BF)$ sont deux droites sécantes.

Étape 3 : Conclure

Les deux droites sécantes $(AD)$ et $(AE)$ du plan $(ADE)$ sont parallèles aux deux droites sécantes $(BC)$ et $(BF)$ du plan $(BCF)$.

Donc les plans $(ADE)$ et $(BCF)$ sont parallèles.

**Méthode 5** (Passer d'une représentation paramétrique de plan à une équation)**.**

Étape 1 : Extraire deux vecteurs et un point de la représentation paramétrique, c'est-à-dire un repère du plan.
Étape 2 : Effectuer le produit vectoriel des deux vecteurs pour trouver un vecteur normal.
Étape 3 : En déduire une équation du plan.

**Exemple 6**
Le repère $(\mathrm{O}; \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ est orthonormé, direct de préférence. De

$$\begin{cases} x = 3 - 2u + 5v \\ y = -1 + v \\ z = 4u - v \end{cases} \qquad ((u, v) \in \mathbb{R}^2).$$

Étape 1 : On extrait $A$ ( 3 , $-1$ , 0 ) en prenant $u = v = 0$. Les coefficients de $u$ fournissent les coordonnées de $\overrightarrow{w_1}$ $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Les coefficients de $v$ fournissent les coordonnées $\overrightarrow{w_2}$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Étape 2 : On calcule $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{w_1} \wedge \overrightarrow{w_2}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal au plan. (on peut aussi diviser les coordonnées par 2).

Étape 3 : Une équation du plan s'écrit $-4x + 18y - 2z = \delta$. Les coordonnées de $A$ vérifient cette équation, donc $\delta = -4x_A + 18y_A - 2z_A = -4 \times 3 + 18 \times (-1) - 2 \times 0 = -30$. On obtient

$$-4x + 18y - z = -30.$$

**Remarque 7.**

Cette méthode donne une réponse correcte lorsque le repère n'est pas orthonormé alors que le calcul de $\overrightarrow{w_1} \wedge \overrightarrow{w_2}$ n'est pas correct et ne donne pas un vecteur normal au plan !

**Méthode 6** (Intersection de deux plans sécants)**.**

**Méthode 1 :**
Étape 1 : On écrit le système des deux équations et on choisit une des trois lettres $x$, $y$ ou $z$ comme paramètre. Attention, on n'a pas toujours le choix.
Étape 2 : On résout le système en prenant les deux autres lettres comme inconnues. On obtient alors une représentation paramétrique de la droite d'intersection.
**Méthode 2 :**
Étape 1 : On écrit le système des deux équations et on choisit une des trois lettres $x$, $y$ ou $z$ comme paramètre. Attention, on n'a pas toujours le choix.
Étape 2 : On fixe la valeur du paramètre (à zéro pour fixer les idées) puis on résout le système en prenant les deux autres lettres comme inconnues. On obtient un point de l'intersection.
Étape 3 : On calcule le produit vectoriel de deux vecteurs normaux des plans. Il dirige l'intersection.
Étape 4 : On a tout ce qu'il faut pour écrire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.
**Méthode 3 :** On ne le répétera jamais assez, l'intersection est toujours plus facile lorsqu'on connaît une équation de l'un et une représentation paramétrique de l'autre.

**Exemple 7**

$$\begin{cases} -8x-17y-2z+73 = 0 & (1) \\ 14x+11y-4z-19 = 0 & (2) \end{cases}$$

**Méthode 1 :**
Étape 1 : On choisit la lettre $y$ comme paramètre.
Étape 2 : On effectue $2L_1 - L_2 \longrightarrow L_2$, il vient

$$\begin{cases} -8x-17y-2z+73 = 0 \\ -30x-45y+165 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} -8x-17y-2z+73 = 0 \\ -2x-3y+11 = 0 \end{cases}$$

On effectue $L_1 - 4L_2 \longrightarrow L_1$, il vient $\begin{cases} -5y-2z+29 = 0 \\ -2x-3y+11 = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} z = -\frac{5}{2}y + \frac{29}{2} \\ x = -\frac{3}{2}y + \frac{11}{2} \end{cases}$

On pose – par exemple – $y = t$ et on obtient la représentation paramétrique $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}t + \frac{11}{2} \\ y = t \\ z = -\frac{5}{2}t + \frac{29}{2} \end{cases}$

**Méthode 2 :**
Étape 1 : On choisit la lettre $y$ comme paramètre.

Étape 2 : On fixe $y = 0$ et on résout le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -8x & - & 2z & + & 73 & = & 0 \\ 14x & - & 4z & - & 19 & = & 0 \end{array} \right.$
soit $z = \dfrac{29}{2}$ et $x = \dfrac{11}{2}$. Donc le point $A\left(\dfrac{11}{2}\ ,\ 0\ ,\ \dfrac{29}{2}\right)$ appartient à l'intersection des deux plans.

Étape 3 : On considère les vecteurs
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-8\\-17\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}14\\11\\-4\end{pmatrix}$ et on calcule $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}90\\-60\\150\end{pmatrix}$. En divisant les coordonnées par 30 on obtient encore un vecteur directeur de l'intersection.

Étape 4 : On obtient une représentation paramétrique de l'intersection : $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3t + \dfrac{11}{2} \\ y & = & -2t \\ z & = & 5t + \dfrac{29}{2} \end{array} \right.$

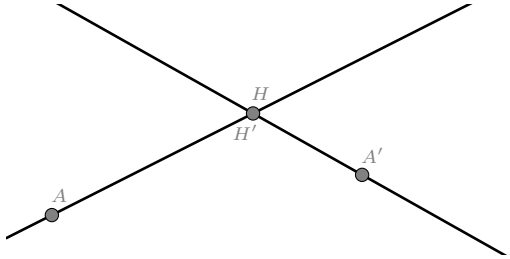
**Méthode 7** (Distance d'un point à une droite)**.**

Soit $M$ un point de l'espace et $d$ une droite de l'espace passant par un point $A$ et dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$. Tout se passe dans un plan contenant $A$ et $d$. La distance entre $M$ et $d$, calculée dans un tel plan est la distance $MH$, où $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur la droite $d$.
Soit $B \in d$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. L'aire du triangle $ABM$ égale :
- $\dfrac{1}{2}\, HM \times AB$ d'une part,
- $\dfrac{1}{2}\, \|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|$ d'après le théorème 42 page 346.

On en déduit que $\quad MH = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{AB} = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$.

**Méthode 8** (Perpendiculaire commune à deux droites)**.**

Soit $(AB)$ et $(A'B')$ deux droites de l'espace **non coplanaires**.
Étape 1 : On calcule $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{A'B'}$.
Étape 2 : On détermine les deux points $C$ et $C'$ tels que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{A'B'}$. Puis les plans $(ABC)$ et $(A'B'C')$.
Étape 3 : On détermine l'intersection $\Delta$ des plans $(ABC)$ et $(A'B'C')$.




Une vision de la situation.
Les droites $d$ et $d'$ sont dans des plans horizontaux distincts. En vue de dessus, les traces de $d$ et $d'$ se coupent en un point $H$.
Les traces des plans $(ABC)$ et $(A'B'C')$ sont les droites $d$ et $d'$ respectivement. La droite $\Delta$ est la droite verticale dont la trace est le point $H$.

**Exemple 8**

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites $(AB)$ et $(A'B')$ avec $A\ (\ 1\ ,\ -2\ ,\ 0\ )$, $B\ (\ -3\ ,\ 1\ ,\ 1\ )$, $A'\ (\ 4\ ,\ -3\ ,\ 3\ )$ et $B'\ (\ 0\ ,\ -1\ ,\ 2\ )$ dans un repère orthonormé direct.

Étape 1 : On calcule $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-1\end{pmatrix}$. On en déduit $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}-1\\-8\\20\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}$ les droites $(AB)$ et $(A'B')$ ne sont pas parallèles. De plus $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{v}=-1\times 3-8\times(-1)+20\times 3=65\neq 0$. Le tétraèdre $ABA'B'$ a une aire non nulle donc les droites $(AB)$ et $(A'B')$ ne sont pas coplanaires.

Étape 2 : On a $C\ (\ 0\ ,\ -10\ ,\ 20\ )$ et $C'\ (\ 3\ ,\ -5\ ,\ 23\ )$. On trouve $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}68\\79\\35\end{pmatrix}$. On trouve pour équation du plan $(ABC)$ : $68x+79y+35z=68x_A+79y_A+35z_A=-90$. On a une représentation paramétrique du plan $(A'B'C')$ :

$$\begin{cases}x=4-4u-v\\y=-3-2u-8v\\z=3-u+20v\end{cases}\qquad((u,v)\in\mathbb{R}^2).$$

Étape 3 : Dans la représentation paramétrique du plan $(A'B'C')$, on prend $v=0$ pour simplifier, puis on résout $[68x+79y+35z=-90;\ \text{ inconnue } u\in\mathbb{R}]$,

$$\begin{array}{lrcl}\text{soit} & 68(4-4u)+79(-3-2u)+35(3-u) & = & -90\\ \text{soit} & 140-465u & = & -90\\ \text{soit} & -465u & = & -230\\ \text{soit} & u & = & \dfrac{230}{465}=\dfrac{46}{93}.\end{array}$$

En prenant $u=\dfrac{46}{93}$ et $v=0$ dans la représentation paramétrique du plan $(A'B'C')$, on trouve un point $K$ de $\Delta$, à savoir

$$x_K=4-4\times\frac{46}{93}=\frac{188}{93};\qquad y_K=-3-2\times\frac{46}{93}=-\frac{371}{93};\qquad z_K=3-\frac{46}{93}=\frac{233}{93},$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{v}$ dirige $\Delta$, on a une représentation paramétrique de $\Delta$ :

$$\begin{cases} x = \dfrac{188}{93} - v \\ y = -\dfrac{371}{93} - 8v \qquad (v \in \mathbb{R}). \\ z = \dfrac{233}{93} + 20v \end{cases}$$

**Exercice 1** (Distance entre deux droites)**.**

On garde les notations de la méthode 8. Soit $H$ l'intersection de $(AB)$ et $\Delta$ et soit $H'$ l'intersection de $(A'B')$ et $\Delta$.

1. Démontrer que $\left|\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{MM'} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{A'B'}\right)\right|$ ne dépend pas du choix de $M \in (AB)$ et $M' \in (AB)$.
2. En déduire que pour tout $M \in (AB)$ et pour tout $M' \in (AB)$,
$$\left|\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{v}\right| = \left|\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{v}\right|.$$
3. Démontrer que
$$HH' = \frac{\left|\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{v}\right|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$
4. Déterminer la distance entre les deux droites $(AB)$ et $(A'B')$ de la méthode 8.

**Solution 1 (Distance entre deux droites)**

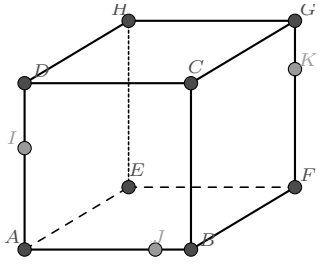
1. Soit $M \in (AB)$ et $M' \in (AB)$. Les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. De même les vecteurs $\overrightarrow{M'H'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.
On se souvient que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{A'B'}$ dirige $\Delta$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{AH'} + \overrightarrow{H'M}$. De ce fait,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{v} &= \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M}\right) \cdot \overrightarrow{v} \\ &= \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{H'M} \cdot \overrightarrow{v} \\ &= 0 + \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{v} + 0 \\ &= \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{v} \end{aligned}$$
2. On remplace $M$ par $H$ puis par $A$ dans la question précédente. Ces deux points appartiennent à la droite $(AB)$. Ensuite on remplace $M'$ par $H'$ puis par $A'$ dans la question précédente. Ces deux points appartiennent à la droite $(A'B')$. On rajoute les valeurs absolues et l'égalité est écrite.

3. Les deux vecteurs $\overrightarrow{HH'}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. De ce fait
$$\left|\overrightarrow{HH'}\cdot\overrightarrow{v}\right| = \left\|\overrightarrow{HH'}\right\| \times \|\overrightarrow{v}\| = HH' \times \|\overrightarrow{v}\|,$$
le résultat en découle puisque $\|\overrightarrow{v}\| \neq 0$.
4. On a déjà trouvé $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{v} = 65$ et $\|\overrightarrow{v}\|^2 = 1+64+400 = 465$, donc la distance entre les deux droites égale $\dfrac{65}{\sqrt{465}}$.

**Méthode 9** (Section d'un cube)**.**

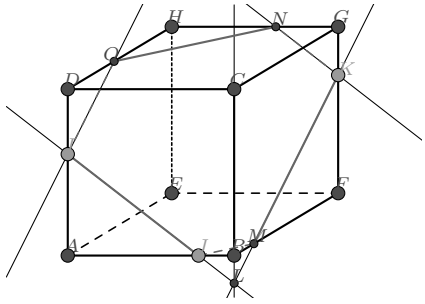
Étape 1 : On trace une droite sur une des faces à l'aide de deux points dans le plan de la face. C'est parfois l'étape la plus délicate.
Étape 2 : On construit les intersections de cette droite avec les **droites** portées par les arêtes et on revient à l'étape 1.
Étape 3 : En présence des deux faces opposées on invoque le théorème 21 page 329 et le fait que la perspective cavalière conserve le parallélisme.
Étape 4 : Une fois qu'on a fait le tour du cube, on trace (en rouge) les segments apparents en traits pleins et les segments cachés en traits interrompus.

**Exemple 9**




Le point $I$ appartient au segment $[AD]$, $J$ appartient au segment $[AB]$ et $K$ appartient au segment $[FG]$.

Déterminer la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan $(IJK)$.



Étape 1 : On trace la droite $(IJ)$.
Étape 2 : Elle coupe la droite $(BC)$ en $L$.
Étape 1 : On trace la droite $(LK)$.
Étape 2 : Elle coupe la droite $(BF)$ en $M$.
Étape 3 : On trace la parallèle à $(IJ)$ passant par $K$.
Étape 2 : Elle coupe la droite $(GH)$ en $N$.
Étape 3 : On trace la parallèle à $(LK)$ passant par $I$.
Étape 2 : Elle coupe la droite $(DH)$ en $O$.
Étape 4 : On trace les segments $[IJ]$, $[JM]$, $[MK]$, $[KN]$, $[NO]$ et $[OI]$.

La méthode ci-dessus n'est pas directement opérante lorsque les trois points sont choisis sur trois arêtes deux à deux non coplanaires. En effet on ne trouve pas deux points appartenant à une même face et on ne peut pas enclencher l'étape 1.

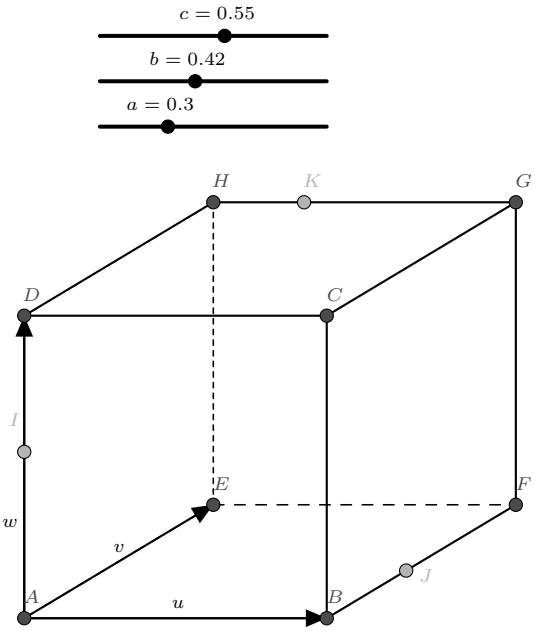
Pour cette raison, on va laisser le travail à Geogebra.

On commence par tracer un carré $ABCD$ puis un point $E$ à l'intérieur du carré figurant l'arête $[AE]$ sur une fuyante.
Ensuite on définit le vecteur $v = \overrightarrow{AE}$. Ensuite on complète le cube par translation. Pour cela on écrit successivement dans la fenêtre de dialogue

$F = B+v$ $\quad$ $G = C+v$ $\quad$ $H = D+v$

On définit aussi les vecteurs $u = \overrightarrow{AB}$ et $w = \overrightarrow{AD}$.
Enfin on définit trois curseurs $a, b$ et $c$ pour positionner les points $I$, $J$ et $K$ sur les arêtes. Pour cela on les fait varier tous les trois entre 0.01 et 0.99.
Pour positionner $I$, $J$ et $K$ on écrit successivement dans la fenêtre de dialogue

$I = A+c*w$ $\quad$ $J = B+b*v$ $\quad$ $K = H+a*u$




Afin d'enclencher l'étape 1. on détermine les coordonnées dans le repère orthonormé direct $(A\ ;\ B\ ,\ E\ ,\ D)$ du point $L$, intersection du plan $(IJK)$ avec la droite $(AB)$. La droite $(AB)$ admet pour équations $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Reste à déterminer une équation du plan $(IJK)$. On a

$I\ (0\ ,\ 0\ ,\ c)$ $\quad$ $J\ (1\ ,\ b\ ,\ 0)$ $\quad$ $K\ (a\ ,\ 1\ ,\ 1)$ d'où

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\b\\-c\end{pmatrix}\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}a\\1\\1-c\end{pmatrix}\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}b(1-c)+c\\-ac-(1-c)\\1-ab\end{pmatrix}$$

Une équation du plan $(IJK)$ s'écrit

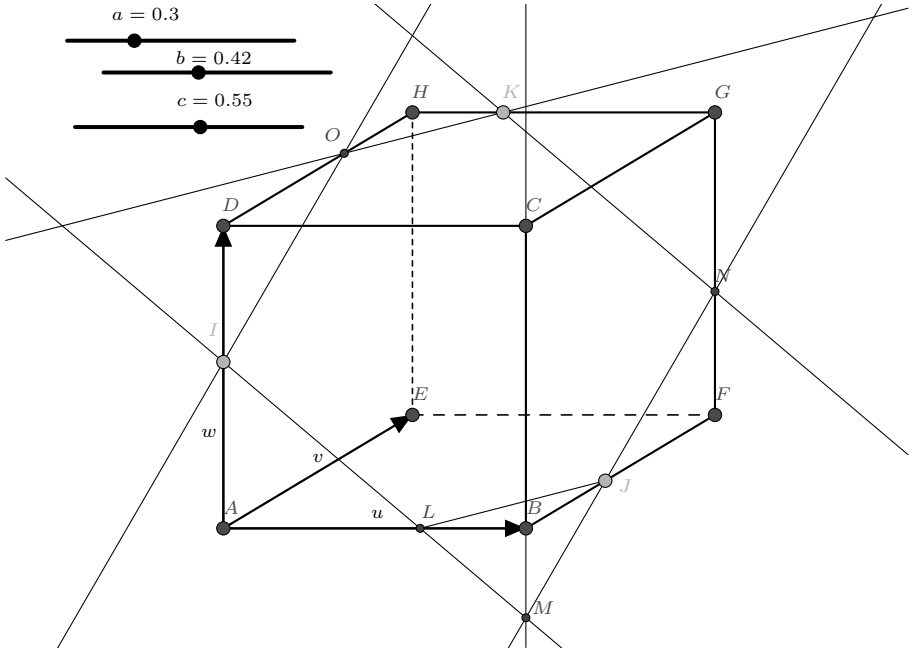
$$(b(1-c)+c)x-(ac+1-c)y+(1-ab)z=(1-ab)c.$$

De là on peut déterminer les coordonnées de $L$ ( $x_L$ , 0 , 0 ) avec $x_L=\dfrac{c(1-ab)}{b(1-c)+c}$.

On peut ainsi placer le point $L$ en écrivant dans la fenêtre de dialogue

$$L=A+c*(1-a*b)/(b*(1-c)+c)*u$$

À partir de là, on peut démarrer l'étape 1.




Il est possible – et même conseillé – de faire joujou avec les curseurs pour bien se convaincre que le circuit se referme correctement.

Le lecteur sceptique et courageux pourra déterminer les coordonnées des points $M$ $N$ et $O$ qui apparaissent lors de la construction.

Il trouvera

$M$ ( 1 , 0 , $z_M$ ) avec $z_M=-\dfrac{b(1-c+ac)}{1-ab}$.

$N$ ( 1 , 1 , $z_N$ ) avec $z_N=\dfrac{(1-b)(1-c+ac)}{1-ab}$.

0 ( 0 , $y_O$ , 1 ) avec $y_O=\dfrac{(1-c)(1-ab)}{1-c+ac}$.

**Remarque 8.**

Cette méthode reste valable en remplaçant le cube par un pavé. On trouvera les mêmes coordonnées. En revanche on n'aura pas calculé les coordonnées du vrai produit vectoriel.

## 8.12 Quiz

### 8.12.1 Énoncé

1. Qu'est ce qu'un parallélépipède rectangle ?
2. Combien vaut le volume d'un parallélépipède rectangle ?
3. En quoi le cube est-il un parallélépipède particulier ?
4. Combien vaut le volume d'une pyramide ?
5. Qu'est ce qu'un tétraèdre ?
6. Combien vaut le volume d'un cylindre ?
7. Dans un cône de révolution, qui est le projeté orthogonal du sommet sur la base ?
8. Combien vaut le volume d'un cône de révolution ?
9. Combien vaut le volume d'une sphère de rayon $R$ ?
10. Quelle peut être l'intersection de deux droites dans l'espace ?
11. Vrai ou faux ? Dans l'espace, si l'intersection de deux droites est vide alors ces deux droites sont parallèles.
12. Quelle peut être l'intersection d'une droite et d'un plan ?
13. Quelle est l'intersection de deux plans sécants ?
14. Soient $P$ et $P'$, deux plans parallèles et $P''$, un plan qui coupe $P$ et $P'$. Que peut-on dire sur les droites d'intersection de $P''$ avec $P$ et $P'$ ?

### 8.12.2 Corrigé

1. Un parallélépipède rectangle est un solide dont toutes les faces sont des rectangles et dont les faces opposées sont parallèles.
2. En notant $L$ sa longueur, $l$ sa largeur et $h$ sa hauteur, le volume d'un parallélépipède rectangle vaut $L \times l \times h$.
3. Un cube est un parallélépipède rectangle dont toutes les faces sont des carrés.
4. Si $B$ est l'aire de la base de la pyramide et $h$ sa hauteur, alors le volume de la pyramide vaut $\frac{1}{3} \times B \times h$.
5. Un tétraèdre est une pyramide dont la base est un triangle.
6. Un cylindre de hauteur $h$ et dont la base a pour rayon $R$, a pour volume $V = h \times \pi R^2$.
7. Dans un cône de révolution, le projeté orthogonal du sommet sur la base est le centre de la base.
8. En notant $h$ la hauteur du cône et $R$ le rayon de la base, le volume d'un cône de révolution vaut $V = \frac{1}{3} \times h \times \pi R^2$.
9. Le volume d'une sphère de rayon $R$ vaut $V = \frac{4}{3} \times \pi R^3$.

10. Dans l'espace, l'intersection de deux droites peut être une droite (les droites sont confondues), un point (les droites sont sécantes) ou vide (les deux droites sont strictement parallèles ou non coplanaires).
11. Faux Dans l'espace, si l'intersection de deux droites est vide alors ces droites sont soit strictement parallèles soit non coplanaires.
12. L'intersection d'une droite et d'un plan peut être une droite (la droite est contenue dans le plan), un point ou vide (la droite est strictement parallèle au plan).
13. L'intersection de deux plans sécants est une droite.
14. Si $P$ et $P'$ sont des plans parallèles alors la droite d'intersection de $P$ et $P''$ et celle de $P'$ et $P''$ sont parallèles.

## 8.13 Vrai ou faux

**Exercice 2.**

Répondre par vrai ou faux :

1. Un angle droit est toujours représenté par un angle droit en perspective cavalière.
2. La perspective cavalière conserve les distances.
3. Le partage d'un segment en segments de longueurs égales est conservé en perspective cavalière.
4. La diagonale d'un cube de côté $a$ ($a > 0$) mesure $a\sqrt{3}$.
5. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans non parallèles de l'espace alors leur intersection est une droite.
6. Deux droites de l'espace sont toujours coplanaires.
7. Si deux droites de l'espace sont orthogonales alors elles sont perpendiculaires.
8. Si deux points $A$ et $B$ appartiennent à un plan alors la droite $(AB)$ est contenue dans ce plan.
9. Si deux points $A$ et $B$ appartiennent à une sphère alors la droite $(AB)$ est contenue dans cette sphère.
10. Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si elles sont coplanaires et non sécantes.
11. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un est parallèle à l'autre.
12. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre.
13. Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles.
14. Par un point, on peut mener une seule droite parallèle à une droite donnée.
15. Par un point, on peut mener une seule droite parallèle à un plan donné.

**Solution 2**

1. Faux C'est vrai pour les faces dans un plan frontal, et faux en général.
2. Faux Les distances dans un plan frontal sont conservées, les distances sur une fuyante sont multipliées par le coefficient de réduction. Une autre façon de voir : si la perspective conservait les distances,

alors elle conserverait les angles droits (penser au théorème de Pythagore) et on sait que c'est faux depuis la question précédente.

3. VRAI La perspective cavalière conserve les milieux.

4. VRAI Soit $ABCDEFGH$ ce cube. Dans le triangle $ABC$ rectangle en $B$ on a

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Le quadrilatère $ACGE$ est un rectangle. Dans le triangle $ACG$ rectangle en $C$ on a

$$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2.$$

Donc la diagonale $[CG]$ mesure $\sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

5. VRAI Penser que ces deux plans sont matérialisés par les deux feuilles d'une copie double. Leur intersection est la droite matérialisée par la pliure.

6. FAUX Prendre deux droites non sécantes. Soit $ABCDEFGH$ un cube. Les droites $(AB)$ et $(CG)$ ne sont pas coplanaires.

7. FAUX Prendre deux droites orthogonales non sécantes. En effet, deux droites perpendiculaires sont sécantes. Soit $ABCDEFGH$ un cube. Les droites $(AB)$ et $(CG)$ sont orthogonales mais ne sont pas coplanaires. Elles ne sont donc pas perpendiculaires.

8. VRAI C'est du cours et du bon sens.

9. FAUX Une sphère – contrairement à une droite – est limitée dans l'espace. En revanche on peut dire que le *segment* $[AB]$ est inclus dans la *boule* délimitée par cette sphère. On dit qu'une boule est convexe.

10. VRAI si on prend parallèles dans le sens « parallèles ou confondues ».

11. VRAI

12. FAUX

13. FAUX On peut même avoir des droites sécantes.

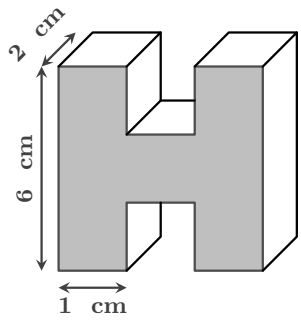
14. VRAI

15. FAUX

## 8.14 Exercices

**Exercice 3.**

Hélène voudrait confectionner son initiale en carton suivant le modèle ci-dessous. Proposer un patron de cet objet.




**Exercice 4** (Aire et volume d'une sphère)**.**

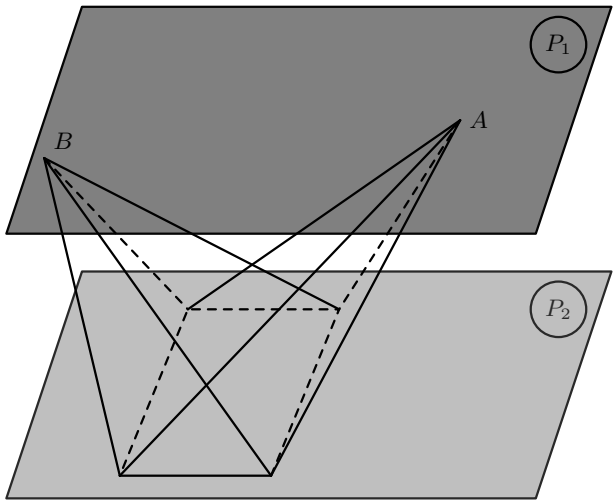
Une sphère $S$ a une aire égale à $24\,\mathrm{m}^2$.
Quel est son volume ?

**Exercice 5.**

Christoph demande : Peut-on construire un hexaèdre dont les faces sont 4 triangles et 2 hexagones ?
Michel dit que non : Deux faces ne peuvent pas avoir plus d'une arête en commun. Un hexagone ne peut donc pas répartir ses six arêtes entre les cinq autres faces.
Qui a raison ?

**Exercice 6.**

Mélia et Thaïs observent cette figure sur laquelle les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles et les points $A$ et $B$ appartiennent au plan $\mathcal{P}_1$.
Mélia affirme que la pyramide de sommet $B$ a un volume inférieur à celui de la pyramide de sommet $A$. Mais Thaïs pense que Mélia se trompe.
Qui a raison ?




**Exercice 7** (Le mystère des pyramides I)**.**

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 3 cm. Soit $I$ le milieu de $[AG]$.

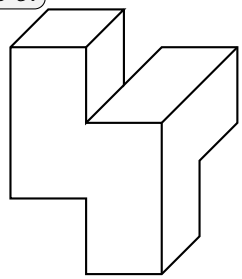
1. Réaliser un patron de la pyramide de base $ABCD$ et de sommet $I$.
2. Calculer le volume de cette pyramide.

**Exercice 8** (Le mystère des pyramides II)**.**

On considère un pavé $ABCDEFGH$ avec $AB = 4$ cm, $AD = 2$ cm et $AE = 3$ cm. On considère
- la pyramide de base $ABCD$ et de sommet $F$,
- la pyramide de base $AEHD$ et de sommet $F$,
- la pyramide de base $CGHD$ et de sommet $F$.

1. Réaliser un patron de chacune de ces pyramides.
2. Calculer le volume de chacune de ces pyramides.

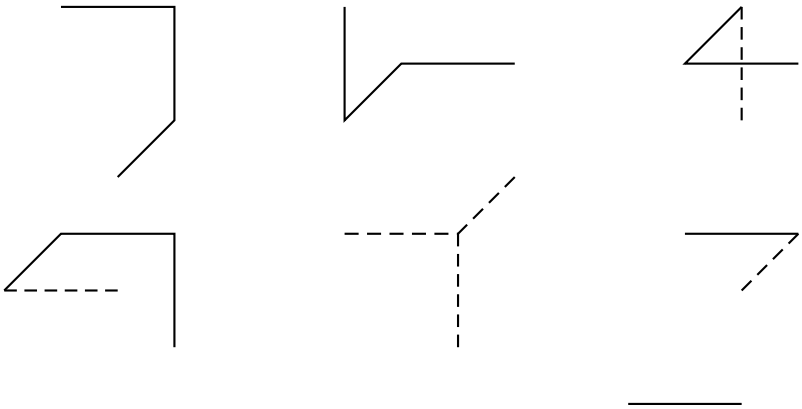
**Exercice 9.**



Le solide ci-contre peut être décomposé en 5 cubes identiques.
Reproduire le dessin et tracer les arêtes cachées en traits interrompus.

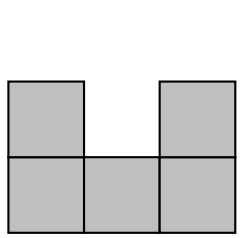
**Exercice 10.**

Reproduire et compléter ces dessins pour obtenir la représentation de cubes en perspective.

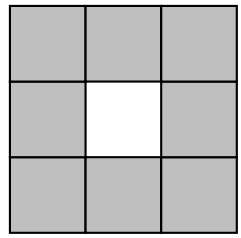


**Exercice 11.**

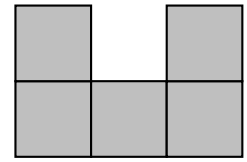
1. Dessiner en perspective cavalière un assemblage de dix cubes compatible avec les trois vues ci-dessous.



vue de face

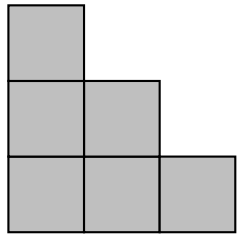


vue de dessus

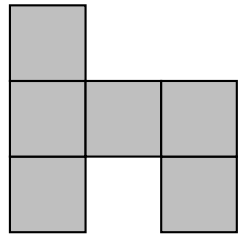


vue de côté

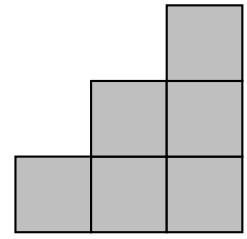
2. Même question avec les trois vues suivantes :



vue de face



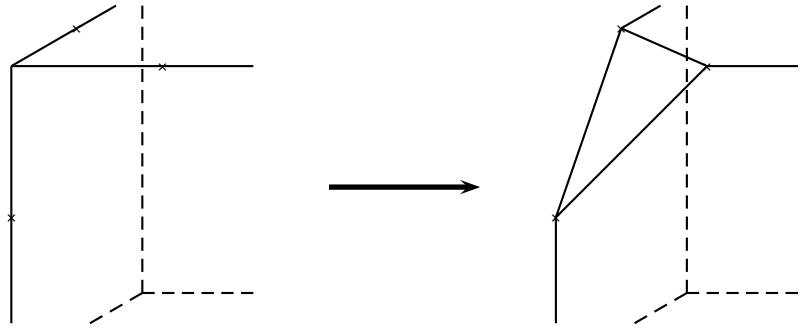
vue de dessus



vue de côté

**Exercice 12** (cuboctaèdre)**.**

1. Dessiner au crayon et en perspective cavalière un cube dont les arêtes mesurent 6 cm. L'angle de fuite sera de 30°, et le coefficient de réduction égal à $0,5$.
2. Placer les milieux de chaque arête (encre ou feutre fin).
3. Choisir un sommet du cube sur la face avant : trois arêtes partent de ce sommet ; relier à l'encre les milieux de ces trois arêtes, et gommer les trois demi-arêtes au crayon (voir figure). Le résultat est un cube dont on a « coupé » un coin. Couper de même les autres coins du cube (attention aux arêtes cachées). On obtient un nouveau solide.
4. Réaliser un patron de ce solide (pour simplifier, on prendra des arêtes de 4cm) et reporter les noms des sommets sur le patron.



**Exercice 13** (Théorème du toit dans un tétraèdre)**.**

Soit un tétraèdre $ABCD$. On appelle $I$ le milieu de $[AB]$ et $J$ le milieu de $[AC]$. Soit $H$ un point du segment $[AD]$ distinct de son milieu :

- les droites $(HI)$ et $(DB)$ se coupent en $M$ ;
- les droites $(HJ)$ et $(DC)$ se coupent en $N$.

1. Démontrer que la droite $(IJ)$ est parallèle au plan $(BCD)$.
2. Démontrer que les droites $(IJ)$ et $(MN)$ sont parallèles.

**Exercice 14** (Intersection de plans et intersection d'une droite avec un plan)**.**

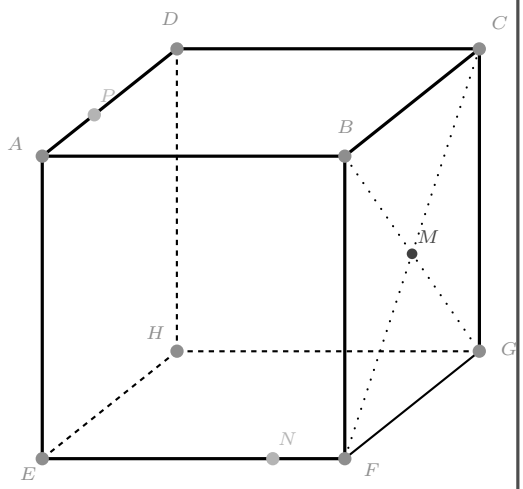
Soit $ABCD$ un tétraèdre. $I$ est le milieu du segment $[BD]$.
Les trois questions sont indépendantes :

1. On appelle $J$ le milieu du segment $[BC]$. Déterminer l'intersection des plans $(ACD)$ et $(AIJ)$.
2. On appelle $K$ le point du segment $[BC]$ tel que $.BK = \frac{1}{3}BC$ Déterminer l'intersection des plans $(ACD)$ et $(AIK)$.
3. Déterminer l'intersection du plan $(ACD)$ et de la droite $\mathcal{D}$ parallèle à $(AB)$ passant par $I$.

**Exercice 15** (Droites coplanaires et plans parallèles dans un cube)**.**

Soit $ABCDEFGH$ un cube. On appelle $M$ le centre du carré $BFGC$. Les points $N$ et $P$ appartiennent respectivement aux segments $[EF]$ et $[AD]$.

1. Les droites $(BC)$ et $(FE)$ sont-elles sécantes ?
2. Les droites $(NG)$ et $(EH)$ sont-elles sécantes ?
3. La droite $(PC)$ est-elle parallèle au plan $(ENH)$ ?
4. Les plans $(PNH)$ et $(BFG)$ sont-ils parallèles ?




**Exercice 16** (Volume et patron d'un cône de révolution)**.**

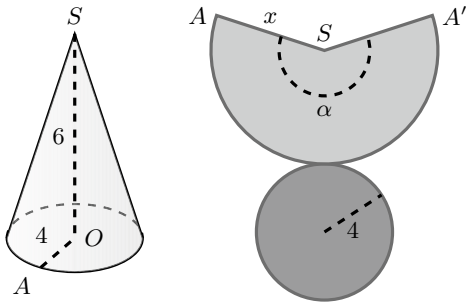
Réaliser le patron d'un cône droit de révolution. Sa hauteur est 6 cm et le rayon de sa base est 3 cm.

Quelle est la valeur exacte du volume de ce cône ?

**Exercice 17** (Volume, patron et angle d'un cône de révolution).

On considère un cône de révolution de hauteur 6 cm et dont le cercle de base a pour rayon 4 cm. Son patron est présenté ci-contre.

1. Donner la valeur exacte du volume de ce cône.
2. Déterminer la valeur de l'angle $\alpha$ au degré près.

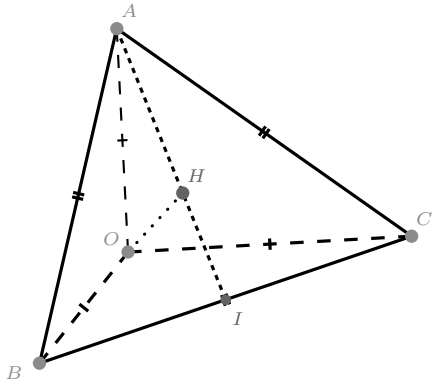



**Exercice 18** (Volume et hauteurs d'un tétraèdre rectangle).

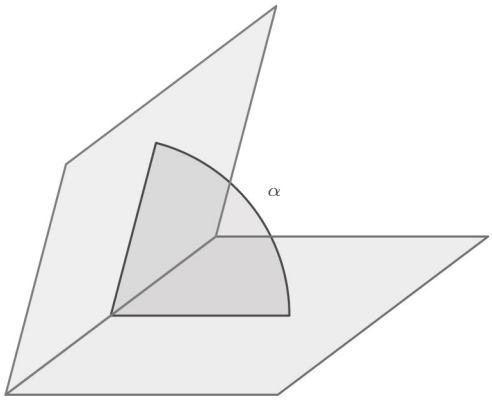
$OABC$ est un tétraèdre tel que les triangles $OAB$, $OAC$ et $OBC$ sont rectangles isocèles en $O$. $OA = OB = OC = 6$. On appelle $I$ le milieu du côté $[BC]$ et $H$ le pied de la hauteur du tétraèdre issue du sommet $O$.

1. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
2. Déterminer l'aire du triangle $ABC$.
3. Calculer la longueur $OH$.

À comparer avec le théorème de Gua page 347.



**Exercice 19** (Angle dièdre)**.**



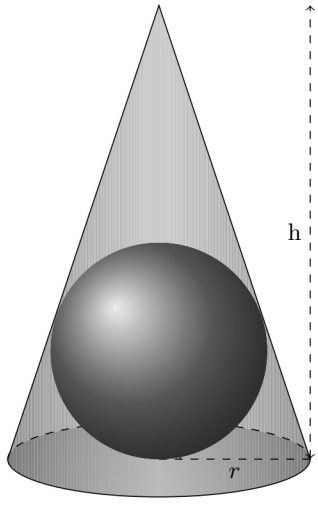

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; I, J, K)$.

Calculer une mesure de l'angle dièdre $\alpha$ entre les plans $(ABC)$ et $(A'B'C')$ c'est-à-dire l'angle que font entre eux des vecteurs normaux à ces plans.

On donne $A\ (-2\ ,\ 3\ ,\ 5\ )$, $B\ (\ 2\ ,\ -1\ ,\ 1\ )$ et $C\ (\ 4\ ,\ 3\ ,\ 2\ )$, $A'\ (\ 3\ ,\ -2\ ,\ 4\ )$, $B'\ (\ -1\ ,\ -1\ ,\ 4\ )$ et $C'\ (\ 2\ ,\ 3\ ,\ -4\ )$.

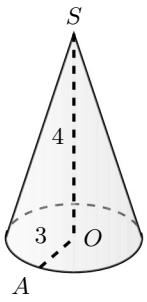
**Exercice 20** (Boule dans un cône)**.**

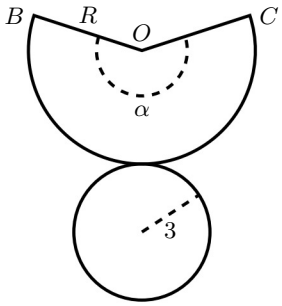
On considère un cône (droit de révolution) de hauteur 12 et de rayon 5.




Quel est le rayon de la plus grosse boule que l'on peut inclure à l'intérieur de ce cône ?

**Exercice 21** (Aire d'un cône)**.**




On considère un cône de révolution, dont la base est un cercle de rayon 3 cm, et de hauteur 4 cm. Le but de l'exercice est de déterminer l'aire de ce solide, dont le patron est donné à droite : il est constitué d'un disque (en bas) correspondant à la base du cylindre, et d'une section (un « morceau ») de disque (en haut). On admet que l'aire du solide est égale à l'aire de son patron. Dans la suite de l'exercice, toutes les longueurs considérées sont en centimètres.

1. On considère le triangle $AOS$.
   (a) Quelle est sa nature ? Quelle est la longueur des segments $[AO]$ et $[OS]$ ?
   (b) En déduire que $SA = 5$.
2. Calculer le périmètre de la base du cylindre, et le périmètre du cercle (non représenté) de centre $O$ et de rayon $R$.
3. La longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{BC}$ est égale au périmètre de la base. D'autre part, le périmètre d'un arc de cercle est proportionnel à l'angle correspondant. Compléter le tableau de proportionnalité suivant.

| Angle (en degrés) | $\alpha$ | 360 |
|---|---|---|
| Longueur de l'arc de cercle de rayon 5 | | |

4. En déduire que $\alpha = 216^\circ$.
5. L'aire d'une section de disque étant proportionnelle à son angle, calculer l'aire de la section de disque $OBC$.
6. En déduire l'aire du cône.

**Exercice 22** (Cône et cylindre)**.**

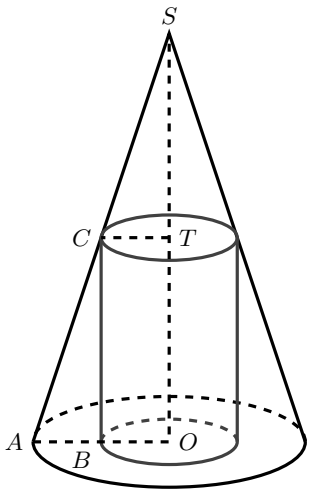
Un cylindre de révolution est inscrit dans un cône de révolution, comme dans la figure ci-contre.

Les points $A$, $B$, $C$, $S$, $T$, $O$ sont tels que représentés sur la figure.

Le cône mesure 20 cm de hauteur, et sa base a un rayon de 8 cm.

La hauteur du cylindre est la moitié de celle du cône.

Les résultats seront arrondis à l'unité.




1. Déterminer la longueur $TO$.
2. Donner la nature du quadrilatère $CTOB$. En déduire la longueur $BC$ et la position relative des droites $(CB)$ et $(SO)$.
3. En se plaçant dans le triangle $SAO$, démontrer que $OB = 4$ cm.
4. Calculer le volume $V_o$ du cône.
5. Calculer le volume $V_y$ du cylindre.
6. On dispose de deux vases, un cône et un cylindre, aux dimensions étudiées dans cet exercice. On remplit une première fois le cylindre d'eau, à ras bord, et on verse le contenu dans le cône. Puis on recommence une seconde fois. L'eau va-t-elle déborder du cône, ou reste-t-il de la place ? S'il reste de la place, peut on verser le contenu d'un troisième cylindre sans faire déborder ?

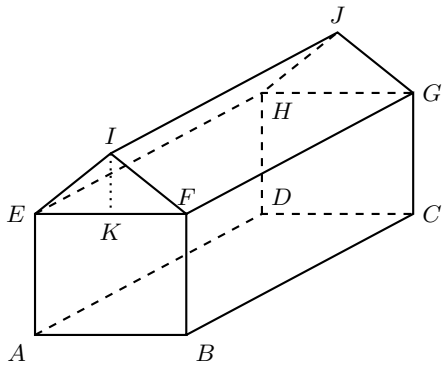
**Exercice 23** (Droites et plans)**.**

On considère un cube $ABCDEFGH$.

1. Représenter le cube en perspective cavalière.
2. (a) Justifier que $EFCD$ est un parallélogramme.
   (b) En déduire que la droite $(FC)$ est parallèle au plan $(EBD)$.
3. En utilisant la même méthode, montrer que la droite $(FH)$ est parallèle au plan $(EBD)$.
4. En déduire la position relative des plans $(FCH)$ et $(EBD)$.

**Exercice 24** (Longueurs et volumes)**.**

On considère une petite maison d'enfant en bois, représentée ci-dessous en perspective cavalière. La figure n'est pas à l'échelle.

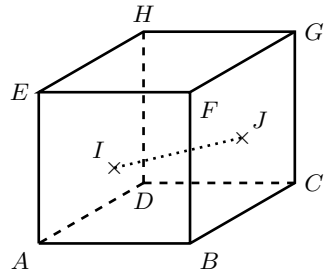



Dans ce solide, $ABCDEFGH$ est un pavé droit, et $EIFHJG$ est un prisme droit à base triangulaire.
On connaît les mesures suivantes (en centimètres) : $AB = 8$, $AE = 6$, $BC = 15$, et le triangle $EIF$ est isocèle, avec $EI = IF = 5$. On appelle $[KI]$ la hauteur du triangle $EFI$ issue de $I$.

1. Quelle est la longueur de $[EK]$ ?
2. Prouver que $KI = 3$ cm.
3. Calculer le volume du solide.
4. Quelle est la position relative des plans $(ABE)$ et $(CDG)$ ?
5. Donner une droite strictement parallèle à $(EH)$.
6. Donner une droite incluse dans le plan $(EFH)$.
7. Quelle est l'intersection des plans $(EIB)$ et $(BCF)$ ?
8. Donner une droite sécante avec $(DH)$.

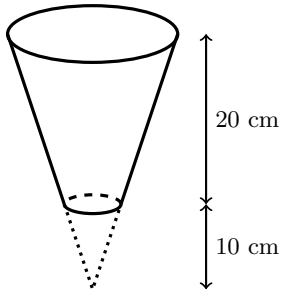
**Exercice 25.**

On considère le cube $ABCDEFGH$, de côté 2 cm. Le point $I$ est le centre de la face $AEFB$ ; $J$ est le centre de la face $CGFB$. Quelle est la longueur du segment $[IJ]$ ?



**Exercice 26** (Volume)**.**

Un fleuriste souhaite connaître le volume d'un vase qu'il utilise. Ce vase a la forme d'un cône tronqué, c'est-à-dire d'un cône auquel on a enlevé la partie inférieure (voir ci-contre).
Le rayon du cercle supérieur est 10 cm, celui du cercle inférieur est 6 cm, et les hauteurs sont indiquées sur le schéma.



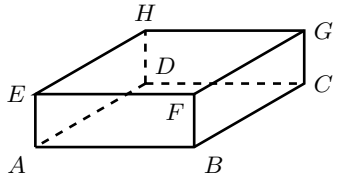

Les résultats seront arrondis au dixième.

1. Calculer le volume du grand cône (avant suppression de la partie tronquée).
2. Calculer le volume de la partie tronquée (en pointillés sur la figure).
3. En déduire le volume du vase.

**Exercice 27** (Boule)**.**

*Toutes les longueurs sont données en centimètres.*

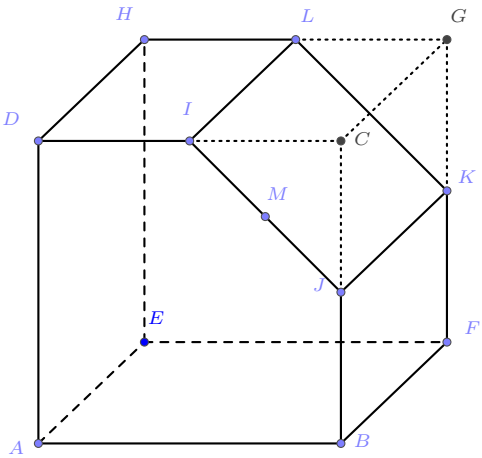
On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ représenté ci-contre (la figure n'est pas à l'échelle), avec les longueurs $AB = 6$, $BC = 6$, $BF = 3$.




Le but de l'exercice est de déterminer le volume de la boule circonscrite à ce solide (c'est-à-dire la plus petite boule pouvant contenir ce solide). On admet que le segment $[AG]$ est le diamètre de cette boule.

1. Calculer la longueur du segment $[AC]$.
2. En admettant que $ACG$ est rectangle en $C$, montrer que $AG = 9$.
3. En déduire le volume de la boule circonscrite à $ABCDEFGH$.

**Exercice 28** (Section).



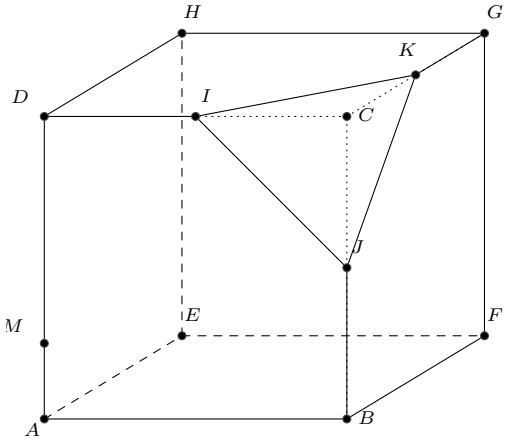

On considère un cube $ABCDEFGH$ tronqué par le plan $(IJK)$ où $I$, $J$, $K$ et $L$, sont les milieux respectifs de $[DC]$, $[BC]$, $[FG]$ et $[HG]$.
Soit $M$ le milieu de $[IJ]$.

Tracer sa section par le plan $(DMF)$.

**Exercice 29** (Section).

On considère un cube $ABCDEFGH$. On enlève le coin de sommet $C$ : $I$ est le milieu de $[DC]$, $J$ est le milieu de $[BC]$ et $K$ est le milieu de $[GC]$. Le point $M$ est un point du segment $[AD]$ tel que $AD = 4AM$.

1. Déterminer la section de ce solide par le plan $(FHM)$.
2. Déterminer la section de ce solide par le plan $(GEM)$.



**Exercice 30** (Conformations du cyclohexane)**.**

La figure représente une molécule de cyclohexane en conformation « chaise ». On supposera que toutes les liaisons C–C ont la même longueur $d$. On supposera également que $\cos(\vartheta) = -\frac{1}{3}$ correspondant à l'angle d'une liaison tétraédrique. Il vous est demandé de répondre aux questions de cet exercice en utilisant les notions du cours de calcul vectoriel.

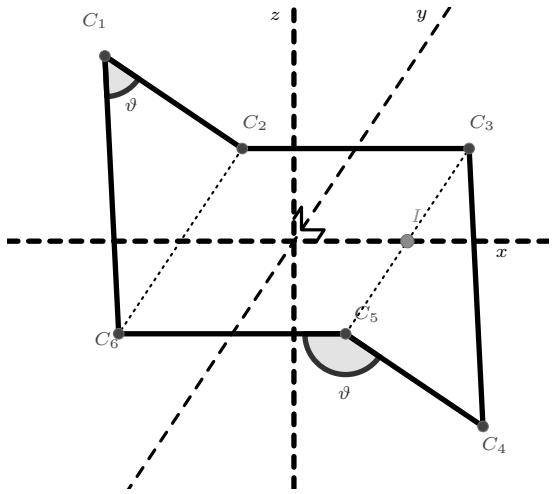



FIGURE 1 - Géométrie du cyclohexane en conformation « chaise ».

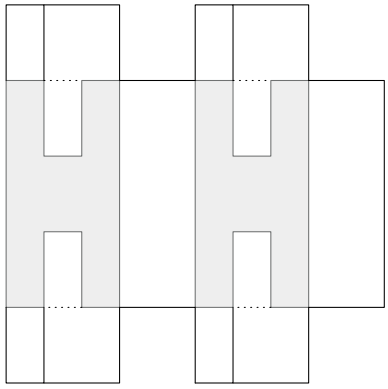
1. Le repère $(O; x, y, z)$ est-il un repère orthogonal direct ? Justifier la réponse.
2. On propose de construire une base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ orthonormal à partir des vecteurs sur l'illustration. Proposer une construction de cette base.
3. Donner les coordonnées de chaque atome du cyclohexane dans la conformation « chaise » (représentée sur la Figure) ET dans la configuration « bateau » (non représentée).
4. Calculer la distance entre les atomes $C_1$ et $C_4$ dans les deux conformations.
5. Calculer l'angle diédral entre les plans suivants du cyclohexane
   (a) $(C_1 - C_6 - C_2)$ et $(C_2 - C_6 - C_5)$ qui sont les mêmes dans les deux conformations.
   (b) $(C_1 - C_6 - C_2)$ et $(C_1 - C_6 - C_5)$.
   (c) $(C_1 - C_6 - C_2)$ et $(C_5 - C_4 - C_3)$.

**Exercice 31.**

Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel, $D_1, D_2, \ldots, D_n$, $n$ droites de l'espace sécantes deux à deux.
On suppose qu'elles ne sont pas coplanaires. Démontrer qu'elles sont concourantes.

## 8.15 Solutions

**Solution 3**
À l'échelle $\frac{1}{2}$ :



**Solution 4 (Aire et volume d'une sphère)**
Le volume d'une sphère de rayon $r$ est égal à $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Pour calculer le volume de la sphère $S$, il est donc nécessaire de déterminer au préalable son rayon :

L'aire d'une sphère est égale à : $4\pi r^2$. Sachant que l'aire de la sphère $S$ est égale à 24 m$^2$, on peut en déduire son rayon par résolution de l'équation :

$4\pi r^2 = 24$

soit $\pi r^2 = 6$

soit $r^2 = \dfrac{6}{\pi}$

Donc : $r = \sqrt{\dfrac{6}{\pi}}$

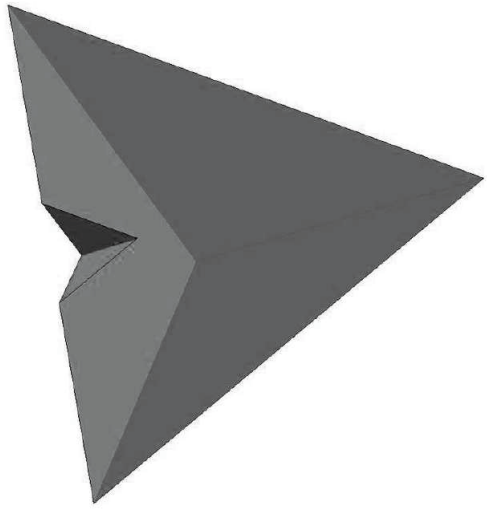
Calcul du volume de la sphère

Finalement, le volume $V$ de la sphère est égal à :

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\right)^3 \\ &= \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{6}{\pi}\sqrt{\frac{6}{\pi}} \\ &= 8\sqrt{\frac{6}{\pi}}\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

**Solution 5**
C'est Christoph qui a raison ! Les deux hexagones (celui de gauche et celui au-dessous) ont deux arêtes en commun.

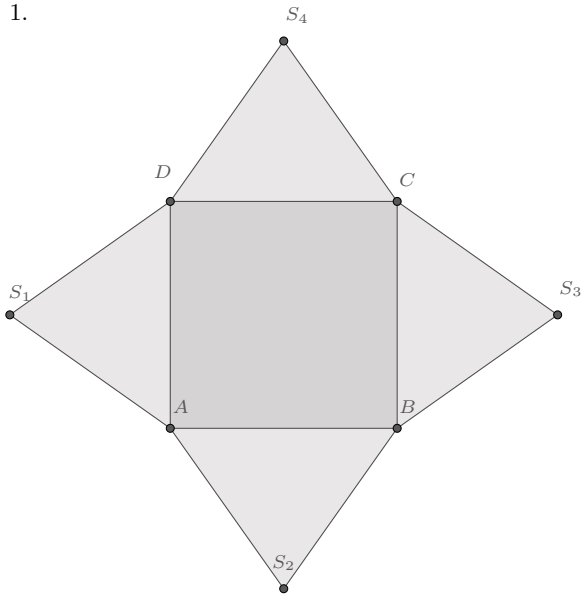
Les quatre autres faces sont des triangles bien sûr : deux petits et deux grands.



**Solution 6**
Ces deux pyramides ont la même base, et des hauteurs égales à la distance qui sépare les deux plans. Leurs volumes sont donc égaux.

**Solution 7 (Le mystère des pyramides I)**

1.




2. Le point $I$ est le centre de la pyramide. De ce fait, la hauteur de la pyramide égale $1,5$ cm. Soit $J$ le milieu du segment $[AC]$. On a $AJ = 1,5\sqrt{2}$. Maintenant, dans le triangle $AIJ$ rectangle en $J$, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} AI^2 &= AJ^2 + IJ^2 \\ &= 2,25 \times 2 + 2,25 \\ &= 2,25 \times 3 \\ \text{donc } AI &= 1,5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Les arêtes (qui ne sont pas horizontales) mesurent toutes 2,6 cm à 1 mm près.

Le volume de cette pyramide égale

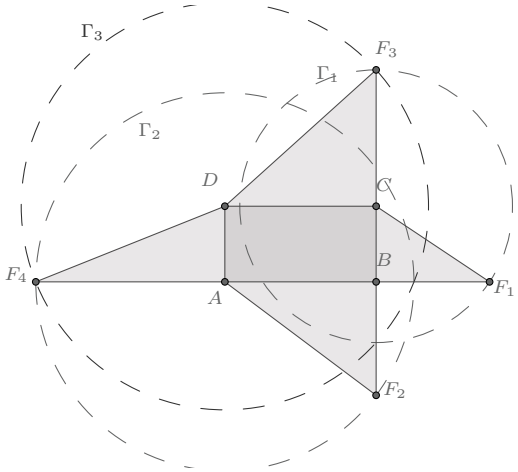
$$V = \frac{3 \times 3 \times 1,5}{3} = 3 \times 3 \times 0,5 = 4,5.$$

**Remarque 9.**

On peut ainsi découper le cube en six pyramides identiques. Chaque pyramide a un volume égal à un sixième du volume du cube.

**Solution 8 (Le mystère des pyramides II)**

1. On construit $F_1$ et $F_2$. Ensuite on construit le cercle $\Gamma_1$ de centre $C$ passant par $F_1$. Il coupe la demi-droite $[BC)$ en $F_3$. De même le cercle $\Gamma_2$ de centre $C$ passant par $F_2$ coupe la demi-droite $[BA)$ en $F_4$.
   On constate – avec soulagement – que le cercle $\Gamma_3$ de centre $D$ passant par $F_3$, passe aussi par $F_4$.




   Les autres patrons se construisent de la même façon.

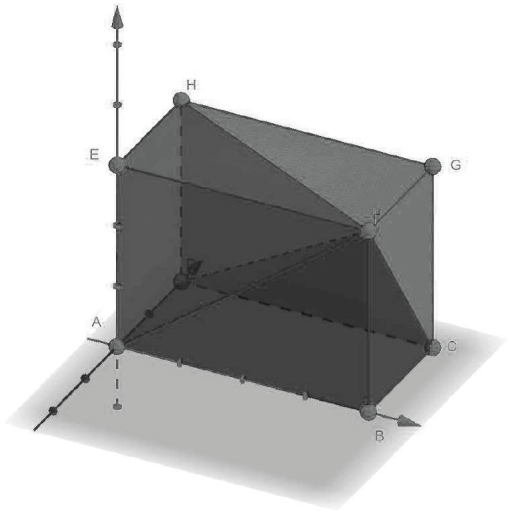
2. Ces trois pyramides ont le même volume à savoir

$$\frac{AB \times AD \times AE}{3} = \frac{4 \times 2 \times 3}{3} = 8\,\text{cm}^3 = \frac{V}{3},$$

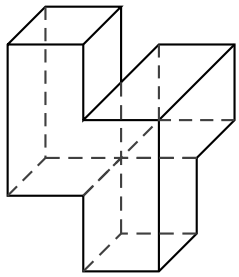
   où $V$ désigne le volume du pavé droit.

   On peut remarquer qu'on peut reconstituer le pavé avec ces trois pyramides.

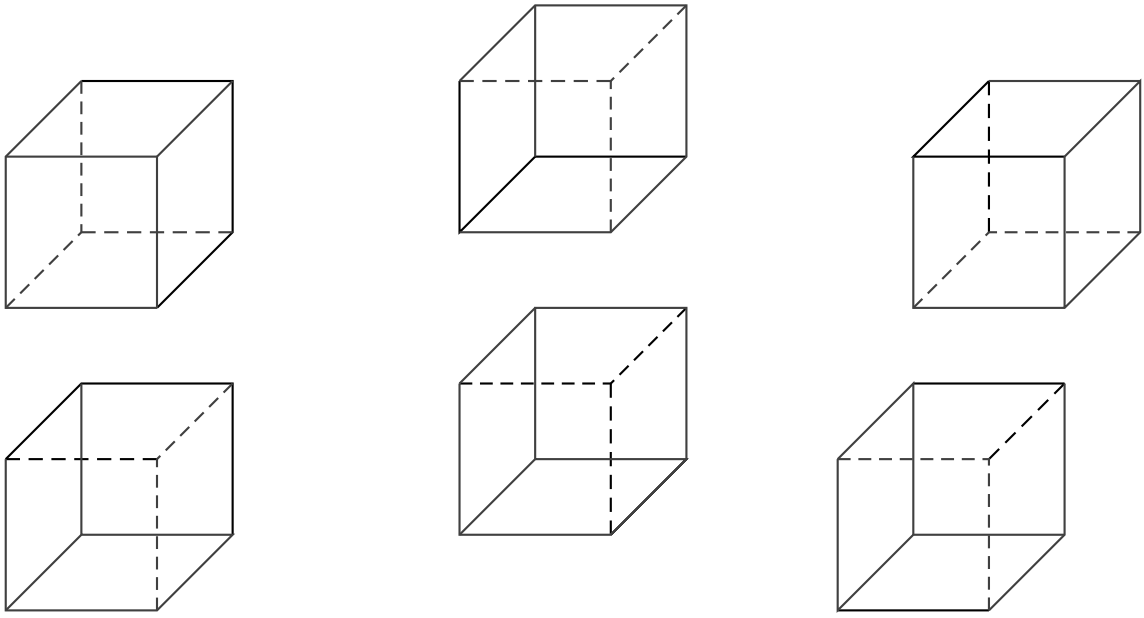
   Ceci expliquant cela.



**Solution 9**

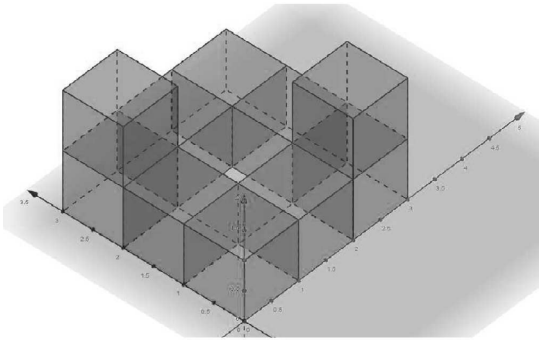


**Solution 10**

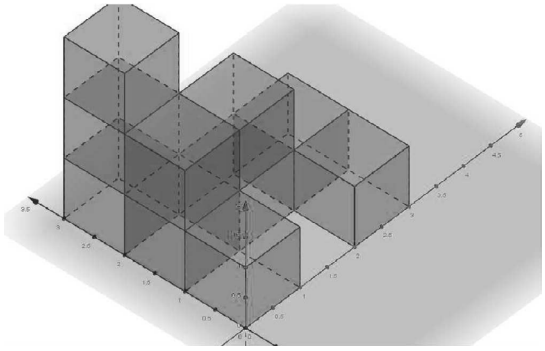


**Solution 11**

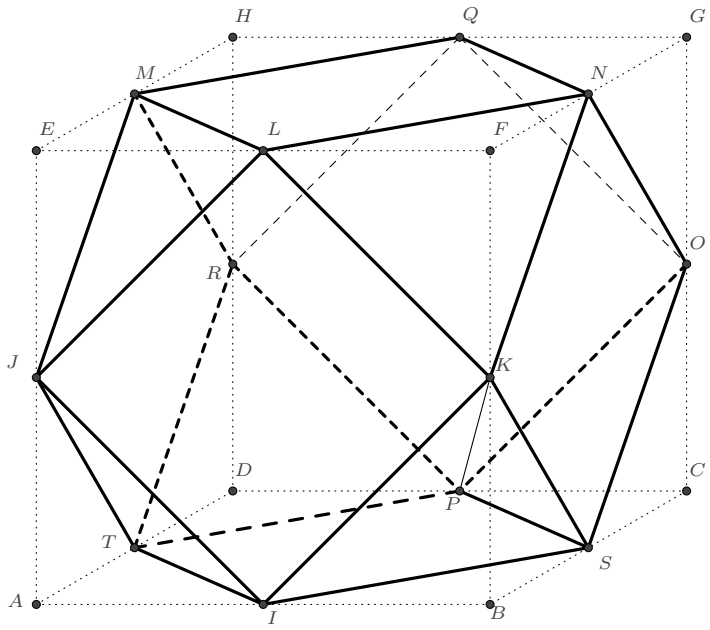
1.

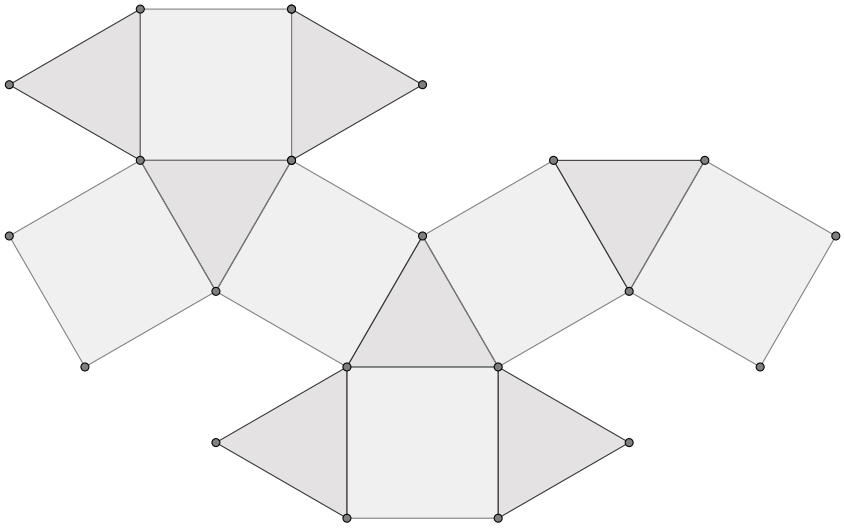


2.

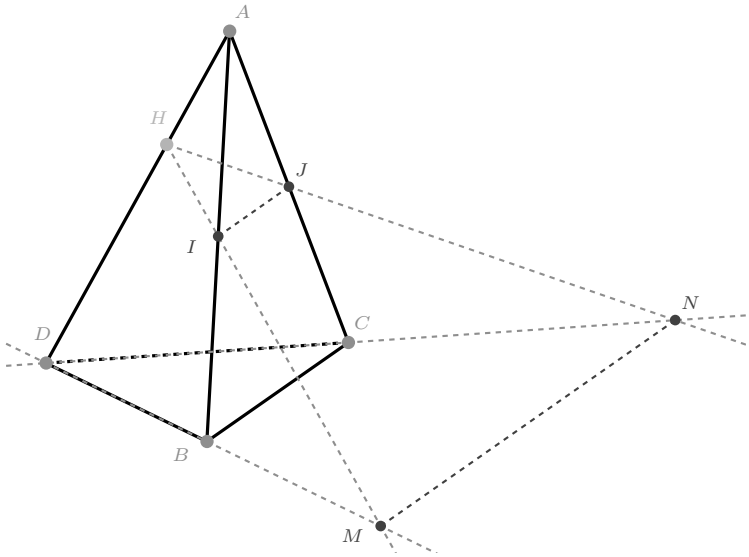


**Solution 12 (cuboctaèdre)**



**Solution 13 (Théorème du toit dans un tétraèdre)**




1. Dans le triangle $ABC$, $(IJ)$ est la droite des milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$. On en déduit que $(IJ)$ est parallèle à $(BC)$.

   Or, la droite $(BC)$ est incluse dans le plan $(BCD)$. La droite $(IJ)$ est ainsi parallèle à une droite du plan $(BCD)$, elle est donc parallèle à ce plan.

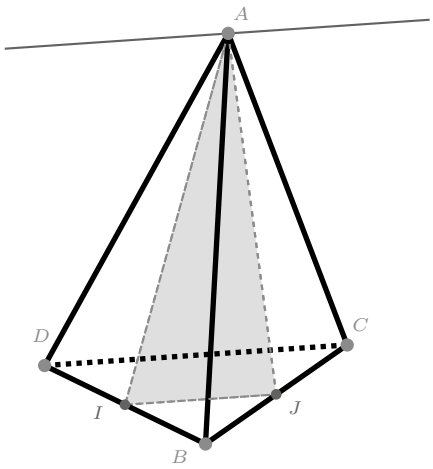
2. On sait que :
   - La droite $(IJ)$ appartient au plan $(HMN)$,
   - La droite $(BC)$ appartient au plan $(DMN)$,
   - Les droites $(IJ)$ et $(BC)$ sont parallèles.

   Les plans $(HMN)$ et $(DMN)$ contiennent donc deux droites parallèles, $(IJ)$ et $(BC)$. D'après le théorème du toit, l'intersection de ces deux plans est alors parallèle à ces deux droites.

   Or, les points $M$ et $N$ sont communs aux plans $(HMN)$ et $(DMN)$ : la droite $(MN)$ est donc l'intersection de ces deux plans. La droite $(MN)$ est donc parallèle aux droites $(IJ)$ et $(BC)$.

**Solution 14 (Intersection de plans et intersection d'une droite avec un plan)**

1.

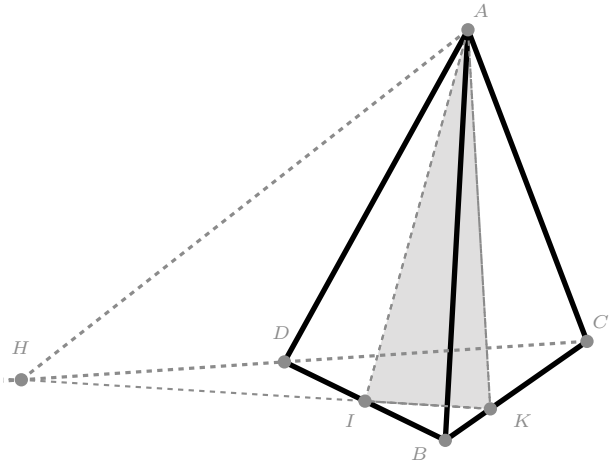



Dans le triangle $BCD$, on remarque que $(IJ)$ est la droite des milieux des côtés $[BD]$ et $[BC]$.
On en déduit que $(IJ)$ est parallèle à la droite $(CD)$.
On a donc :

- La droite $(IJ)$ appartient au plan $(AIJ)$
- La droite $(CD)$ appartient au plan $(ACD)$
- Les droites $(IJ)$ et $(CD)$ sont parallèles

Les plans $(AIJ)$ et $(ACD)$ sont sécants et contiennent donc deux droites parallèles, $(IJ)$ et $(CD)$. D'après le théorème du toit, l'intersection de ces deux plans est alors parallèle à ces deux droites.
De plus, sachant que le point $A$ est commun aux plans $(AIJ)$ et $(ACD)$, on en déduit que $A$ appartient à la droite d'intersection de ces deux plans. L'intersection des plans $(AIJ)$ et $(ACD)$ est donc la droite parallèle à $(IJ)$ passant par $A$.

2.

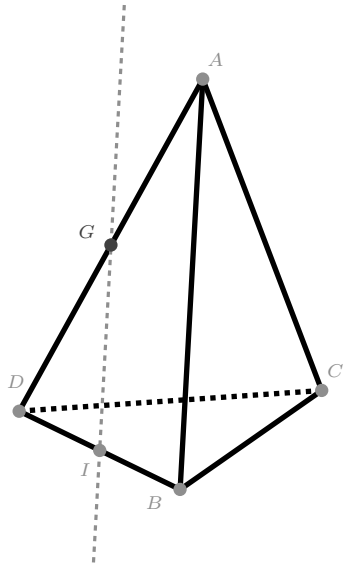



Le point $K$ n'étant pas le milieu du segment $[BC]$, les droites $(IK)$ et $(CD)$ ne sont donc pas parallèles. On peut alors appeler $H$ le point d'intersection de ces deux droites.
Le point $H$ appartient à deux droites respectivement incluses dans les plans $(AIK)$ et $(ACD)$, il appartient donc à ces deux plans.
On a donc :

- $H$ est un point commun aux plans $(AIK)$ et $(ACD)$, on en déduit que $H$ appartient à la droite d'intersection de ces deux plans
- $A$ est un point commun aux plans $(AIK)$ et $(ACD)$, on en déduit que $A$ appartient à la droite d'intersection de ces deux plans.

L'intersection des plans $(AIK)$ et $(ACD)$ est donc la droite $(AH)$.

3.




Dans le triangle $ABD$, la droite $\mathcal{D}$ passe par le milieu $I$ du côté $[BD]$ et est parallèle au côté $[AB]$. Elle est donc la droite des milieux des côtés $[BD]$ et $[AD]$.
La droite $\mathcal{D}$ passe donc par le milieu du segment $[AD]$, qu'on appelle $G$.
Le point $G$ appartient ainsi à $(AD)$, droite incluse dans le plan $(ACD)$ : $G$ appartient donc à ce plan.
Finalement, le point $G$ appartient à la fois au plan $(ACD)$ et à la droite $\mathcal{D}$. L'intersection du plan $(ACD)$ et de la droite $\mathcal{D}$ est donc le point $G$.

**Solution 15 (Droites coplanaires et plans parallèles dans un cube)**

1. Les droites $(BC)$ et $(FE)$ ne sont pas coplanaires. Les droites $(BC)$ et $(FE)$ ne sont donc pas sécantes.
2. Le point $N$ appartient à la droite $(EF)$, incluse dans le plan $(EGH)$. Le point $N$ appartient donc au plan $(EGH)$. Les droites $(NG)$ et $(EH)$ appartiennent ainsi toutes deux au plan $(EGH)$ : elles sont donc coplanaires.

   De plus, les droites $(NG)$ et $(EH)$ ne sont pas parallèles. Les droites $(NG)$ et $(EH)$ sont donc sécantes.
3. Le point $P$ appartient à la droite $(AD)$, incluse dans le plan $(ABC)$. Le point $P$ appartient donc au plan $(ABC)$, et la droite $(PC)$ est incluse dans le plan $(ABC)$.

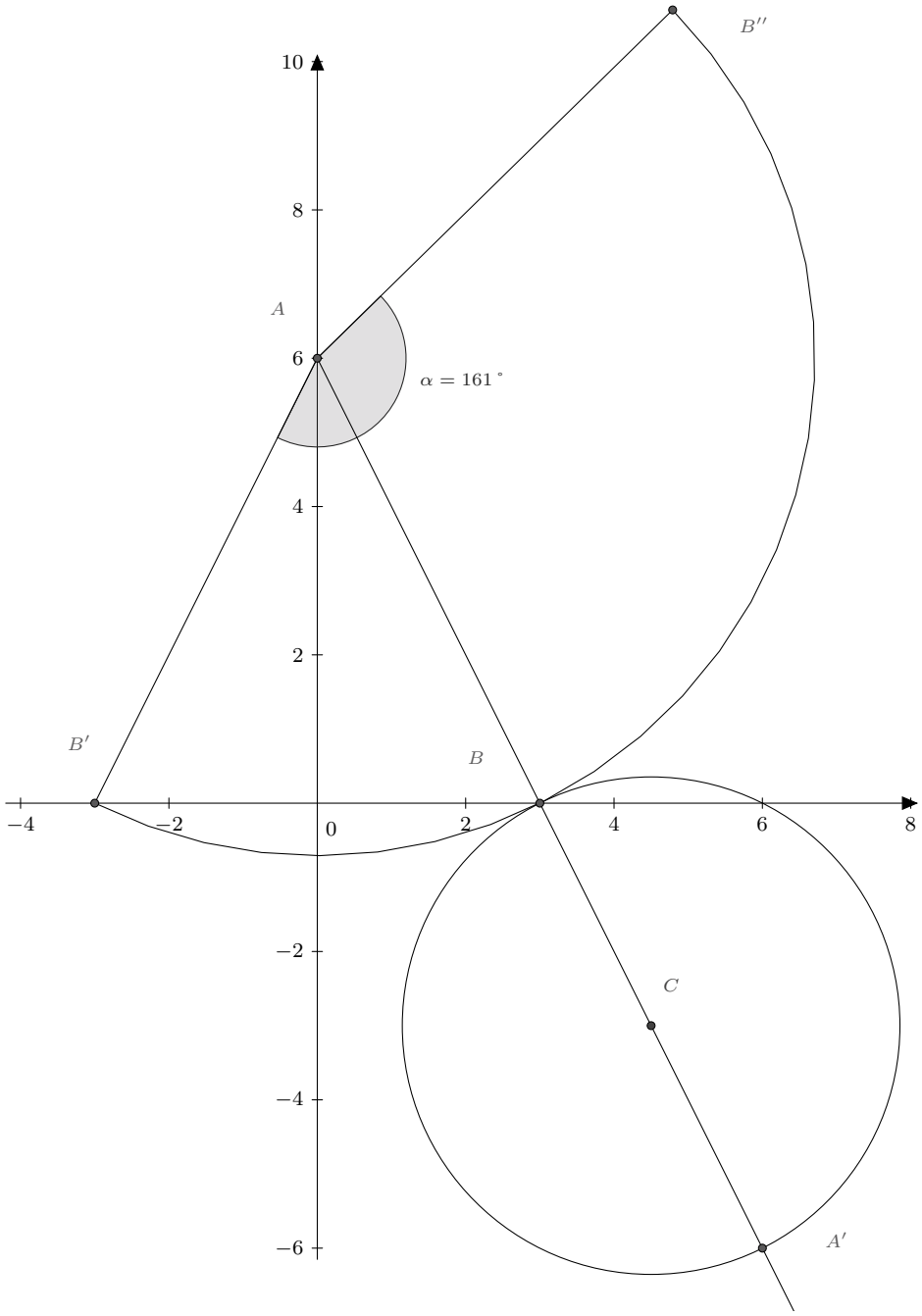
   Or, les plans $(ABC)$ et $(ENH)$ sont des côtés opposés du cube : ils sont donc parallèles. La droite $(PC)$ appartient ainsi à un plan parallèle au plan $(ENH)$ : elle est donc parallèle au plan $(ENH)$.
4. Les points $P$ et $H$ sont communs aux plans $(PNH)$ et $(PDH)$. Le point $N$ n'appartient en revanche pas au plan $(PDH)$.

   Les plans $(PNH)$ et $(PDH)$ ne sont donc pas parallèles (leur intersection est la droite $(PH)$).

   Or, les plans $(PDH)$ et $(FBG)$ sont des côtés opposés du cube : ils sont donc parallèles.

   Tout plan parallèle au plan $(PDH)$ est donc parallèle au plan $(FBG)$. Le plan $(PNH)$ n'étant pas parallèle au plan $(PDH)$, il n'est donc pas parallèle au plan $(FBG)$.

**Solution 16 (Volume et patron d'un cône de révolution)**



**Solution 17 (Volume, patron et angle d'un cône de révolution)**

1. Le volume d'un cône de révolution de hauteur $h$ et dont le rayon du cercle de base est $r$ est égal à : $\frac{1}{3}h\pi r^2$

   On a donc : $V = \frac{1}{3}6\pi 4^2 = 32\pi$.

   Le volume de ce cône est donc égal à $32\pi$ cm$^3$ .

2. L'angle $\alpha$ est proportionnel à la longueur du secteur angulaire correspondant (aire orange).

   Il convient donc de déterminer au préalable :

   ▶ la longueur du secteur angulaire,

   ▶ le rayon $x$ du secteur angulaire, afin de déterminer le périmètre (total) du cercle comprenant le secteur angulaire.

   Longueur du secteur angulaire :

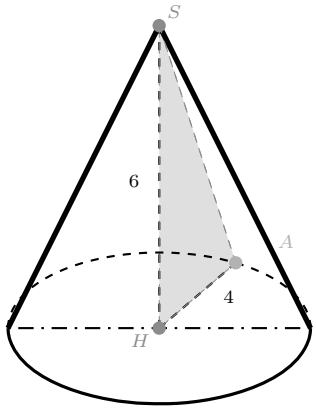
   La longueur du secteur angulaire est égale au périmètre de la base du cône.

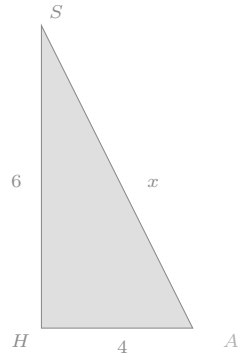
   La base du cône étant un cercle de rayon 4 cm, la longueur du secteur angulaire est donc égale à :

   $L = 2\pi 4 = 8\pi$.

   Rayon du secteur angulaire :

   Pour déterminer le rayon du secteur angulaire, il suffit d'utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle $ASH$ :




   On a donc :

   $x^2 = SA^2 = AH^2 + SH^2 = 4^2 + 6^2 = 52$.

   Donc : $x = \sqrt{52}$.

   Angle du secteur angulaire :

   Le périmètre du cercle comprenant le secteur angulaire étant égal à $2\pi x$, la relation de proportionnalité donne :

| | |
|---|---|
| $360°$ | $\alpha°$ |
| $2\pi x$ | $L$ |

   L'égalité des produits en croix donne :

   $\alpha = \frac{360L}{2\pi x} = \frac{360 \times 8\pi}{2\pi\sqrt{52}} = \frac{360 \times 4}{\sqrt{52}} \approx 200°$ L'angle $\alpha$ égale donc $200°$, au degré près.

**Solution 18 (Volume et hauteurs d'un tétraèdre rectangle)**

1. Le volume d'un tétraèdre est égal au tiers d'une de ses hauteurs multiplié par l'aire du côté correspondant.
   Dans le tétraèdre $OABC$, $OA$ est la hauteur correspondante au côté $OBC$.
   Son volume est donc égal à :
   $V = \frac{1}{3}OA \times \mathcal{A}(OBC) = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{6 \times 6}{2} = 36.$
   Le volume du tétraèdre $OABC$ est donc égal à 36.
2. Sachant que $OAB$, $OAC$ et $OBC$ sont trois triangles rectangles isocèles avec $OA = OB = OC$, leurs hypoténuses ont donc même longueur.
   Ce qui signifie que $AB = AC = BC$ et donc que le triangle $ABC$ est équilatéral.
   On en déduit que la médiane $(AI)$ est aussi la hauteur du triangle $ABC$ issue du sommet $A$.
   L'aire de $ABC$ est ainsi égale à :
   $\mathcal{A}(ABC) = \frac{BC \times AI}{2}$.
   Calcul de $BC$ :
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $OBC$ :
   $BC^2 = OB^2 + OC^2 = 36 + 36 = 72$
   Donc : $BC = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$
   Calcul de $AI$ :
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $AIB$ :
   $AI^2 = AB^2 - BI^2$
   $AI^2 = 72 - \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 72 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 72 - 18 = 54$
   Donc : $AI = \sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = 3\sqrt{6}$
   Aire du triangle $ABC$ :
   Finalement, on a :
   $\mathcal{A}(ABC) = \frac{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{2} = 9\sqrt{2 \times 6} = 9\sqrt{4 \times 3} = 18\sqrt{3}$. L'aire du triangle $ABC$ est donc égale à $18\sqrt{3}$.
3. $OH$ étant la hauteur du tétraèdre $OABC$ issue du sommet $O$, on a : $V = \frac{1}{3}OH \times \mathcal{A}(ABC)$.
   D'où : $OH = \frac{3 \times V}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{3 \times 36}{18\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$
   La longueur $OH$ est donc égale à $2\sqrt{3}$.

**Solution 19 (Angle dièdre)**

On calcule :

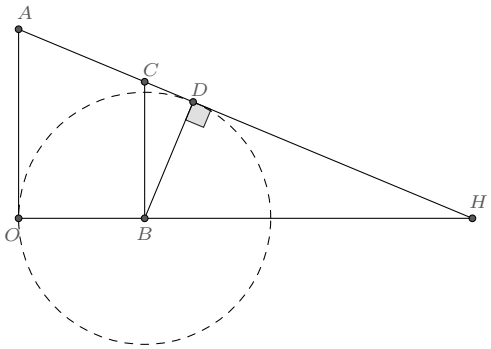
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\-12\\24\end{pmatrix}. \qquad \overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix}-1\\5\\-8\end{pmatrix}, \overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}\begin{pmatrix}-8\\32\\25\end{pmatrix}.$$

Donc $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}\right) = 12(1 \times (-8) - 1 \times 32 + 2 \times 25) = 12 \times 10.$

$\cos\alpha = \frac{12 \times 10}{12 \times \sqrt{6} \times \sqrt{1713}} = \frac{10}{3 \times \sqrt{1142}} = 0,0986$ à $10^{-4}$, et $\alpha = 1,472$ à $10^{-4}$.

Les deux plans sont presque perpendiculaires.

**Solution 20 (Boule dans un cône)**




Soit $R$ le rayon de cette boule. On voit bien que le problème est en fait un problème de géométrie plane.

Soit $H$ le sommet du cône, $A$ un point de la circonférence de la base, $O$ le centre de la base et $B$ le centre de la boule.

Le triangle $AOH$ est rectangle en $O$. On trace la parallèle à $(OA)$ passant par $B$. Elle coupe le segment $[AH]$ en $C$. La hauteur du triangle $BCH$ issue de $B$ coupe $[AH]$ en $D$.

On a $BH = 12 - R$. D'après le théorème de Thalès dans le triangle $AOH$,

$$\frac{BC}{OA} = \frac{BH}{OH} = \frac{BH}{AH} = \frac{12-R}{12}.$$

L'aire du triangle $BCH$ égale donc d'une part $\frac{1}{2}\, BH \times BC = \frac{1}{2}(12-R) \times 5 \times \frac{12-R}{12}$.

D'autre part, elle égale $\frac{1}{2}\, CH \times BD = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{12-R}{12}$.

On en déduit que

$$\frac{1}{2}(12-R) \times 5 \times \frac{12-R}{12} = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{12-R}{12} \times R.$$

Après simplification par $\frac{1}{2}\,\frac{12-R}{12}$ on obtient

$$5(12-R) = 13R,$$

soit $18R = 60$ soit $\boxed{R = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}}$

**Solution 21 (Aire d'un cône)**

1. (a) Puisque $[OS]$ est la hauteur du cône de révolution, le triangle $OAS$ est rectangle en $O$. Par lecture sur le graphique, on voit que $OA = 3$ et $OS = 4$ (toutes les longueurs sont données en cm).

(b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $OAS$ rectangle en $O$, on a :

$$\begin{aligned} AS^2 &= AO^2 + OS^2 \\ &= 3^3 + 4^2 \\ &= 25 \\ \text{donc } AS &= 5 \end{aligned}$$

2. Le périmètre d'un cercle de rayon $r$ est donné par la formule $2\pi r$. Donc le périmètre de la base du cylindre est $2\pi \times 3 = 6\pi$, et celui du cercle de rayon $R$ est $2\pi \times 5 = 10\pi$.
3. 

| Angle (en degrés) | $\alpha$ | 360 |
|---|---|---|
| Longueur de l'arc de cercle de rayon 5 | $6\pi$ | $10\pi$ |

4. Puisque c'est un tableau de proportionnalité, nous avons :

$$\alpha = \frac{360 \times 6\pi}{10\pi} = \frac{360 \times 6}{10} = 216$$

Donc la mesure de l'angle $\alpha$ est $216^\circ$.

5. D'abord, notons que l'aire d'un disque de rayon 5 est $\pi \times 5^2 = 25\pi$.

| Angle (en degrés) | 216 | 360 |
|---|---|---|
| Aire de la section de disque de rayon 5 | ? | $25\pi$ |

L'aire de la section est donc $\dfrac{216 \times 25\pi}{360} = 15\pi$.

6. L'aire du cône est égale à l'aire de la base ($\pi \times 3^2 = 9\pi$) plus l'aire de la surface latérale, dont nous venons de montrer qu'elle est égale à $15\pi$. Donc l'aire est $\mathcal{A} = 9\pi + 15\pi = 24\pi$, soit environ 75 cm$^2$.

**Solution 22 (Cône et cylindre)**

1. Le segment $[TO]$ est la hauteur du cylindre, qui est la moitié de celle du cône. Donc $TO = \dfrac{SO}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ cm.
2. Le quadrilatère $CTOB$ est un parallélogramme. Donc, d'une part, les longueurs $BC$ et $TO$ sont égales, et $BC = 2$ cm, et d'autre part, les droites $(CB)$ et $(SO)$ sont parallèles.
3. On applique l'énoncé des milieux dans le triangle $SAO$ : puisque $(CB)$ et $(SO)$ sont parallèles, et que $T$ est le milieu de $[SO]$, alors $CT$ est égal à la moitié de $AO$, c'est-à-dire 2 cm. Mais puisque $CTOB$ est un parallélogramme, les longueurs $BO$ et $CT$ sont égales, donc $BO = 2$ cm.
4. Appliquons la formule du volume :

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{1}{3}\pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur} \\ &= \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 20 \\ &\approx 335 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

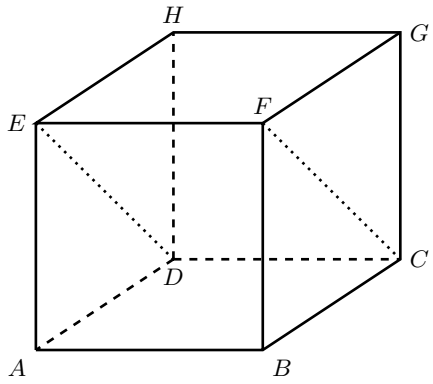
5. De même :

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \times \text{rayon}^2 \times \text{hauteur} \\ &= \pi \times 2^2 \times 10 \\ &\approx 126 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

6. Le volume du cylindre est 126 cm$^3$, et celui du cône 335 cm$^3$. En versant le contenu de deux cylindres dans le cône, on obtient un volume de $2\times126 = 252$ cm$^3$, ce qui est inférieur au volume du cône. Donc l'eau ne déborde pas. En revanche, si on ajoute un troisième cylindre, on obtient $252+126 = 378$ cm$^3$, ce qui est supérieur au volume du cône, donc l'eau déborde.

**Solution 23 (Droites et plans)**

1.




2. (a) Les segments $[EF]$ et $[CD]$ sont parallèles et de même longueurs (parallèles car ils sont tous les deux parallèles au segment $[AB]$ ; de même longueur car ce sont deux arêtes d'un cube). Donc le quadrilatère $EFCD$ est un parallélogramme.
   (b) La droite $(FC)$ est parallèle à la droite $(ED)$, contenue dans le plan $(EBD)$ : donc la droite $(FC)$ est parallèle au plan $(EBD)$.
3. Tout d'abord, le quadrilatère $FHDB$ est un parallélogramme (car $[HD]$ et $[FB]$ sont parallèles et de même longueur). Donc la droite $(FH)$ est parallèle à la droite $(DB)$, elle même incluse dans $(EDB)$ : donc $(FH)$ est parallèle à $(EDB)$.
4. Le plan $(FCH)$ contient deux droites $(FH)$ et $(FB)$. Ces deux droites sont sécantes, et nous avons montré aux questions précédentes qu'elles sont parallèles au plan $(EBD)$. Donc, puisque le plan $(FCH)$ contient deux droites sécantes parallèles au plan $(EBD)$, ces deux plans sont parallèles.

**Solution 24 (Longueurs et volumes)**

1. Puisque $EFI$ est un triangle isocèle en $I$, la hauteur $[KI]$ est aussi une médiane. Donc $K$ est le milieu de $[EF]$, et $EK = \dfrac{EF}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.
2. Puisque $[IK]$ est une hauteur, le triangle $EIK$ est rectangle en $K$. Donc on peut appliquer le théorème de Pythagore, et :

$$\begin{array}{rrcl} & IE^2 & = & IK^2 + KE^2 \\ \text{soit} & 5^2 & = & IK^2 + 4^2 \\ \text{soit} & 25 & = & IK^2 + 16 \\ \text{soit} & 9 & = & IK^2 \\ \text{soit} & 3 & = & IK \end{array}$$

3. Le solide est composé de deux solides : un pavé droit et un prisme droit à base triangulaire.
   Le volume du pavé droit est le produit des longueurs, soit $AB \times EA \times BC = 8 \times 6 \times 15 = 720$ cm$^3$.
   Le volume du prisme est égal à l'aire de la base fois la hauteur,
   soit $\mathcal{A}_{base} \times hauteur = \dfrac{EF \times IK}{2} \times FG = \dfrac{8 \times 3}{2} \times 15 = 180$ cm$^3$.

Donc le volume total est la somme des deux volumes, soit $720 + 180 = 900$ cm$^3$.

4. Les deux plans sont strictement parallèles.
5. Les droites $(FG)$, $(BC)$, $(AD)$ (parmi d'autres) sont strictement parallèles $(EH)$.
6. Les droites $(EH)$, $(FG)$, $(EF)$, $(HG)$, $(EG)$ (parmi d'autres) sont incluses dans le plan $(EFH)$.
7. L'intersection est la droite $(BF)$.
8. Les droites $(HG)$, $(EH)$, $(JH)$ (parmi d'autres) sont sécantes avec $(DH)$.

**Solution 25**

Toutes les longueurs sont en centimètres.

Considérons le triangle $AFC$. Les points $I$ et $J$ sont respectivement les milieux des segments $[AF]$ et $[CF]$. D'après le théorème des milieux, la longueur $IJ$ est égale à la moitié de la longueur $AC$. Reste à calculer $AC$.

Le triangle $ABC$ est rectangle en $B$ (car $ABCD$ est un carré), donc on peut y appliquer le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$. Donc $AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Donc $IJ = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1,4$ cm.

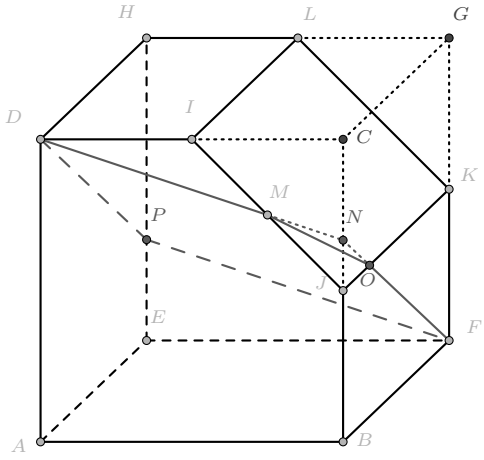
**Solution 26 (Volume)**

1. La formule du volume d'un cône de révolution est $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ (où $r$ est le rayon de la base, et $h$ la hauteur). Donc le volume du grand cône est : $\dfrac{1}{3}\pi \times 10^2 \times 30 = 1000\pi = 3141,6$ cm$^3$.
2. Ce volume est $\dfrac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 10 = 120\pi = 377,0$ cm$^3$.
3. Le volume du vase est la différence des deux volumes, soit $3141,6 - 377,0 = 2764,6$ cm$^3$.

**Solution 27 (Boule)**

1. Le triangle $ABC$ est rectangle en $B$ (car $ABCD$ est un rectangle), donc on peut appliquer le théorème de Pythagore : $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Donc $AC^2 = 6^2 + 6^2 = 72$, et $AC = \sqrt{72}$.
2. De même, on applique le théorème de Pythagore : $AG^2 = AC^2 + CG^2$, donc $AG^2 = \sqrt{72}^2 + 3^2 = 72 + 9 = 81 = 9^2$, donc $AG = 9$.
3. $AG$ étant le diamètre de la boule, son rayon est $AG/2$ soit $4,5$. Le volume d'une boule de rayon $r$ est donné par la formule $\frac{4}{3}\pi r^3$, donc le volume de la boule circonscrite est $\frac{4}{3}\pi \times 4,5^3 = \frac{3^5\pi}{2} \approx 382$ cm$^3$.

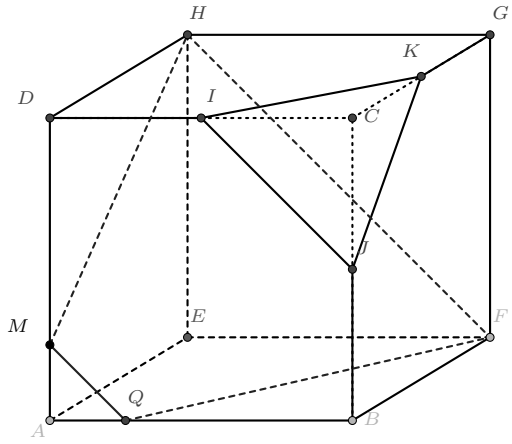
**Solution 28 (Section)**

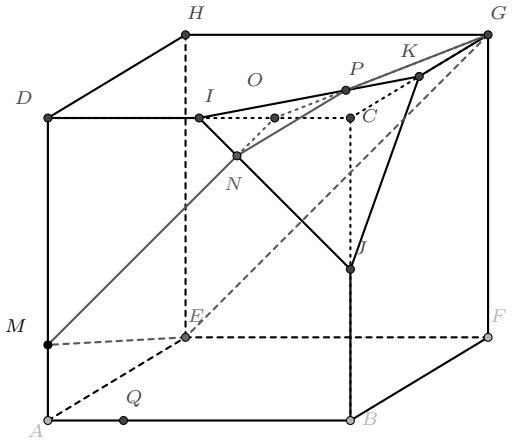



On procède comme pour la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan $(DMF)$. Les tracés sont en rouge. Dans le plan $(ABC)$, la droite $(DM)$ coupe la droite $BC$ en $N$. Dans le plan $(BCG)$, la droite $(MF)$ coupe la droite $JK$ en $O$. Dans le plan $(ECG)$, la trace du plan $(DMF)$ est la parallèle à $DN$) passant par $F$. En effet d'après le théorème 21 page 329 le plan $(DMF)$ coupe les plans parallèles $(ABC)$ et $(ECG)$ suivant des droites parallèles. De plus la perspective cavalière conserve le parallélisme. On appelle $P$ le point d'intersection de cette droite $(DMF) \cap (ECG)$ avec $(EH)$. La droite $(DP$ est la trace du plan $(DMF)$ dans le plan $(AED)$. On constate qu'elle est parallèle à $(NF)$ toujours en vertu du théorème 21.

La section du cube tronqué par le plan $(DMF)$ est donc le polygone $DMOFP$.

**Solution 29 (Section)**



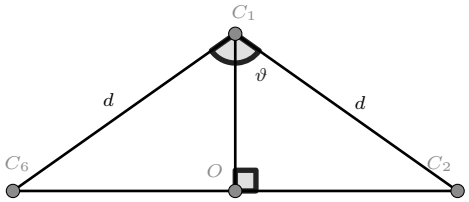




**Solution 30 (Conformations du cyclohexane)**

1. Oui, le repère $(O; x, y, z)$ est-il un repère orthogonal direct car les axes sont orthogonaux et qu'il vérifie la règle des trois doigts.

2. Soit $I$ le milieu de [ $C_3$ , $C_5$ ] et $J$ le milieu de [ $C_2$ , $C_3$ ]. On pose, par exemple, $\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{OI}$. L'unité mesure alors $\dfrac{d}{2}$.

Ensuite on calcule la distance $C_2C_6$ en se plaçant dans le plan $(C_1C_6C_2)$.
Dans le triangle $C_2C_6O$ rectangle en $O$, $OC_2 = C_2C_6\sin(\frac{\vartheta}{2})$. Or $-\frac{1}{3} = \cos\vartheta = 1 - 2\sin^2(\frac{\vartheta}{2})$ donc $\sin(\frac{\vartheta}{2}) = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Donc $OC_2 = d\sqrt{\frac{2}{3}}$.




On en déduit que $OJ = d\sqrt{\frac{2}{3}}$. De ce fait on va prendre $\overrightarrow{u_y} = \sqrt{\frac{3}{8}}\overrightarrow{OJ}$ pour avoir deux vecteurs de base de même norme. Enfin on prend $\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y}$ pour compléter la base.

3. On a facilement
$C_3\left(\ 1\ ,\ \sqrt{\frac{8}{3}}\ ,\ 0\ \right)$, $C_5\left(\ 1\ ,\ -\sqrt{\frac{8}{3}}\ ,\ 0\ \right)$, $C_6\left(\ -1\ ,\ -\sqrt{\frac{8}{3}}\ ,\ 0\ \right)$, $C_2\left(\ -1\ ,\ \sqrt{\frac{8}{3}}\ ,\ 0\ \right)$.
On pose $C_4\ (\ x\ ,\ 0\ ,\ z\ )$. On a $\overrightarrow{C_2C_3} = 2\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{C_3C_4}\ \begin{pmatrix} x-1 \\ -\sqrt{\frac{8}{3}} \\ z \end{pmatrix}$. On sait que $\left\|\overrightarrow{C_3C_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{C_3C_4}\right\| = 2$ et $\overrightarrow{C_3C_2}\cdot\overrightarrow{C_3C_4} = -\frac{4}{3}$. On déduit de cette égalité $-2(x-1) = -\frac{1}{3}\times 2\times 2$ d'où $x = \frac{5}{3}$.
De $\left\|\overrightarrow{C_3C_4}\right\|^2 = 4$ on tire $\frac{4}{9} + \frac{8}{3} + z^2 = 4$ d'où $z^2 = \frac{8}{9}$. Ainsi $z = \frac{\sqrt{8}}{3}$ (bateau) ou $z = -\frac{\sqrt{8}}{3}$ (chaise).
Par symétrie par rapport à $O$ du point $C_4$ (chaise) on trouve $C_1\left(\ -\frac{5}{3}\ ,\ 0\ ,\ \frac{\sqrt{8}}{3}\ \right)$.

4. Dans la conformation bateau on a $C_1C_4 = \frac{10}{3}$ c'est-à-dire une distance égale à $\frac{5}{3}\,d$. Dans la conformation chaise on a $OC_1^2 = \frac{25}{9} + \frac{8}{3} = \frac{49}{9}$. Donc la distance entre $C_1$ et $C_4$ égale $4\,\frac{7}{3}\,d = \frac{28}{3}\,d$.

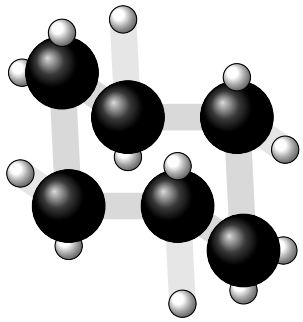
5. (a) On a $\overrightarrow{C_1C_2}\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ -\sqrt{\frac{8}{3}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{C_1C_6}\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\sqrt{\frac{8}{3}} \\ -\sqrt{\frac{8}{3}} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{C_1C_2}\wedge\overrightarrow{C_1C_6}\ \begin{pmatrix} -\frac{16}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(C_1C_6C_2)$. Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan $(C_2C_6C_5)$.
Le produit scalaire de ces deux vecteurs normaux égale d'une part $-\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{8}}{3}$ et d'autre part $\cos\psi \times \left\|\overrightarrow{C_1C_2}\wedge\overrightarrow{C_1C_6}\right\| \times 1$. Comme $\left\|\overrightarrow{C_1C_2}\wedge\overrightarrow{C_1C_6}\right\|^2 = \frac{256}{9} + \frac{128}{9} = \frac{1024}{27}$. On en déduit $\cos\psi = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(b) On a $\overrightarrow{C_6C_5}\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc on obtient $\overrightarrow{C_1C_6}\wedge\overrightarrow{C_6C_5}\ \begin{pmatrix} 0 \\ -4\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 4\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$ comme vecteur normal à $(C_1C_6C_5)$.
Le produit scalaire de ces deux vecteurs normaux égale d'une part $-4\frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{64}{9\sqrt{3}}$ et d'autre part $\cos\xi \times \left\|\overrightarrow{C_1C_6}\wedge\overrightarrow{C_6C_5}\right\| \times 2$.
Comme $\left\|\overrightarrow{C_1C_6}\wedge\overrightarrow{C_6C_5}\right\| = \frac{8}{3} = \frac{32}{9}$. On en déduit $\cos\xi = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

(c) Dans la conformation chaise les plans $(C_1C_6C_2)$ et $(C_5C_4C_3)$ sont parallèles par symétrie par rapport à $O$.

Solutions

Dans la conformation bateau par symétrie par rapport à $(Oyz)$ les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{16}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ 0 \\ -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} \end{pmatrix}$ sont normaux aux plans $(C_1C_6C_2)$ et $(C_5C_4C_3)$. Ils ont pour norme $\sqrt{\dfrac{892}{27}}$ et pour produit scalaire $-\dfrac{212}{9}$ Soit $\alpha$ l'angle diédral entre les plans $(C_1C_6C_2)$ et $(C_5C_4C_3)$. On a donc $\cos\alpha = -\dfrac{212}{9} \times \dfrac{27}{892} = -\dfrac{159}{223}$.



**Solution 31**

On va démontrer par récurrence la proposition $\mathcal{P}_n$ : Pour toutes droites $D_1, D_2, \ldots, D_n$ de l'espace sécantes deux à deux, si elles ne sont pas coplanaires. alors elles sont concourantes.

$\mathcal{P}_3$ est vraie : On se donne trois droites $D_1, D_2$ et $D_3$ sécantes deux à deux. On considère le plan $\Pi$ défini par $D_1$ et $D_2$.

Soit $\{C\} = D_1 \cap D_2$, $\{A\} = D_2 \cap D_3$ et $\{B\} = D_1 \cap D_3$.

Si $B \neq C$ alors $D_3 = (BC) \subset \Pi$. De même, en changeant les rôles de $A, B$ et $C$, si deux points d'intersection sont distincts, alors les trois droites sont coplanaires.

On a bien démontré $\mathcal{P}_3$ par contraposée.

Soit $n \geqslant 3$ un entier pour lequel on a $\mathcal{P}_n$.

Soit $D_1, D_2, \ldots, D_n, D_{n+1}$, $n+1$ droites de l'espace sécantes deux à deux qui ne sont pas coplanaires.

On peut toujours trouver $n$ de ces droites qui ne sont pas coplanaires. En effet, sinon, il existe un plan $\Pi_1$ qui contient les droites $D_1, D_2, \ldots, D_n$ et il existe un plan $\Pi_2$ qui contient les droites $D_2, \ldots, D_n, D_{n+1}$. De ce fait les deux droites $D_1$ et $D_n$ sont inclus dans $\Pi_1 \cap \Pi_2$. Donc le plan $\Pi$ défini par $D_1$ et $D_2$ est inclus dans $\Pi_1 \cap \Pi_2$, donc $\Pi = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_1 = \Pi_2$. Donc toutes les droites $D_1, D_2, \ldots, D_n, D_{n+1}$ sont incluses dans le plan $\Pi$.

Pour fixer les idées, on prend $D_1, D_2, \ldots, D_n$ non coplanaires. D'après $\mathcal{P}_n$ toutes ces droites passent par un point $A$.

Soit $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $D_i, D_j, D_{n+1}$ ne soient pas coplanaires. Il en existe, sinon on aurait $D_1, D_2, D_{n+1}$ coplanaires incluses dans un unique plan $\Pi$ qui contiendrait toutes les $D_1, D_j, D_{n+1}$ donc toutes les droites $D_i$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$ ce qui n'est pas possible.

En prenant donc $D_i, D_j, D_{n+1}$ non coplanaires, d'après $\mathcal{P}_3$, $D_i, D_j, D_{n+1}$ passent par un unique point. Comme $\{A\} = D_i \cap D_j$, on en déduit que $D_{n+1}$ passe elle aussi par $A$. On a bien démontré $\mathcal{P}_{n+1}$.

Pour conclure, on a $\mathcal{P}_3$ et $\forall n \geqslant 3$, $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \geqslant 3$, $\mathcal{P}_n$. Ce qu'il fallait démontrer.

# Chapitre 9

# Polynômes

## Sommaire


| | | |
|---|---|---|
| **9.1** | **Fonction polynôme** | **398** |
| **9.2** | **Racines d'un polynôme** | **402** |
| **9.3** | **Schéma de Horner** | **404** |
| **9.4** | **Exercices** | **406** |
| **9.5** | **Solutions** | **407** |
| **9.6** | **Travaux dirigés** | **410** |
| **9.7** | **Problèmes** | **412** |

Nous avons déjà vu les polynômes du second degré au chapitre 5.

# 9.1 Fonction polynôme

## 9.1.1 Définition

**Définition 1.**

Soit $n$ un entier naturel et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ une liste de $n+1$ nombres réels.
On appelle **fonction polynôme** ou plus simplement **polynôme** toute fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

On dit que les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont **des** coefficients du polynôme $f$.

**Exemples 1**

- Les fonctions constantes ($n = 0$),
- les fonctions affines ($n = 1$),
- les polynômes du second degré ($n = 2$),

sont des polynômes.

## 9.1.2 Dérivée des polynômes

**Théorème 1**
Soit $n$ un entier naturel, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_n$ définie sur $I$ par

$$\forall x \in I,\ f(x) = x^n.$$

La fonction $f_n$ est dérivable sur $I$ et

$$\forall x \in I,\ f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

**Démonstration 1**
C'est le troisième point du théorème 6 page 135 en prenant pour sanglier la fonction définie sur $I$ par $u(x) := x$. □

On obtient comme corollaire le théorème suivant :

**Théorème 2**
Soit $n$ un entier naturel, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+1$ nombres réels et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f$ la fonction définie sur $I$ par

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Alors $f_n$ est dérivable sur $I$ et

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = a_1 + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

En particulier la fonction dérivée d'un polynôme est aussi un polynôme.

### 9.1.3 Coefficients d'un polynôme

**Théorème 3**
Soit $f$ un polynôme défini sur un intervalle $I$ tel que

$$\forall x \in I,\ f(x) = 0.$$

Alors tous les coefficients de $f$ sont nuls.

**Démonstration 2**
On démontre par récurrence la proposition $\mathcal{P}_n$ qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}$ :

Pour toute liste $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de $n+1$ réels, $\left(\forall x \in I,\ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0\right) \Longrightarrow (a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0)$.

La proposition $\mathcal{P}_0$ est claire, car pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$ si pour tout $x \in I$ on a $a_0 = 0$ c'est bien que $a_0 = 0$.

Soit $n$ un entier naturel, pour lequel $\mathcal{P}_n$. On va démontrer $\mathcal{P}_{n+1}$.

Pour cela on se donne une liste $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ de $n+2$ réels, et pour montrer l'implication, on va supposer que

$$\forall x \in I,\ f(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} = 0.$$

On calcule la fonction dérivée de $f$. On a d'une part

$$\forall x \in I,\ f'(x) = a_1 + \ldots + n a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n,$$

et d'autre part, $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Donc d'après $\mathcal{P}_n$, on a $a_1 = \ldots = n a_n = (n+1) a_{n+1} = 0$, d'où $a_1 = \ldots = a_n = a_{n+1} = 0$. On en déduit que pour tout $x \in I$ on a $f(x) = a_0 + 0x + \ldots + 0x^n + 0x^{n+1} = 0$ d'où $a_0 = 0$. On a bien démontré l'implication, c'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+1}$.

En résumé, on a $\mathcal{P}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$. □

Comme corollaire on a l'unicité des coefficients d'un polynôme :

**Théorème 4**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ un polynôme défini sur $I$.

On suppose que :

- il existe un entier naturel $n$, $n+1$ nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tel que ;

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

- il existe un entier naturel $m$, $m+1$ nombres réels $b_0, b_1, \ldots, b_m$ tel que ;

$$b_m \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Alors

$$n = m \qquad \text{et } \forall k \in \{0, 1, \ldots, m\},\ a_k = b_k.$$

**Démonstration 4**
Pour fixer les idées, on peut supposer que $n \leqslant m$. On pose alors pour tout $k \in \{n+1, \ldots, m\},\ a_k = 0$. on a ainsi

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = f(x).$$

par soustraction,

$$\forall x \in I,\ 0 = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k - \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = \sum_{k=0}^{m} (a_k - b_k) x^k.$$

D'après le théorème précédent, tous les réels $a_k - b_k,\ k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ sont nuls, ce qu'il fallait démontrer. De plus, $n$ est le plus grand indice $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ pour lequel $a_k \neq 0$. Comme les $(a_k)_{k \leqslant m}$ sont égaux aux $(b_k)_{k \leqslant m}$, on a bien $n = m$. □

**Définition 2.**

On appelle **monôme** tout polynôme pour lequel un seul coefficient est non nul.
On appelle **binôme** tout polynôme pour lequel deux coefficients seulement sont non nuls.
On appelle **trinôme** tout polynôme pour lequel trois coefficients seulement sont non nuls.
Et on s'arrêtera là.

### 9.1.4 Degré d'un polynôme

**Définition 3.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ un polynôme **non nul** défini sur $I$. Il existe donc au moins un coefficient de $f$ non nul.
On appelle **degré** du polynôme $f$ le plus grand indice des coefficients non nuls de $f$.
On note $\deg(f)$ le degré de $f$.

**Théorème 5**
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ un polynôme défini sur $I$, de degré strictement positif.
On a $\deg(f') = \deg(f) - 1$.

**Démonstration 5**
Soit $n := \deg(f)$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, les $n+1$ coefficients de $f$. On a $a_n \neq 0$ et

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Or

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = a_1 + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

On a donc $\deg(f') \leqslant n-1$ et comme $n a_n \neq 0$, on a effectivement $\deg(f') = n-1$. □

### 9.1.5 Limites à l'infini

Un polynôme se comporte à l'infini comme son monôme de plus haut degré. C'est ce que dit le théorème suivant :

**Théorème 6**
Soit $f$ un polynôme **non nul** défini sur $\mathbb{R}$ et soit $n > 0$ son degré. Donc il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$, avec $a_n \neq 0$ et

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Alors $f$ on a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n.$$

**Remarque 1.**

- Si $a_n > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $a_n < 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- Si $a_n > 0$ et $n$ pair alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $a_n < 0$ et $n$ pair alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- Si $a_n > 0$ et $n$ impair alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
- Si $a_n < 0$ et $n$ impair alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

**Démonstration 6**
On écrit, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right).$$

On a pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_k}{a_n x^{n-k}} = 0$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1$ et le résultat s'ensuit en $+\infty$.

Le même calcul donne le même résultat en $-\infty$. □

## 9.2 Racines d'un polynôme

Nous avons déjà vu les racines d'un polynôme du second degré au chapitre 5. Généralisons.

**Définition 4.**

Soit $f$ un polynôme défini sur un intervalle $I$.
On appelle **racine** du polynôme $f$ tout nombre réel $a \in I$ tel que $f(a) = 0$.

**Théorème 7**
Soit $f$ un polynôme **non nul** défini sur un intervalle $I$ et soit $n$ son degré.
Alors $f$ admet au plus $n$ racines.

Pour cela, il est pratique de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 8 (Rolle 'n' Rolle)**
Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et soit $m \geqslant 1$ un entier naturel.
Si $f$ s'annule en $m+1$ réels distincts $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$ de $I$, alors $f'$ s'annule en au moins $m$ réels distincts.

**Démonstration 8 (Rolle & Rolle)**
On peut élaborer une démonstration par récurrence en utilisant le théorème de Rolle (10 page 140). On peut aussi être convaincu qu'il y a un piquet de plus que d'intervalles et utiliser le théorème de Rolle dans chacun de ces intervalles. □

Venons-en à la démonstration du théorème 7.
**Démonstration 7**
On démontre par récurrence la proposition $\mathcal{H}_n$ qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ :
Quel que soit le polynôme $f$ de degré $n$, le nombre de racines de $f$ est inférieur ou égal à $n$.

On a clairement $\mathcal{H}_1$, qui dit que toute fonction affine non constante s'annule au plus une fois. On a même démontré, au chapitre 5, $\mathcal{H}_2$ qui dit que tout polynôme du second degré s'annule au plus deux fois.

Soit $n$ un entier naturel non nul, pour lequel $\mathcal{H}_n$. On va démontrer $\mathcal{H}_{n+1}$.

Pour cela on considère un polynôme $f$ de degré $n+1$. Le polynôme $f'$ s'annule au plus $n$ fois d'après $\mathcal{H}_n$. D'après le théorème de Rolle & Rolle, $f$ ne peut pas s'annuler une infinité de fois. Soit $m$ le nombre de racines de $f$, on a $n \geqslant m-1$, toujours d'après le théorème de Rolle & Rolle, soit $m \geqslant n+1$, et ce pour tout polynôme $f$ de degré $n+1$. On a bien démontré $\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$.

En résumé, on a $\mathcal{H}_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}_n$. □

Comme corollaire, on peut dire que si $f$ est un polynôme de degré $n$ qui admet strictement plus de $n$ racines alors c'est le polynôme nul. Formulée telle que, cette implication est vraie – il n'existe pas de polynôme de degré $n$ qui admet strictement plus de $n$ racines – mais sonne un peu bizarre (le polynôme nul n'est pas de degré $n$. Le même problème se pose si $f$ est un polynôme de degré $\leqslant n$, sauf à donner un degré $-\infty$ au polynôme nul. D'où la formulation choisie :

**Théorème 9**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ réels.
Si la fonction polynôme $f$ définie sur un intervalle $I$ par

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

admet au moins $n+1$ racines sur $I$, alors $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Un autre énoncé qui peut être intéressant :

**Théorème 10**
Si un polynôme admet une infinité de racines sur un intervalle $I$, alors c'est le polynôme nul.

Certains polynômes n'ont pas de racine sur $\mathbb{R}$ comme $x \longmapsto x^2+1$. Pour d'autres, on est assuré d'avoir au moins une racine.

**Théorème 11**
Soit $f$ un polynôme de degré $n$ **impair** et défini sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Alors $f$ admet au moins une racine.

**Démonstration 11**
Quitte à changer $f$ en $-f$ on peut supposer $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (remarque 1) De ce fait, il existe au moins un réel $b$ tel que $f(b) > 0$ :

En effet la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donne

$$\forall M > 0,\ \exists A \in \mathbf{R},\ \forall x \in [\ A\ ,\ +\infty\ [\cap D,\ f(x) > M.$$

On prend alors $M := 0$ et $b := A$ par exemple.

De même il existe au moins un réel $a$ tel que $f(a) > 0$.

D'après le TVI, il existe au moins un réel $c \in [\ a\ ,\ b\ ]$ tel que $f(c) = 0$ et $c$ est ainsi une racine de $f$.□

## 9.3 Schéma de Horner

Comment savoir si un nombre $x$ donné est racine d'un polynôme lui aussi donné ? Rien de plus simple : On calcule l'image de $x$ par la fonction polynôme.

Oui mais comment ?

Si on calcule les différentes puissances de $x$, on va refaire les mêmes calculs plusieurs fois. Il vaut mieux garder en mémoire les différentes puissances de $x$ :

$x^2$ puis $x^3$ puis etc.

Le **schéma de Horner** consiste à éviter les répétitions et à minimiser le nombre d'opérations.

**Exemple 2**

Soit $f$ le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x + 1.$$

On écrit $f(x) = ((3x+1)x^2 - 2)x + 1$.
De ce fait, on commence par les parenthèses les plus internes : $3x+1$, puis on multiplie par $x^2$, ce qui donne $3x^3 + x^2$. On retranche 2, ce qui donne $3x^3 + x^2 - 2$. On multiplie par $x$, ce qui donne $3x^4 + x^3 - 2x$. On rajoute enfin 1.
Le programme `Python` ci-contre calcule $f(2) = 53$

```
def horner(x, polynomial):
    resultat = 0
    for coefficient in reversed(polynomial):
        resultat = resultat * x + coefficient
    return resultat

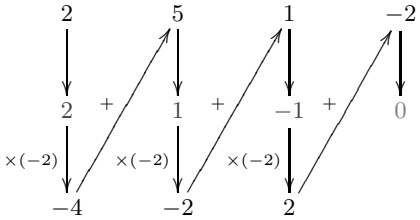
P=[1,-2,0,1,3]
print(horner(2,P))
```

Le schéma de Horner permet d'obtenir plus :

**Exemple 3**

Soit $g$ le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2.$$




Le zéro à droite de la deuxième ligne montre que $g(-2) = 0$. Les coefficients du quotient s'affichent sur le reste de la deuxième ligne. Le quotient est défini sur $\mathbb{R}$ par : $q(x) = 2x^2 + x - 1$.
Autrement dit on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x+2).(2x^2 + x - 1).$$

Le programme `Python` affiche la deuxième ligne.

```
def horner(x, polynomial):
    resultat = 0
    for coefficient in reversed(polynomial):
        resultat = resultat * x + coefficient
    return resultat

P=[1,-2,0,1,3]
print(horner(2,P))
```

Plus généralement, pour le polynôme $p$ défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n,$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, on détermine l'image d'un réel $x_0$ par $p$ en définissant une nouvelle suite de coefficients :

$$\begin{aligned} b_n &:= a_n \\ b_{n-1} &:= a_{n-1} + b_n x_0 \\ &\vdots \\ b_0 &:= a_0 + b_1 x_0. \end{aligned}$$

On a alors $p(x_0) = b_0$.

En effet, pour tout réel $x$,

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x))).$$

Par des substitutions successives, on obtient,

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + \cdots + x_0(a_{n-1} + b_n x_0))) \\ &= a_0 + x_0(a_1 + x_0(a_2 + \cdots + x_0(b_{n-1}))) \\ &\vdots \\ &= a_0 + x_0(b_1) \\ &= b_0. \end{aligned}$$

## 9.4 Exercices

**Exercice 1.**

1. Démontrer que la fonction $f$ définie sur $[\ 1\ ,\ +\infty\ [$ par $\forall x \in [\ 1\ ,\ +\infty\ [,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$, n'est pas un polynôme.
2. Démontrer que la fonction $f$ définie sur $[\ 1\ ,\ 2\ ]$ par $\forall x \in [\ 1\ ,\ 2\ ],\ f(x) = \dfrac{1}{x}$, n'est pas un polynôme.

**Exercice 2.**

On reprend l'exercice 1 page 118. Soit $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par

$$\forall x \neq -2,\ f(x) = \frac{-2x^2 - 3x + 5}{x + 2}.$$

En utilisant le schéma de Horner, déterminer des réels $a$, $b$, $c$ tels que, pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}.$$

**Exercice 3.**

Résoudre l'équation

$$[(x + 10)(x + 11)(x + 12)(x + 13) = 1, \qquad \text{inconnue } x \in \mathbb{R}]\,.$$

**Exercice 4.**

Démontrer que le polynôme $P(x) = 36x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 2x + 1$ est le carré d'un autre polynôme.

**Exercice 5.**

On reprend l'exercice 21 page 190. Soit $f$ la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x^3 - 3x^2 + 13x + 15.$$

1. Montrer que $x = -1$ est racine de ce polynôme.
2. Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.
3. (a) Terminer la factorisation de $f(x)$.
   (b) Résolvez l'inéquation $f(x) > 0$.

**Exercice 6.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
- $2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$ ;
- $2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 3 = 0$ ;
- $2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$.

**Exercice 7.**

Déterminer tous les nombres réels $x$ tels que $(x^2 - 3x)^2 = 4 - 3(3x - x^2)$.

## 9.5 Solutions

**Solution 1**

1. On sait depuis la remarque 1 page 402 que si le degré d'un polynôme est strictement positif, alors sa limite en $+\infty$ est $+\infty$ ou $-\infty$. Donc les seuls polynômes admissibles sont constants donc nuls, ce qui ne convient pas non plus.
2. L'argument précédent n'est plus pertinent. Il va falloir trouver autre chose.
   Une idée : On construit la suite des fonctions dérivées successives sur $[\ 1\ ,\ 2\ ]$ : $f_0 = f$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f_{k+1} = f_k'$. On remarque que $f_{n+1}$ est la fonction nulle si $n := \deg(f)$. Enfin le calcul des fonctions $(f_k)$ pour la fonction inverse montre que ces fonctions ne s'annulent jamais sur $[\ 1\ ,\ 2\ ]$.
   Encore faut-il rédiger tout cela. . . .
   Plus direct : Puisque $f$ est la fonction inverse, on a l'égalité entre polynômes (non nuls)

$$\forall x \in [\ 1\ ,\ 2\ ],\ -xf'(x) = f(x).$$

   On écrit alors (avec $n := \deg(f)$ ),

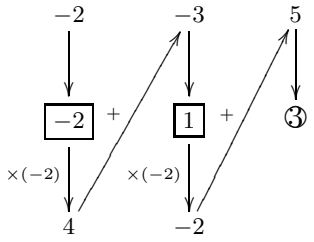
$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad -xf'(x) = -x\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (-k a_k) x^k.$$

L'égalité des deux polynômes entraîne l'égalité de tous les coefficients et en particulier, $a_n = -na_n$ soit $(n+1)a_n = 0$ ce qui n'est pas possible puisque $n$ est le degré de $f$.

**Solution 2**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -2x^2 - 3x + 5.$$




On en déduit que $\forall x \neq -2,\ f(x) = \boxed{-2}x + \boxed{1} + \dfrac{3}{x+2}$.

**Solution 3**

On pose $t = 2(x+13) - 3$ soit $x = \dfrac{t+3}{2} - 13$.

Donc $(x+10)(x+11)(x+12)(x+13) = 1 \Leftrightarrow (\frac{t-3}{2})(\frac{t-1}{2})(\frac{t+1}{2})(\frac{t+3}{2}) = 1 \Leftrightarrow (t-3)(t-1)(t+1)(t+3) = 16 \Leftrightarrow t^4 - 10t^2 - 7 = 0$.

On pose alors $s = t^2$ donc $t^4 - 10t^2 - 7 = 0$ donc $s^2 - 10s - 7 = 0$.

$\Delta = 128 = 2 \times 64$, donc $s_1 = \dfrac{10 + \sqrt{128}}{2} = 5 + 4\sqrt{2}$ et $s_2 = \dfrac{10 - \sqrt{128}}{2} = 5 - 4\sqrt{2} < 0$.

**Solution 4**

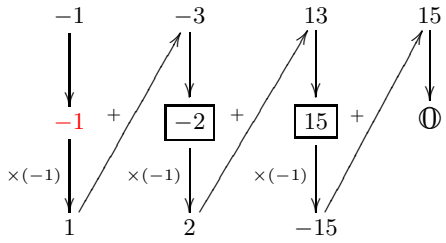
On voit que nécessairement, $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (6x^2 + ax \pm 1)^2$. Le coefficient de degré 3 de $(6x^2 + ax \pm 1)^2$ égale $12a$. On en déduit que $a = 1$. Le coefficient de degré 1 de $(6x^2 + x \pm 1)^2$ égale $\pm 2$. On en déduit que nécessairement $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (6x^2 + x - 1)^2$.

Vérification : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcccccccccc}
(6x^2+x-1)^2 & = & 36x^4 & + & 6x^3 & - & 6x^2 & & & & \\
 & & & + & 6x^3 & + & x^2 & - & x & & \\
 & & & & & - & 6x^2 & - & x & + & 1 \\
\hline
 & = & 36x^4 & + & 12x^3 & - & 11x^2 & - & 2x & + & 1
\end{array}$$

**Solution 5**

Le schéma de Horner répond aux deux premières questions :




On a donc bien $f(-1) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)(-x^2 - 2x + 15)$.

On peut achever la factorisation en trouvant les racines du polynôme du second degré :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -(x+1)(x-3)(x+5).$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-(x+1)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $(x-3)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x+5)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

La solution se lit sur la dernière ligne du tableau : $\mathscr{S} = ]-\infty\ ,\ -5\ [ \cup ]-1\ ,\ 3\ [$.

**Solution 6**

- On pose $t := \sin x$. On est amené à résoudre l'équation $2t^3 - 17t^2 + 7t + 8 = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$. Elle admet $t_0 := 1$ comme racine « évidente ».
  Un schéma de Hörner permet d'obtenir la factorisation : $2t^3 - 17t^2 + 7t + 8 = (t-1)(2t^2 - 15t - 8)$.
  Les solutions de l'équation $2t^2 - 15t - 8 = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ sont $t_1 := -\dfrac{1}{2}$ et $t_2 := 8$.
  L'équation $\sin x = t_0$ admet pour solutions $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.
  L'équation $\sin x = t_1$ admet pour solutions $-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.
  L'équation $\sin x = t_2$ n'admet pas de solution.
- On pose $t := \cos x$. On est amené à résoudre l'équation $2t^3 - 7t^2 + 3 = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.
  On étudie les variations de la fonction $f\ :\ t \in [-1\ ,\ 1] \longmapsto 2t^3 - 7t^2 + 3$. Sa dérivée est définie par $f'(t) = 6t^2 - 14t$. Elle s'annule uniquement en zéro (car $\frac{7}{3} \notin [-1\ ,\ 1]$.

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $20$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-8$ |
| $f(x)$ | $-6$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-2$ |

  D'après le tableau de variations – et le théorème des valeurs intermédaiaires – l'équation

$$[\ f(t) = 0;\ \text{ inconnue } t \in [-1\ ,\ 1]\ ],$$

  admet deux solutions $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$. Il existe donc deux réels $x_1 \in \left]\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right[$ et $x_2 \in \left]0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ tels que $\sin x_1 = t_1$ et $\sin x_2 = t_2$. De ce fait,

$$\boxed{\mathscr{S} = \{\ x_1 + 2k\pi\ ,\ -x_1 + 2k\pi\ ,\ x_2 + 2k\pi\ ,\ -x_2 + 2k\pi\ \mid\ k \in \mathbb{Z}\ \}}$$

- On a pour tout réel $x$, $2\sin^3 x+\cos^2 x-5\sin x-3 = 2\sin^3 x-\sin^2 x-5\sin x-2$. On pose $t := \sin x$. On est amené à résoudre l'équation $2t^3 - t^2 - 5t - 2 = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$. Elle admet $t_0 := -1$ comme racine « évidente ». On en déduit la factorisation

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 2t^3 - t^2 - 5t - 2 = (t+1)(2t^2 - 3t + 2).$$

Les solutions de l'équation $2t^2 - 3t + 2 = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ sont $t_1 := -\dfrac{1}{2}$ et $t_2 := 2 \notin [-1\ ,\ 1]$.
L'équation $\sin x = t_0$ admet pour solutions $-\pi 2 + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$.
L'équation $\sin x = t_1$ admet pour solutions $-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\quad \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.
L'équation $\sin x = t_2$ n'admet pas de solution.

**Solution 7**
On pose $t := x^2 - 3x$. On est amené à résoudre l'équation $t^2 - 3t - 4 = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.
Elle admet $-1$ comme solution « évidente » et 4 grâce au produit des racines.

On résout désormais les deux équations $x^2 - 3x = -1$ et $x^2 - 3x = 4$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. La première admet deux racines $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. La seconde – qui a un air de déjà vu – admet les deux racines $-1$ et 4. En fin de compte,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ -1\ ,\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\ ,\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\ ,\ 4 \right\}}$$

## 9.6 Travaux dirigés

**Travaux dirigés 2 (Alignements sur une cubique)**
Les cubiques sont les courbes du troisième degré. Elles ont des propriétés fascinantes qui ont des applications en arithmétique et en cryptographie.

On appelle point d'inflexion d'une fonction $f$, un point de la représentation graphique de $f$ dont l'abscisse $x_0$ vérifie :

- $f''(x_0) = 0$.
- $f''$ change de signe en $x_0$.

la fonction $f''$ étant la dérivée de $f'$.

Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x$. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $g$.

1. Écrire $g(x)$ sous forme factorisée.
2. Étudier les variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'abscisse et l'ordonnée du point d'inflexion de $g$.

On considère sur $\mathcal{C}$ les points $M_1$, $M_2$, $N_1$, $N_2$ d'abscisses respectives 0, 1, 2 et 3.

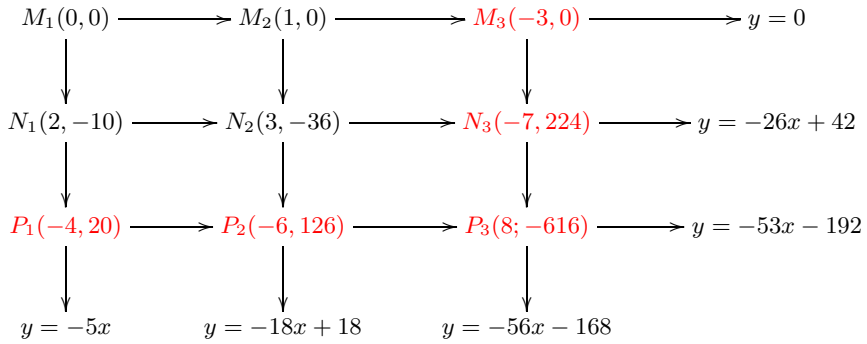
4. Écrire une équation de la droite $(M_1M_2)$.
5. Démontrer que la droite $(M_1M_2)$ recoupe $\mathcal{C}$ en un troisième point $M_3$. Donner les coordonnées de $M_3$.
6. De même, démontrer que la droite $(M_1N_1)$ recoupe $\mathcal{C}$ en un troisième point $P_1$. Donner les coordonnées de $P_1$.
7. Démontrer que $y = -26x + 42$ est une équation de la droite $(N_1N_2)$.
8. En déduire que 2 et 3 sont des racines de l'équation $g(x) = -26x + 42$.

9. Démontrer que la droite $(N_1N_2)$ recoupe $\mathcal{C}$ en un troisième point $N_3$. Déterminer l'abscisse puis l'ordonnée de $N_3$.
10. Calculer la somme des abscisses des points d'intersection de $(M_1M_2)$ et $\mathcal{C}$. Faire le même travail avec les droites $(M_2N_2)$ et $(N_1N_2)$.
11. De même, démontrer que la droite $(M_2N_2)$ recoupe $\mathcal{C}$ en un troisième point $P_2$. Donner les coordonnées de $P_2$.
12. De même, démontrer que la droite $(P_1P_2)$ recoupe $\mathcal{C}$ en un troisième point $P_3$. Donner les coordonnées de $P_3$.
13. Vérifier que les points $M_3, N_3$ et $P_3$ sont alignés.

---

1. On a $g(x) = x(1-x)(3+x)$.
2. On a $g'(x) = -3x^2 - 4x + 3$. On calcule $\Delta = 16 + 4 \times 3 \times 3 = 4 \times 13 > 0$. Les racines de $g'$ sont $x_1 = \dfrac{4+2\sqrt{13}}{-6} = \dfrac{-2-\sqrt{13}}{3} < 0$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{13}}{3} > 0$. Donc $g'(x)$ est positive sur $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$ et négative sinon.

   Donc la fonction $g$ est décroissante sur $]\ -\infty\ ,\ x_1\ ]$, croissante sur $]\ x_1\ ,\ x_2\ ]$ et décroissante sur $]\ x_2\ ,\ +\infty\ [$.
3. On a $g''(x) = -6x - 4$ qui s'annule pour $x_0 = -\frac{2}{3}$ et change de signe en $x_0$. Donc $x_0$ est l'abscisse de l'unique point d'inflexion de $g$. De plus $g(x_0) = \dfrac{8}{27} - 2 \times \dfrac{4}{9} - 3 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{8-24-54}{27} = -\dfrac{70}{27}$.
4. On a $M_1(0,0)$. $y = 0$.
5. On résout l'équation $g(x) = 0 = x(1-x)(3+x)$. C'est une équation produit. Les solutions $x = 0$ et $x = 1$ donnent les points $M_1$ et $M_2$ respectivement. La troisième solution $x = -3$ donne $M_3(-3, 0)$.
6. On a $N_1(2, -10)$, $y = -5x$ est une équation de la droite $(M_1N_1)$. En résolvant $g(x) = 5x$ On trouve comme troisième point $P_1(-4, 20)$.
7. On a $N_1(2; -10)$. Or $-26 \times 2 + 42 = -52 + 42 = -10 = y_{N_1}$. Donc les coordonnées de $N_1$ vérifient l'équation $y = -26x + 42$. De même, on trouve $N_2(3; -36)$. Or $-26 \times 3 + 42 = -78 + 42 = -36 = y_{N_2}$. Donc les coordonnées de $N_2$ vérifient l'équation $y = -26x + 42$. Donc la droite d'équation $y = -26x + 42$ passe par $N_1$ et $N_2$, ce qu'il fallait vérifier.
8. Les coordonnées de $N_1$ et $N_2$ vérifient à la fois $g(x) = y$ puisque ces deux points appartiennent à $\mathcal{C}$ et $y = -26x + 42$ puisque ces points appartiennent à la droite $(N_1N_2)$. On en déduit $g(x) = y = -26x + 42$, soit en raccourci $g(x) = -26x + 42$.
9. On factorise $g(x) + 26x - 42 = -(x-3)(x-2)(x+7)$. On obtient ainsi $N_3(-7, 224)$.
10. On trouve $-2$ dans les trois cas.
11. On trouve $y = -18x + 18$ comme équation de la droite $(M_2N_2)$. On factorise $g(x) + 18x - 18 = -(x-3)(x-1)(x+6)$. D'où $P_2\left(-6\ ,\ 126\right)$.
12. On trouve $y = -53x - 192$ comme équation de la droite $(P_1P_2)$. On factorise $g(x) + 53x + 192 = -(x-8)(x+4)(x+6)$. D'où $P_3(8, -616)$.
13. On a $M_3(-3, 0)$ et $N_3(-7, 224)$. Le coefficient directeur est $m = \dfrac{224-0}{-7+3} = -56$. Une équation de la droite $(M_3N_3)$ est donc $y = -56x + p$. En prenant les coordonnées de $M_3$, on obtient $0 = -56 \times (-3) + p$ soit $p = -168$. Une équation de la droite $(M_3N_3)$ est donc $y = -56x - 168 = -56(x+3)$. Les coordonnées de $N_3$ vérifient $-56(x+3) = -56 \times (-7+3) = -56 \times (-4) = 224$. Les trois points $M_3, N_3$ et $P_3$ sont donc bien alignés.




## 9.7 Problèmes

**Problème 14**

Soit deux fonctions $f$ et $g$. On dit que le nombre réel $c$ est un point fixe réel de $f$ si $f(c)=c$. On dit que $f$ et $g$ sont commutables si $f(g(x))=g(f(x))$ pour tout nombre réel $x$.

1. Soit $f(x)=x^2-2$. Déterminer tous les points fixes réels de $f$.
2. Soit $f(x)=x^2-2$. Déterminer toutes les fonctions polynômes du troisième degré $g$ pour lesquelles $f$ et $g$ sont commutables.
3. Soit $p$ et $q$ deux fonctions commutables à valeurs réelles. Si $2[q(p(x))]^4+2=[p(x)]^4+[p(x)]^3$ pour tout réel $x$, démontrer que $q$ n'admet aucun point fixe.

**Correction 14**

1. On cherche les nombres réels $c$ tels que $f(c)=c$, c'est-à-dire $c^2-2=c$, ou $c^2-c-2=0$, ou $(c-2)(c+1)=0$. Donc $c=2$ ou $c=-1$. Les points fixes réels sont 2 et $-1$.
2. Soit $g(x)=ax^3+bx^2+dx+e$, $a,b,c$ et $d$ étant des coefficients réels et $a\neq 0$ (puisque $g$ est un polynôme du 3ème degré). Supposons que $f$ et $g$ sont commutables (c'est-à-dire que $f(g(x))=g(f(x))$ pour tous les nombres réels $x$). Or :

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= f(ax^3+bx^2+dx+e)\\ &= (ax^3+bx^2+dx+e)^2-2\\ &= a^2x^6+b^2x^4+d^2x^2+e^2+2abx^5+2adx^4+2aex^3+2bdx^3+2bex^2+2dex-2\\ &= a^2x^6+2abx^5+(b^2+2ad)x^4+(2ae+2bd)x^3+(d^2+2be)x^2+2dex+(e^2-2)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}g(f(x)) &= g(x^2-2)\\ &= a(x^2-2)^3+b(x^2-2)^2+d(x^2-2)+e\\ &= a(x^6-6x^4+12x^2-8)+b(x^4-4x^2+4)+d(x^2-2)+e\\ &= ax^6+(-6a+b)x^4+(12a-4b+d)x^2+(-8a+4b-2d+e)\end{aligned}$$

Puisque $f(g(x)) = g(f(x))$ pour tout réel $x$, les coefficients correspondants doivent être identiques. Donc :

$$a^2 = a \quad (1)$$
$$2ab = 0 \quad (2)$$
$$b^2 + 2ad = -6a + b \quad (3)$$
$$2ae + 2bd = 0 \quad (4)$$
$$d^2 + 2be = 12a - 4b + d \quad (5)$$
$$2de = 0 \quad (6)$$
$$e^2 - 2 = -8a + 4b - 2d + e \quad (7)$$

D'après (1), $a^2 - a = 0$, ou $a(a-1) = 0$, d'où $a = 1$ ou $a = 0$. Puisque $a \neq 0$, alors $a = 1$. On reporte $a = 1$ dans (2). On obtient $2b = 0$, ou $b = 0$. On reporte $a = 1$ et $b = 0$ dans (3). On obtient $0 + 2 \times 1d = -6 \times 1 + 0$, d'où $2d = -6$, ou $d = -3$.

On reporte $d = -3$ dans (6). On obtient $-6e = 0$, ou $e = 0$. On peut vérifier que $a = 1, b = 0, d = -3$ et $e = 0$ satisfont aux équations (4), (3)et (7). Donc $g(x) = 1x^3 + 0x^2 + (-3)x + 0$, ou $g(x) = x^3 - 3x$ est le seul polynôme du 3e degré pour lequel $f$ et $g$ sont commutables. (On peut vérifier que $(x^3 - 3x)^2 - 2 = (x^2 - 2)^3 - 3(x^2 - 2)$ en développant et en réduisant.)

3. On cherche un point fixe réel $c$ de la fonction $q$, c'est-à-dire un nombre réel $c$ tel que $q(c) = c$. Puisque $p$ et $q$ sont commutables, alors $p(q(x)) = q(p(x))$ pour tout réel $x$. Donc $p(q(c)) = q(p(c))$. Puisque $q(c) = c$, cette équation devient $p(c) = q(p(c))$. Puisque l'identité donnée est vérifiée par toutes les valeurs possibles de $x$, elle est vérifiée par $x = c$. Donc : $2[q(p(c))]^4 + 2 = [p(c)]^4 + [p(c)]^3$ soit $2[p(c)]^4 + 2 = [p(c)]^4 + [p(c)]^3$ (d'après l'équation ci-haut) $[p(c)]^4 - [p(c)]^3 = -2$. Soit $u = p(c)$. Pour obtenir une contradiction, on démontre que l'équation $u^4 - u^3 = -2$ n'admet aucune solution réelle.

   On pose $F(u) = u^4 - u^3 + 2$. On a $F'(u) = u^2(4u - 3)$. La fonction $F'$ s'annule en $u = \frac{3}{4}$. La fonction $F$ admet un minimum en $u = \frac{3}{4}$, minimum égal à
   $F(\frac{3}{4}) = \dfrac{81 - 4 \times 27 + 512}{256} = \dfrac{485}{256} > 0$. L'équation $q(c) = c$ n'admet donc aucune solution réelle. Donc, la fonction $q$ n'admet aucun point fixe.

**Problème 15 (Inégalités de Huygens)**

Soit $a$ et $b$ deux nombres strictement positifs.

On considère $m(a,b) = \left(\dfrac{2a+b}{3}\right)^3$ et $M(a,b) = a^2 b$.

1. Calculer $m(b,b)$ et $M(b,b)$.
2. En déduire une factorisation du polynôme $P(x) = 27(M(x,1) - m(x,1))$.
3. Calculer la valeur de chacun des facteurs lorsque $x = 1$.
4. En déduire une nouvelle factorisation du polynôme $P(x)$.
5. Comparer les deux nombres $m(x,1)$ et $M(x,1)$.
6. Comparer les deux nombres $m(a,b)$ et $M(a,b)$.

Soit $f$ la fonction qui à tout $x$ de $\left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ \right[$, associe $f(x) = 2 \times \sin x + \tan x - 3x$.

7. Démontrer que 1 est racine du polynôme $Q(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$.
   En déduire une factorisation du polynôme $Q$.
   Achever la factorisation du polynôme $Q$.

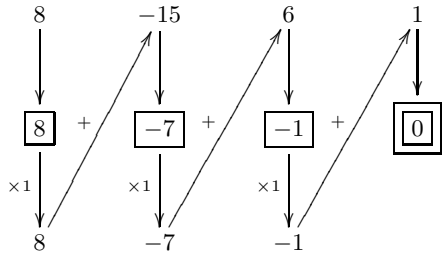
8. Étudier les variations de $f$.
9. En déduire que pour $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$,
$$x \leqslant \frac{2\sin x + \tan x}{3}.$$
10. Démontrer que pour tout réel positif $x$,
$$\frac{8\sin x - \sin(2x)}{6} \leqslant x.$$

Ces inégalités ont été démontrées par Christiaan Huygens (1629-1695) en 1652 pour encadrer $\pi$.

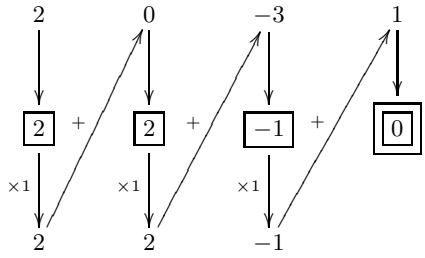
12. En calculant $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer des valeurs exactes pour $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
13. Quel encadrement obtient-on ainsi pour $\pi$ ?

**Correction 15 (Inégalités de Huygens)**

1. On trouve simplement $m(b,b) = M(b,b) = b^3$.
2. On a $27m(x,1) = (2x+1)^3 = 8x^3+12x^2+6x+1$. Donc $27(M(x,1)-m(x,1)) = -(8x^3-15x^2+6x+1)$. D'après la question précédente, $x = 1$ est racine du polynôme $8x^3 - 15x^2 + 6x + 1$ qui se factorise en $(x-1)R(x)$. Le polynôme $R(x)$ se détermine rapidement par la méthode de Horner, ou par toute autre méthode : $R(x) = 8x^2 - 7x + 1$.

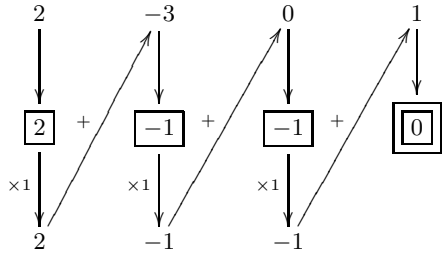



3. Lorsque $x = 1$ chacun des facteurs est nul. Donc 1 est racine de $R$, qui se factorise en $R(x) = (x-1)(8x+1)$.
4. Finalement $P(x) = -(x-1)^2(8x+1)$
5. Donc lorsque $x > 0$, $P(x) \leqslant 0$ et donc $m(x,1) \leqslant M(x,1)$.
6. On pose $x = \frac{a}{b}$. On a, d'après la question précédente, $m(x,1) \leqslant M(x,1)$, soit
$$\left(\frac{2\frac{a}{b}+1}{3}\right)^3 \leqslant \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$
On trouve donc le résultat en multipliant les deux membres par $b^3$.
7. On a $Q(t) = (t-1)(2t^2+2t-1)$.




.

On a $Q(t) = (t-1)(2t^2-t-1)$.




Comme $2t^2-t-1$ admet 1 comme racine, on peut factoriser par $t-1$ : $2t^2-t-1 = (t-1)(2t+1)$. Finalement, $Q(t) = (t-1)^2(2t+1)$.

8. La fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $\left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \\ &= \frac{2\cos^3 x + 1 - 3\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{Q(\cos x)}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

En posant $t = \cos x$, on a $t > 0$ puisque $t \in \left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$. On a donc $Q(t) \geqslant 0$ et par suite $f'(x) \geqslant 0$. On en déduit donc que $f$ est croissante sur l'intervalle $\left[\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$.

9. On en déduit que pour $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $f(0) \leqslant f(x)$, soit $0 \leqslant 2\sin x + \tan x - 3x$, soit encore $3x \leqslant 2\sin x + \tan x$, d'où le résultat.

10. En s'inspirant des questions précédentes, on pose, pour tout réel positif $x$, $g(x) = 8\sin x - \sin(2x) - 6x$. La fonction $g$ est dérivable sur l'intervalle $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8\cos x - 2\cos(2x) - 6 = 8\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) - 6 \\ &= 8\cos x - 4\cos^2 x - 4 = -4(\cos x - 1)^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $g$ est décroissante sur l'intervalle $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$. En particulier on a pour tout réel positif $x$, $g(0) \geqslant g(x)$, ce qui donne rapidement le résultat cherché.

11. On a $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$. On en déduit

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Enfin $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2} = \dfrac{8-2\sqrt{12}}{4} = 2-\sqrt{3}$.

12. En spécifiant $x := \dfrac{\pi}{12}$ dans l'encadrement

$$\frac{8\sin x - \sin(2x)}{6} \leqslant x \leqslant \frac{2\sin x + \tan x}{3},$$

on obtient déjà

$$4\sqrt{6}-4\sqrt{2}-1 \leqslant \pi \leqslant 2\sqrt{6}-2\sqrt{2}+8-4\sqrt{3},$$

ce qui donne à $10^{-4}$ près,

$$\boxed{3,1411 < \pi < 3,1424}$$

**Problème 16 (De la suite dans les idées 4)**
Ce problème est conçu pour servir de suite aux problèmes 2 page 130 (cours de seconde), 5 page 163 et 6 page 163.

On cherche à exprimer le nombre $x_0$ à l'aide de radicaux, en résolvant – à l'aide de la méthode de Descartes – l'équation

$$x^4-2x-1=0 \tag{9.1}$$

dans $\mathbb{R}$, sachant que $x_0$ en est la solution positive. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-2x-1$. Pour cela on cherche à factoriser $f(x)$ sous la forme $x^4-2x-1=(x^2+mx+n)(x^2+sx+p)$.

1. Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que (9.1) admet deux solutions réelles dont une seule est strictement positive.
2. Démontrer que nécessairement, $m^2=n-\frac{1}{n}$ et $\frac{2}{m}=n+\frac{1}{n}$.
3. En déduire que $w=m^2$ est solution de
$$w^3+4w-4=0 \tag{9.2}$$
4. On pose – suivant la méthode de Cardan – $w=u+v$.
Vérifier que
$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+4)-4=0 \tag{9.3}$$
5. On impose que le produit $uv$ soit égal à $-\frac{4}{3}$. Démontrer que $u^3$ et $v^3$ sont solutions de
$$T^2-4T-\frac{64}{27}=0 \tag{9.4}$$
6. En déduire que $w=\sqrt[3]{2+\frac{2\sqrt{129}}{9}}-\sqrt[3]{-2+\frac{2\sqrt{129}}{9}}$ est une racine réelle de (9.2). Calculer $m=-\sqrt{w}$ et le $n$ correspondant.
7. Résoudre avec des radicaux l'équation
$$x^2+mx+n=0 \tag{9.5}$$
En déduire que
$$x_0=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{2+\frac{2\sqrt{129}}{9}}-\sqrt[3]{-2+\frac{2\sqrt{129}}{9}}}}{2}+\frac{\sqrt{\frac{4}{\sqrt{\sqrt[3]{2+\frac{2\sqrt{129}}{9}}-\sqrt[3]{-2+\frac{2\sqrt{129}}{9}}}}-\sqrt[3]{2+\frac{2\sqrt{129}}{9}}-\sqrt[3]{-2+\frac{2\sqrt{129}}{9}}}}{2}.$$

**Correction 16 (De la suite dans les idées 4)**
1. On a pour tout réel $x$, $f'(x)=4t^3-2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Puisque $f(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}) < 0$ et que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (9.1) admet une unique solution $x_1$ sur $]-\infty\ ,\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\ [$ et une unique solution sur $[\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\ ,\ +\infty\ [$. Plus précisément, sur l'intervalle $]-\infty\ ,\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\ ]$ on a $f(0) = -1$ ce qui entraîne d'après le tableau de variations plus haut que $x_1 < 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

2. En développant $(x^2+mx+n)(x^2+sx+p)$ on obtient

$$(x^2+mx+n)(x^2+sx+p) = x^4+(m+s)x^3+(n+p+ms)x^2+(mp+ns)x+np.$$

L'unicité des coefficients d'une fonction polynôme entraîne que

$$\left\{\begin{array}{rcl} m+s &=& 0\\ n+p+ms &=& 0\\ mp+ns &=& -2\\ np &=& -1 \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{rcl} s &=& -m\\ p &=& -\frac{1}{n}\\ n-\frac{1}{n}-m^2 &=& 0\\ m(p-n) &=& m(-\frac{1}{n}-n) \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{rcl} m^2 &=& n-\frac{1}{n}\\ \\ \frac{2}{m} &=& n+\frac{1}{n} \end{array}\right.$$

3. En additionnant les égalités précédentes, on obtient

$$2n = \frac{2}{m}+m^2 \tag{9.6}$$

et en les soustrayant

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{m}-m^2 \tag{9.7}$$

En effectuant le produit de ces deux égalités, on trouve

$$4 = \left(\frac{2}{m}\right)^2 - m^4.$$

En multipliant les deux membres par $m^2$ puis en remplaçant $m^2$ par $w$, on obtient bien l'égalité (9.2).

4. On développe $(u+v)^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$.
On en déduit que $w^3+4w-4 = (u+v)^3+4(u+v)-4 = u^3+v^3+3uv(u+v)+4(u+v)-4 = u^3+v^3+(3uv+4)(u+v)-4$. Le résultat en découle.

5. En choisissant $uv = -\frac{4}{3}$, on a d'une part $u^3v^3 = -\frac{4^3}{3^3} = -\frac{64}{27}$ et d'autre part $(3uv+4)(u+v) = 0$ (c'est pour cela que ce choix a été effectué) et par conséquent $u^3+v^3-4 = 0$. Les nombres réels $u^3$ et $v^3$ ont donc pour produit $-\frac{64}{27}$ et pour somme 4. Ils sont donc solution de (9.4).

6. On résout (9.4) : On pose $\Delta = (-4)^2 + 4 \times \dfrac{64}{27} = \dfrac{688}{27} = 16 \times \dfrac{43}{27}$. L'équation admet deux solutions de signes opposés. Les rôles de $u$ et $v$ étant symétriques, on peut, pour fixer les idées, choisir $u^3 > 0$. Donc

$$u^3 = 2 + \frac{2}{9}\sqrt{129} \qquad \text{et} \qquad u = \sqrt[3]{2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}}, \text{ de même}$$

$$v^3 = -\left(-2 + \frac{2}{9}\sqrt{129}\right) \qquad \text{et} \qquad v = -\sqrt[3]{-2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}}, \text{ en additionnant :}$$

$$\boxed{w = u + v = \sqrt[3]{2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}} - \sqrt[3]{-2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}}.}$$

On choisit – pour avoir des racines réelles – pour $m$ la racine carrée négative de $w$, soit $m = -\sqrt{\sqrt[3]{2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}} - \sqrt[3]{-2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}}}$. Enfin d'après (9.7),

$$n = \frac{1}{m} + \frac{w}{2} = -\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}} - \sqrt[3]{-2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}}}} + \frac{\sqrt[3]{2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}} - \sqrt[3]{-2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}}}{2}.$$

7. On calcule $\Delta = m^2 - 4n = w - \dfrac{4}{m} - 2w = -w - \dfrac{4}{m} = -w + \dfrac{4}{\sqrt{w}}$. On a

$$\begin{aligned} \Delta\left(w + \frac{4}{\sqrt{w}}\right) &= \frac{16}{w} - w^2 = \frac{16 - w^3}{w} = \frac{16 - 4 + 4w}{w} \quad \text{d'après (9.2)} \\ &= \frac{12 + 4w}{w} > 0 \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $w + \dfrac{4}{\sqrt{w}}$, que $\Delta > 0$. L'équation admet deux solutions de signes opposés puisque $n < 0$. En effet

$$\begin{aligned} n\left(\frac{w}{2} + \frac{1}{\sqrt{w}}\right) &= \frac{w^2}{4} - \frac{1}{w} \\ &= \frac{w^3 - 4}{4w} \\ &= \frac{4 - 4w - 4}{4w} \quad \text{d'après (9.2)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Maintenant, $x_0$ est la plus grande des deux racines, celle qui est positive. L'autre est $x_1$.
Donc $x_0 = \dfrac{-m + \sqrt{\Delta}}{2}$. Soit

$$x_0 = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}} - \sqrt[3]{-2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}}}}{2} + \frac{\sqrt{\dfrac{4}{\sqrt{\sqrt[3]{2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}} - \sqrt[3]{-2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}}}} - \sqrt[3]{2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}} - \sqrt[3]{-2 + \frac{2\sqrt{129}}{9}}}}{2}.$$

Bien entendu, on aurait pu travailler avec des valeurs approchées, mais ce n'était pas l'idée. Pour information : $w = 0,847707598$, $m = -0,920710377$, $n = -0,662264078$ et $\Delta = 3,496763910$, valeurs approchées à $10^{-9}$ près.

# Chapitre 10

# Loi binomiale

## Sommaire


**10.1 Variable aléatoire réelle . . . . . 420**
**10.2 Paramètres d'une variable aléatoire . . . . . 421**
**10.3 Épreuve de Bernoulli. Loi binomiale . . . . . 426**
**10.4 Fluctuation ; prise de décision . . . . . 435**
**10.5 Exercices . . . . . 436**
**10.6 Solutions . . . . . 447**
**10.7 Problèmes . . . . . 464**

# 10.1 Variable aléatoire réelle

## 10.1.1 Définition

**Définition 1.**

Soit $\Omega$ l'univers d'une expérience aléatoire (i.e. l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire).
On appelle **variable aléatoire** sur $\Omega$ toute fonction numérique définie sur $\Omega$.

**Remarques 1.**

1. Attention, un même réel peut être associé à plusieurs issues. Autrement dit, dans ce cas, cette fonction n'est pas injective.
2. Il s'agit d'un vocabulaire daté. Il est clair qu'une variable aléatoire n'est pas une variable : c'est une fonction. Par ailleurs elle est parfaitement définie : il n'y a rien d'aléatoire dans sa définition.

**Notation 1.**

Soit $k$ un nombre réel et $X$ une variable aléatoire définie sur un univers $\Omega$. On note $(X = k)$ l'événement c'est-à-dire le sous-ensemble de $\Omega$,

$$(X = k) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}.$$

Autrement dit, $(X = k)$ est l'ensemble de tous les antécédents de $k$ par la variable aléatoire $X$.

**Exemple 1**
Soit $X$ une variable aléatoire associée à une expérience aléatoire. Cette variable permet de définir des événements. Par exemple, s'il s'agit d'un jeu aléatoire dans lequel on gagne des points,

- $(X = 5)$ est l'événement réalisé lorsque à la fin de la partie, on a gagné 5 points.
- $(X \leqslant 10)$ est l'événement réalisé lorsqu'à la fin de la partie on a 10 points ou moins.

**Exemple 2**
On lance un dé à six faces.

- Si le résultat est 6, on gagne 2 €.
- Si le résultat est pair et inférieur strictement à 6 on ne gagne ni ne perd rien.

– Sinon on perd 1 €.

Soit $X$ la variable aléatoire égale au gain algébrique (c'est-à-dire positif ou négatif) du joueur. On a alors :

| Issue | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur de X | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 2 |

On remarque que l'événement $(X = 2)$ est le même que l'événement « obtenir un 6 » . De même, l'événement $(X = 0)$ est le même que l'événement « obtenir un 2 ou un 4 ».

### 10.1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On va chercher à mesurer la « taille » des ensembles $(X = k)$. C'est le rôle de la **loi de probabilité**.

**Définition 2.**

Soit $\Omega$ un univers fini et soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$ prenant pour valeurs $x_1, \ldots, x_n$. La loi de probabilité de la variable $X$ est la **fonction** qui à chaque $x_i$ associe la probabilité que la variable prenne cette valeur ; on note cette probabilité $P(X = x_i)$.

Comme toute fonction, la loi de probabilité peut être décrite de plusieurs façons : par un tableau de valeurs, par un algorithme, etc.

**Exemple 3**

La loi de probabilité de la variable aléatoire de l'exemple 2 est donnée dans le tableau suivant :

| Valeur $x_i$ de $X$ | -1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

## 10.2 Paramètres d'une variable aléatoire

On pourra se rappeler le paragraphe 8.3 page 284 du cours de seconde consacré aux paramètres d'une série statistique.

### 10.2.1 Espérance, variance, écart-type

**Définition 3.**

Soit une loi de probabilité

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

- On appelle **espérance** le réel $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

- On appelle **variance** le réel positif $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\Big(x_i - E(X)\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\Big(x_i - E(X)\Big)^2.$$

- On appelle **écart-type** le réel positif $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Interprétation et repères mnémotechniques :**
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle est l'équivalent en probabilité de ce qu'est la moyenne d'une série statistique en statistiques.
La variance et l'écart-type sont des mesures de dispersion.
La variance peut être vue comme la moyenne des carrés des écarts à la moyenne (rigoureusement : l'espérance des carrés des écarts à l'espérance).

**Exemple 4**
Reprise de l'exemple 2 .

$$E(X) = (-1) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \qquad V(X) = \frac{41}{36} \qquad \sigma(X) = \sqrt{\frac{41}{36}} = \frac{\sqrt{41}}{6}.$$

**Remarques 2.**

- Dans un jeu où $X$ est associé aux gains possibles, $E(X)$ représente le gain moyen que l'on peut espérer. Le jeu est dit **équitable** si $E(X) = 0$.
- Si on réalisait une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, les résultats statistiques (fréquences, moyenne, écart-type) se rapprocheraient des résultats trouvés via le modèle théorique probabiliste (probabilités, espérance, écart-type).

### 10.2.2 Propriétés

Soit $X$ une variable aléatoire. Cette variable $X$ prenant des valeurs réelles, on peut effectuer des opérations sur elle (la multiplier par un réel, lui appliquer une fonction, ...). En reprenant les données de l'exemple précédent, on peut choisir de définir une nouvelle variable aléatoire $Y$ qui est le résultat d'une multiplication des gains algébriques par 2. On écrit alors $Y = 2X$. Et on aura :

| Valeur $y_i$ de Y | -2 | 0 | 4 |
|---|---|---|---|
| $p(Y = y_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

On a alors

$$E(Y) = (-2) \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}.$$

**Théorème 1**
Soit $X$ une variable aléatoire et soient $a$ et $b$ deux réels. On a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad \text{et} \qquad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

**Démonstration 1**

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= (ax_1+b) \times p_1 + (ax_2+b) \times p_2 + \ldots + (ax_n+b) \times p_n \\ &= (ax_1p_1 + ax_2p_2 + \ldots + ax_np_n) + (bp_1 + bp_2 + \ldots + bp_n) \\ &= a(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) + b(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) \\ &= aE(X) + b \times 1 \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b - E(aX+b))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b - aE(X) - b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i - aE(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(a(x_i - E(X))\right)^2, \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \times a^2 \times (x_i - E(X))^2 \end{aligned}$$

soit en factorisant par $a^2$,

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= a^2 \times \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - E(X))^2 \\ &= a^2 V(X) \end{aligned}$$ □

**Conséquence :** On a donc aussi $\sigma(aX+b) = \sqrt{V(aX+b)} = \sqrt{a^2 V(X)} = |a|\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X)$

**Théorème 2 (formule de König-Huygens)**
Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Alors on a :

$$V(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2.$$

**Démonstration 2**

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \Big(x_i - E(X)\Big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} p_i x_i E(X) + \sum_{i=1}^{n} p_i \Big(E(X)\Big)^2 \\ &= E(X^2) - 2\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i} x_i \mathbf{E(X)} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p_i} E(X) \times \mathbf{E(X)} \\ &= E(X^2) - \sum_{i=1}^{n} \Big(\mathbf{p_i E(X)} \left(2x_i - E(X)\right)\Big) \\ &= E(X^2) - E(X)\left(\sum_{i=1}^{n} 2p_i x_i - \sum_{i=1}^{n} p_i E(X)\right) \\ &= E(X^2) - E(X)\left(2E(X) - E(X)\sum_{i=1}^{n} p_i\right) \\ &= E(X^2) - E(X)\left(2E(X) - E(X) \times 1\right) \\ &= E(X^2) - E(X) \times E(X) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$ □

**Exemple 5**
Toujours avec l'exemple 2, en posant $Z = X^2$, on a :

| Valeur $z_i$ de $Z$ | 1 | 0 | 4 |
|---|---|---|---|
| $p(Z = z_i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

Donc $E(Z) = 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$.
Ainsi on a :

$$V(X) = E(Z) - \Big(E(X)\Big)^2 = \frac{7}{6} - \Big(-\frac{1}{6}\Big)^2 = \frac{7}{6} - \frac{1}{36} = \frac{41}{36}.$$

On retrouve bien le résultat de l'exemple 4.

### 10.2.3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

**Théorème 3**
Soit $X$ une variable aléatoire réelle, d'espérance mathématique $E(X) = \overline{x}$ et de variance $V(X) = \sigma^2$. Alors,

$$\forall \lambda > 0, \qquad P(|X - \overline{x}| > \lambda\sigma) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}.$$

**Démonstration 3**
Soit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ les différentes images par $X$ et $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $p_k = P(X = x_k)$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
V(X) = \sigma^2 &= \sum_{k=1}^{n} p_k \left(x_k - \overline{x}\right)^2 \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ |x_k - \overline{x}| \geqslant \varepsilon}} p_k \left(x_k - \overline{x}\right)^2 + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ |x_k - \overline{x}| < \varepsilon}} p_k \left(x_k - \overline{x}\right)^2 \\
&\geqslant \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ |x_k - \overline{x}| \geqslant \varepsilon}} p_k \left(x_k - \overline{x}\right)^2 \\
&\geqslant \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ |x_k - \overline{x}| \geqslant \varepsilon}} p_k \varepsilon^2 \\
&\geqslant \varepsilon^2 P(|X - \overline{x}| > \varepsilon),
\end{aligned}$$

puisque $P(|X - \overline{x}| > \varepsilon)$ est exactement $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ |x_k - \overline{x}| \geqslant \varepsilon}} p_k$.

Pour conclure, il suffit de poser $\varepsilon := \lambda\sigma$. □

## 10.3 Épreuve de Bernoulli. Loi binomiale

Dans ce paragraphe, nous allons jouer à pile ou face. Attention, ce ne sera pas toujours avec une pièce et encore moins avec une pièce équilibrée. Des exemples de jeu de pile ou face :

1. Avec un dé à six faces, un succès étant un « 6 », un échec sinon.
2. Un papa un peu distrait [1] va chercher son nouveau-né à la maternité. Il a tricoté un seul ensemble, tout rose. S'il repart avec une fille, c'est un succès. C'est un échec sinon.
3. Un sondeur interroge une personne dans la rue pour connaître son opinion. Une opinion favorable sera un succès. Toute autre réponse (ou non-réponse) sera un échec.
4. Un test ADN consiste à poser une liste de questions à un échantillon d'ADN. Chaque question concerne un segment bien précis. Chaque question peut être considérée comme un jeu de pile ou face.

Toutes ces situations se modélisent raisonnablement de la façon suivante.

### 10.3.1 Épreuve de Bernoulli

**Définition 4.**

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p$ toute épreuve aléatoire admettant exactement deux issues.
– L'une appelée **succès**, dont la probabilité d'apparaître est $p$.
– L'autre appelée **échec**, dont la probabilité d'apparaître est $q := 1-p$.
La loi de Bernoulli est donc résumée dans le tableau suivant (on note 0 l'échec et 1 le succès) :

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $1-p$ | $p$ |

On dit que la variable aléatoire $X$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p$ et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

**Théorème 4**
Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$. Alors :

$$E(X) = p \quad ; \quad V(X) = p \times (1-p) \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p \times (1-p)}.$$

**Démonstration 4**
On a : $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$.
De même : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p^2 = p(1-p)$ □

1. Pléonasme.

### 10.3.2 Loi binomiale

**Définition 5.**

On appelle **schéma de $n$ épreuves de Bernoulli de paramètre** $p$ toute expérience aléatoire consistant à répéter $n$ fois de façon **indépendante** la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p$.
Un résultat d'une telle expérience est une liste de $n$ issues (SE...SSE), où l'on note S pour succès et E pour échec. La variable aléatoire associant à chaque issue le nombre $k$ de succès est appelée **loi binomiale** de **paramètres** $n$ et $p$.

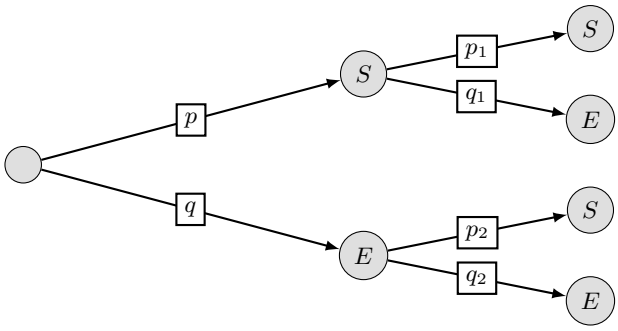
Cette définition est bien jolie, mais un terme n'est pas défini : Que signifie de façon **indépendante** ? Nous avons déjà vu dans le cours de seconde ce qu'étaient deux événements indépendants (définition 3 page 421).

Reprenons les exemples plus haut, en répétant les épreuves de Bernoulli.

1. Avec un dé à six faces, un succès étant un « 6 », un échec sinon. Lorsqu'on répète cette expérience, on sent bien qu'une expérience ne dépend pas des précédentes. Une modélisation par une loi binomiale est pertinente.
2. Ici encore, le sexe d'un bébé ne semble pas dépendre de celui des précédents. Mais à vrai dire, on n'en sait rien. Toutefois une modélisation par une loi binomiale est raisonnable.
3. Là encore, une modélisation par une loi binomiale est raisonnable. Toutefois, un sondeur n'interroge pas deux fois la même personne, donc techniquement, d'une question à l'autre, la population susceptible d'être interrogée a été modifiée.

   Toutes choses égales par ailleurs, un tirage avec remise se modélise bien par une loi binomiale. Un tirage sans remise – c'est le cas d'un sondage – peut se modéliser par une loi binomiale lorsque l'univers est vaste.
4. Un test ADN consiste à poser une liste de questions à un échantillon d'ADN. La probabilité de réponse positive à une question dépend de la question. Outre l'indépendance qui est discutable, les lois de Bernoulli ne sont pas identiques.

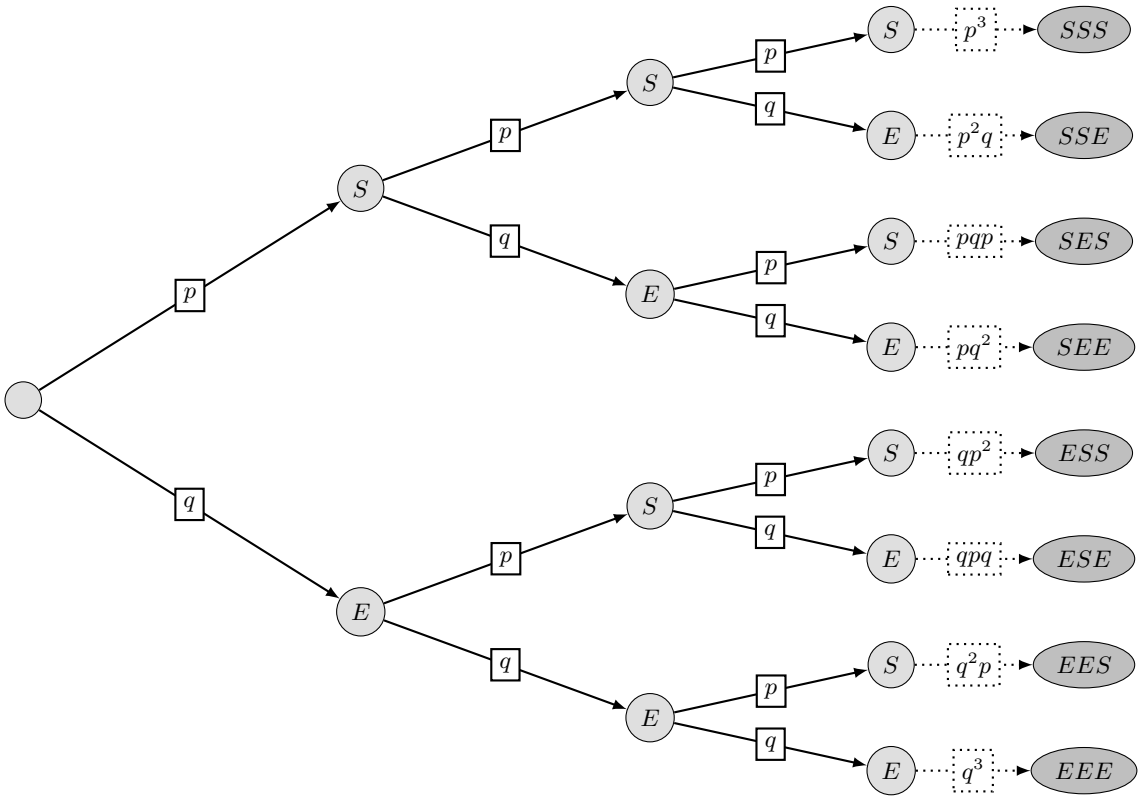
La représentation la plus parlante et la plus courante d'un schéma de $n$ épreuves de Bernoulli est un arbre pondéré :




Les nombres $p_1$ et $q_1 = 1 - p_1$ d'une part et $p_2$ et $q_2 = 1 - p_2$ d'autre part sont des probabilités conditionnelles. $p_1$ est la probabilité d'avoir un deuxième succès sachant qu'on a eu un premier succès.

Dire que les deux épreuves de Bernoulli sont identiques, c'est dire que $p_1 = p_2 = p$ et par conséquent que $q_1 = q_2 = q = 1 - p$. Dire qu'elles sont indépendantes, c'est dire que les probabilités des feuilles sont les produits des probabilités sur les branches qui conduisent à ces feuilles.

Avec trois épreuves identiques et indépendantes, on obtient :




**Remarque 3.**

Chaque chemin qui part de la racine de l'arbre pour aboutir à une feuille est codé par un mot de trois lettres prises dans l'alphabet $\{S, E\}$.

En observant cet arbre, on remarque que pour $0 \leqslant k \leqslant 3$, chaque chemin menant à $k$ succès et par conséquent $3 - k$ échecs a la même probabilité d'apparaître, à savoir $p^k \times (1 - p)^{n-k}$.

**Définition 6** (Coefficient binomiaux)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins aboutissant à $k$ succès exactement (dans le cas d'une répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes). Ce nombre est appelé **coefficient binomial** et se lit « Cas parmi aine » [a]. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est aussi le nombre de mots distincts de $n$ lettres écrits dans l'alphabet $\{S, E\}$ et comportant $k$ fois la lettre S.
On trouve aussi la notation franco-française [b] $C_n^k := \binom{n}{k}$.

*a.* On entend aussi « aine binomial cas ».
*b.* C'est une exagération dans la mesure où cette notation est aussi utilisée en Espagne.

On obtient le théorème suivant :

**Théorème 5**
Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. Alors on a :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

**Exemple 6**
On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces. On s'intéresse au nombre de « 6 » obtenus à l'issue des trois lancers. Le dé est équilibré et n'a pas de mémoire, il est raisonnable de modéliser cette expérience par la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre de « 6 » est ainsi modélisé par une variable aléatoire $X$ qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$.
En utilisant l'arbre précédent, on constate qu'il y a trois chemins qui mènent à 2 succès et 1 échec. Autrement dit, $\binom{3}{2} = 3$. De ce fait, la probabilité d'obtenir exactement deux « 6 » est :

$$p(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72}.$$

Pour une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, la formule des probabilités totales 7 page 426 du cours de second permet d'écrire :

**Théorème 6**

$$\forall p \in [\ 0\ ,\ 1\ ],\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1.$$

### 10.3.3 À la calculatrice, etc

La calculatrice permet de déterminer $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ directement. Dans le tableau ci-dessous on s'intéresse à une variable aléatoire $X$ qui suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in [\ 0\ ,\ 1\ ]$ et avec $k$ entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

| Syntaxe | Touche 2nde, puis var ; dans l'onglet DISTRIB, faire défiler jusqu'à binomFdp( ou binomFRép( |
|---|---|
| $p(X = k)$ | binomFdp : taper la valeur de : n, puis p, puis k |
| $p(X \leqslant k)$ | binomFRép : taper la valeur de : n, puis p, puis k |

Sur un tableur OpenOffice,
la fonction =LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;0) donne $p(X = k)$,
et la fonction =LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;1) donne $p(X \leqslant k)$.

`Geogebra`
Binomiale(n, p, k, false) donne $p(X = k)$,
Binomiale(n, p, k, true) donne $p(X \leqslant k)$,

`Python`
Les coefficients binomiaux se trouvent dans le module `scipy.special`. Il n'est pas interdit de les programmer soi-même.

```
import scipy.special

def loibinomiale(n,k,p):
    return scipy.special.binom(n,k)*(p**k)*(1-p)**(n-k)

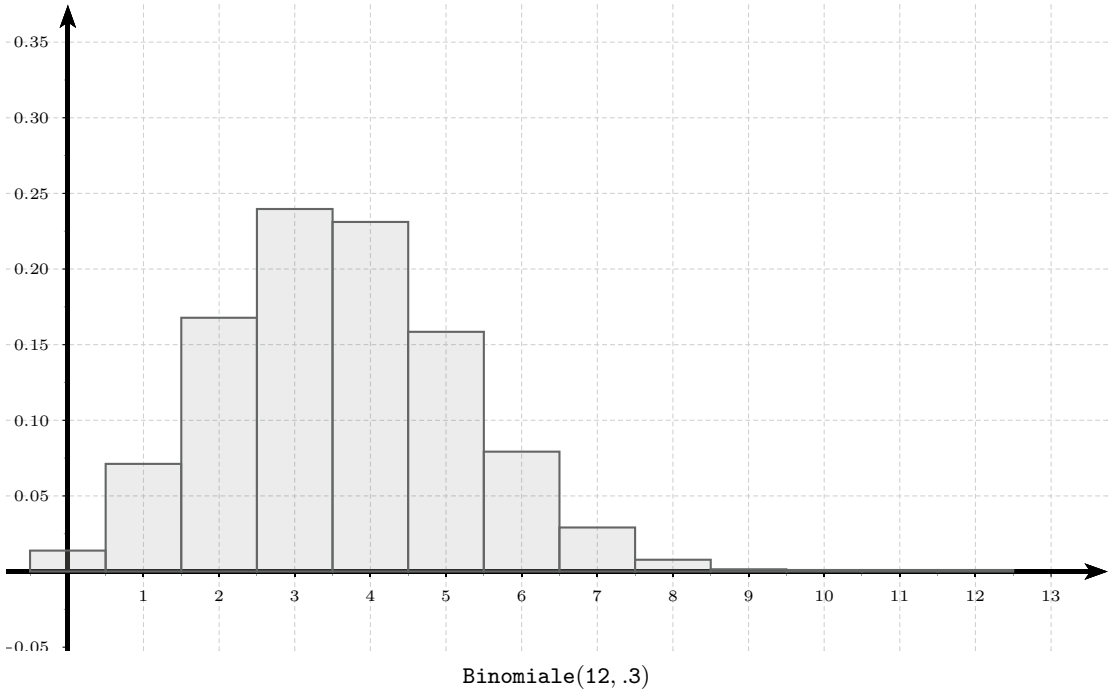
print(loibinomiale(10,5,0.5))
```

### 10.3.4 Représentation graphique

On peut représenter une loi binomiale par un diagramme en bâtons. Pour obtenir l'ensemble des probabilités on peut utiliser un tableur ou une calculatrice.

**Exemple 7 (Représentation de la loi binomiale B(10 ; 0,4) à l'aide d'un tableur)**
Dans la première colonne, on écrit le nombre de réussites ; la syntaxe de la commande "loi binomiale" est la suivante : LOI.BINOMIALE(nombre de succès ; tirages ; probabilité de succès ; cumulative).
En B2 on sélectionne la fonction LOI BINOMIALE, puis on écrit :
= LOI.BINOMIALE (A2 ; 10 ; 0,4 ; FAUX).
On copie ensuite vers le bas.
Pour obtenir le diagramme en bâtons, on sélectionne pour la colonne B le graphique HISTOGRAMME.
(Pour une feuille de calcul OPENOFFICE, on affiche = LOI BINOMIALE (A2 ; 10 ; 0,4 ; 0).)

Geogebra
Binomiale(n, p) donne un histogramme de la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ dont l'interprétation n'est pas immédiate.




## 10.3.5 Coefficients binomiaux

On peut déterminer $\binom{n}{k}$ à l'aide de la calculatrice.

**Exemple 8**
Le coefficient $\binom{6}{4}$ s'obtient ainsi :

– sur Casio : 6 OPTN PROB nCr 4
– sur TI : 6 math PRB Combinaison 4

**Théorème 7**
Pour tout entier $n$ et tout entier $k$ tels que $k \leqslant n$, on a :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. si de plus $k < n$, alors : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Cette dernière égalité est la « formule de Pascal ».

**Démonstration 7**

1. Il y a autant de chemins qui mènent à $k$ succès que de chemins qui mènent à $k$ échecs (c'est-à-dire à $n-k$ succès).
2. Le coefficient $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de chemins qui mènent à $k+1$ succès dans une répétition de $n+1$ épreuves de Bernoulli. À l'issue des $n$ premières épreuves, on a trois possibilités :
   – Soit on a déjà $k+1$ succès ( et il y a $\binom{n}{k+1}$ possibilités ), et il faut que la dernière étape soit un échec ;
   – Soit on a $k$ succès ( et il y a $\binom{n}{k}$ possibilités ), et il faut que la dernière épreuve soit un succès aussi ;
   – dans tous les autres cas il est impossible d'aboutir à $k+1$ succès.

   Finalement, le nombre de chemins cherché est donc bien $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. □

**Application : Le triangle de Pascal**[2] : calcul des coefficients $\binom{n}{k}$.

| $n\backslash p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Chaque nombre est obtenu en additionnant deux nombres de la ligne du dessus : celui de la même colonne, et celui de la colonne précédente.

2. Blaise Pascal (1623-1662) : philosophe et mathématicien français. Il a notamment inventé *la Pascaline*, première machine à calculer mécanique. « Son » triangle était en fait connu des mathématiciens persans du Moyen Âge (X$^{e}$ et XI$^{e}$ siècles), notamment par Omar Khayyam, qui l'utilisait pour développer $(a+b)^n$, ainsi que par les Chinois au XII$^{e}$ siècle...

**Théorème 8**
On a, pour $n$ et $k$ entiers naturels tels que $k \leqslant n$ :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

**Démonstration 8**
On démontre par récurrence la proposition qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\mathcal{P}_n \ : \ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

On a clairement $\mathcal{P}_1$ dans la mesure où $\binom{1}{0} = 1 = \binom{1}{1}$ et $\frac{1!}{0! \times 1!} = 1$ (pour $k = 0$ et $\frac{1!}{1! \times 0!} = 1$ (pour $k = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pour lequel on a $\mathcal{P}_n$. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n+1$. D'après la formule de Pascal (théorème 7) on a

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \\
&= \frac{n!}{(k-1)! \times (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \\
&= k\frac{n!}{k! \times (n-k+1)!} + (n-k+1)\frac{n!}{k! \times (n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k! \times (n-k+1)!},
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait vérifier.

Reste le cas où $k = 0$. On a alors $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ et $\frac{(n+1)!}{k! \times (n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{0! \times (n+1)!} = 1$ ce qui achève la démonstration de $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.

D'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{P}_n$. □

### 10.3.6 Espérance, variance et écart-type

**Théorème 9**
Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. Alors :

$$E(X) = np\,; \qquad V(X) = np(1-p) = npq\,; \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{npq}.$$

Un **lemme**, pour commencer, c'est-à-dire un résultat intermédiaire mais qui a son utilité en soi.

**Lemme 10**
Soit $x \geqslant 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

**Démonstration 10 (Lemme)**
On pose $p := \dfrac{x}{1+x}$. On a $1-p = \dfrac{x}{1+x}$ et $p \in [\ 0\ ,\ 1\ [$. La formule des probabilités totales 7 page 426du cours de seconde nous donne :

$$\begin{array}{lrcl}
 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & = & 1 \\
\text{soit} & \displaystyle(1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k & = & 1 \\
\text{soit} & \displaystyle\frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k & = & 1 \\
\text{soit} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k & = & (1+x)^n
\end{array}$$

Passons aux calculs annoncés.
**Démonstration 9 (Espérance, variance et écart-type)**
On considère le polynôme $f$ défini par $\forall x \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [,\ f(x) = (1+x)^n$. On a

$$\begin{array}{lrcl}
\forall x \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [, & g(x) := xf'(x) = nx(1+x)^{n-1} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k. \\
\text{En particulier pour } x := \dfrac{p}{1-p}, & \displaystyle n\frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-1} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \\
\text{En multipliant par } (1-p)^n, & np & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},
\end{array}$$

ce qui donne bien $E(X) = np$.

De même,

$$\begin{array}{lrcl}
\forall x \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [, & xg'(x) = x\left(n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2}\right) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^k. \\
\text{pour } x := \dfrac{p}{1-p}, & \displaystyle n\frac{p}{1-p}\left(\left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-1} + (n-1)\frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-2}\right) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \\
\text{puis} & np + n(n-1)p^2 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{array}$$

On obtient ainsi,

$$V(X) = np + n(n-1)p^2 - (E(X))^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np(1-q) = npq.$$

# 10.4 Fluctuation ; prise de décision

## 10.4.1 Intervalle de fluctuation

**Théorème 11**
Soit $X$ une variable qui suit une loi binomiale. On note respectivement $a$ et $b$ les deux entiers tels que :

1. $a$ est le plus petit entier tel que $p(X \leqslant a) > 0,025$ ;
2. $b$ est le plus grand entier tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

Alors l'**intervalle de fluctuation** au seuil des 95% de la fréquence de succès sur un échantillon de taille $n$ est :

$$I = \left[ \frac{a}{n} \ , \ \frac{b}{n} \right]$$

**Démonstration 11**
On a $p(X < a) < 2,5\%$ et $p(X > b) < 2,5\%$, ainsi la fréquence de succès dans l'échantillon (c'est-à-dire $\frac{X}{n}$) vérifie :

$$p\left(\frac{a}{n} \leqslant \frac{X}{n} \leqslant \frac{b}{n}\right) \geqslant 95\%.$$

## 10.4.2 Prise de décision

Dans une population, on ne connaît pas toujours le proportion de la population ayant un caractère étudié mais on peut faire une hypothèse sur cette proportion ; c'est-à-dire se fixer une valeur $p$ de cette proportion. On note alors $F_n$ la variable aléatoire égale à la fréquence observée sur un échantillon de taille $n$ de cette population. Il est clair que suivant l'échantillon choisi, $F_n$ ne prendra pas toujours la même valeur, mais on va tenter de déterminer si notre hypothèse est crédible ou pas. D'après la partie précédente, 95% des échantillons ont une fréquence comprise dans $I$, l'intervalle de fluctuation à 95%. On établit la règle de décision suivante :
*« Si la fréquence de l'échantillon n'appartient pas à $I$ (ce qui ne se produit que dans 5% des cas), on rejette l'hypothèse faite sur $p$ avec un risque d'erreur de 5%. »*

**Théorème 12**
Dans une population, on *suppose* (i.e. on fait l'hypothèse) que la proportion de la population ayant un caractère C est $p$. Sur un échantillon de taille $n$, on *constate* que la fréquence de ce caractère C est $f$. De plus, on note $I$ l'intervalle de fluctuation à 95% dans les échantillons de taille $n$, on a donc :
si $f \notin I$, alors on rejette l'hypothèse faite sur $p$ au seuil de risque 5% et sinon on ne rejette pas l'hypothèse.

## 10.5 Exercices

### 10.5.1 Variable aléatoire réelle

**Exercice 1** (Loi d'un dé truqué)**.**

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note $X$ la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de $X$, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de $Y$, et son espérance.

**Exercice 2** (En plein dans le mille!)**.**

Un joueur tire sur une cible de 10 cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne $k$ est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de $X$ ?
2. Le joueur gagne $k$ euros s'il atteint la couronne numérotée $k$ pour $k$ compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

**Exercice 3** (Plus grand nombre tiré)**.**

On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note $X$ le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X$.

**Exercice 4** (Garagiste).

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère $X$ la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0,1 \quad P(X = 1) = 0,3 \quad P(X = 2) = 0,4 \quad P(X = 3) = 0,2.$$

1. On note $Z$ le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de $Z$. On pourra considérer dans la suite que $X$ et $Z$ sont indépendantes.
2. On note $Y$ la variable aléatoire : « nombre de clients satisfaits par jour » . Déterminer la loi de $Y$.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

**Exercice 5** (Analyse de sang).

On cherche à dépister une maladie détectable à l'aide d'un examen sanguin. On suppose que dans notre population, il y a une proportion $p$ de personnes qui n'ont pas cette maladie.

1. On analyse le sang de $r$ personnes de la population, avec $r$ entier au moins égal à 2. On suppose que l'effectif de la population est suffisamment grand pour que le choix de ces $r$ personnes s'apparente à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité qu'aucune de ces personnes ne soit atteinte de la maladie ?
2. On regroupe le sang de ces $r$ personnes, puis on procède à l'analyse de sang. Si l'analyse est négative, aucune de ces personnes n'est malade et on arrête. Si l'analyse est positive, on fait toutes les analyses individuelles (on avait pris soin de conserver une partie du sang recueilli avant l'analyse groupée). On note $Y$ la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses de sang effectuées. Donner la loi de probabilité de $Y$ et calculer son espérance en fonction de $r$ et de $p$.
3. On s'intéresse à une population de $n$ personnes, et on effectue des analyses collectives après avoir mélangé les prélèvements par groupe de $r$ personnes, où $r$ est un diviseur de $n$. Montrer que le nombre d'analyses que l'on peut espérer économiser, par rapport à la démarche consistant à tester immédiatement toutes les personnes, est égal à $np^r - \frac{n}{r}$.
4. Dans cette question, on suppose que $p = 0,9$ et on admet qu'il existe un réel $a > 1$ de sorte que la fonction $x \mapsto p^x - \frac{1}{x}$ est croissante sur $[1, a]$ et décroissante sur $[a, +\infty[$. Écrire un algorithme permettant de déterminer pour quelle valeur de l'entier $r$ le nombre $p^r - \frac{1}{r}$ est maximal.

**Exercice 6** (Recrutement)**.**

Une entreprise souhaite recrute un cadre. $n$ personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in ]0,1[$. On pose également $q = 1-p$. On définit la variable aléatoire $X$ par $X = k$ si le $k$-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n+1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de $X$.
2. En dérivant la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
3. En déduire l'espérance de $X$.
4. Quelle est la valeur minimale de $p$ pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

**Exercice 7** (Génotype)**.**

On s'intéresse à une maladie génétique. Elle est portée par un gène particulier qui existe en deux formes : l'allèle A (sain), et l'allèle B (malade). Il existe donc par chaque individu trois génotypes possibles : 1 (A A), 2 (A B) et 3 (B B). Un individu est malade lorsqu'il porte le génotype (B B). Le but de l'exercice est de démontrer que la proportion de malades est constante au cours du temps. Pour cela, on s'intéresse à une population dont la proportion du génotype $i$, à la génération $n$, est noté $u_i(n)$. On rappelle que chaque enfant reçoit un des deux allèles de chacun de ses parents (et ce de façon complètement aléatoire). On suppose aussi que les procréations dans la population se font complètement aléatoirement. On fixe $n \geq 0$ et on note $E$ le génotype d'un enfant de la $n+1$-ième génération, $P$ et $M$ les génotypes respectifs du père et de la mère.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $P(E = 1|(P, M) = (i, j))$.
2. En déduire la loi de $E$ en fonction de$u_i(n)$.
3. On pose $\theta(n) = u_1(n) + \frac{1}{2}u_2(n)$. Exprimer $u_i(n+1)$ en fonction de $\theta(n)$.
4. Démontrer que la proportion de malades ne varie plus à partir de la génération 2.

**Exercice 8** (Trouver le paramètre d'une loi uniforme connaissant son espérance)**.**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, a\}$, où $a \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(X) = 6$. Déterminer $a$.

**Exercice 9** (Avion)**.**

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité $p$ de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de $p$).

**Exercice 10** (Uniformément uniforme)**.**

On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$, l'urne numérotée $k$ comprenant $k$ boules numérotées de 1 à $k$. On choisit d'abord une urne, puis une boule dans cette urne, et on note $Y$ la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de $Y$ ? Son espérance ?

**Exercice 11** (Deux variables aléatoires suivant une loi uniforme)**.**

Soit $X, Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

1. Déterminer $P(X = Y)$.
2. Déterminer $P(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

**Exercice 12** (Tirage avec remise)**.**

Une urne contient $N$ boules numérotées de 1 à $N$. On en tire $n$ en effectuant des tirages avec remise. On note $X$ et $Y$ le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Déterminer la loi de $X$ et la loi de $Y$.

**Exercice 13** (Somme de variables aléatoires ayant une répartition uniforme)**.**

1. Soient $a, b, c, d, \lambda$ cinq réels strictement positifs. Montrer qu'il est impossible que
$$\begin{cases} ab &= \lambda \\ cd &= \lambda \\ ac + bd &\leq \lambda \end{cases}$$
2. Soit $n \geqslant 1$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ dont la somme suit une loi uniforme sur $\{0, \dots, 2n\}$ ?

**Exercice 14** (Simuler une variable aléatoire discrète)**.**

La plupart des langages de programmation dispose d'une fonction `ALEA`() qui renvoie un nombre aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Écrire un algorithme dont les données sont un entier $N \geqslant 1$ et un tableau $p[1], \dots, p[N]$ de réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{n} p[i] = 1$ et qui retourne un nombre aléatoire $X$ tel que $P(X = i) = p[i]$.

**Exercice 15** (Une autre expression de l'espérance)**.**

Soit $X$ une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0, 1, \ldots, N\}$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n).$$

**Exercice 16** (Au carré)**.**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini.
Démontrer que $E(X)^2 \leqslant E(X^2)$.

**Exercice 17** (Maximiser l'espérance)**.**

Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes $X_1$ et $X_2$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On considère a un entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$, et $Y$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de $Y$ (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).
2. Calculer l'espérance de $Y$ et la comparer à l'espérance de $X_1$.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale ?

**Exercice 18** (Loi faible des grands nombres)**.**

Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé fini $\Omega$. On suppose qu'elles sont deux à deux indépendantes, qu'elles ont même espérance $m$ et même variance $\sigma^2$. On pose $S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|S_n - m| \geqslant \varepsilon) \to 0.$$

### 10.5.2 Loi binomiale

**Exercice 19.**

On lance onze fois de suite un dé équilibré. On appelle $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre d'occurrences du "6".
A-t-on $p(X = 1) > p(X = 2)$ ?

**Exercice 20.**

Un conseiller commercial en informatique reçoit huit clients par jour. On admet que la probabilité qu'un client passe commande est de $0,1$ et que les décisions des clients sont indépendantes les unes des autres.
On note $X$ la variable aléatoire qui indique le nombre de commandes que le conseiller obtient par jour.

1. Justifier que $X$ suit une loi binomiale.
2. Quelle est la probabilité (à $10^{-4}$ près) qu'il obtienne :
   (a) deux commandes ?
   (b) moins de deux commandes ?

**Exercice 21.**

Un parcours hippique de trois kilomètres comporte huit obstacles du même type. À l'entraînement, ce parcours est réalisé à la vitesse de 15 km.h$^{-1}$. On estime que pour un cavalier, la probabilité qu'il franchisse sans faute un obstacle est de 0,625. Le passage sans faute ne ralentit pas le cavalier, alors qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute. On note $X$ la variable aléatoire qui indique le nombre d'obstacles franchis sans faute.

1. Précisez la loi de probabilité de $X$ et indiquez son espérance.
2. Quel est le temps théorique de parcours exprimé en minutes ?
3. On note $D$ la variable aléatoire qui indique la durée en minutes du parcours du cavalier.
   (a) Exprimez $D$ en fonction de $X$
   (b) Déduisez-en $E(D)$ et interprétez le résultat

**Exercice 22.**

Pour un archer, la probabilité d'atteindre une cible donnée est $0,7$. Les tirs sont supposés indépendants. Quelle est la probabilité qu'il touche trois fois la cible sur une volée de cinq flèches ?

**Exercice 23.**

On s'intéresse au nombre d'enfants d'une famille. On suppose qu'il n'y a pas de naissances multiples et qu'il y a équiprobabilité pour la naissance d'un garçon ou d'une fille.

1. On peut considérer la naissance d'un enfant comme une épreuve de Bernoulli dont les issues sont $S$ : "naissance d'une fille" et $\overline{S}$ : « naissance d'un garçon ».
   (a) Quel modèle d'expérience décrit la naissance de $n$ enfants dans une famille ?
   (b) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire qui indique le nombre de filles dans le cas de $n$ naissances ?
2. On s'intéresse à l'événement A : « avoir au moins une fille sur les $n$ naissances ».
   Aide : Lorsque la définition de A contient la locution « au moins », il est en général plus facile de calculer $P(\overline{A})$.
   (a) Que signifie $\overline{A}$ ?
   (b) Calculez $P(\overline{A})$, puis déduisez-en que :
   $$P(A) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$
   (c) Trouvez le plus petit entier $n$ tel que $P(A) > 0,99$.

**Exercice 24.**

Un fournisseur d'accès Internet propose des abonnements incluant la fourniture d'un modem ADSL. La proportion de modems présentant des anomalies est estimée par le fournisseur à $p = 0,16$. Une association de consommateurs lance une enquête auprès des abonnés à sa revue pour estimer leur degré de satisfaction concernant leur fournisseur d'accès. Parmi les réponses à l'enquête, 428 concernent ce fournisseur d'accès : 86 abonnés déclarent avoir reçu un modem défectueux.

1. On suppose que la proportion de modems défectueux est $0,16$. On appelle $Y$ la variable aléatoire qui, à un échantillon aléatoire de 428 modems du fournisseur, associe le nombre de modems défectueux.
   (a) Précisez la loi de probabilité de $Y$.
   (b) Utilisez l'extrait de la table de probabilités cumulées ci-dessous pour déterminer l'intervalle de fluctuation à 95%.

| $k$ | $P(Y \leqslant k)$ |
|---|---|
| 53 | 0.0215 |
| 54 | 0.0298 |
| 55 | 0.0406 |
| 56 | 0.0543 |
| ... | ... |
| 83 | 0.9739 |
| 84 | 0.9806 |
| 85 | 0.9858 |
| 86 | 0.9897 |

2. (a) Quelle est la fréquence observée $f$ sur l'échantillon de l'association de consommateurs ?
   (b) Peut-on estimer, au seuil de 5%, que l'association de consommateurs donne une information qui confirme les indications du fournisseur d'accès ?
   (c) Quelle est la probabilité de commettre une erreur lors de la prise de décision ?

**Exercice 25** (Jeu de cartes)**.**

On tire trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de

1. n'obtenir que des cœurs ?
2. que des as ?
3. deux cœurs et un pique ?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

**Exercice 26** (Au moins un six!)**.**

Soit $n \geqslant 1$. On lance $n$ fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir

1. au moins une fois le chiffre 6 ?
2. au moins deux fois le chiffre 6 ?
3. au moins $k$ fois le chiffre 6 ?

**Exercice 27** (Lancer de pièces)**.**

On lance $n$ fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces.

**Exercice 28** (Le restaurateur)**.**

Un restaurateur accueille chaque soir 70 clients. Il sait qu'en moyenne, deux clients sur cinq prennent une crème brûlée. Il pense que s'il prépare 30 crèmes brûlées, dans plus de 70% des cas, la demande sera satisfaite.

1. A-t-il raison ?
2. Combien de crèmes brûlées doit-il fabriquer au minimum pour que la demande soit satisfaite dans au moins 90% des cas.

**Exercice 29** (Code de la route!)**.**

L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est $p$. On note, pour $1 \leqslant i \leqslant 40$, $A_i$ l'événement : « le candidat donne la bonne réponse à la $i$-ème question » . On note $S$ la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $P(A_i)$.
2. Quelle est la loi de $S$ (justifier !) ?
3. À quelle condition sur $p$ le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

**Exercice 30** (Méthode du maximum de vraisemblance)**.**

Un étang contient des brochets et des truites. On note $p$ la proportion de truites dans l'étang. On souhaite évaluer $p$. On prélève 20 poissons au hasard. On suppose que le nombre de poissons est suffisamment grand pour que ce prélèvement s'apparente à 20 tirages indépendants avec remise. On note $X$ le nombre de truites obtenues.

1. Quelle est la loi de $X$ ?
2. Le prélèvement a donné 8 truites. Pour quelle valeur de $p$ la quantité $P(X = 8)$ est-elle maximale ?

**Exercice 31** (Minimum et maximum de deux dés)**.**

On lance deux dés équilibrés, on note $U_1$ et $U_2$ les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de $X$. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de $U_1$ et $U_2$. En déduire $E(Y)$.

**Exercice 32** (QCM)**.**

Un examen consiste en un QCM de 15 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. L'enseignant estime que les étudiants ayant préparé l'examen sont 70% et répondent à une question correctement avec probabilité 0,8. Les autres étudiants choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant, choisi au hasard, réussisse l'examen ?
2. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen ?

**Exercice 33** (Estimation...)**.**

1. Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que
$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$
2. Application : On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de 1/6 d'au plus 1/100 ?

**Exercice 34** (Maximum d'une loi binomiale)**.**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in ]0,1[$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k$ la probabilité $p_k = P(X = k)$ est maximale ?

**Exercice 35** (Lancer de dé)**.**

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

**Exercice 36** (La grenouille)**.**

Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant
- ou bien une seule marche, avec probabilité $p$ ;
- ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on observe $n$ sauts de la grenouille, et on note $X_n$ le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et $Y_n$ le nombre de marches franchies. Quelle est la loi de $X_n$ ? Exprimer $Y_n$ en fonction de $X_n$. En déduire l'espérance et la variance de $Y_n$.
2. Pour $k \geq 1$, on note $p_k$ la probabilité que la grenouille passe par la marche $k$. Que vaut $p_1$ ? Que vaut $p_2$ ? Établir une formule de récurrence liant $p_k$ et $p_{k-1}$. En déduire la valeur de $p_k$ pour $k \geq 1$.
3. On note désormais $Z_n$ le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n$-ième marche. Écrire un algorithme qui simule la variable aléatoire $Z_n$.

**Exercice 37** (Loi faible pour des sommes de Bernoulli qui n'ont pas la même loi)**.**

Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini $\Omega$. On suppose que, pour chaque $i \geqslant 1$, $X_i$ suit une loi de paramètre $p_i$. On suppose en outre que les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes. On pose

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \text{ et } m_n = \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0, P(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$.

**Exercice 38** (Fonction génératrice)**.**

Pour $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$, on appelle fonction génératrice la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

où $p_k = P(X = k)$.

1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$ ; une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.
2. Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies $X$ et $Y$ ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1)+G'_X(1)-\left(G'_X(1)\right)^2$. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
4. Montrer que si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
5. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. Quelle est la loi de $Z = X + Y$ ?



## 10.6 Solutions

### 10.6.1 Variable aléatoire réelle

**Solution 1 (Loi d'un dé truqué)**

1. $X$ prend ses valeurs dans $\{1,\dots,6\}$. Par hypothèse, il existe un réel $a$ tel que $P(X = k) = ka$. Maintenant, puisque $P_X$ est une loi de probabilité, on a :

$$\sum_{k=1}^{6} P(X = k) = 1 \iff a\frac{6\times 7}{2} = 1 \implies a = 1/21.$$

On a donc :

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{2}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{6}{21}$ |

2. On vérifie aisément en appliquant la formule $E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k)$ que $E(X) = \frac{13}{3}$. On a $Y = k \iff X = 1/k$. $Y$ prend donc ses valeurs dans $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6\}$, et la loi est donnée par :

| $1/k$ | 1/1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y=k)$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{2}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{6}{21}$ |

Le calcul de l'espérance n'est pas plus difficile, et donne :

$$E(Y) = \frac{2}{7}.$$

Attention à l'erreur suivante : ce n'est pas parce que $Y = 1/X$ que $E(Y) = 1/E(X)$ !!!.

**Solution 2 (En plein dans le mille !)**

1. On note $A_k$ l'aire de la couronne $k$, et $A$ l'aire totale. Par les hypothèses d'équiprobabilité faites dans l'énoncé, on a
$$P(X=k)=\frac{A_k}{A}$$
pour $k$ compris entre 1 et 10. Pour la couronne $k$, le cercle extérieur est de rayon $11-k$ et le cercle intérieure de rayon $10-k$ (un petit dessin pourra aider pour faire attention à l'inversion entre l'ordre des cercles et les rayons). On a donc, en cm$^2$, $A_k=\pi\big((11-k)^2-(10-k)^2\big)=\pi(21-2k)$. On en déduit que
$$P(X=k)=\frac{21-2k}{100}.$$

2. Notons $Y$ la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur. $Y$ prend ses valeurs dans -2,6,7,8,9,10. L'événement « $Y=-2$ » est égal à l'événement « $X\leq 5$ », et donc
$$P(Y=-2)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{75}{100}$$
d'après le résultat de la question précédente. D'autre part, pour $k=6,\dots,10$, on a
$$P(Y=k)=P(X=k).$$
On en déduit le calcul de l'espérance de $Y$ :
$$E(Y)=-2\times\frac{75}{100}+\frac{6\times 9+7\times 7+8\times 5+9\times 3+10\times 1}{100}=\frac{3}{10}.$$
L'espérance est positive. Le jeu est favorable au joueur. En moyenne, il peut espérer gagne 0,3 euros par partie.

**Solution 3 (Plus grand nombre tiré)**

On choisit pour univers $\Omega=\{1,\dots,6\}^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés. Remarquons que le cardinal de $\Omega$ vaut 36. $X$ prend ses valeurs dans $\{1,\dots,6\}$. L'événement $X=1$ est égal à $\{(1,1)\}$ et donc
$$P(X=1)=\frac{1}{36}.$$
De même, on a
$$\begin{aligned}
P(X=2) &= P\big(\{(1,2);(2,1);(2,2)\}\big)=\frac{1}{12}\\
P(X=3) &= P\big(\{(1,3);(2,3);(3,3);(3,1);(3,2)\}\big)=\frac{5}{36}\\
P(X=4) &= P\big(\{(1,4);(2,4);(3,4);(4,4);(4,3);(4,2);(4,1)\}\big)=\frac{7}{36}\\
P(X=5) &= P\big(\{(1,5);(2,5);(3,5);(4,5);(5,5);(5,4);(5,3);(5,2);(5,1)\}\big)=\frac{1}{4}\\
P(X=6) &= P\big(\{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,5);(6,4);(6,3);(6,2);(6,1)\}\big)=\frac{11}{36}.
\end{aligned}$$

**Solution 4 (Garagiste)**

1. $Z$ est élément de $\{0,1,2\}$. On a :
$$P(Z=2)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$$

(les deux voitures sont disponibles). D'autre part,

$$P(Z=0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

(les deux voitures sont simultanément indisponibles). Enfin, on obtient :

$$P(Z=1) = 1 - P(Z=0) - P(Z=2) = \frac{8}{25}.$$

On aurait aussi pu directement remarquer que $Z$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2, 4/5)$.

2. Remarquons que $Y$ est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. On calcule sa loi en utilisant la formule des probabilités totales. L'événement $Y=0$ se produit si $X=0$ ou bien si $X \geq 1$ et $Z=0$. Ces deux événements étant disjoints, on a :

$$P(Y=0) = P(X=0) + P(X \geqslant 1 \cap Z=0) = P(X=0) + P(X \geqslant 1)P(Z=0)$$

(la disponibilité des voitures étant supposée indépendante de l'arrivée des clients). D'où :

$$P(Y=0) = 0,1 + 0,9 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0,136.$$

De même, l'événement $Y=1$ se produit si $X=1$ et $Z \geq 1$ ou bien si $X \geq 2$ et $Z=1$. On en déduit :

$$P(Y=1) = P(X=1)P(Z \geqslant 1) + P(X \geq 2)P(Z=1) = 0,48.$$

Enfin, l'événement $Y=2$ est réalisé si $X \geq 2$ et $Z=2$. Ceci donne :

$$P(Y=2) = P(X \geqslant 2)P(Z=2) = 0,6 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0,384.$$

3. La marge brute vaut $300Y$. La marge brute moyenne par jour est en euros :

$$E(300Y) = 300(0 \times 0,136 + 1 \times 0,48 + 2 \times 0,384) = 374,4.$$

**Solution 5 (Analyse de sang)**

1. On note $A_i$ l'événement « la $i$-ème personne choisie n'est pas malade ». On cherche la probabilité de l'événement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r$. L'énoncé nous dit que $P(A_i) = p$ (proportion $p$ de personnes qui n'ont pas la maladie), et que les événements $A_1, \ldots, A_r$ sont mutuellement indépendants (le choix de ces $r$ personnes s'apparente à un tirage avec remise). On en déduit donc que la probabilité qu'aucune des $r$ personnes ne soit atteinte de la maladie est $p^r$.

2. La variable aléatoire $Y$ peut prendre deux valeurs : la valeur 1 (l'analyse collective est négative), et la valeur $r+1$ (l'analyse collective est positive, et il faut donc faire également toutes les analyses individuelles). On a de plus $P(Y=1) = p^r$ (l'événement $\{Y=1\}$ est aussi l'événement aucune des $r$ personnes n'est malade) et donc $P(Y=r+1) = 1-p^r$. On en déduit que

$$E(Y) = p^r + (r+1)(1-p^r) = (r+1) - rp^r.$$

3. Si on analyse immédiatement toutes les personnes, on réalise $n$ analyses. En les regroupant par groupe de $r$ personnes, notons $Z$ le nombre d'analyses effectuées, et $Y_1, \ldots, Y_{n/r}$ le nombre d'analyses effectués sur chacun des $n/r$ groupes constitués. Alors d'après la question précédente, on sait que

l'espérance de $Y_i$ est $(r+1) - rp^r$. Le nombre moyen d'analyses que l'on peut espérer réaliser est donc égal à

$$E(Y_1) + \cdots + E(Y_{n/r}) = \frac{n}{r}\big((r+1) - rp^r\big).$$

Le nombre d'analyses que l'on peut espérer économiser vaut donc

$$n - \frac{n}{r}\big((r+1) - rp^r\big) = n\left(p^r - \frac{1}{r}\right).$$

4. On nous demande donc de donner un algorithme qui détermine le maximum d'une suite croissante, puis décroissante. Voici un algorithme qui fonctionne.

```
Variables :
  p=0,9
  r entier
  val
Traitement :
  r=1
  val=-1
  Tant que (p^r -1/r)>val faire
     r=r+1
  Fin tant que
  Afficher r-1
```

La variable `val` contient la plus grande valeur atteinte jusqu'au rang présent. Elle est initialisée à un nombre négatif afin que l'on rentre dans la boucle. Il faut bien afficher $r-1$ et non $r$, car quand on sort de la boucle, on a dépassé le maximum.

**Solution 6 (Recrutement)**

1. Notons $\Omega$ l'univers associé à l'expérience. On a bien sûr $X(\Omega) = \{1, \ldots, n+1\}$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note $A_i$ l'événement : le $i$-ème candidat réussit le test. Pour $k \leq n$, on a

$$(X = k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.$$

Par la formule des probabilités composées, on trouve

$$P(X = k) = P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \ldots P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k).$$

Mais pour tout $j$, $P_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j})$ est juste la probabilité que le candidat échoue au test (qu'il ne passe que si les candidats précédents ont tous échoué). Cette probabilité vaut donc $q = 1 - p$. Finalement, on trouve donc

$$P(X = k) = q^{k-1} p.$$

D'autre part, $P(X = n+1)$ est la probabilité que tous les candidats échouent au test. On a donc

$$P(X = n+1) = q^n.$$

2. Posons $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. En dérivant des deux côtés de l'égalité, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

3. L'espérance de $X$ vaut donc
$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}p + (n+1)q^n.$$
En tenant compte du résultat de la question précédente, et après simplifications, on trouve
$$E(X) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

4. Un des candidats est recruté si et seulement si l'événement $X \leqslant n$ est réalisé. Il vient
$$P(X \leqslant n) = 1 - P(X = n+1) = 1 - q^n.$$
On a
$$P(X \leq n) \geqslant 1/2 \iff q^n \leqslant \frac{1}{2} \iff p \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

**Solution 7 (Génotype)**

1. En utilisant les informations de l'énoncé sur l'héritage des gènes, on trouve
$$\begin{aligned} P\big(E=1|(P,M)=(1,1)\big) &= 1 \\ P\big(E=1|(P,M)=(1,2)\big) = P\big(E=1|(P,M)=(2,1)\big) &= \frac{1}{2} \\ P\big(E=1|(P,M)=(1,3)\big) = P\big(E=1|(P,M)=(3,1)\big) &= 0 \\ P\big(E=1|(P,M)=(2,2)\big) &= \frac{1}{4} \\ P\big(E=1|(P,M)=(2,3)\big) = P\big(E=1|(P,M)=(3,2)\big) &= 0 \\ P\big(E=1|(P,M)=(3,3)\big) &= 0. \end{aligned}$$
On vérifie que l'on a bien écrit les 9 cas possibles pour $(P, M)$.

2. On calcule $P(E = 1)$ par la formule des probabilités totales :
$$P(E=1) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P\big(E=1|(P,M)=(i,j)\big) \times P\big((P,M)=(i,j)\big).$$
Les procréations étant supposées aléatoires, on a aussi
$$P\big((P,M)=(i,j)\big) = u_i(n)u_j(n).$$
On en déduit
$$P(E=1) = u_1(n)^2 + \frac{1}{2}u_1(n)u_2(n) + \frac{1}{2}u_2(n)u_1(n) + \frac{1}{4}u_2(n)^2 = \Big(u_1(n) + \frac{1}{2}u_2(n)\Big)^2.$$
Il est facile de calculer $P(E = 3)$. Par symétrie des rôles de A et B, on a en effet
$$P(E=3) = \Big(u_3(n) + \frac{1}{2}u_2(n)\Big)^2.$$
Enfin,
$$P(E=2) = 1 - P(E=1) - P(E=3) = 1 - \Big(u_1(n) + \frac{1}{2}u_2(n)\Big)^2 - \Big(u_3(n) + \frac{1}{2}u_2(n)\Big)^2.$$

3. On a
$$u_1(n+1) = P(E=1) = \theta(n)^2.$$
De plus, $u_1(n) + u_2(n) + u_3(n) = 1$, ce qui fait que
$$u_3(n) + \frac{u_2(n)}{2} = 1 - \theta(n).$$
Ainsi,
$$u_3(n+1) = \big(1-\theta(n)\big)^2$$
et
$$u_2(n+1) = 1 - \theta(n)^2 - \big(1-\theta(n)\big)^2.$$

4. Calculons $\theta_{n+1}$ en fonction de $\theta(n)$, pour $n \geq 1$. On a
$$\begin{aligned}\theta(n+1) &= u_1(n+1) + \frac{u_2(n+1)}{2} \\ &= \theta(n)^2 + \frac{1}{2} - \frac{\theta(n)^2}{2} - \frac{\big(1-\theta(n)\big)^2}{2} \\ &= \theta(n).\end{aligned}$$
Ainsi, pour $n \geqslant 1$, on a $\theta(n+1) = \theta(n)$ et donc d'après la question précédente, $u_i(n+1) = u_i(n)$. La proportion de malades dans la population ne varie plus !

**Solution 8 (Trouver le paramètre d'une loi uniforme connaissant son espérance)**
On a $E(X) = \frac{1}{a+1}\big(0+1+\cdots+a\big) = \frac{a}{2}$. On en déduit donc que $a = 12$.

**Solution 9 (Avion)**
On note $X$ la variable aléatoire du nombre de moteurs de A qui tombent en panne, et $Y$ la variable aléatoire du nombre de moteurs de B qui tombent en panne. $X$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4,p)$. En particulier, on a :
$$P(X=0) + P(X=1) = \binom{4}{0}p^0(1-p)^{4-0} + \binom{4}{1}p^1(1-p)^{4-1} = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3.$$
D'autre part, $Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$. En particulier,
$$P(Y=0) = (1-p)^2.$$
On a intérêt à prendre l'avion A si $P(X=0) + P(X=1) \geq P(Y=0)$. Ceci donne :
$$p(1-p)^2(2-3p) \geq 0.$$
Donc, si $0 \leq p < 2/3$ (cas que l'on espère être celui du monde réel), il est préférable de choisir A. Si $p = 2/3$, le choix est indifférent, et si $p > 2/3$, il vaut mieux choisir B.

**Solution 10 (Uniformément uniforme)**
Notons $X$ la variable aléatoire de l'urne choisie. On a d'après la formule des probabilités totales :
$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P(Y=k|X=i)P(X=i) = \sum_{i=1}^{n} P(Y=k|X=i)\frac{1}{n}.$$

Or $P(Y=k|X=i)$ vaut $1/i$ si $k \leq i$ et 0 si $k > i$. On en déduit que

$$P(Y=k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{ni}.$$

Pour calculer l'espérance, on applique la définition et on permute les sommes.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{k}{i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\times\frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2} \\ &= \frac{1}{2n}\times\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right) \\ &= \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

**Solution 11 (Deux variables aléatoires suivant une loi uniforme)**

1. Remarquons que

$$X=Y \iff \exists k\in\{1,\ldots,n\},\ X=k \text{ et } Y=k.$$

On a donc

$$P(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k\cap Y=k)=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)P(Y=k)$$

puisque les variables aléatoires sont indépendantes. On en déduit

$$P(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}.$$

2. On peut suivre une méthode similaire en étudiant tous les cas pour lesquels $X \geq Y$. Il y a plus simple. Il suffit de remarquer que, par symétrie du rôle joué par $X$ et $Y$, on a

$$P(X\geq Y)=P(Y\geq X).$$

Or,

$$\begin{aligned} P\big((X\geq Y)\cup(Y\geq X)\big) &= P(X\geq Y)+P(Y\geq X)-P\big((X\geq Y)\cap(Y\geq X)\big) \\ &= 2P(X\geq Y)-P(X=Y). \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$1=2P(X\geqslant Y)-\frac{1}{n} \implies P(X\geqslant Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

3. Remarquons que

$$X+Y=k \iff \exists i \in \{1,\dots,k-1\},\ X=i \text{ et } Y=k-i.$$

Il vient, pour tout $k=2,\dots 2n$ (valeurs possibles prises par $X+Y$), que

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=1}^{k-1} P\big((X=i)\cap(Y=k-i)\big)=\sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)P(Y=k-i)$$

par indépendance de $X$ et $Y$. En réalité, on peut sommer sur un ensemble d'indices plus petit. En effet, $P(X=i)\neq 0$ implique que $1\leq i\leq n$ et $P(Y=k-i)\neq 0$ implique que $1\leq k-i\leq n$, soit $k-n\leq i\leq k-1$. On distingue alors deux cas :

- Si $k\leq n$, alors $k-n\leq 0$ et on effectue une somme de 1 à $k-1$ de termes tous égaux à $1/n^2$. On en déduit que dans ce cas
$$P(X+Y=k)=\frac{k-1}{n^2}.$$
- Si $k>n$, alors $n\leq k-1$ et on effectue une somme de $k-n$ à $n$ de termes tous égaux à $1/n^2$. Dans ce cas,
$$P(X+Y=k)=\frac{2n+1-k}{n^2}.$$

**Solution 12 (Tirage avec remise)**
Il n'est pas facile de calculer directement $P(X=k)$. En revanche, il est beaucoup plus facile de calculer $P(X\geq k)$. En effet, on a $X\geq k$ si et seulement si tous les tirages ont amené un nombre supérieur ou égal à $k$. La probabilité qu'un tirage amène un nombre supérieur ou égal à $k$ valant $\frac{N-k+1}{N}$ et les tirages étant indépendants, on a

$$P(X\geq k)=\frac{(N-k+1)^n}{N^n}.$$

On déduit $P(X=k)$ par la formule

$$P(X=k)=P(X\geq k)-P(X\geq k+1)=\frac{(N-k+1)^n-(N-k)^n}{N^n}.$$

La démarche est similaire pour $Y$, mais cette fois on calcule $P(Y\leq k)$ qui vaut

$$P(Y\leq k)=\frac{k^n}{N^n}.$$

Il vient

$$P(Y=k)=P(Y\leq k)-P(Y\leq k-1)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}.$$

**Solution 13 (Somme de variables aléatoires ayant une répartition uniforme)**

1. On a $abcd=\lambda^2$ d'après les deux premières équations. D'autre part, puisque tout est positif, on a $ac<\lambda$ et $bd<\lambda$ et donc $abcd<\lambda^2$, une contradiction.
2. Supposons que ces deux variables aléatoires existent, et notons les $X$ et $Y$. Posons $Z=X+Y$, $a_k=P(X=k)$, $b_k=P(Y=k)$ et $c_k=P(Z=k)$. Pour chaque $k$, on a

$$c_k=P(Z=k)=\sum_{i+j=k} P\big((X=i,Y=j)\big)=a_ib_j$$

puisque les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes. Pour $k = 0$, $k = 2n$ et $k = n$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} &= a_0 b_0 \\ \frac{1}{2n+1} &= a_n b_n \\ \frac{1}{2n+1} &\geq a_0 b_n + a_n b_0 \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat de la question précédente avec $a = a_0$, $b = b_0$, $c = a_n$, $d = b_n$ et $\lambda = \frac{1}{2n+1}$ pour obtenir une contradiction.

**Solution 14 (Simuler une variable aléatoire discrète)**
Une méthode possible est basée sur la fonction de répartition de $X$. Plus précisément, notons $s_0 = 0$ et, pour $i = 1, \ldots, N$, $s_i = s_{i-1} + p_i$. Alors, si $U$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, $P(U \in ]s_{i-1}, s_i]) = s_i - s_{i-1} = p_i$. L'algorithme suivant reprend cette idée.

```
Données :
  N, p[1],...,p[N]
Variables :

Traitement :
  S[0]=0
  Pour i allant de 1 à N faire
    S[i]=S[i-1]+p[i]
  Fin Pour
  x=ALEA()
  Pour i allant de 1 à N faire
     Si S[i-1]<x<=S[i] alors retourner i.
  Fin Pour
```

Une erreur classique serait d'utiliser la fonction `ALEA()` à l'intérieur de la deuxième boucle Pour. On ne tirerait pas une seule fois un nombre au hasard, mais plusieurs fois et cela n'aurait plus du tout le même sens (d'ailleurs, on pourrait sortir de la boucle pour sans avoir retourné quelque chose).

**Solution 15 (Une autre expression de l'espérance)**
La clé est d'écrire $P(X = n) = P(X > n - 1) - P(X > n)$. D'après la définition de l'espérance, on a

$$E(X) = \sum_{n=1}^{N} nP(X > n - 1) - \sum_{n=1}^{N} nP(X > n).$$

On effectue un décalage d'indice dans la première somme :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} (n + 1)P(X > n) - \sum_{n=1}^{N} nP(X > n).$$

Dans la deuxième somme, le terme d'indice $N$ est nul, et on peut aussi ajouter un terme d'indice 0 qui sera nul lui aussi. Il vient donc

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} \big((n + 1) - n\big)P(X > n) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n).$$

**Solution 16 (Au carré)**
Soit $x_1, \dots, x_n$ les valeurs prises par $X$, avec probabilités respectives $p_k$. On a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k \sqrt{p_k}) \sqrt{p_k}.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $a_k = x_k \sqrt{p_k}$ et $b_k = \sqrt{p_k}$. On en déduit que

$$E(X)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k \right) \left( \sum_{k=1}^{n} p_k \right) = E(X^2).$$

**Solution 17 (Maximiser l'espérance)**

1. On a $Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, et par indépendance des variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ :
   - si $k \leq a, P(Y = k) = P\left((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)\right) = \frac{1}{n} \times \frac{a}{n}$.
   - si $k > a, P(Y = k) = P\left((X_1 = k) \cap (X_2 \leq a)\right) + P\left((X_2 = k) \cap (X_2 > a)\right) = \frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}$.

   On a bien $a \times \frac{a}{n^2} + (n-a) \times \left(\frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 1$.
2. Le calcul de l'espérance est facile :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{a} k \frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} k \frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} \frac{k}{n} \\ &= \frac{a(n+1)}{2n} + \frac{(a+n+1)(n-a)}{2n} \\ &= E(X_1) + \frac{a}{2n}(n-a) \geq E(X_1). \end{aligned}$$

3. On vérifie que :
$$E(Y) = \frac{1}{2n} \left( \frac{5}{4} n^2 + n - (a - n/2)^2 \right).$$
Ainsi, $E(Y)$ est maximale pour $|a - n/2|$ le plus petit possible :
   - si $n$ est pair, c'est pour $a = n/2$.
   - si $n$ est impair, c'est pour $a = (n-1)/2$ ou $a = (n+1)/2$.

**Solution 18 (Loi faible des grands nombres)**
On a $E(S_n) = m$, et, puisque les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes,

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

On applique ensuite l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $S_n$ :

$$0 \leq P(|S_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Par le théorème des gendarmes, ceci tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## 10.6.2 Loi binomiale

**Solution 19**
Dans la mesure où – faute de mieux – on considère que les lancers sont indépendants„ $X$ suit une loi binomiale de paramètres 11 et $\frac{1}{6}$.

De ce fait on a

$$p(X=1)=\binom{11}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \quad \text{et} \quad p(X=1)=\binom{11}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^9.$$

Or $\binom{11}{1}=11$ et $\binom{11}{2}=\dfrac{11\times 10}{2}=55$.
On en déduit que

$$p(X=1)-p(X=2)=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^9\left(11\times\frac{5}{6}-55\times\frac{5}{6}=0\right).$$

Les deux probabilités sont égales !

**Solution 20**

1. La prise de commande par un client se solde soit par un succès (avec la probabilité $p=0,1$), soit par un échec : c'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$ (voir la Définition 4).
   Cette épreuve de Bernoulli est répétée chaque jour 8 fois de façon indépendante. On est donc dans le cas d'un schéma de Bernoulli d'ordre 8. $X$ indique le nombre de succès, donc $X$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8;0,1)$ (Définition 5).
2. (a) $P(X=2)=\binom{8}{2}\times 0,1^2\times 0,9^6\approx 0,1488$.
   (b) $P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0,9^8+\binom{8}{1}\times 0,1\times 0,9^7\approx 0,8131$.

**Solution 21**

1. Le franchissement d'un obstacle est une épreuve de Bernoulli où la probabilité de succès est $p=0,625$. Lors du parcours, cette épreuve est répétée huit fois de façon indépendante. Dons on est dans le cas d'un schéma de Bernoulli d'ordre 8. $X$ indique le nombre de succès donc $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0,625$. Ainsi, $E(X)=np$, soit $E(X)=5$.
2. Durée théorique du parcours : $t=\frac{d}{v}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$ (en heures), donc $t=12$ (en minutes).
3. On note D la variable aléatoire qui indique la durée en minutes du parcours du cavalier.
   (a) Le nombre de passage avec faute est $8-X$, donc $D=12+1\times(8-X)$, soit $D=20-X$.
   (b) $E(D)=20-E(X)$, donc $E(D)=15$ (en minutes). Ainsi, la durée moyenne sur un grand nombre de parcours est 15 min.

**Solution 22**

$X$ est la variable aléatoire donnant le nombre de flèches qui touchent la cible. $X$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(5;\frac{7}{10}\right)$.
$P(X=3)=\binom{5}{3}\times\left(\frac{7}{10}\right)^3\times\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{3087}{10000}$.

**Solution 23**

1. (a) Sous les hypothèses indiquées, le modèle est un schéma de Bernoulli d'ordre $n$.
   (b) La variable aléatoire $X$ qui indique le nombre de filles suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n;\frac{1}{2}\right)$.
2. (a) $\overline{A}$ signifie « Aucune fille n'est née lors des $n$ naissances », c'est-à-dire $X=0$.
   (b) $P(\overline{A})=\binom{n}{0}\times\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$, soit $P(\overline{A}=\frac{1}{2^n}$. Ainsi, $P(A)=1-\frac{1}{2^n}$.
   (c) $P(A)>0,99\Leftrightarrow 2^n>100$. La suite $(2^n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. Or : $2^6=64$ et $2^7=128$. Donc pour tout entier $n$ tel que $n\geqslant 7$, $2^n\geqslant 2^7>100$.
   Ainsi, le plus petit entier solution est $n_0=7$. La famille doit avoir au moins 7 enfants pour que la probabilité d'avoir une fille dépasse $0,99$.

**Solution 24**

1. (a) T suit le loi binomiale $\mathscr{B}(428; 0,16)$.
   (b) $a = 54$, $b = 84$.
   L'intervalle de fluctuation à 95% est $I = \left[\frac{54}{428} : \frac{84}{428}\right]$.
2. (a) $f_{obs} = \frac{86}{428}$, donc $f_{obs} \notin I$.
   (b) On rejette au seuil de 5% l'hypothèse $p = 0,16$.
   L'association de consommateurs infirme les indications du fournisseur d'accès.
   (c) Il s'agit de déterminer la probabilité que la fréquence soit dans la zone de rejet.
   $P(E) = P(X < 54) + P(X > 84)$
   $P(E) = P(X \leqslant 53) + 1 - P(X \leqslant 84)$
   $P(E) \approx 0,0215 + 1 - 0,9806 \approx 0,0409$.
   Ainsi, $P(E)$ est environ 4%.

**Solution 25 (Jeu de cartes)**

1. Le nombre de tirages possible est $\binom{8}{3}$. Le nombre total de tirages est $\binom{32}{3}$. La probabilité recherchée est donc
$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{8 \times 7 \times 6}{32 \times 31 \times 30} = \frac{7}{620}.$$
2. Le raisonnement est identique. On obtient
$$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{4 \times 3 \times 2}{32 \times 31 \times 30} = \frac{1}{1240}.$$
3. Le nombre de tirages possibles est $\binom{8}{2} \times \binom{8}{1}$. La probabilité recherchée est donc
$$\frac{\binom{8}{2} \times \binom{8}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{7}{155}.$$

**Solution 26 (Au moins un six !)**

Dans chaque cas, on va plutôt étudier la probabilité d'obtenir l'événement contraire.

1. La probabilité de n'obtenir aucun 6 est $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. La probabilité d'obtenir au moins un six est donc $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
2. Soit $A$ l'événement « obtenir au maximum une fois le chiffre 6 ». Alors $A$ est la somme des événements disjoints $A_0$ = « ne jamais obtenir six » et $A_1$ = « obtenir exactement 1 fois le chiffre 6 ». On a $P(A) = P(A_0) + P(A_1)$. De plus, $P(A_0)$ a été calculé à la question précédente :
$$P(A_0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
Calculons désormais $P(A_1)$. On commence par choisir le lancer où on a obtenu le chiffre 6. Il y a $\binom{n}{1} = n$ tels choix. Ce lancer fixé, la suite de lancers a une probabilité valant $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ de se réaliser. On en déduit que
$$P(A_1) = \binom{n}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$
Finalement, la probabilité d'obtenir au moins deux fois le chiffre 6 vaut
$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \binom{n}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

3. On généralise la méthode précédente. Notons $A_j$ la probabilité d'obtenir exactement $j$ fois le chiffre 6. La probabilité recherchée est

$$1 - P(A_0) - P(A_1) - \cdots - P(A_{k-1}).$$

Mais, pour calculer $P(A_j)$ on détermine d'abord la place des $j$ chiffres 6 : il y a $\binom{n}{j}$ tels choix. Ce choix fait, la suite de lancers a une probabilité égale à $\left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}$ de se réaliser. On a donc

$$P(A_j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}.$$

On conclut finalement que la probabilité d'obtenir au moins $k$ fois le chiffre 6 vaut

$$1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{n-j}.$$

**Solution 27 (Lancer de pièces)**
Notons $A$ l'événement « obtenir strictement plus de piles que de faces » et $B$ l'événement « obtenir strictement plus de faces que de piles ». La pièce étant parfaitement équilibrée, par symétrie, $P(A) = P(B)$. On distingue alors deux cas :

- $n$ est impair. Dans ce cas, le couple $(A, B)$ est un système complet d'événements et $P(A) = \frac{1}{2}$.
- $n = 2r$ est pair. Notons $X$ la variable aléatoire du nombre de piles obtenues. $X$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. On a

$$A = (X > r) \text{ et } B = (X < r).$$

On a donc

$$P(A) + P(B) + P(X = r) = 1 \implies P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(X = r) = \frac{1}{2} - \binom{2r}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1}.$$

**Solution 28 (Le restaurateur)**
Soit $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de crèmes brûlées commandées chaque soir. $X$ compte le nombre de succès (=crème brûlée commandée) dans la répétition indépendante de 70 épreuves de Bernoulli dont chacune a une probabilité de succès égale à 0.4. Ainsi, $X$ suit une loi binomiale de paramètre 70 et 0.4.

1. La demande est satisfaite si $X \leq 30$. On doit donc déterminer si $P(X \leq 30) \geq 0.7$. A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on trouve facilement que $P(X \leq 30) \simeq 0,73$ : le restaurateur a raison.
2. On cherche le plus petit entier $k$ tel que $P(X \leq k) \geq 0,9$. Toujours à l'aide d'un tableur, on constate que $P(X \leq 32) \simeq 0,86$ et que $P(X \leq 33) \simeq 0,91$. Il suffit de préparer 33 crèmes brûlées pour satisfaire la clientèle dans 90% des cas. Çà vaut peut-être le coup de fabriquer 3 crèmes supplémentaires !

**Solution 29 (Code de la route !)**
1. Notons $C_i$ l'évènement « le candidat connaît la réponse à la $i$-ème question. » . On a

$$P(A_i) = P_{C_i}(A_i)P(C_i) + P_{\bar{C}_i}(A_i)P(\bar{C}_i) = 1 \times p + \frac{1}{4} \times (1 - p) = \frac{1 + 3p}{4}.$$

2. Les questions étant toutes indépendantes, on est en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable $S$ qui compte le nombre de bonnes réponses suit une loi binomiale de paramètres 40 et $\frac{1+3p}{4}$.

Solutions

3. L'espérance de $S$ vaut $E(S) = 40\frac{1+3p}{4} = 10(1+3p)$. On a donc $E(S) \geqslant 36$ si et seulement si $10(1+3p) \geqslant 36$, ce qui revient à dire $p \geqslant \frac{13}{15}$.

**Solution 30 (Méthode du maximum de vraisemblance)**

1. On reconnaît le principe d'un schéma de Bernoulli, avec 20 épreuves indépendantes et une probabilité $p$ de succès. $X$ suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(20, 8)$.
2. On a $P(X = 8) = \binom{20}{8}p^8(1-p)^{12}$. On va étudier cette fonction de $p$ de sorte de trouver son maximum. Il suffit en réalité d'étudier, sur $[0, 1]$, la fonction $g(p) = p^8(1-p)^{12}$. $g$ est dérivable et sa dérivée est

$$\begin{aligned} g'(p) &= 8p^7(1-p)^{12} - 12p^8(1-p)^{11} \\ &= \big(8(1-p) - 12p\big)p^7(1-p)^{11} \\ &= \big(8 - 20p\big)p^7(1-p)^{11}. \end{aligned}$$

On en déduit que $g'(p) \geq 0$ sur $[0, 2/5]$ et $g'(p) \leq 0$ sur $[2/5, 1]$. La probabilité $P(X = 8)$ est maximale pour $p = 2/5$.

**Solution 31 (Minimum et maximum de deux dés)**

1. Pour $i = 1, \ldots, 6$, l'événement $X = i$ est réunion disjointe des trois événements suivants :
   - $A : U_1 = i$ et $U_2 = i$ ;
   - $B : U_1 = i$ et $U_2 > i$ ;
   - $C : U_1 > i$ et $U_2 = i$.

   Par indépendance des variables aléatoires $U_1$ et $U_2$, on en déduit que

$$P(A) = \frac{1}{36},\ P(B) = \frac{6-i}{36} \text{ et } P(C) = \frac{6-i}{36}.$$

   Il vient $P(X = 1) = 11/36, P(X = 2) = 9/36, P(X = 3) = 7/36, P(X = 4) = 5/36, P(X = 5) = 3/36, P(X = 6) = 1/36$. On en déduit$E(X) = 91/36$.
2. On a $X+Y = U_1+U_2$ car $(U_1, U_2)$ est une permutation de $(X, Y)$. Il vient $E(X+Y) = E(X)+E(Y) = E(U_1) + E(U_2) = 7$, puisque chaque $U_i$ suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$, son espérance vaut $(6+1)/2 = 7/2$. On en déduit $E(Y) = 161/36$.

**Solution 32 (QCM)**

1. Notons $A$ l'événement « l'étudiant a préparé l'examen », $R$ l'événement « l'étudiant a réussi l'examen » et $X$ la variable aléatoire du nombre de questions ayant eu une bonne réponse. On ne connaît pas directement la loi de $X$, mais il est facile de donner la loi des variables aléatoires conditionnées $X|A$ et $X|\bar{A}$. Elles suivent des lois binomiales de paramètre 15 et, respectivement, 0,8 et 1/3. Plus précisément, pour tout $k$ dans $\{0, \ldots, 15\}$, on a

$$P(X = k|A) = \binom{15}{k}(0,8)^k(0,2)^{n-k}$$

$$P(x = k|\bar{A}) = \binom{15}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

   On en déduit que

$$P(R|A) = \sum_{k=8}^{15} P(X = k|A) \simeq 0,996$$

   tandis que

$$P(R|\bar{A}) = \sum_{k=8}^{15} P(X = k|\bar{A}) \simeq 0,088.$$

On en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A)P(R|A) + P(\bar{A})P(R|\bar{A}) \simeq 0,724.$$

2. D'après la formule de Bayes,

$$P(A|\bar{R}) = \frac{P(\bar{R}|A)P(A)}{P(\bar{R})} = \frac{(1 - P(R|A))P(A)}{1 - P(R)} \simeq 0,011.$$

Les résultats des deux questions sont finalement très réconfortants sur la pertinence de cet examen.

**Solution 33 (Estimation...)**

1. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $Y = \frac{X}{n}$. On a

$$P(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}.$$

Mais ici, $E(Y) = \frac{1}{n}E(X) = p$ et $V(Y) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{p(1-p)}{n}$. Ceci donne donc immédiatement le résultat.

2. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions du chiffre 6 au cours des n lancers. $X$ suit la loi $\mathcal{B}(n, 1/6)$. On cherche $n$ tel que

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) \geqslant 0,95 \iff P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| \geqslant \frac{1}{100}\right) \leqslant 0,05.$$

On applique ensuite le résultat de la question précédente avec $\varepsilon = \frac{1}{100}$ et $p = \frac{1}{6}$. Il suffit que $n$ vérifie

$$\frac{5 \times 10^4}{36n} \leq 0,05$$

soit

$$n \geq 27778.$$

Il suffit d'effectuer 27 778 lancers. Cela dit, rien ne dit que ce nombre est optimal, et d'ailleurs, il ne l'est pas !

**Solution 34 (Maximum d'une loi binomiale)**

Soit $k \geq 1$. On a

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

La présence de factorielles et de puissances nous incite à étudier la monotonie de la suite $(p_k)$ par l'étude du quotient $p_k/p_{k-1}$ :

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k}.$$

On en déduit

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} \geqslant 1 \iff k(1-p) \leqslant (n-k+1)p \iff k \leqslant np + p.$$

Notons $k_0$ la partie entière de $(n+1)p$. La suite $(p_k)$ est donc croissante jusqu'en $k_0$ et décroissante ensuite. La valeur maximale est donc atteinte en $k_0$. Remarquons que si $(n+1)p$ est un entier, alors on a également $p_{k_0-1} = p_{k_0}$ et le maximum est atteint en deux valeurs (c'est le seul cas possible).

**Solution 35 (Lancer de dé)**
Soit $S$ la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. $S$ suit une loi binomiale de paramètres 3600 et 1/6. On sait donc que $E(S) = 600$ et $V(S) = 500$. Remarquons en outre que

$$480 < S < 720 \iff -120 < S - 600 < 120 \iff |S - 600| < 120.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev,

$$P(|S - 600| \geqslant 120) \leqslant \frac{500}{120^2} \leqslant 0,035.$$

On en déduit que

$$P(480 < S < 720) \geqslant 1 - 0,035 = 0,965.$$

En particulier, la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3600 lancers est supérieur à 0,96.

**Solution 36 (La grenouille)**

1. On a affaire ici à un schéma de Bernoulli : $X_n$ compte le nombre de fois où $n$ expériences indépendantes (les $n$ premiers sauts) donnent un résultat ayant probabilité $p$. La variable aléatoire $X_n$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. Le nombre de marches franchies est alors

   $$Y_n = X_n + 2(n - X_n) = 2n - X_n.$$

   Par linéarité de l'espérance, on trouve

   $$E(Y_n) = 2n - E(X_n) = 2n - np = (2 - p)n.$$

   De plus, on a

   $$V(Y_n) = V(X_n) = np(1 - p).$$

2. On a $p_1 = p$ : il faut que le premier saut de la grenouille soit un saut d'une marche. Pour déterminer $p_2$, on remarque que la grenouille passe par la marche 2 si le premier saut est un saut de deux marches ou si les deux premiers sauts sont des sauts de une marche. On a donc $p_2 = 1 - p + p^2$. On observe que la grenouille ne passe pas par la marche $k$ si elle passe par la marche $k - 1$ et si elle fait un saut de deux marches. On a donc :

   $$1 - p_k = (1 - p)p_{k-1} \iff p_k = 1 - (1 - p)p_{k-1}.$$

   On reconnaît une suite arithmético-géométrique : la suite $u_k = p_k - \frac{1}{2-p}$ est une suite géométrique de raison $p - 1$, et donc on a $u_k = (p - 1)^{k-1}u_1$, ce qui signifie que $p_k = \frac{1}{2-p} + (1 - p)^{k-1}u_1$. Puisque $u_1 = p - \frac{1}{2-p} = \frac{2p-p^2-1}{2-p}$, on a finalement :

   $$p_k = \frac{1}{2 - p} + (p - 1)^{k-1}\frac{2p - p^2 - 1}{2 - p}.$$

3. Voici un algorithme possible :

```
Variables :
  n entier
  hauteur entier
  saut entier
```

```
Traitement :
  Lire n
  hauteur=0
  saut=0
  Tant que (hauteur<n) faire
      Si (alea()<p) faire hauteur=hauteur+1
      Sinon faire hauteur=hauteur+2
      Fin si.
      saut=saut+1;
  Fin Tant que.
  Afficher saut
```

**Solution 37 (Loi faible pour des sommes de Bernoulli qui n'ont pas la même loi)**
On a $E(S_n) = m_n$ et puisque les variables aléatoires sont indépendantes,

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k).$$

On a $V(X_k) = p_k(1-p_k) \leqslant 1$ et donc $V(S_n) \leqslant \dfrac{1}{n}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on en déduit que

$$0 \leq P(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

et donc le terme au milieu tend bien vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

**Solution 38 (Fonction génératrice)**

1. Dans le cas d'une loi de Bernoulli, on a simplement :

   $$G_X(x) = (1-p) + px.$$

   Pour le cas d'une loi binomiale, on a

   $$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} x^k = (1-p+px)^n.$$

2. Il est d'abord clair que si $X$ et $Y$ ont la même loi, alors elles ont même fonction génératrice. Réciproquement, si $G_X = G_Y$, alors $G_X - G_Y$ est un polynôme qui s'annule sur $\mathbb{R}$. Tous ses coefficients sont nuls. Or le coefficient devant $x^k$ est précisément $P(X=k) - P(Y=k)$. Ainsi, on a pour tout $k$, $P(X=k) = P(Y=k)$ et donc $X$ et $Y$ ont même loi.
3. On a $G'_X(x) = \sum_{k=1}^{n} k p_k x^{k-1}$ et $G''_X(x) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) p_k x^{k-2}$. On en déduit que

   $$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{n} k p_k = E(X)$$

   puis que

   $$G''_X(1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k - \sum_{k=1}^{n} k p_k = E(X^2) - E(X).$$

   On en déduit finalement que

   $$G''_X(1) + G'_X(1) - \big(G'_X(1)\big)^2 = E(X^2) - E(X) + E(X) - \big(E(X)\big)^2 = V(X).$$

Pour la loi binomiale, on a

$$G'_X(x) = np(1-p+x)^{n-1} \text{ et } G''_X(x) = n(n-1)p^2(1-p+x)^{n-2}.$$

Il vient

$$E(X) = np$$

et

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

4. Supposons $X$ à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$ et $Y$ à valeurs dans $\{0,\dots,m\}$ et notons $Z = X+Y$. Pour $k$ entre 0 et $n+m$, on a $(Z=k) = \bigcup_{i+j=k}(X=i, Y=j)$ et donc

$$P(Z=k) = \sum_{i+j=k} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \sum_{i+j=k} P(X=i)P(Y=j)$$

puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes. Notons $a_k = P(X=k)$, $b_k = P(Y=k)$ et $c_k = P(Z=k)$. La relation précédente s'écrit

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

C'est bien que

$$\sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right)$$

c'est-à-dire

$$G_Z(x) = G_X(x)G_Y(x).$$

Par une récurrence immédiate, si $X_1,\dots,X_n$ sont $n$ variables aléatoires indépendantes et si $Z = X_1+\cdots+X_n$, alors

$$G_Z(x) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(x).$$

Une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ étant la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p$, on retrouve facilement la formule donnant la fonction génératrice d'une loi binomiale à partir de la fonction génératrice d'une loi de Bernoulli.

5. On a $G_X(x) = (1-p+px)^n$, $G_Y(x) = (1-p+px)^m$ et donc $G_Z(x) = (1-p+px)^{n+m}$. La fonction génératrice caractérisant la loi, on voit d'après la première question que $Z$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n+m,p)$.

## 10.7 Problèmes

**Problème 17 (C'est probablement bon)**
**Partie A** : Franck passe un premier examen

Franck doit réussir un examen qui consiste en un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples) de dix questions numérotées de 1 à 10. Il doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes. Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point.

Franck réussira son premier examen si sa note finale est d'au moins sept points. Franck connaît les bonnes réponses des six premières questions. Par contre, pour chacune des quatre questions suivantes, il a une probabilité $p$ de trouver la bonne réponse, avec $0 < p < 1$.

1. Prouver que si Franck ne répond pas à la question numérotée 9, il a intérêt à ne pas répondre à la question numérotée 8 pour réussir son examen.
2. Franck a-t-il intérêt à répondre à la question numérotée 10 ?
3. Déterminer, selon la valeur de $p$, quelle est la meilleure stratégie pour Franck.

**Partie B** : Franck passe un second examen

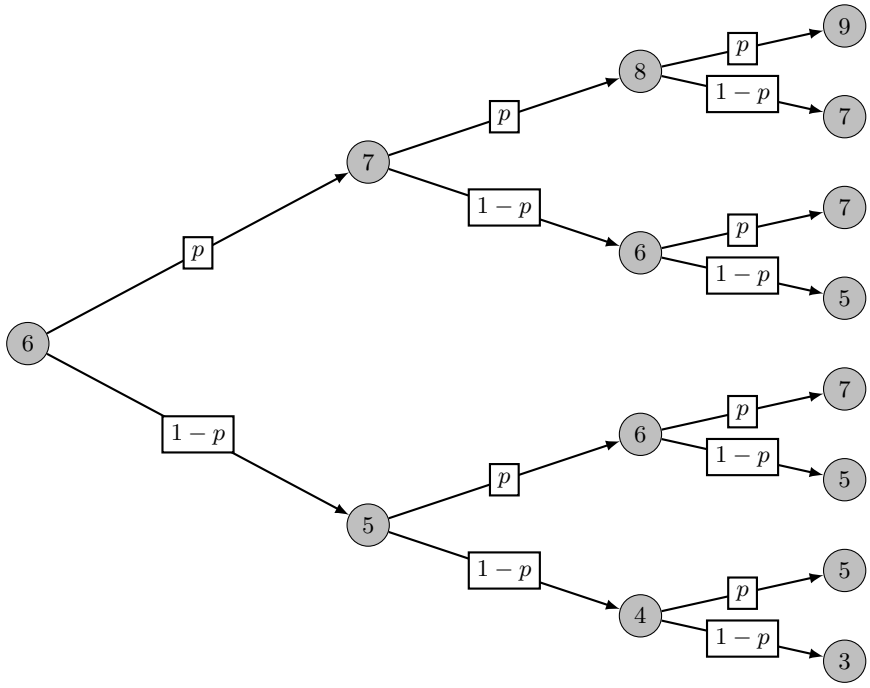
Franck passe maintenant un second examen, consistant encore en un Q.C.M, formé cette fois de 50 questions. Les modalités de cet examen sont les mêmes que celles du précédent. Ainsi Franck doit répondre à ces questions dans l'ordre et s'il ne répond pas à une question, *on ne prendra pas en compte les réponses qu'il pourrait apporter aux questions suivantes.* Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque mauvaise réponse fait perdre un point et ne pas répondre à une question ne rapporte aucun point. Cependant, pour réussir cette fois, Franck doit obtenir une note finale d'au moins 25 points. Franck connaît les réponses aux 24 premières questions. Par contre, pour chacune des 26 questions suivantes, il a une probabilité $p$ de trouver la bonne réponse, avec $0 < p < 1$.

Pour tout entier $k$ vérifiant $1 \leqslant k \leqslant 26$, on note $P_k$ la probabilité que Franck réussisse son examen en ne répondant qu'aux seules $24 + k$ premières questions.

1. Prouver que, pour tout entier $k$ vérifiant $1 \leqslant k \leqslant 13$, on a $P_{2k-1} > P_{2k}$.
2. Prouver que, pour tout entier $k$ vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 12$, on a
$$P_{2k+1} = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i (1-p)^{2k+1-i}.$$
3. Démontrer que, pour tout entier $k$ vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 11$, on a
$$P_{2k+3} - P_{2k+1} = \binom{2k+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{k+1} (2p-1).$$
On pourra utiliser librement la formule de Pascal pour $0 < m < n$ : $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$.
4. Déterminer, selon la valeur de $p$, quelle est la meilleure stratégie pour Franck.

**Correction 17 (C'est probablement bon)**
**Partie A** : Franck passe un premier examen

1.




En supposant – faute de mieux – que les réponses exactes soient indépendantes les unes des autres, le nombre de réponses exactes suit une loi binomiale de paramètres $k$ et $p$, où $k$ désigne le nombre de questions répondues au-delà de la sixième.

On a ainsi $P_7 = p$ car pour avoir l'examen en sept questions il s'agit d'avoir sept réponses exactes. De même $P_8 = p^2$ car pour avoir l'examen en huit questions il s'agit d'avoir sept réponses exactes.

Comme $P_7 > P_8$, si Franck ne répond pas à la question numérotée 9, il a intérêt à ne pas répondre à la question numérotée 8 pour réussir son examen.

2. Pour avoir l'examen en neuf questions il s'agit d'avoir neuf ($P = p^3$) ou huit ($P = 3p^2(1-p)$) réponses exactes.

   Pour avoir l'examen en neuf questions il s'agit d'avoir dix ou neuf réponses exactes. Pour cela, il est nécessaire d'avoir eu neuf ou huit réponses exactes sur les neuf premières, donc d'avoir déjà réussi l'examen. Le bon sens dicte donc à Franck de ne pas répondre à la question 10.

   Pour dix réponses exactes $P = p^4$. Pour neuf réponses exactes $P = 4p^3(1-p)$. Donc $P_{10} = p^4 + 4p^3(1-p)$. Ainsi

$$\begin{aligned} P_{10} - P_9 &= p^4 + 4p^3(1-p) - p^3 - 3p^2(1-p) \\ &= p^2(p^2 + 4p(1-p) - p - 3(1-p)) \\ &= p^2(5p^2 - 2p - 3) \\ &= p^2(p-1)(5p+3) < 0. \end{aligned}$$

   Donc le calcul confirme le bon sens.

3. En réutilisant les calculs précédents,

$$\begin{aligned} P_9 - P_7 &= p^3 + 3p^2(1-p) - p \\ &= p(p^2 + 3p - 3p^2 - 1) \\ &= p(-2p^2 + 3p - 1) \\ &= p(p-1)(1-2p). \end{aligned}$$

Donc $P_9 - P_7$ est du signe de $1-2p$. De ce fait, si $0 < p < 1/2$ alors Franck a intérêt à s'arrêter à la $7^{\text{e}}$ question. Sinon il a intérêt à s'arrêter à la $9^{\text{e}}$ question. On sait depuis les deux premières question qu'il n'a jamais intérêt de s'arrêter aux questions 8 ou 10.

**Partie B** : Franck passe un second examen

On appelle $X_k$ la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses exactes aux questions 25 à $24+k$. En particulier, on a $P_k = P(2X_k \geqslant k+1)$ puisqu'on a alors $k - X_k$ réponses fausses avec $1 \leqslant k \leqslant 26$.

De ce fait $P_{2k} = P(X_{2k} \geqslant k+1$ et $P_{2k-1} = P(X_{2k-1} \geqslant k$ avec $1 \leqslant k \leqslant 13$.

1. On distingue plusieurs cas.
   - ⋆ Examen réussi en $24+2k-1$ questions avec $X_{2k-1} > k$ donc $X_{2k} \geqslant k$ et examen réussi en $24+2k$ questions. Donc pas de changement.
   - ⋆ Examen réussi en $24+2k-1$ questions avec $X_{2k-1} = k$. Deux cas se produisent :
     - Réponse exacte à la question numéro $24+2k$ avec probabilité conditionnelle sachant $X_{2k-1} = k$ égale à $p$ : $X_{2k} = k+1$ et l'examen est réussi en $24+2k$ questions, donc pas de changement.
     - Réponse erronée à la question numéro $24+2k$ avec probabilité conditionnelle sachant $X_{2k-1} = k$ égale à $1-p$ : $X_{2k} = k$ et l'examen est raté en $24+2k$ questions, donc changement à la baisse.
   - ⋆ Examen raté en $24+2k-1$ questions avec $X_{2k-1} < k$ donc $X_{2k} \leqslant k$ et examen raté en $24+2k$ questions. Donc pas de changement.

   Le seul changement qui peut se produire est un changement à la baisse pour Franck. Il n'a pas intérêt à répondre à la question numéro $24+2k$.

   Par le calcul, en reprenant le raisonnement plus haut :

$$\begin{aligned} P_{2k-1} - P_{2k} &= P(X_{2k-1} = k) - P_{|X_{2k-1}=k}(X_{2k} = k+1) \\ &= P(X_{2k-1} = k) - pP(X_{2k-1} = k) \\ &= (1-p)P(X_{2k-1} = k) > 0. \end{aligned}$$

2. En supposant toujours que les réponses exactes soient indépendantes les unes des autres le nombre de réponses exactes aux questions 25 à $24+2k+1$ suit une loi binomiale de paramètres $2k+1$ et $p$. De ce fait pour tout $i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$,

$$P(X_{2k+1} = i) = \binom{2k+1}{i} p^i (1-p)^{2k+1-i}.$$

Pour réussir l'examen, Franck a besoin de $k+1 \leqslant i \leqslant 2k+1$ réponses exactes. Les événements $X_{2k+1} = i$ étant incompatibles deux à deux, on a

$$P_{2k+1} = P(X_{2k+1} \geqslant k+1) = \sum_{i=k+1}^{2k+1} P(X_{2k+1} = i) = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i (1-p)^{2k+1-i}.$$

3. On distingue à nouveau plusieurs cas.

- ⋆ Examen réussi en $24+2k+1$ questions avec $X_{2k-1} \geqslant k+2$ donc $X_{2k+3} \geqslant k+2$ et examen réussi en $24+2k+3$ questions. Donc pas de changement quant à l'issue de l'examen.
- ⋆ Examen raté en $24+2k-1$ questions avec $X_{2k-1} \leqslant k-1$ donc $X_{2k+3} \leqslant k+1$ et examen raté en $24+2k+3$ questions. Donc pas de changement.
- ⋆ Examen réussi en $24+2k+1$ questions avec $X_{2k-1} = k+1$. Deux cas se produisent :
  - Au moins une réponse exacte aux questions numéro $24+2k+2$ et $24+2k+3$ : $X_{2k+3} \geqslant k+2$ et l'examen est réussi en $24+2k+3$ questions, donc pas de changement.
  - Deux réponses erronées aux questions numéro $24+2k+2$ et $24+2k+3$ : avec probabilité conditionnelle sachant $X_{2k+1} = k+1$ égale à $(1-p)^2$ et l'examen est raté en $24+2k+3$ questions, donc changement à la baisse.
- ⋆ Examen raté en $24+2k+1$ questions avec $X_{2k+1} = k$. Deux cas se produisent :
  - Au moins une réponse erronée aux questions numéro $24+2k+2$ et $24+2k+3$ : $X_{2k+3} \leqslant k+1$ et l'examen est raté en $24+2k+3$ questions, donc pas de changement.
  - Deux réponses exactes aux questions numéro $24+2k+2$ et $24+2k+3$ : avec probabilité conditionnelle sachant $X_{2k+1} = k+1$ égale à $p^2$ et l'examen est réussi en $24+2k+3$ questions, donc changement à la hausse.

En ne regardant que les changement qui peuvent intervenir pour le résultat de l'examen, on obtient alors

$$\begin{aligned}
P_{2k+3} - P_{2k+1} &= \underbrace{p^2 P(X_{2k+1}=k)}_{\text{ce que Franck gagne}} - \underbrace{(1-p)^2 P(X_{2k+1}=k+1)}_{\text{ce que Franck perd}} \\
&= p^2 \binom{2k+1}{k} p^k (1-p)^{2k+1-k} - (1-p)^2 \binom{2k+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{2k+1-k-1} \\
&= p \binom{2k+1}{k} p^{k+1} (1-p)^{k+1} - (1-p) \binom{2k+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{k+1} \\
&= (2p-1) \binom{2k+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{k+1},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la symétrie des coefficients du binôme $\binom{2k+1}{k} = \binom{2k+1}{k+1}$.

4. D'après le résultat précédent, si $0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors la suite $(P_{2k+1})_{0 \leqslant k \leqslant 12}$ est décroissante. Plus le nombre de questions augmente et moins Franck a de chances de réussir l'examen. Franck a donc intérêt à arrêter à la 25e question.

   Si $p \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors la suite $(P_{2k+1})_{0 \leqslant k \leqslant 12}$ est croissante. Franck a donc intérêt à arrêter à la 49e question. (On sait que Franck n'a jamais intérêt à répondre à un nombre pair de questions.)

[D'après un exercice de concours général]

# Chapitre 11

# Dénombrement

## Sommaire


**11.1 Principes de dénombrement . . . . . 470**
**11.2 Nombre de combinaisons . . . . . 470**
**11.3 Nombre d'arrangements . . . . . 474**
**11.4 Exercices . . . . . 475**
**11.5 Solutions . . . . . 478**
**11.6 Problèmes . . . . . 482**
**11.7 Correction . . . . . 483**

**Devinette** : Combien un cheval a-t-il de sabots ?

**Réponse** : Douze. Deux à droite, deux à gauche, deux devant, deux derrière, deux devant et un à chaque coin du cheval.

Un des buts de ce chapitre est d'apprendre à compter correctement les sabots d'un cheval.

Dénombrer, c'est compter les éléments d'un ensemble fini. Nous avons déjà dénombré des chemins dans un arbre binaire dans le chapitre 10. C'est une situation fréquente en probabilité en particulier lors des équiprobabilités.

On a déjà vu – dans le cours de seconde – la définition (2 page 418) et la notation du cardinal d'un ensemble fini.

## 11.1 Principes de dénombrement

Des démonstrations de ces théorèmes – qui relèvent du bon sens cartésien – sont disponibles à l'annexe A du cours de terminale.

1. Soit $A$ et $B$ deux parties d'un même ensemble fini. On a

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B),$$

et si de plus $A$ et $B$ sont disjoints alors,

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

2. Si $A_1$, $A_2$, …, $A_m$ forment une partition (voir définition 12 page 45 dans le cours de seconde) d'un ensemble fini $E$, alors

$$\text{Card}(E) = \sum_{p=1}^{m} \text{Card}(A_p).$$

3. Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors le produit cartésien $E \times F$ est fini et on a le chiasme :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

4. Soit $E$ un ensemble fini, et $F$ un ensemble.
S'il existe une bijection de $E$ sur $F$, alors $F$ est un ensemble fini et

$$\text{Card}(F) = \text{Card}(E).$$

Inversement, si $\text{Card}(F) = \text{Card}(E)$, alors il existe une bijection de $E$ sur $F$.

## 11.2 Nombre de combinaisons

### 11.2.1 Coefficients du binôme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. On a déjà vu que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de mots distincts de $n$ lettres écrits dans l'alphabet $\{I, O\}$ et comportant $k$ fois la lettre I.

Soit $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un ensemble de cardinal $n$.

À toute partie $A$ de $E$ on associe un mot $M_A$ de $n$ lettres écrit dans l'alphabet $\{I, O\}$ : pour tout entier $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$, la $m$-ième lettre de $M_A$ est I si $x_m \in A$ et O sinon.

Inversement, à tout mot $M$ de $n$ lettres écrit dans l'alphabet $\{I, O\}$ on associe une unique partie $A_M$ de $E$ à savoir l'ensemble des $x_m$ pour lesquels la $m$-ième lettre de $M$ est I.

On obtient ainsi une bijection entre les mots de $n$ lettres écrits dans l'alphabet $\{I, O\}$ et les parties de $E$.

En particulier il y autant de parties de $E$ à $k$ éléments que de mots de $n$ lettres écrit dans l'alphabet $\{I, O\}$, à savoir $\binom{n}{k}$. D'où :

**Théorème 1**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Il y a $\binom{n}{k}$ parties à $k$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments.

On en déduit que le nombre total de parties de $E$ est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Maintenant on considère une loi binomiale de paramètres $n$ et $\frac{1}{2}$. La formule des probabilités totales 6 page 430 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \text{soit} \quad 2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Il y a donc $2^n$ parties d'un ensemble à $n$ éléments.

**Théorème 2 (Formule du binôme)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a$, $b$ deux réels. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Pour cela, on écrit $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)}_{1} \times \ldots \times \underbrace{(a+b)}_{m} \times \ldots \times \underbrace{(a+b)}_{n}$ et on développe.

On obtient ainsi $2^n$ termes comprenant chacun $n$ facteurs égaux à $a$ ou à $b$.

À la $m$-ième place d'un tel terme, on a un facteur $a$ ou $b$ suivant le choix. Un tel terme est donc codé par un mot de $n$ lettres écrit dans l'alphabet $\{a, b\}$.

Tous les termes qui ont $k$ facteurs $a$ ont nécessairement $n-k$ facteurs $b$ et sont égaux – grâce à la commutativité et l'associativité dans $\mathbb{R}$ à $a^k b^{n-k}$. On sait qu'il y a $\binom{n}{k}$ tels mots. Donc, en regroupant

ces mots suivant le nombre $k$ de facteurs $a$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n$), on obtient bien

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Démonstration 2 (Formule du binôme)**
On va procéder par étapes. On considère le polynôme $p$ défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = (1+x)^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.
D'après le théorème 10 page 434, on sait que $\forall x \geqslant 0, p(x) = 0$. Donc d'après le théorème 10 page 403, $p$ est le polynôme nul.

Maintenant, le cas général. Si $b = 0$ la somme de droite se réduit à l'unique terme d'indice $k = n$ soit $\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{n} a^n \times 1 = a^n$.

Sinon on pose $x := \dfrac{a}{b}$ et on a – d'après l'étape précédente –

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k \\
\text{donc} \qquad (a+b)^n &= b^n \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^n \left(\frac{a}{b}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.
\end{aligned}$$

Pour des démonstrations plus directes voir le théorème (complexe) 1 page 493.

### 11.2.2 Combinaison

**Définition 1** (Combinaison)**.**

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle $p$-combinaison de $E$ un sous ensemble de cardinal $p$ de $E$.

**Exemple 1**
- $\{1, 4, 7, 2, 7\}$ est une 4-combinaison de $\mathbb{N}$.
- $\{\pi, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, -1\}$ est une 4-combinaison de $\mathbb{R}$.
- $\{\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, \pi, -1\}$ est la même 4-combinaison que la précédente.

**Théorème 3 (Nombre de $p$-combinaison d'un ensemble fini)**
Soient $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $p \leqslant n$. Le nombre de $p$-combinaisons de $E$ est

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}}.$$

**Exemple 2**
- Le nombre de tirages possibles au loto est $\binom{49}{7}$.
- Le nombre de mains (c'est à dire de 5-uplet de cartes) au poker est $\binom{32}{5}$.

### 11.2.3 Nombre de $p$-listes d'un ensemble fini

**Définition 2** ($p$-liste)**.**

Soient $A$ un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *$p$-liste d'éléments de $A$* tout $p$-uplet d'éléments de $A$ c'est à dire tout élément de $A^p$.

**Exemple 3**
- $(1, 4, 7, 2, 7)$ est une 5-liste de $\mathbb{N}$.
- $(\pi, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, -1)$ est une 4-liste de $\mathbb{R}$.
- $(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, \pi, -1)$ est une 4-liste de $\mathbb{R}$ différente de la précédente.

**Théorème 4 (Nombre de $p$-listes d'un ensemble fini)**
Soient $A$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $p \in \mathbb{N}$. Le nombre de $p$-listes d'éléments de $A$ est $\boxed{n^p}$.

**Démonstration 4**
On a : $\text{Card}(E^p) = (\text{Card}(E))^p = n^p$. □

**Exemple 4**
- Le nombre de codes de 4 lettres est $26^4$.
- Le nombre de façons de réaliser un collier de 30 perles avec 3 couleurs de perles est $3^{30}$
- Le nombre de bouquets de 10 fleurs quand on choisit ces fleurs parmi 5 espèces est $5^{10}$.

### 11.2.4 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

**Notation 1.**

Si $E$ et $F$ sont des ensembles, l'ensemble des applications de $E$ dans $F$ est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou $F^E$.

**Théorème 5 (Nombre d'applications entre deux ensembles finis)**
Si $E$ et $F$ sont des ensembles finis de cardinaux respectifs $p$ et $n$ alors :

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E,F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)} = n^p}$$

**Démonstration 5**
Supposons que $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ où $n = \mathrm{Card}(E)$. Posons : $\begin{array}{rccc} \theta & : & F^E & \longrightarrow & F^p \\ & & u & \longmapsto & (u(x_1), \ldots, u(x_n)) \end{array}$. L'application $\theta$ associe à toute fonction de $E$ dans $F$ la $p$-liste des images des éléments de $E$. $\theta$ est injective et surjective, donc bijective. On en déduit que $\mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)} = n^p$ □

## 11.3 Nombre d'arrangements

**Définition 3** (Arrangement)**.**

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *$p$-arrangement de $E$* une injection de $\{1, \ldots, p\}$ dans $E$. On note $A_n^p$ le *nombre de $p$-arrangements de $E$*.

**Remarque 1.**

- $A_1^1 = n$.
- Si $p > n$, $A_n^p = 0$.
- Si $p = 0$, l'unique application de l'ensemble vide dans $E$ est injective et donc on écrira $A_n^0 = 1$.

**Remarque 2.**

Se donner un $p$-arrangement revient à se donner une $p$-liste de $E$ sans répétition.
En effet, d'après la définition, un $p$-arrangement de $E$ est une injection $\varphi$ de $\{1, \ldots, p\}$ dans $E$. Cette injection est entièrement caractérisée par la $p$-liste de ses images : $(\varphi(1), \ldots, \varphi(p))$. Il n'y a pas de répétition dans cette $p$-liste car $\varphi$ est injective.

**Théorème 6 (Nombre de $p$-arrangements d'un ensemble fini)**
Soient $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $p$ tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Le nombre de $p$-arrangements de $E$ est :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}.$$

**Démonstration 6**
Notons $\mathscr{I}$ l'ensemble des $p$-arrangements de $E$. Comme $\mathscr{I}$ est un sous ensemble de $\mathscr{F}(E,F)$ et que ce dernier est de cardinal fini, il en est de même de $\mathscr{I}$.

Afin de calculer le cardinal de $\mathscr{I}$, nous allons effectuer un raisonnement par récurrence sur $p$.

1. Si $p = 0$, on a déjà vu que $A_n^0 = 1$. La formule est donc vraie pour $p = 0$.
2. Si $p = 1$, $\{1, \ldots, p\} = \{1\}$ est un singleton et une injection de $\{1\}$ dans $E$ est déterminée par l'image de 1 par cette injection. Comme $E$ compte $n$ éléments, il y a $n$ images possibles pour 1 et cardinal de $\mathscr{I}$ est $n = \dfrac{n!}{(n-1)!}$.
3. Soit $p < n \in \mathbb{N}$.
4. Supposons la relation vraie au rang $p$, c'est notre hypothèse de récurrence, et vérifions là au rang $p+1 \leqslant n$. Une injection $\varphi$ de $\{1, \ldots, p+1\}$ dans $E$ est déterminée par sa restriction à $\{1, \ldots, p\}$ : $\varphi_{|\{1,\ldots,p\}}$ et par l'image de $p+1$ dans $E$. Par application de l'hypothèse de récurrence, il y a $A_p^n$ possibilités pour le choix de $\varphi_{|\{1,\ldots,p\}}$ et du coup $n-p$ possibilités pour le choix de l'image de $p+1$ par $\varphi$ dans $E$. Au total, cela fait $(n-p) \times A_n^p$ possibilités, soit $A_n^{p+1}$ possibilités et $\text{Card}(\mathscr{I}) = A_n^{p+1}$
5. Par application du théorème de récurrence, la formule est démontrée. □

On en déduit le corollaire

**Théorème 7 (Nombre de bijections d'un ensemble fini)**
Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, le nombre de bijections de $E$ dans lui même est $n!$.

**Exemple 5**
- Le nombre de tiercés possibles quand 15 chevaux sont en course est $A_{15}^3$.
- Le nombre de mots de 4 lettres **sans lettre répétée** est $A_{26}^4$.
- Le nombre de classements possibles dans une course automobile comptant 20 voitures est 20!.

## 11.4 Exercices

**Exercice 1** (Dial R for Rotten)**.**

Une barrière circulaire est constituée de 17 poteaux dont 5 sont pourris.
Montrer qu'il existe un ensemble de 7 poteaux consécutifs dont 3 sont pourris.

**Exercice 2.**

Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains de six cartes comprenant quatre noires, deux carreaux et aucun as ?

**Exercice 3.**

On considère l'ensemble de chiffres $S := \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1. Combien de nombres différents de 5 chiffres peut on écrire en utilisant 5 chiffres différents de $S$.
2. Calculer la somme de tous ces nombres.

**Exercice 4** (Somme de coefficients binomiaux)**.**

Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$

**Exercice 5.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $Q$ l'ensemble des quadruplets d'entiers $(h, i, j, k)$ avec $0 \leqslant h, i, j < k \leqslant n$. Calculer $\mathrm{Card}(Q)$.
2. Soit $P$ l'ensemble des paires de couples d'entiers $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant n$ et $0 \leqslant x_3 < x_4 \leqslant n$.
   Calculer $\mathrm{Card}(P)$.
3. Démontrer que :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : Q & \longrightarrow & P \\ (h,i,j,k) & \longmapsto & \begin{cases} \{(h,i),(j,k)\} & \text{si} \quad h < i \\ \{(i,k),(j,k)\} & \text{si} \quad h = i \\ \{(j,k),(i,h)\} & \text{si} \quad h > i \end{cases} \end{array}$$

réalise une bijection de $Q$ sur $P$.

**Exercice 6.**

Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments.
Calculer le nombre de couples $(X, Y)$ de parties de $E$ vérifiant

$$X \cup Y = E.$$

**Exercice 7.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne comportant $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. On effectue une suite de $n+1$ tirages d'une boule sans remise. Une telle suite de tirages est représentée par une liste injective $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$. On appelle $X(\omega)$ le numéro du dernier tirage d'un nombre impair. Par exemple, pour $n = 4$ et $\omega = (5, 2, 8, 1, 4)$ on a $X(\omega) = 4$.
On appelle $\Omega$ l'ensemble des listes $\omega$ possibles.

1. Calculer $\mathrm{Card}(\Omega)$.
2. Expliquer pourquoi $X(\omega)$ est défini pour tout $\omega \in \Omega$.
3. Démontrer que $P(X \leqslant k) = \dfrac{\binom{n+k-1}{n}}{\binom{2n}{n}}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$.

**Exercice 8** (Combinaisons avec répétitions)**.**

1. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2, \ldots, 8\}$ ?
2. Combien y a-t-il d'applications croissantes de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2, \ldots, 6\}$ ?
3. Combien y a-t-il de combinaisons possibles au 421 ?

**Exercice 9.**

Parmi les entiers de six chiffres,

1. Combien y en a-t-il qui ne comportent que des chiffres impairs ? Quelle est la somme $S_I$ de ces nombres ?
2. Combien y en a-t-il qui ne comportent que des chiffres pairs ? Quelle est la somme $S_P$ de ces nombres ?

**Exercice 10** (Coefficients du binôme)**.**

Suite de l'exercice 35 page 22.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \neq 0$. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} a^{k-1} b^{p-k} x^k + \frac{b^p - b}{a}$.

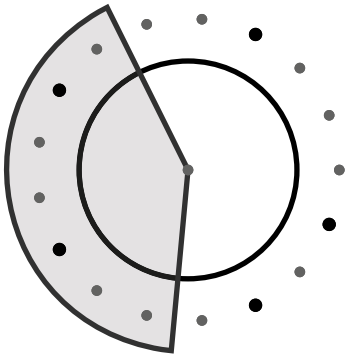
Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{\circ n}(x) = \frac{(ax+b)^{p^n} - b}{a},$$

où $f^{\circ n} = f \circ \ldots \circ f$ désigne la fonction $f$ composée $n$ fois.

## 11.5 Solutions

**Solution 1 (Dial R for Rotten)**



On fait tourner un cadran qui embrasse sept poteaux. Il va prendre 17 positions. À chaque position, on compte le nombre de poteaux pourris qui se trouvent à l'intérieur du cadran ce qui procure autant de points. Chaque poteau va voir passer le cadran sept fois lorsque le cadran effectue un tour complet. Au total on marque $5 \times 7 = 35$ points.

Supposons l'espace d'un instant que tout ensemble de 7 poteaux consécutifs contienne au plus 2 poteaux pourris, chaque position du cadran donne moins de 2 points. Comme il y a 17 positions du cadran, cela procurerait au maximum $2 \times 17 = 34$ points ce qui n'est pas acceptable.

Donc le maximum de points récoltés par un cadran est supérieur ou égal à 3.

De même, en supposant – toujours l'espace d'un instant – que tout ensemble de 7 poteaux consécutifs contienne au moins 3 poteaux pourris, cela procurerait au minimum $3 \times 17 = 51$ points.

Donc le minimum de points récoltés par un cadran est inférieur ou égal à 2.

Enfin, chaque fois qu'on tourne le cadran d'un cran, le nombre de points augmente d'une unité, reste constant ou diminue d'une unité suivant les quatre cas : le poteau qui apparaît est ou non pourri, celui qui disparaît est ou non pourri. De ce fait, l'ensemble des points que rapportent les différents cadrans est un intervalle de $\mathbb{N}$ dont le minimum est inférieur ou égal à 2 et le maximum est supérieur ou égal à 3. Donc il contient 3, ce qu'il fallait démontrer.

**Solution 2**

Si l'on écarte les quatre as, il reste 28 cartes dont 14 noires et 7 carreaux. Le nombre de mains cherché est donc le produit du nombre de parties à 4 éléments d'un ensemble à 14 éléments par le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à 7 éléments, soit

$$\binom{14}{4} \times \binom{7}{2} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 7 \times 12 \times 11 \times 7 \times 3 = 19404.$$

**Solution 3**

1. On a $\dfrac{7!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2\,520$ nombres distincts possibles.
2. On écrit – par la pensée – tous les nombres obtenus, les uns au dessous des autres, pour en faire la somme.

   Les effectifs de chacun des chiffres de chaque colonne sont égaux à $\dfrac{2520}{7} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

   Donc la somme des chiffres dans chaque colonne est la même : $360 \times 35 = 12600$, 35 étant la somme de tous les nombres de $S$.

   On trouve donc $12600 \times 11111 = 139998600$ comme somme de tous les nombres écrits.

**Solution 4**

**Première méthode :**

On procède par récurrence sur $q$, à $p$ fixé.

La propriété est vraie au pas initial $q = p$.

Si elle est vraie au rang $q \geqslant p$, alors :

$$\sum_{k=p}^{q+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} + \binom{q+1}{p} = \binom{q+1}{p+1} + \binom{q+1}{p} = \binom{q+2}{p+1}.$$

Ce qui prouve la propriété au rang $q+1$ et achève la récurrence.

**Deuxième méthode :**

Pour tout $k \geq p$, on a : $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$. On en déduit :

$$\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{q} \left( \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{q+1}{p+1} - \binom{p}{p+1}\binom{q+1}{p+1}$$

**Troisième méthode :**

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $[\![1, q+1]\!]$ qui ont $p+1$ éléments.

On sait que $\text{card}(\mathcal{A}) = \binom{q+1}{p+1}$. Soit $\mathcal{A}_k = \{X \in \mathcal{A},\ \max(X) = k+1\}$.

Former $X \in \mathcal{A}_k$, c'est choisir les $p$ éléments de $X \setminus \{k+1\}$ dans $[\![1, k]\!]$.

Pour cela, il y a $\binom{k}{p}$ possibilités.

Ainsi $\text{card}(\mathcal{A}) = \sum_{k=p}^{q} \text{card}(\mathcal{A}_k)$, c'est-à-dire : $\binom{q+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p}$.

**Solution 5**

1. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$ on a $k$ possibilités pour $h$ à savoir $0, 1, \ldots, k-1$ ; idem pour $i$ et pour $j$, soit au total $k^3$ triplets $(h, i, j)$ dans $Q_k := \left\{(h, i, j) \in \mathbb{N}^3,\ 0 \leqslant h, i, j < k\right\}$.

   Il y a donc $\sum_{k=1}^{n} k^3$ quadruplets $(h, i, j, k) \in Q$ différents, puisque si $k \neq \ell$ alors $Q_k \cap Q_\ell = \varnothing$.

2. Le nombre de couples $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant n$ est égal au nombre de parties à deux éléments de l'ensemble $[\![0, n]\!]$ à $n+1$ éléments. Il y a donc $\binom{n+1}{2}$ tels couples et $\binom{n+1}{2}^2$ paires de couples : $\text{Card}(P) = \binom{n+1}{2}^2$.

3. ► • Si $h < i$, alors on a bien $h < i$ et $j < k$, donc $\Phi(h, i, j, k) = \{(h, i), (j, k)\} \in P$.
   • Si $h = i$, alors on a bien $i < k$ et $j < k$, donc $\Phi(h, i, j, k) = \{(i, k), (j, k)\} \in P$.
   • Si $h > i$, alors on a bien $i < h$ et $j < k$, donc $\Phi(h, i, j, k) = \{(j, k), (i, h)\} \in P$.
   On a épuisé tous les cas. Donc $\Phi$ est une application de $Q$ dans $P$.
   ► Soient $(h, i, j, k)$ et $(h', i', j', k')$ deux éléments de $Q$ tels que $\Phi(h, i, j, k) = \Phi(h', i', j', k')$. Comme $k$ est le plus grand des entiers apparaissants dans $\Phi(h, i, j, k)$ on a donc $k = k'$.
   • Si $h < i$, alors $\Phi(h, i, j, k) = \{(h, i), (j, k)\} = \Phi(h', i', j', k')$. On a donc $j = j'$ et $(h, i) = (h', i')$.
   • Si $h = i$, alors $\Phi(h, i, j, k)$, comme $\Phi(h', i', j', k')$ est composé de deux couples comportant $k$. Donc $h' = i'$ et $\{i, j\} = \{i', j'\}$. Donc $i = i'$ c'est l'entier qui apparaît deux fois, trois si $h = i = j$. Il ne reste plus que $j = j'$.
   • Si $h > i$, alors $j = j'$ puis $(i, h) = (i', h')$.
   Dans les trois cas, on a $(h, i, j, k) = (h', i', j', k')$. C'est dire que $\Phi$ est une injection de $Q$ dans $P$.
   ► Soit $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant n$ et $0 \leqslant x_3 < x_4 \leqslant n$.

- Si $x_2 = x_4$, alors $\Phi(x_1, x_1, x_3, x_4) = \{(x_1, x_2), (x_3, x_4)\}$.
- Si $x_2 < x_4$, alors $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(x_1, x_2), (x_3, x_4)\}$.
- Si $x_2 > x_4$, alors $\Phi(x_3, x_4, x_1, x_2) = \{(x_1, x_2), (x_3, x_4)\}$.

Dans les trois cas, on obtient $\{(x_1, x_2), (x_3, x_4)\} \in P$ comme l'image d'un élément de $Q$. C'est bien dire que $\Phi$ est une surjection de $Q$ sur $P$.

On en déduit que $\mathrm{Card}(P) = \mathrm{Card}(Q)$. Soit

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

**Solution 6**

Soit $0 \leqslant p \leqslant n$. Soit $X$ une partie à $p$ éléments de $E$. Il y a $\binom{n}{p}$ telles parties.

Soit maintenant $Y$ une partie de $E$ vérifiant $X \cup Y = E$. On a donc $\overline{X} \subset Y$ donc $\overline{Y} \subset X$.

Or il y a $2^p$ parties $Z$ de l'ensemble $X$ a $p$ éléments. Il y a donc $2^p$ parties $\overline{Z}$ qui contiennent l'ensemble $\overline{X}$.

Ce qui donne $2^p\binom{n}{p}$ couples $(X, Y)$ vérifiant $X \cup Y = E$ avec $\mathrm{Card}X = p$.

En faisant varier $p$ entre 0 et $n$, on trouve

$$\sum_{p=0}^{n} 2^p \binom{n}{p} = (2+1)^n = 3^n$$

couples $(X, Y)$ vérifiant $X \cup Y = E$.

On trouve donc autant de couples que d'applications d'un ensemble à $n$ éléments vers un ensemble à 3 éléments, disons $T := \{n, x, y\}$, ce qui inspire une deuxième solution.

Soit $(X, Y)$ un couple vérifiant $X \cup Y = E$.

On considère l'application
$$\begin{array}{rccl} \Phi_{X,Y} : & E & \longrightarrow & T \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} n & \text{si} \quad t \in X \cap Y \\ x & \text{si} \quad t \in X \setminus (X \cap Y) \\ y & \text{si} \quad t \in Y \setminus (X \cap Y) \end{cases} \end{array}.$$

$\Phi_{X,Y}$ est bien une application puisque $X \cup Y = E$.

Inversement si $\Phi$ est une application de $E$ vers $T$. On définit $X = \{t \in E,\ \Phi(t) \in \{n, x\}\}$ et $Y = \{t \in E,\ \Phi(t) \in \{n, y\}\}$. On a $X \cup Y = E$ et $\Phi = \Phi_{X,Y}$.

On a bien une bijection entre l'ensemble des couples $(X, Y)$ de parties de $E$ vérifiant $X \cup Y = E$ et $T^E$, ce qu'il suffisait d'établir.

**Solution 7**

1. Le nombre de listes injectives de $n+1$ éléments dans un ensemble à $2n$ éléments est $(2n) \times (2n-1) \times \ldots \times n = \dfrac{(2n)!}{(n-1)!}$.
2. Soit $\omega$ une liste de $\Omega$, Soit $P = \{k \in [\![1, n+1]\!], w_k \text{ est pair.}\}$ et $I = \{k \in [\![1, n+1]\!], w_k \text{ est impair.}\}$. On a $\mathrm{Card}(P) + \mathrm{Card}(I) = n+1$. Comme $\mathrm{Card}(P) \leqslant n$ on a $\mathrm{Card}(I) = n+1-\mathrm{Card}(P) \geqslant n+1-n \geqslant 1$. Donc $I$ est une partie finie, non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus grand élément $X(\omega)$.
3. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$ et $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \leqslant k$. On sait pour $m > k, \omega_m$ est pair.

   On a donc
   $$\begin{array}{rll} n & \text{choix pour la boule paire} & \omega_{k+1} \\ n-1 & \text{choix pour la boule paire} & \omega_{k+2} \\ \vdots & & \vdots \\ k & \text{choix pour la boule paire} & \omega_{n+1} \end{array}$$

soit au total $n \times (n-1) \times \ldots \times k = \dfrac{n!}{(k-1)!}$ pour les $n-k+1$ dernières boules.

Il reste donc $2n-(n-k+1) = n+k-1$ choix pour la première boule, $n+k-2$ choix pour la deuxième boule, etc.

Soit $\dfrac{n+k-1}{(n-1)!}$ pour les $k$ premières boules.

On a donc au total $\dfrac{n!}{(k-1)!} \times \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$ listes $\omega \in \Omega$ telles que $X(\omega) \leqslant k$.

De ce fait, on a bien

$$P(X \leqslant k) = \frac{\dfrac{n!}{(k-1)!} \times \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}}{\dfrac{(2n)!}{(n-1)!}} = \frac{n!(n+k-1)!}{(k-1)!(2n)!} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} \times \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{\binom{n+k-1}{n}}{\binom{2n}{n}}.$$

**Solution 8 (Combinaisons avec répétitions)**

1. Une application strictement croissante de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,\ldots,8\}$ est caractérisée par son ensemble image. Puisqu'une application strictement croissante est injective, cet ensemble image possède trois éléments. Il y a donc $\binom{8}{3} = \dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 56$ applications strictement croissantes de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,\ldots,8\}$.
2. On va coder chaque application $f$ croissante de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,\ldots,6\}$ par une application strictement croissante $g$ de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,\ldots,8\}$ et inversement.
   - Si $f$ est strictement croissante, on prend $g = f$.
   - Si $a = f(1) = f(2) < f(3) = b$, on prend $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = 7$.
   - Si $a = f(1) < f(2) = f(3) = b$, on prend $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = 8$.
   - Si $a = f(1) = f(2) = f(3)$, on prend $g(1) = a$, $g(2) = 7$, $g(3) = 8$.

   Inversement, à partir d'une application strictement croissante $g$ de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,\ldots,8\}$, il est facile de reconstituer l'application $f$ croissante de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,\ldots,6\}$ dont elle est issue.

   Il y a donc autant d'applications croissantes de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,\ldots,6\}$ que d'applications strictement croissantes de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,\ldots,8\}$ : 56.
3. Pour chaque tirage au 421, on peut ranger les trois dés dans l'ordre croissant : il y a donc 56 tirages possibles au 421.

**Solution 9**

1. Il y a cinq choix possibles pour chacune des six places. Il y a donc $5^6$ tels nombres.

   On écrit ces $5^6$ nombres les uns au-dessous des autres et on les additionne. Chacun de chiffres $1,3,5,7,9$ apparaît $5^5$ fois dans la colonne des unités, $5^5$ fois dans la colonne des dizaines, etc. Dans chaque colonne, la somme des chiffres est donc $1\times 5^5 + 3\times 5^5 + 5\times 5^5 + 7\times 5^5 + 9\times 5^5 = 25\times 5^5 = 5^7$. Donc $S_I = 5^7\left(1+10+\ldots 10^5\right) = 5^7 \times 111111 = 8680546875$.
2. Pour le chiffre de gauche il y a quatre choix et pour les cinq autres, il y a cinq choix, soit au total : $4\times 5^5$ nombres de six chiffres qui ne comportent que des chiffres pairs.

   Sur la colonne de gauche, chaque chiffre apparaît avec la même fréquence donc $5^5$ fois. La somme des chiffres est alors $(2+4+6+8)\times 5^5 = 20\times 5^5$ soit une contribution égale à $20\times 5^5\times 10^5$ à la somme $S_P$.

   Sur les cinq dernières colonnes, chaque chiffre apparaît avec la même fréquence donc $4\times 5^4$ fois. La somme des chiffres est alors $(2+4+6+8)\times 4\times 5^4 = 80\times 5^4$ soit une contribution égale à

$80 \times 5^4 \times \left(1 + 10 + \ldots 10^4\right)$ à la somme $S_P$. En fin de compte

$$S_P = 20 \times 5^5 \times 10^5 + 80 \times 5^4 \times 11111 = 555612500.$$

**Solution 10 (Coefficients du binôme)**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{H}_n$ la proposition : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{\circ n}(x) = \dfrac{(ax+b)^{p^n} - b}{a}$.

La proposition $\mathcal{H}_0$ est claire dans la mesure où $2^0 = 1$ et $(ax+b)^{2^0} - b = ax$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a $\mathcal{H}_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
f^{\circ(n+1)}(x) = f\left(\circ f^{\circ n}\right)(x) &= \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} a^{k-1} b^{p-k} \circ f^{\circ n}(x)^k + 2b\left(\circ f^{\circ n}\right) + \frac{b^p - b}{a} \\
&= \frac{1}{a}\left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \left(\frac{(ax+b)^{p^n} - b}{a}\right)^k + b^p - b\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \left(\frac{(ax+b)^{p^n} - b}{a}\right)^k - \underbrace{b^p}_{k=0} + b^p - b\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b^{p-k} \left(\underbrace{(ax+b)^{p^n} - b}_{:=\alpha}\right)^k - \underbrace{b^p}_{k=0} + b^p - b\right) \\
&= \frac{1}{a}\left((b+\alpha)^p - b\right) \\
&= \frac{1}{a}\left((ax+b)^{p^n}\right)^p - b \\
&= \frac{(ax+b)^{p^{n+1}} - b}{a}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait vérifier pour obtenir $\mathcal{H}_{n+1}$.

D'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n$.

## 11.6 Problèmes

**Problème 18**
Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $S_1(x) := \dfrac{x(x+1)}{2}$, et pour $r \geqslant 2$,

$$S_r(x) := \frac{1}{r+1}\left((x+1)((x+1)^r - 1) - \sum_{i=1}^{r-1} \binom{r+1}{i} S_i(x)\right).$$

1. Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*,\ S_r(x)$ est un polynôme de degré $r+1$.
2. Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(x+1)\left((x+1)^r - 1\right) = x(x+1)^r + (x+1)\left((x+1)^{r-1} - 1\right).$$
3. Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{i=1}^{r} \binom{r+1}{i-1} x^i = x\left((x+1)^{r+1} - x^r(r+x+1)\right).$$

4. Démontrer que pour tous $r, n \in \mathbb{N}$, $S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$.

On se souvient que $S_1^2 = S_3$. Voir exercice 11 page 16 (ou l'exercice 5).

5. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) := \frac{1}{2}(x^2+x)^4$.
   (a) Vérifier que $8S_3^2(p) = \sum_{\ell=1}^{p} (u(\ell) - u(\ell-1))$.
   (b) En déduire que $2S_3^2(p) = S_7(p) + S_5(p)$. (Identité de Jacobi)
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Cette fois, on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) := \frac{1}{2}(x^2+x)^{2n}$.
   (a) Vérifier que $2^{2n-1}S_3^n(p) = \sum_{\ell=1}^{p} (u(\ell) - u(\ell-1))$.
   (b) En déduire que $2^{2n-1}S_3^2(p) = \sum_{m=1}^{n} \binom{2n}{2m-1} S_{2n+2m-1}(p)$.
7. Démontrer le théorème suivant :

> **Théorème 8 (Faulhaber)**
> Soit $y := 1+2+3+\cdots+p = \frac{p^2+p}{2}$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un polynôme $P_k$ de degré $k$, tel que $S_{2k-1}(p) = P_k(y)$.

8. On se propose de démontrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{H}_r$ : $\forall k \in [\![1, r]\!]$, il existe un polynôme $Q_k$ de degré $k$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_{2k}(p) = (2p+1)Q_k\left(\frac{1}{2}p(p+1)\right) = (2p+1)Q_k(y)$.
   (a) Vérifier que $Q_1(y) = \frac{y}{3}$.
   (b) Vérifier – par exemple avec `XCas` – que $Q_2(y) = \frac{2y^2}{5} - \frac{y}{15}$.
   (c) Démontrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{H}_r$.

## 11.7 Correction

**Correction 18**

1. Par une récurrence forte, la proposition est vraie pour $r = 1$.
   Si chacun des $S_i$ pour $i = 1, \ldots, r-1$ est de degré $i+1$ alors
   $$P(x) = -\sum_{i=1}^{r-1} \binom{r+1}{i} S_i(x)$$
   est un polynôme de degré inférieur ou égal à $r$. Donc $S_r(x)$ est la somme du polynôme $(x+1)((x+1)^r - 1)$ de degré $r+1$ et du du polynôme $P$. Il est donc de degré $r+1$.
   Par récurrence forte, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $S_r(x)$ est un polynôme de degré $r+1$.
2. On a
   $$\begin{aligned}(x+1)\left((x+1)^r - 1\right) &= (x+1)(x+1)^r - (x+1)\\ &= x(x+1)^r + (x+1)^r - (x+1)\\ &= x(x+1)^r + (x+1)\left((x+1)^{r-1} - 1\right).\end{aligned}$$

Solutions

3. On remarque que $\binom{k}{-1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   On procède par récurrence la proposition $\mathcal{P}_r$ : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{r+1}{i-1} x^i = x\left((x+1)^{r+1} - x^r(r+x+1)\right).$$

   Si $r = 1$,

$$\sum_{i=1}^{1} \binom{2}{i-1} n^i = \binom{2}{0} n^1 = n = n\left((n+1)^2 - n(1+n+1)\right),$$

   Soit $r \in \mathbb{N}^*$ un entier pour lequel on a $\mathcal{P}_r$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r+1} \binom{r+2}{i-1} x^i &= \sum_{i=1}^{r+1} \left( \binom{r+1}{i-1} + \binom{r+1}{i-2} \right) x^i \\
&= \sum_{i=1}^{r+1} \binom{r+1}{i-1} x^i + \sum_{i=1}^{r+1} \binom{r+1}{i-2} x^i \\
&= \sum_{i=1}^{r} \binom{r+1}{i-1} x^i + \binom{r+1}{r} x^{r+1} + \underbrace{\sum_{i=2}^{r+1} \binom{r+1}{i-2} x^i}_{\text{d'après la remarque}} \\
&= x\left((x+1)^{r+1} - x^r(r+x+1) + x^r(r+1)\right) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{r} \binom{r+1}{i-1} x^{i+1} \\
&= x\left( (x+1)^{r+1} - x^{r+1} + \sum_{i=1}^{r} \binom{r+1}{i-1} x^i \right) \\
&= x\left((x+1)^{r+1} - x^{r+1} + x((x+1)^{r+1} - x^r(r+x+1))\right) \\
&= x\left((x+1)^{r+1} - x^{r+1} + x(x+1)^{r+1} - x^{r+1}(r+x+1)\right) \\
&= x\left((x+1)^{r+2} - n^{r+1}((r+1)+x+1)\right).
\end{aligned}$$

**Remarque 3.**

On peut obtenir cette dernière égalité par télescopage. En écrivant provisoirement $\sigma_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$, on a :

$$\begin{aligned}(n+1)^r - 1 &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^r - k^r \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} k^i \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \sum_{k=1}^{n} k^i \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \sigma_i(n).\end{aligned}$$

L'entier $n$ étant fixé, les suites $S_r(n)$ et $\sigma_r(n)$ suivent la même relation de récurrence, elles sont égales puisque $S_1(n) = \sigma_1(n)$.

Solutions

4. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{H}_r$ : $\forall i \in [\![1, r]\!],\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_i(n) = \sum_{k=1}^{n} k^i$.

   Pour $r = 1$, on a $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k$, donc $\mathcal{H}_1$.

   Pour $r = 2$,

$$\begin{aligned}S_2(n) &= \frac{1}{3}\left((n+1)\left((n+1)^2 - 1\right) - \binom{3}{1} S_1(n)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left((n+1)(n^2+2n) - 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\left(2(n+2) - 3\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2,\end{aligned}$$

   donc $\mathcal{H}_2$.

Soit $r \geqslant 2$, un entier pour lequel on a $S_i(n) = \sum_{k=1}^{n} k^i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$. Alors,

$$\begin{aligned}
(r+2)S_{r+1}(n) &= (n+1)\left((n+1)^{r+1}-1\right) - \sum_{i=1}^{r}\binom{r+2}{i}S_i(n)\\
&= (n+1)\left((n+1)^{r+1}-1\right) - \sum_{i=1}^{r}\left(\binom{r+1}{i}+\binom{r+1}{i-1}\right)S_i(n)\\
&= \underbrace{n(n+1)^{r+1} + (n+1)\left((n+1)^{r}-1\right)}_{\text{d'après 2}} - \sum_{i=1}^{r-1}\binom{r+1}{i}S_i(n)\\
&\qquad - (r+1)S_r(n) - \sum_{i=1}^{r}\binom{r+1}{i-1}S_i(n)\\
&= n(n+1)^{r+1} + \underbrace{(r+1)S_r(n)}_{\text{par définition de } S_r(n)} - (r+1)S_r(n) - \sum_{i=1}^{r}\binom{r+1}{i-1}S_i(n)\\
&= n\sum_{i=0}^{r+1}\binom{r+1}{i}n^i - \sum_{i=1}^{r}\binom{r+1}{i-1}S_i(n)\\
&= \sum_{i=1}^{r+2}\binom{r+1}{i-1}n^i - \sum_{i=1}^{r}\binom{r+1}{i-1}S_i(n)
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
(r+2)S_{r+1}(n) &= n^{r+2} + (r+1)n^{r+1} - \sum_{i=1}^{r}\binom{r+1}{i-1}S_i(n-1)\\
&= n^{r+2} + (r+1)n^{r+1} - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{r}\binom{r+1}{i-1}k^i\\
&= n^{r+2} + (r+1)n^{r+1} - \sum_{k=1}^{n-1}\underbrace{k\left((k+1)^{r+1} - k^r(r+k+1)\right)}_{\text{d'après 3}}\\
&= n^{r+2} + (r+1)n^{r+1} - \sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)^{r+1} + \sum_{k=1}^{n-1}k^{r+1}(k-1) + \sum_{k=1}^{n-1}k^{r+1}(r+2)\\
&= n^{r+2} + (r+1)n^{r+1} - (n-1)n^{r+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(r+2)k^{r+1}\\
&= (r+2)\left(n^{r+1} + \sum_{k=1}^{n-1}k^{r+1}\right)\\
&= (r+2)\sum_{k=1}^{n}k^{r+1}.
\end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{H}_{r+1}$.

Ainsi, $S_r(n) = \sum_{k=1}^{n} k^r$ pour tous entiers naturels $r$ et $n$.

5. (a) On a pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $8S_3^2 = 8S_3^2(p) = 8\left(\frac{p^2+p}{2}\right)^4 = u(p)$.

   Par télescopage, on a bien $\sum_{\ell=1}^{p} (u(\ell) - u(\ell-1)) = u(p) - u(0) = u(p)$.

   (b) On a donc

$$\begin{aligned}
2S_3^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{p}(\ell^4(\ell+1)^4 - (\ell-1)^4\ell^4)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{p}\ell^4((\ell+1)^4 - (\ell-1)^4)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{p}\ell^4((\ell^4+4\ell^3+6\ell^2+4\ell+1) - (\ell^4-4\ell^3+6\ell^2-4\ell+1)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{p}\ell^4(8\ell^3+8\ell)\right)\\
&= \sum_{\ell=1}^{p}\ell^7 + \ell^5\\
&= S_7 + S_5.
\end{aligned}$$

6. (a) Sans difficulté : Identique au 5a.

   (b) On développe

$$\begin{aligned}
2^{2n-1}S_3^n(p) &= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{p}(\ell^{2n}(\ell+1)^{2n} - (\ell-1)^{2n}\ell^{2n})\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{p}\ell^{2n}((\ell+1)^{2n} - (\ell-1)^{2n}).
\end{aligned}$$

   D'après la formule du binôme

$$\begin{aligned}
(\ell+1)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}\ell^j\\
(\ell-1)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n}(-1)^j\binom{2n}{j}\ell^j
\end{aligned}$$

   On effectue la demi-différence des deux lignes ci-dessus. Les termes d'indices $j$ pairs se simplifient. Restent les termes d'indices $j = 2m-1$ impairs pour $m$ variant de 1 à $n$ :

$$\frac{1}{2}\left((\ell+1)^{2n} - (\ell-1)^{2n}\right) = \sum_{m=1}^{n}\binom{2n}{2m-1}\ell^{2m-1}.$$

On achève les calculs :

$$\begin{aligned}
2^{2n-1}S_3^n(p) &= \sum_{\ell=1}^{p}\ell^{2n}\sum_{m=1}^{n}\binom{2n}{2m-1}\ell^{2m-1}\\
&= \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{m=1}^{n}\binom{2n}{2m-1}\ell^{2n+2m-1}\\
&= \sum_{m=1}^{n}\binom{2n}{2m-1}\sum_{\ell=1}^{p}\ell^{2n+2m-1}\\
&= \sum_{m=1}^{n}\binom{2n}{2m-1}S_{2n+2m-1}.
\end{aligned}$$

7. On calcule pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
2^{2n}y^{2n+1} = 2^{2n}S_1(p)S_3^n(p) &= \frac{1}{2}\left(p(p+1)\right)^{2n+1}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{p}(\ell^{2n+1}(\ell+1)^{2n+1}-(\ell-1)^{2n+1}\ell^{2n+1})\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{p}\ell^{2n+1}\sum_{j=0}^{2n+1}\left(\binom{2n+1}{j}\ell^j-\binom{2n+1}{j}(-1)^{2n+1-j}\ell^j\right).
\end{aligned}$$

On a pour tous $j$ et $n$, $\quad -(-1)^{2n+1-j}=(-1)^j$, donc $1-(-1)^{2n+1-j}=\begin{cases}0 & \text{pour } j \text{ impair}\\ 2 & \text{pour } j \text{ pair}\end{cases}$

On a donc

$$\begin{aligned}
2^{2n}S_1(p)S_3^n(p) &= \sum_{\ell=1}^{p}\ell^{2n+1}\sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{2m}\ell^{2m}\\
&= \sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{2m}S_{2n+2m+1}.
\end{aligned}$$

**Énoncé** Soit $r\in\mathbb{N}^*$ un entier et $\mathcal{H}_r$ la proposition : $\forall k\in[\![1,r]\!]$, il existe un polynôme $P_k$ de degré $k$ tel que $\forall p\in\mathbb{N},\ S_{2k-1}(p)=P_k\left(\frac{1}{2}p(p+1)\right)=P_k(y)$.

**Initialisation** On a clairement $\mathcal{H}_1$ avec $P_1(y)=y$ et $\mathcal{H}_2$ avec $P_2(y)=y^2$ grâce à l'exercice 11 page 16.

**Hérédité** Soit $r\in\mathbb{N}^*$ un entier pour lequel on a $\mathcal{H}_r$. Il ne reste plus qu'à trouver $P_{r+1}$ de degré $r+1$ tel que $S_{2r+1}(p)=P_{r+1}(y)$. Deux cas se présentent.

- Si $r=2n$ est pair, on a $2r+1=4n+1$. D'après le 7, on a en isolant le terme d'indice $m=n$,

$$2^{2n}y^{2n+1}=\binom{2n+1}{2n}S_{2n+2n+1}+\sum_{m=0}^{n-1}\binom{2n+1}{2m}S_{2n+2m+1}.$$

D'après $H_r$, on peut écrire $S_{2n+2m+1}=P_{n+m+1}(y)$. On peut donc prendre

$$P_{2n+1}(y)=P_{r+1}(y):=\frac{1}{2n+1}\left(2^{2n}y^{2n+1}-\sum_{m=0}^{n-1}\binom{2n+1}{2m}P_{n+m+1}(y)\right).$$

- Si $r = 2n-1$ est pair, on a $2r+1 = 4n-1$. D'après le 6, on a en isolant le terme d'indice $m = n$,

$$2^{2n-1}y^{2n} = \binom{2n}{2n-1} S_{2n+2n-1} + \sum_{m=1}^{n-1} \binom{2n}{2m-1} S_{2n+2m-1}.$$

D'après $\mathcal{H}_r$, on peut écrire $S_{2n+2m-1} = P_{n+m-1}(y)$. On peut donc prendre

$$P_{2n}(y) = P_{r+1}(y) := \frac{1}{2n}\left(2^{2n-1}y^{2n} - \sum_{m=1}^{n-1}\binom{2n}{2m-1} P_{n+m}(y)\right).$$

**Conclusion** On a $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et $\forall r \geqslant 2,\ \mathcal{H}_r \Longrightarrow \mathcal{H}_{r+1}$. D'après le théorème de récurrence, on a $\forall r \geqslant 1,\ \mathcal{H}_r$.

8. (a) Voir par exemple l'exercice 10 page 15.

(b)

**Xcas en ligne**. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
s(p):=sum(n^4,n,1,p)
                    (p)->sum(n^4,n,1,p)
t:=unapply(s(p)/(p*(p+1)*(2*p+1)),p)
      (p)->(6*(p+1)^5-15*(p+1)^4+10*(p+1)^3-p-1)/30/p/(p+1)/(2*p+1)
simplify(t)
                    (p)->(3*p^2+3*p-1)/30
```

(c) On a $\mathcal{H}_1$ puis $\mathcal{H}_2$ d'après les deux questions précédentes. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier pour lequel on a $\mathcal{H}_{k-1}$.

► Si $k = 2r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$, alors, par télescopage,

$$\begin{aligned}
(2p+1)\left[p(p+1)\right]^{2r} &= \sum_{k=1}^{p}(2k+1)k^{2r}(k+1)^{2r} - (2k-1)k^{2r}(k-1)^{2r} \\
&= 2\sum_{k=1}^{p} k^{2r+1}\left[(k+1)^{2r} - (k-1)^{2r}\right] + \sum_{k=1}^{p} k^{2r}\left[(k+1)^{2r} + (k-1)^{2r}\right] \\
&= 2\sum_{k=1}^{p} k^{2r+1}\left(\sum_{m=0}^{2r} k^m \binom{2r}{m}(1-(-1)^{2r-m})\right) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{p} k^{2r}\left(\sum_{m=0}^{2r} k^m\binom{2r}{m}(1+(-1)^{2r-m})\right) \\
&= 2\sum_{k=1}^{p} k^{2r+1}\left(2\sum_{m=1}^{r-1} k^{2m-1}\binom{2r}{2m-1}\right) + \sum_{k=1}^{p} k^{2r}\left(2\sum_{m=0}^{r} k^{2m}\binom{2r}{2m}\right) \\
&= 4\sum_{m=1}^{r-1}\binom{2r}{2m-1} S2r + 2m + 2\sum_{m=0}^{r}\binom{2r}{2m} S_{2r+2m} \\
&= 2S_{4r} + 2S_{2r} + 2\sum_{m=1}^{r-1}\left(2\binom{2r}{2m-1} + \binom{2r}{2m}\right) S_{2r+2m}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$(2p+1)2^{2r-1}y^{2r}-(2p+1)Q_r(y)-\sum_{m=1}^{r-1}\left(2\binom{2r}{2m-1}+\binom{2r}{2m}\right)(2p+1)Q_{r+m}(y)=S_{4r}=S_{2k}.$$

On peut donc poser $Q_k(y)=2^{k-1}y^k-Q_r(y)-\sum_{m=1}^{r-1}\left(2\binom{2r}{2m-1}+\binom{2r}{2m}\right)Q_{r+m}(y)$.

► Si $k=2r+1$ avec $r\in\mathbb{N}^*$, alors, par télescopage,

$$\begin{aligned}
(2p+1)\left[p(p+1)\right]^{2r+1} &= \sum_{k=1}^{p}(2k+1)k^{2r+1}(k+1)^{2r+1}-(2k-1)k^{2r+1}(k-1)^{2r+1}\\
&= 2\sum_{k=1}^{p}k^{2r+2}\left[(k+1)^{2r+1}-(k-1)^{2r+1}\right]\\
&\qquad +\sum_{k=1}^{p}k^{2r+1}\left[(k+1)^{2r+1}+(k-1)^{2r+1}\right]\\
&= 2\sum_{k=1}^{p}k^{2r+2}\left(\sum_{m=0}^{2r+1}k^m\binom{2r+1}{m}(1-(-1)^{2r+1-m})\right)\\
&\quad +\sum_{k=1}^{p}k^{2r+1}\left(\sum_{m=0}^{2r+1}k^m\binom{2r+1}{m}(1+(-1)^{2r+1-m})\right)\\
&= 2\sum_{k=1}^{p}k^{2r+2}\left(2\sum_{m=0}^{r}k^{2m}\binom{2r+1}{2m}\right)\\
&\qquad +\sum_{k=1}^{p}k^{2r+1}\left(2\sum_{m=0}^{r}k^{2m+1}\binom{2r+1}{2m+1}\right)\\
&= 4\sum_{m=0}^{r}\binom{2r+1}{2m}S2r+2m+2+2\sum_{m=0}^{r}\binom{2r+1}{2m+1}S_{2r+2m+2}\\
&= 6(2r+1)S_{4r+2}+2\sum_{m=1}^{r-1}\left(2\binom{2r+1}{2m}+\binom{2r+1}{2m+1}\right)S_{2r+2m+2}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$(2p+1)2^{2r}y^{2r+1}-\sum_{m=1}^{r-1}\left(2\binom{2r+1}{2m}+\binom{2r+1}{2m+1}\right)(2p+1)Q_{r+m+1}(y)=S_{4r+2}=S_{2k}.$$

On peut donc poser $Q_k(y)=2^{k-1}y^k-\sum_{m=1}^{r-1}\left(2\binom{2r+1}{2m}+\binom{2r+1}{2m+1}\right)Q_{r+m+1}(y)$.

# Chapitre 12

# Nombres complexes

## Sommaire


**12.1 Activité . . . . . 492**
**12.2 Définition . . . . . 492**
**12.3 Module . . . . . 496**
**12.4 Écriture trigonométrique . . . . . 501**
**12.5 Dictionnaire bilingue géométrico-complexe . . . . . 508**
**12.6 Exercices . . . . . 518**
**12.7 Solutions . . . . . 528**
**12.8 Exercices supplémentaires . . . . . 551**
**12.9 Problème . . . . . 565**
**12.10 Corrigé . . . . . 566**


« Le plus court chemin du réel au réel passe souvent par le domaine complexe ».
Jacques Hadamard.

## Avertissement au lecteur

En lisant ce chapitre, vous allez pénétrer dans un royaume dont vous ne ressortirez jamais. Vous qui entrez ici, abandonnez – non pas tout espoir – mais tout préjugé. Les objets vont se mouvoir d'une façon que vous ne pourrez pas prévoir. Pour autant, en regardant le monde (réel) avec des lunettes complexes, il vous apparaîtra sous une simplicité insoupçonnée et les miracles vont se multiplier.

Dans ces conditions le retour au monde réel serait trop brutal et trop cruel. C'est le sens de cet avertissement. Il est encore temps de reculer.

# 12.1 Activité

1. Soit $i$ un nombre sans plus de précision. Simplifier

$$A = (3+2i)+(2-i)\ B = (3+2i)-(2-i)\ et\ C = (3+2i)\cdot(2-i).$$

✎ Facile : $A = 5+i$, $B = 1+3i$ et $C = 6-3i+4i-2i^2 = 6+i-2i^2$.

2. On suppose maintenant que le nombre $i$ vérifie $i^2 = -1$. Il est clair maintenant que ce nombre sans précision **n'est pas** un nombre réel. Simplifier davantage $A$, $B$ et $C$.
✎ Facile : $A = 5+i$, $B = 1+3i$ rien n'a changé jusque là et $C = 6+i-2\times(-1) = 8+i$.

Les nombres $A$, $B$ et $C$ sont appelés nombres complexes. La définition qui suit n'est pas exempte de tout reproche. Pour une définition plus rigoureuse, voir le problème 20 page 602.

# 12.2 Définition

## 12.2.1 Nombres complexes

**Définition 1.**

On appelle **nombre complexe** ou, pour abréger, **complexe** tout nombre $z$ (sans plus de précision) pour lequel il existe deux nombres réels $a$ et $b$ tels que $z = a+bi$, où $i$ est un nombre vérifiant $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

**Remarque 1.**

- Tous les réels sont des complexes ($y = 0$). Ce qui se note symboliquement $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- L'équation $x^2 = -1$ qui n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ admet (au moins) deux solutions dans $\mathbb{C}$, à savoir $i$ et $-i$.
- Les règles opératoires dans $\mathbb{C}$ découlent de façon naturelle de celles dans $\mathbb{R}$.

### 12.2.2 Opérations

La remarque et l'activité précédentes nous conduisent à la

**Définition 2.**

Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ deux nombres complexes avec $a_1, b_1, a_2$ et $b_2$ quatre réels, on définit :

- $z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
- $z_1 - z_2 := (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.
- $z_1 \times z_2 := (a_1.a_2 - b_1.b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

**Exercice 1.**

Soit $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 5 - 6i$. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ et $z_1 \times z_2$.

**Solution 1**
On trouve successivement $z_1 + z_2 = 7 - 3i$, $\quad z_1 - z_2 = -3 + 9i$ et $z_1 \times z_2 = 28 + 3i$.

**Remarque 2.**

Avec la définition des nombres complexes et de leurs opérations, il apparaît clairement que l'addition et la multiplication sont commutatives, c'est-à-dire que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{et} \quad z_1.z_2 = z_2.z_1,$$

et associatives, c'est-à-dire que

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{et} \quad (z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3).$$

En particulier, la formule du binôme est vérifiée :

**Théorème 1 (Formule du binôme)**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a$, $b$ deux complexes. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Démonstration 1 (Formule du binôme)**
On va démontrer par récurrence sur $n$ la proposition $\mathcal{P}_n$ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

La proposition $P_1$ est claire dans la mesure où

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = \underbrace{\binom{1}{0}a^0 b^1}_{k=0} + \underbrace{\binom{1}{1}a^1 b^0}_{k=1} = b + a.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pour lequel $\mathcal{P}_n$. On a alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \underbrace{\sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h}}_{\substack{\text{changement}\\ \text{d'indice } h\leftarrow k+1}} + \underbrace{\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n-h+1}}_{\substack{\text{changement}\\ \text{d'indice } h\leftarrow k}} \\
&= \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}a^h b^{n+1-h} + \underbrace{1\times a^{n+1}\times 1}_{h=n+1} + \underbrace{1\times 1\times b^{n+1}}_{h=0} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h}a^h b^{n-h+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= b^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\left(\binom{n}{h} + \binom{n}{h-1}\right)a^h b^{n-h+1} + a^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n+1}{h}a^h b^{n-h+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 \\
&= \sum_{h=0}^{n+1}\binom{n+1}{h}a^h b^{n+1-h}
\end{aligned}$$

on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$.

En conclusion, on a $\mathcal{P}_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$. D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n$. □

### 12.2.3 Unicité de l'écriture algébrique

**Théorème 2**
Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe un unique couple de réels $(a, b)$, tel que $z = a + bi$.

**Démonstration 2**
L'existence est assurée par la définition. Reste à voir l'unicité. On suppose que $z = a + bi = a' + b'i$. On en déduit que $a - a' = i(b' - b)$ donc, en élevant les deux membres au carré, $(a - a')^2 = i^2(b' - b)^2$ donc

$(a-a')^2+(b'-b)^2=0$. Comme $a-a'$ et $b'-b$ sont des nombres réels, $a=a'$ et $b=b'$ ce qu'il fallait démontrer. □

**Définition 3.**

Soit $z=a+bi\in\mathbb{C}$, avec $a$ et $b$ deux nombres réels, on appelle
- $a$ la partie réelle de $z$, notée $\Re(z)$ ;
- $b$ la partie imaginaire de $z$, notée $\Im(z)$ ;
- **nombre réel** tout nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle ;
- **nombre imaginaire** tout nombre complexe dont la partie réelle est nulle.

L'écriture $z=a+bi$ d'un nombre complexe avec $a$ et $b$ deux nombres réels, s'appelle l'**écriture algébrique** de $z$.



La partie imaginaire d'un nombre complexe (non réel) **n'est pas** un nombre imaginaire.

**Exercice 2.**

Soit $a$ et $b$ deux réels et $z=2a+3b-5+i(7a-32b+1)$. Déterminer $a$ et $b$ pour que $z=0$.

**Solution 2**
Les réels $a$ et $b$ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2a & + & 3b & = & 5 \\ 7a & - & 32b & = & -1 \end{array}\right.$. On trouve $a=\dfrac{157}{85}$ et $b=\dfrac{37}{85}$.

### 12.2.4 Représentation graphique

La représentation graphique des réels est une droite appelée **droite réelle** ; celle des complexes sera un plan nommé **plan complexe**.

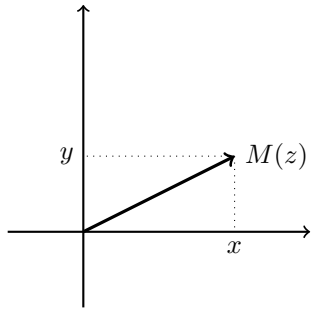



FIGURE 12.1 – Représentation d'un nombre complexe

**Définition 4.**

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

- Soit $z \in \mathbb{C}$ On appelle **image** le point $M$ de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x, y)$. On note alors $M(z)$.
- Soit $M\ (\ x\ ,\ y\ ) \in \mathcal{P}$. On appelle **affixe** de $M$ le nombre complexe $z = x + iy$.
- Soit $\overrightarrow{u}\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{P}$. On appelle **affixe** de $\overrightarrow{u}$ le nombre complexe $z = x + iy$.

**Remarque 3.**

– En mathématiques, « affixe » est un substantif féminin : « Deux points distincts ont des affixes distinctes. »
– L'affixe de l'image d'un complexe $z$ est le complexe $z$ lui-même.
L'image de l'affixe d'un point $M$ du plan $\mathcal{P}$ est le point $M$ lui-même. Autrement dit l'Image (de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{P}$) et l'affixe (de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{C}$) sont deux bijections réciproques.
– On utilise de préférence le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec les complexes parce que la lettre $i$ est occupée ailleurs.

## 12.3 Module

### Problème

Comment savoir si $\dfrac{1}{2+3i}$ admet un inverse dans $\mathbb{C}$ et si oui, quelle est son écriture algébrique ?

On se souvient que pour simplifier l'écriture de $\dfrac{1}{2+3\sqrt{5}}$ on a recours à l'expression conjuguée de $2+3\sqrt{5}$, à savoir $2-3\sqrt{5}$.

Ainsi, on a

$$\frac{1}{2+3\sqrt{5}} = \frac{2-3\sqrt{5}}{(2-3\sqrt{5})(2+3\sqrt{5})} = \frac{2-3\sqrt{5}}{4-45} = \frac{-2+3\sqrt{5}}{39}.$$

Ici le sanglier $i$ va remplacer les fraises, à savoir $\sqrt{5}$.

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

### 12.3.1 Nombre conjugué

**Définition 5.**

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$, avec $a$ et $b$ deux nombres **réels**, on appelle **nombre conjugué** de $z$, noté $\overline{z}$, le nombre

$$\overline{z} := a - bi\,.$$

### 12.3.2 Représentation géométrique

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, les nombres $z$ et $\overline{z}$ sont les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

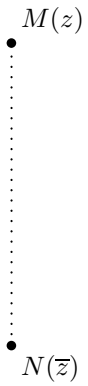



FIGURE 12.2 – Les points $M(z)$ et $N(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

**Théorème 3**
L'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(\overline{z})$ est la symétrie dont l'axe est l'axe des abscisses.

### 12.3.3 Opérations

**Théorème 4**
Soit $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes. On a les trois chiasmes :
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ;
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ ;
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

**Démonstration 4**
Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ avec $a_1, b_1, a_2$ et $b_2$ quatre réels,
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i} = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ ;
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i)} = (a_1 - b_1 i) - (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ ;
- D'une part

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{a_1.a_2 - b_1.b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i} \\ &= a_1.a_2 - b_1.b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} &= (a_1 - b_1 i)\cdot(a_2 - b_2 i)\\ &= a_1.a_2 - (-b_1).(-b_2) + (a_1.(-b_2) + a_2.(-b_1))i\\ &= a_1.a_2 - b_1.b_2 - (a_1.b_2 + a_2.b_1)i.\end{aligned}$$

Donc on a bien

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\,.$$

**Théorème 5**
$z = a + bi \in \mathbb{C}$, avec $a$ et $b$ deux nombres **réels**, on a

$$\boxed{z\cdot\overline{z} = a^2 + b^2}$$

La vérification se fait sans détour. Un point important est que $a^2 + b^2$ est un nombre réel – positif ou nul de surcroit – dans l'égalité ci-dessus.

Ce théorème permet de rendre réel des dénominateurs pour obtenir les formes algébriques. Auparavant une définition :

### 12.3.4 Module

**Définition 6.**

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$, on appelle **module** de $z$, noté $|z|$ le nombre réel qui est la racine carrée du nombre réel positif ou nul $z\cdot\overline{z}$.

$$|z| := \sqrt{z\cdot\overline{z}}.$$

**Remarque 4.**

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M$ le point du plan $\mathcal{P}$ d'affixe $z$, on a

$$OM = |z|.$$

**Théorème 6**
Pour qu'un nombre complexe soit nul, il faut et il suffit que son module soit nul.

**Démonstration 6**
En effet si deux **réels** $a$ et $b$ vérifient $a^2 + b^2 = 0$ alors $a = b = 0$ et inversement. □

**Théorème 7**
Pour tout nombre complexe $z$, on a $|z| = |\overline{z}|$.

Vérification aisée.

**Théorème 8**
Soit $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;
- $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

**Démonstration 8**
- On a

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2|^2 &= z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} \\ &= z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \text{(théorème 4)} \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \\ &= (|z_1| \cdot |z_2|)^2 . \end{aligned}$$

  $|z_1 \cdot z_2|$ et $|z_1| \cdot |z_2|$ sont deux réels positifs ou nuls qui ont le même carré. Ils sont donc égaux.
- Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$. D'après l'inégalité triangulaire (théorème 10 page 277) on a

$$\|\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\| \leqslant \|\overrightarrow{u_1}\| + \|\overrightarrow{u_2}\|$$

  Soit $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
  On applique l'inégalité qu'on vient de démontrer pour $z_1 + z_2$ et $-z_2$. Puisque $z_1 = z_1 + z_2 - z_2$ :

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_2|$$

  d'où $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2|$.
  En échangeant les rôles de $z_1$ et $z_2$, on obtient aussi : $|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 + z_2|$.
  Donc le plus grand des deux nombres $|z_1| - |z_2|$ et $|z_2| - |z_1|$, à savoir la valeur absolue de $|z_1| - |z_2|$ est plus petite que $|z_1 + z_2|$.
  C'est exactement ce qu'il restait à établir. □

Comme corollaire de l'égalité $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ on a le théorème suivant :

**Théorème 9**
Pour tous nombres complexes $z_1$ et $z_2$,

$$(z_1 z_2 = 0) \Longleftrightarrow (z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0).$$

Autrement dit : « Pour qu'un produit de deux facteurs complexes soit nul, il faut et il suffit que l'un ou l'autre des facteurs soit nul. »

**Théorème 10**
Soit $z \in \mathbb{R}$, on a l'égalité remarquable :

$$|z| = |z|.$$

Cette égalité n'est pas évidente si on considère que l'un des membres désigne la valeur absolue du réel $z$ et l'autre le module du nombre réel $z$ vu comme le nombre complexe $z + 0i$.

**Démonstration 10**
On a $|z| = \sqrt{z^2 + 0^2}$ puisque $z = \Re(z)$. Donc $|z| = \sqrt{z^2} = |z|$ d'après le théorème 44 page 89 du cours de seconde. □

En rapprochant les théorèmes 8 et 10 on obtient le théorème suivant :

**Théorème 11**
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda z| = |\lambda|.|z|$.
- $|-z| = |z|$.

### 12.3.5 Inverses et quotients

**Théorème 12**
Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$, un nombre complexe **non nul**, avec $a$ et $b$ deux nombres réels.
Il existe un unique complexe $u$, appelé **inverse** de $z$ tel que $z \cdot u = 1$.
De plus

$$u = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i = \frac{1}{|z|^2} \overline{z}.$$

**Démonstration 12**
- ▶ **Unicité**. Soit $u$ et $u'$ deux inverses de $z$. on a d'une part

$$uzu' = (uz)u' = 1u' = u',$$

et d'autre part

$$uzu' = u(zu') = u1 = u,$$

d'où $u = u'$.
- ▶ **Existence**. Puisque $z \neq 0$ on a $|z|^2 = a^2 + b^2 \neq 0$ Donc $u = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ est bien défini. De plus on a $uz = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \cdot z = \frac{1}{|z|^2}|z|^2 = 1$. □

On peut alors définir sans problème le quotient d'un complexe $z_1$ par un complexe non nul $z_2$ comme étant

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \times \frac{1}{z_2}.$$

**Exercice 3.**

Donner la forme algébrique de $z = \dfrac{3+i}{2+3i}$.

**Solution 3**
On a

$$z = \frac{3+i}{2+3i} = \frac{3+i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{6+3+i(2-9)}{4+9} = \frac{9}{25} - \frac{7}{25}i.$$

### 12.3.6 Complexes de module 1

On va revoir les propriétés précédentes à l'œuvre dans un cas particulier.
On va noter $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

**Théorème 13**
Soit $z \in \mathbb{U}$.
On a $z$ inversible et $1/z = \overline{z}$.

**Théorème 14**
Soit $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes de module 1.
On a $z_1.z_2 \in \mathbb{U}$.

On note souvent $\mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C},\ z \neq 0\}$.

**Théorème 15**
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
On a $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

Les vérifications ne posent aucune difficulté.

## 12.4 Écriture trigonométrique

### 12.4.1 Arguments d'un nombre complexe

Soit $z = a + bi \in \mathbb{U}$, avec $a$ et $b$ deux nombres réels. On a donc $z = |z|^2 = a^2 + b^2 = 1$. D'après le théorème 5 page 218 (démontré dans l'annexe B du cours de terminale pour les lecteurs qui n'ont pas froid aux yeux), il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} a &= \cos(\theta) \\ b &= \sin(\theta) \end{cases}$$

De plus d'après le théorème 2 page 215, $\theta$ est défini modulo $2\pi$.

Un tel réel $\theta$, défini modulo $2\pi$ est appelé un argument de $z$.

Maintenant, soit $z$ un nombre complexe non nul. On pose $r := |z|$. D'après le théorème 15, $z/r \in \mathbb{U}$. Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$,

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

De plus, $r = |z|$.

**Définition 7.**

Soit $(\ r\ ,\ \theta\ ) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
On dit que $\theta$ est un **argument** de $z$, noté $\arg(z)$.
De plus, $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est une **écriture trigonométrique** de $z$.

On a ainsi démontré le théorème suivant :

**Théorème 16**
Soit $z$ un nombre complexe non nul. Alors $z$ admet au moins un argument.

**Théorème 17 (Égalité des écritures trigonométriques)**
Soit $r$ et $r'$ deux nombres réels strictement positifs. Soit $\theta$ et $\theta'$ deux réels et $z$ un complexe tels que

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad z = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$$

soient deux écritures trigonométriques de $z$.

Alors $r = r'$ et $\theta \equiv \theta' \mod 2\pi$.

**Démonstration 17**
En effet on a

$$r = |r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))| = |z| = \left|r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))\right| = r'.$$

Après division par $r = r'$ on obtient

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = \cos(\theta') + i\sin(\theta') \text{ soit } \begin{cases} \cos(\theta) &= \cos(\theta') \\ \sin(\theta) &= \sin(\theta') \end{cases}$$

d'après le théorème 2. On en déduit $\theta \equiv \theta' \mod 2\pi$. d'après le théorème 2 page 215. □

**Exercice 4.**

Donner une écriture trigonométrique des nombres suivants : $z = 1$, $z = i$, $z = 1 + i$ et $z = \sqrt{3} + i$.

**Solution 4**
$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$, $i = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$, $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$.

### 12.4.2 Interprétation géométrique

- $|z|$ est la distance $OM$ ;
- $\arg(z)$ est une mesure à $2\pi$ près de $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$.

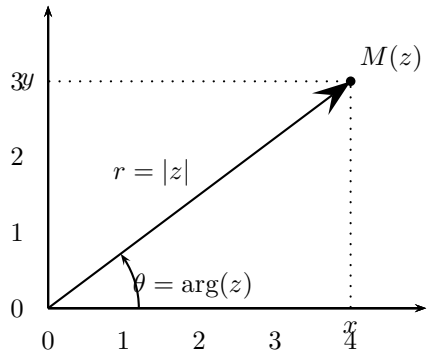



FIGURE 12.3 – Module et argument d'un complexe $z$ d'image $M$.

### 12.4.3 Opérations

Le principal intérêt des arguments transparaît dans le théorème suivant :

**Théorème 18**
Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls,

$$\boxed{\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z')} \mod 2\pi$$

**Démonstration 18**
En posant $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$, on a

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= r \cdot r'[\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta'))] \\ &= r \cdot r'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')\,, \end{aligned}$$

grâce aux formules d'addition 9 page 221. □

**Théorème 19**
Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls,

- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \mod 2\pi$ ;

- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \mod 2\pi$.

**Démonstration 19**
Ces propriétés découlent du théorème précédent.

- On utilise le fait que $\arg\left(\frac{1}{z} \times z\right) = \arg(1) = 0 \mod 2\pi$.
- Cela découle des deux propriétés précédentes. □

En revanche, il n'existe pas de miracle pour l'argument d'une somme.

### 12.4.4 Racines carrées

Un théorème qui montre les nombres complexes sont moins farouches que les nombres réels.

**Théorème 20**
Soit $t$ un nombre complexe non nul. Alors $t$ admet exactement deux **racines carrées** complexes à savoir les deux solutions distinctes de l'équation

$$[z^2 = t; \quad \text{inconnue} \quad z \in \mathbb{C}]\,.$$

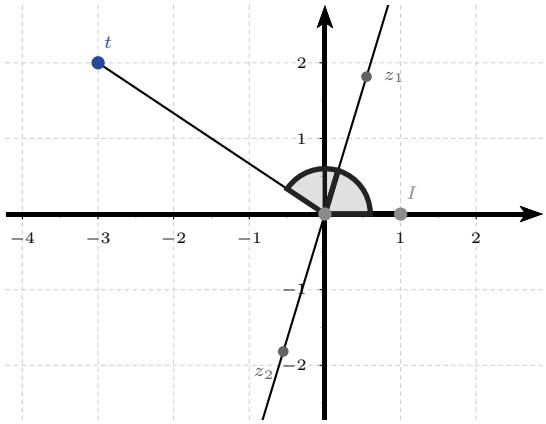
**Démonstration 20**
On écrit $t = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- On pose $z_1 := \sqrt{r}(\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2))$ et $z_2 := -z_1 = \sqrt{r}(\cos(\theta/2 + \pi) + i\sin(\theta/2 + \pi))$. On a $z_2 \neq z_1$ et $z_2^2 = z_1^2 = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = t$ d'après le théorème 18.
- On écrit
$$z^2 - t = z^2 - z_1^2 = (z - z_1)(z + z_1) = (z - z_1)(z - z_2)$$
et on applique le théorème 9. □

**Exemple 1**
Trouver les racines carrées complexes de $t = -3 + 2i$

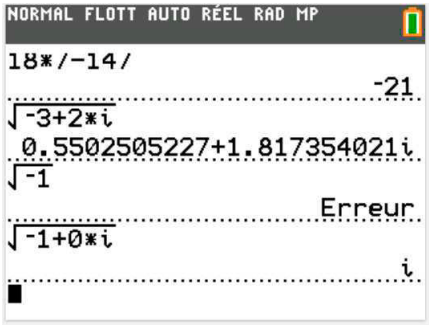
1. Avec geogebra.

Geogebra parle le complexe couramment. On rentre `t = -3 + 2i` dans la boîte de dialogue, puis `z₁ = sqrt(t)`. Geogebra ne donne qu'une seule des racines carrées, dont on peut constater que l'image se trouve sur la bissectrice de $\widehat{tOI}$. L'autre racine carrée doit être construite à la main.



2. avec la TI83.

   La TI83 parle le complexe dans math option CMPLEX. Pour autant, le cas qui nous concerne peut être traité directement une fois qu'on a repéré le $i$ au-dessus du point (tout en bas).
   La calculatrice crie à l'erreur lorsqu'on lui demande de calculer une racine carrée de $-1$ mais répond gentiment pour une racine carrée de $-1+0*i$. La politesse, ça compte.




3. `Python` Les conversions forme algébrique / forme trigonométrique se trouvent dans le module `cmath`.

```
import math
import cmath

z = complex(-3, 2)
R = abs(z) # module de z
r = math.sqrt(abs(z)) # module de ses racines carrees
theta = cmath.phase(z) #argument de z
print(cmath.rect(r, theta/2)) # retour a la forme algebrique
```

   On peut aussi se débrouiller avec la fonction `atan2` du module `cmath`. (Voir exemple 8 page 238).

4. Calcul exact : On pose $z_1 = a + ib$. On a d'une part

$$z_1^2 = a^2 - b^2 + 2iab = -3 + 2i$$

   et d'autre part

$$a^2 + b^2 = |z_1|^2 = |z_1^2| = |t| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

   On en déduit que $a^2 = \dfrac{\sqrt{13}-3}{2}$, $b^2 = \dfrac{\sqrt{13}+3}{2}$ et $2ab = 2 > 0$. Donc si on choisit $a = \sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}}$ on doit choisir en conséquence $b = \sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}}$ pour avoir un produit $ab$ positif. De même si on choisit $a = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}}$ on doit choisir en conséquence $b = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+3}{2}}$ pour avoir un produit $ab$ positif.
   Par conséquent $t$ admet deux racines carrées :

$$z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}} \qquad \text{et } z_2 = -z_1.$$

**Remarques 5.**

1. En mathématiques, le symbole $\sqrt{\ }$ ne s'utilise qu'avec des nombres réels positifs. Rien de changé.
2. Le nombre complexe zéro admet lui aussi deux racines carrées complexes opposées, mais elles sont égales.

### 12.4.5 Équation du second degré à coefficients complexes

**Théorème 21**
Soit $a$, $b$ et $c$ des complexes avec $a \neq 0$.

L'équation $[az^2 + bz + c = 0$, inconnue $z \in \mathbb{C}]$ admet toujours deux solutions (pouvant être confondues), qui sont, en notant $\delta^2 = b^2 - 4ac$ :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}\,.$$

**Démonstration 21**
En écrivant $az^2 + bz + c$ sous forme canonique,

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

**Remarque 6.**

Si $a$, $b$ et $c$ sont des réels avec $b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation admet deux racines conjuguées.

### 12.4.6 Racines $n$-ièmes

**Théorème 22**
Soit $t$ un nombre réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation

$$[x^n = t; \quad \text{inconnue} \quad x \in \mathbb{R}]\,,$$

admet une unique solution notée $\sqrt[n]{t}$.

**Démonstration 22**

La fonction $\begin{array}{rcl} f\ :\ [\ 0\ ,\ +\infty\ [ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$. Elle réalise donc une bijection de $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$ sur $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$. L'équation

$$[x^n = t; \quad \text{inconnue} \quad x \in \mathbb{R}]\,,$$

admet donc une unique solution, à savoir $f^{-1}(t)$. □

**Remarque 7.**

Lorsque $n = 2$, on a bien entendu, $\sqrt[n]{t} = \sqrt{t}$ pour tout $t \geqslant 0$.

**Notation 1.**

Soit $t$ un nombre réel strictement positif, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On peut noter

$$t^{1/q} := \sqrt[q]{t} \ \text{ et } \ t^{p/q} := \left(\sqrt[q]{t}\right)^p ;$$

et le lecteur consciencieux vérifiera que si $(p, r) \in \mathbb{Z}^2$ et $(q, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ vérifient

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s},$$

alors

$$t^{p/q} = t^{r/s}.$$

**Théorème 23**
Soit $t$ un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $t$ admet exactement $n$ **racines $n$-ièmes** complexes à savoir les $n$ solutions distinctes de l'équation

$$[z^n = t; \quad \text{inconnue} \quad z \in \mathbb{C}]\,.$$

**Démonstration 23**
On écrit $t = r(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta))$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

- On pose, pour $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $z_k := \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n}))$. On a $z_k^n = r(\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = t$ d'après le théorème 18. De plus les arguments des nombres $z_k$ sont des nombres distincts de $\left[\ \frac{\theta}{n}\ ,\ \frac{\theta}{n} + 2\pi\ \right[$ donc les $z_k$ sont distincts deux à deux.
- Soit $z$ une solution. On a $z \neq 0$ donc $z$ admet un argument $\alpha$. Comme $z^n$ admet $n\alpha$ comme argument, il existe un entier $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $n\alpha = \theta + 2\ell\pi$. De ce fait $\alpha = \frac{\theta+2\ell\pi}{n}$. Soit $k$ le reste de la division euclidienne de $\ell$ par $n$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\ell = qn + k$ et $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
  De plus $\cos(\frac{\theta+2\ell\pi}{n}) = \cos(\frac{\theta+2k\pi}{n} + 2q\pi) = \cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})$ et de même $\sin(\frac{\theta+2\ell\pi}{n}) = \sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})$. Donc après multiplication par le module $\sqrt[n]{r}$, $z = z_k$. □

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Le nombre complexe $z := \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ appartient à $\mathbb{U}$. Une récurrence sans difficulté montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n$ admet $n\theta$ comme argument.

Idem lorsque $n \in \mathbb{Z}$. Comme conséquence on a :

**Théorème 24 (Formule de Moivre)**
Pour tout $\theta$ réel et $n$ entier, on a

$$(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\,\sin(n\theta)\,.$$

## 12.5 Dictionnaire bilingue géométrico-complexe

La caractérisation d'objets, de lieux géométriques ou des transformations usuelles va permettre d'approfondir en même temps certaines notions sur les complexes.

| **Géométrique** | **Complexe** |
|---|---|
| Point (ou vecteur) | Nombre complexe |
| Image | Affixe |
| abscisse | Partie réelle |
| Ordonnée | Partie imaginaire |
| Distance (ou norme) | Module |
| Angle polaire | Argument |

### 12.5.1 Vecteur

**Théorème 25**
Soit $M$ un point d'affixe $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels, alors

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{OM}\right\| &= |z| \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\,.\end{aligned}$$

**Théorème 26**
Soit $M$ un point distinct de $O$ d'affixe $z = r\,(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta))$ alors

- $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |z| = r\,;$
- $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg(z) = \theta\,.$

**Théorème 27**
Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe.

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A|\,.$$

**Théorème 28**
Soit $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ deux vecteurs et $k$ un réel,

- $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{U}} + z_{\overrightarrow{V}}$,
- $k\,\overrightarrow{U}$ a pour affixe $k\,z_{\overrightarrow{U}}$ .

### 12.5.2 Point sur un axe du repère

**Point sur l'axe des abscisses**

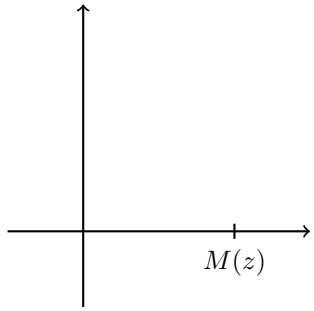



FIGURE 12.4 – Point sur l'axe des abscisses

**Théorème 29**
Soit $M$ un point d'affixe $z$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- Le point $M$ est sur l'axe des abscisses.
- Le nombre complexe $z$ est un réel.
- $\Im(z) = 0$.
- $z = \overline{z}$.
- $Arg(z) = 0 \mod \pi$ ou $M = O$.

**Exercice 5.**

Pour $z \neq i$, on pose

$$Z = \frac{z-(1+i)}{z-i}\,.$$

1. Soit $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels. Exprimer l'écriture algébrique de $Z$ en fonction de $x$ et de $y$.
2. Quel est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ pour lequel $Z$ est réel ?

**Solution 5**

1.

$$\begin{aligned}\text{On écrit } z &= \frac{x-1+i(y+1)}{x+i(y-1)} = \frac{(x-1+i(y+1))(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}\\ &= \frac{x(x-1)+(y+1)(y-1)+i((x-1)(y-1)+(y+1)x)}{x^2+(y-1)^2}\\ &= \frac{x^2+y^2-x-1+i(2xy+x-y+1)}{x^2+(y-1)^2}.\end{aligned}$$

2. Pour que $Z$ soit réel, il faut et il suffit que $2xy+x-y+1=0$ soit $y(2x-1)=-1-x$ soit $y=\dfrac{1+x}{1-2x}$ et $x \neq \frac{1}{2}$. On doit aussi oter la valeur $x=0$ car le couple $\left(0\ ,\ 1\right)$ n'est pas admissible. L'ensemble est donc la courbe représentative de $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \longmapsto \dfrac{1+x}{1-2x}$. (une hyperbole privée d'un point).

### Point sur l'axe des ordonnées

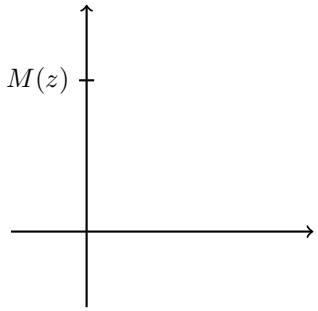



FIGURE 12.5 – Point sur l'axe des ordonnées

**Théorème 30**

Soit $M$ un point d'affixe $z$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- Le point $M$ est sur l'axe des ordonnées.
- Le nombre complexe $z$ est un imaginaire pur.

- $\Re(z) = 0$.
- $z = \overline{z}$.
- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \mod \pi$ ou $M = O$.

**Exercice 5.**

*On reprend l'exercice précédent.*

3. Quel est l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ pour lequel $Z$ est imaginaire pur ?

**Solution 5**

3. Pour que $Z$ soit imaginaire pur, il faut et il suffit que $x^2+y^2-x-1=0$ soit $(x-\frac{1}{2})^2+y^2-\frac{1}{4}-1=0$ soit $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{5}{4}$. On obtient le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

### 12.5.3 Point sur un cercle

**Théorème 31**

Soit $\Omega$ un point du plan complexe d'affixe $z_\Omega$ et $R$ un réel strictement positif. Soit $M$ un point d'affixe $z$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- Le point $M$ est sur le cercle de centre $\Omega$ et de rayon $R$.
- $\Omega M = R$.
- $|z - z_\Omega| = R$.
- $\exists \theta \in \mathbb{R},\ z = z_\Omega + R\left(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)\right)$.

### 12.5.4 Angles de vecteurs

**Théorème 32**

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points du plan complexe d'affixes respectives $z_A$, $z_B$ et $z_C$.

$\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right)$ est une mesure de l'angle $\overline{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)}$.

**Démonstration 32**

On sait que $\theta_1 = \arg(b-a)$ est une mesure de l'angle $\overline{\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)}$ et que $\theta_2 = \arg(c-a)$ est une mesure de l'angle $\overline{\left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right)}$.

D'après la relation de Chasles pour les angles, $\theta_1 - \theta_2$ est une mesure de l'angle $\overline{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)}$.

Comme $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\dfrac{b-a}{c-a}$, le résultat en découle. □

### 12.5.5 Transformations usuelles

**Symétrie par rapport à l'axe des abscisses**

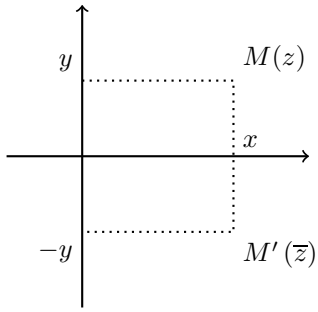



FIGURE 12.6 – Symétrie par rapport à l'axe des abscisses

**Théorème 33 (Symétrie par rapport à l'axe des abscisses)**
Soit $f$ une transformation du plan complexe qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$.

$f$ est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses
$\iff z' = x - iy$ si $z = x + iy$
$\iff z' = \overline{z}$.

**Translation**

**Théorème 34 (Translation)**
Soit $t$ une transformation du plan complexe qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$.
Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixe $v$.

$t$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{V}$
$\iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$
$\iff z' - z = v$
$\iff \boxed{z' = z + v}$.

**Exercice 6.**

Soit $\overrightarrow{V}$ le vecteur d'affixe $3+i$ et $A$ le point d'affixe $1-2i$. Déterminer l'affixe de $A'$, image de $A$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$.

**Solution 6**
L'affixe de $A'$ est $z_{A'} := 1-2i+3+i = 4-i$.

### Homothétie

**Théorème 35 (Homothétie)**
Soit $h$ une transformation du plan complexe qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$.

Soit $\Omega$ un point d'affixe $\omega$ et $k$ un réel non nul.

$$\begin{aligned} & h \text{ est une homothétie de centre } \Omega \text{ et de rapport } k \\ \iff & \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \\ \iff & \boxed{z' - \omega = k \times (z-\omega)}. \end{aligned}$$

**Exercice 7.**

Soit $\Omega$ le point d'affixe $3+i$ et $A$ le point d'affixe $1-2i$. Déterminer l'affixe de $A'$, image de $A$ par l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport 3.

**Solution 7**
Soit $z_{A'}$ l'affixe de $A'$. On a $z_{A'} - (3+i) = 3(1-2i-(3+i)) = 3(-2-3i) = -6-9i$. Donc $z_{A'} = -6-9i+3+i = -3-8i$.

**Exercice 8.**

Soit $h$ l'homothétie qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 3z+6-2i$. Donner les éléments caractéristiques de $h$.

**Solution 8**
Le rapport de l'homothétie $h$ est le coefficient de $z$ à savoir 3. Le centre de $h$ est le point fixe, c'est-à-dire le point dont l'affixe $z$ vérifie $z = 3z+6-2i$ soit $-2z = 6-2i$ soit $z = -3+i$.

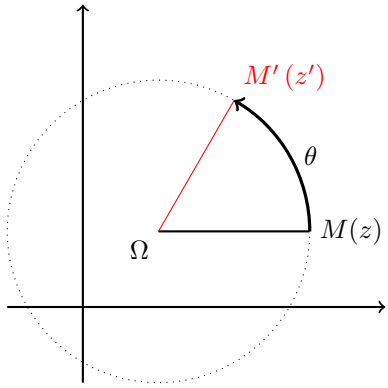



FIGURE 12.7 – Rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$

## Rotation

**Théorème 36 (Rotation)**
Soit $r$ une transformation du plan complexe qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$.
Soit $\Omega$ un point d'affixe $\omega$ et $\theta$ un réel non nul.

$$\begin{aligned} & r \text{ est la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \theta \\ \iff & \begin{cases} \text{pour } M \neq \Omega \text{ on a } \Omega M = \Omega M' \text{ et } (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \mod 2\pi \\ \text{pour } M = \Omega \text{ on a } M' = \Omega \end{cases} \\ \iff & \boxed{z' - \omega = (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \times (z - \omega)}. \end{aligned}$$

☞ on utilisera une autre écriture complexe de la rotation au théorème 27 page 226 dans le cours de terminale.

**Démonstration 33**
On a bien

$$\Omega M' = |z' - \omega| = |\cos(\theta) + i \sin(\theta)| \times |z - \omega| = |z - \omega| = \Omega M$$

et

$$\overline{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} = \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \arg\left(\frac{(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \times (z - \omega)}{z - \omega}\right) = \arg(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \equiv \theta[2\pi].$$

La suite des aventures géométriques des nombres complexes se trouve dans le cours de terminale, au paragraphe 6.6 page 223. D'ici là il y a du travail.

**Exercice 9.**

Soit $r$ la rotation qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = iz + 6 - 2i$. Donner les éléments caractéristiques de $r$.

**Solution 9**

Le' coefficient de $z$ – à savoir $i$ – est un élément de $\mathbb{U}$, sinon $r$ ne serait pas une rotation. On écrit $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Donc $r$ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Le centre de $r$ a une affixe $z$ qui vérifie $z = iz + 6 - 2i$ soit $z(1-i) = 6 - 2i$ soit

$$z(1-i) = \frac{6-2i}{1-i} = \frac{(6-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{8+4i}{2} = 4 + 2i.$$

**Exercice 10.**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points distincts du plan d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$. Montrer que si $\dfrac{b-a}{c-a}$ est un réel alors les trois points sont alignés.

**Solution 10**

Soit $k := \dfrac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}^*$. On a $b - a = k(c-a)$ donc $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Donc $A$, $B$ et $C$ sont alignés. (théorème 10 page 224 du cours de seconde).

**Exercice 11.**

Comment interpréter $|z - 35 + 5i| = 3$ ?

**Solution 11**

Soient $M$ le point d'affixe $z$ et $A$ le point d'affixe $35-5i$. On a $AM = 3$. Autre interprétation : $M$ appartient au cercle de centre $A$ et de rayon 3.

**Exercice 12.**

Caractériser à l'aide des nombres complexes la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

**Solution 12**

C'est l'application $z \in \mathbb{C} \longmapsto -\overline{z}$.

### 12.5.6 Utilisation des modules et des arguments

**Exercice 13.**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points distincts du plan d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.

1. Montrer que si $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = 1$ alors le triangle $ABC$ est isocèle.
2. Montrer que si $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod \pi$ alors le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le module et un argument de $\dfrac{b-a}{c-a}$ pour que $ABC$ soit équilatéral.

**Solution 13**

1. Si $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = 1$ alors $|b-a| = |c-a|$ soit $AB = AC$. C'est bien dire que le triangle $ABC$ est isocèle en $A$.
2. Si $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod \pi$ alors l'angle $\overline{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)}$ mesure $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ modulo $2\pi$. Dans les deux cas, le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.
3. Pour que $ABC$ soit équilatéral, il faut et il suffit que $ABC$ soit isocèle en $A$ et que l'angle non orienté $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$, c'est-à-dire $\overline{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)}$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$ ou $-\dfrac{\pi}{3}$ modulo $2\pi$. Autrement dit $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{3} \mod 2\pi$. Dans ces conditions, en posant $w := \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ on a $\dfrac{b-a}{c-a} \in \{w, \overline{w}\}$.

**Exercice 14.**

Déterminer le lieu $\mathcal{L}$ des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant

1. $|z-a| = r$, avec $r \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [$ et $a \in \mathbb{C}$.
2. $|z-a| = 4|z-b|$ avec $a$ et $b$ complexes distincts.

**Solution 14**

1. Soit $A$ le point d'affixe $a$. Si $r > 0$ alors $\mathcal{L}$ est le cercle de centre $A$ et de rayon $r$. Si $r = 0$ alors $\mathcal{L} = \{A\}$.
2. Les secrets de cet exercice seront dévoilés dans la manuel de terminale au chapitre 1. Nous allons donner une solution naïve.
   Soient $A$, $B$ et $M$ les points d'affixes respectives $a$, $b$ et $z$. On a $AM = 4BM$ soit $AM^2 = 16BM^2$. On pose $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ et $z = x + iy$ avec $a_1, a_2, b_1, b_2, x$ et $y$ tous réels. On développe :

$$\begin{aligned} 0 = 16BM^2 - AM^2 &= 16\left((x-b_1)^2 + (y-b_2)^2\right) - \left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right) \\ &= 15x^2 + 15y^2 - 2(16b_1 - a_1)x - 2(16b_2 - a_2)y + 16(b_1^2 + b_2^2) - (a_1^2 + a_2^2) \\ &= 15\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \rho\right], \end{aligned}$$

en posant $\alpha := \dfrac{16b_1 - a_1}{15}$, $\beta := \dfrac{16b_2 - a_2}{15}$ et $\rho := \alpha^2 + \beta^2 - \dfrac{16(b_1^2 + b_2^2) - (a_1^2 + a_2^2)}{15}$.

On obtient donc un cercle de centre $G\left(\alpha\ ,\ \beta\right)$ si toutefois on a $\rho > 0$. Le lecteur tenace pourra développer $\rho$ pour aboutir à $\rho = \dfrac{16}{225}\left((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\right) > 0$.

Il est possible de faire de la géométrie en constatant que $15\overrightarrow{OG} = 16\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. D'après la relation de Chasles, on obtient $15\,\overrightarrow{0} = 16\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$ d'une part et $15\overrightarrow{MG} = 16\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$ d'autre part. Maintenant on a

$$\begin{aligned} 16BM^2 = 16\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BM} &= 16\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)\\ &= 16\left(BG^2 + GM^2 + 2\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{BG}\right)\end{aligned}$$

De même $AM^2 = AG^2 + GM^2 + 2\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{AG}$. Par soustraction, on obtient

$$0 = 16BM^2 - AM^2 = 16BG^2 - AG^2 + 2\left(\underbrace{16\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{AG}}_{=\overrightarrow{0}}\right)\cdot\overrightarrow{GM} + 15GM^2.$$

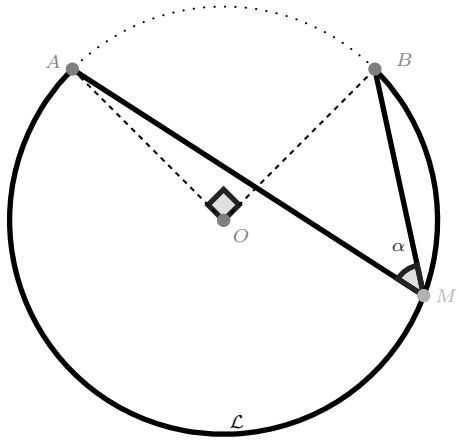
On en déduit $15GM^2 = AG^2 - 16BG^2$. Or $AG = 16BG$ donc $GM^2 = 16AG^2$.
Le lieu $\mathcal{L}$ est donc le cercle de centre $G$ et de rayon $4AG$.

**Exercice 15.**

Soient $A$ et $B$ trois points distincts du plan d'affixes respectives $a$ et $b$.
Déterminer le lieu $\mathcal{L}$ des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

**Solution 15**
L'angle inscrit $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)$ mesure $\dfrac{\pi}{4}$. Donc l'angle au centre $\widehat{BOA}$ est droit.




On trouve pour $\mathcal{L}$ un arc de cercle délimité par $A$ et $B$ (exclus) si l'argument est défini modulo $2\pi$. Si l'argument est défini modulo $\pi$, $\mathcal{L}$ est le cercle privé de $A$ et $B$.

## 12.6 Exercices

**Exercice 16.**

Soit $a$, $b$ et $c$ trois nombres complexes de module 1.

1. Démontrer que si $ab \neq -1$, alors $\dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer que $|a+b+c| = |ab+bc+ca|$.

**Exercice 17.**

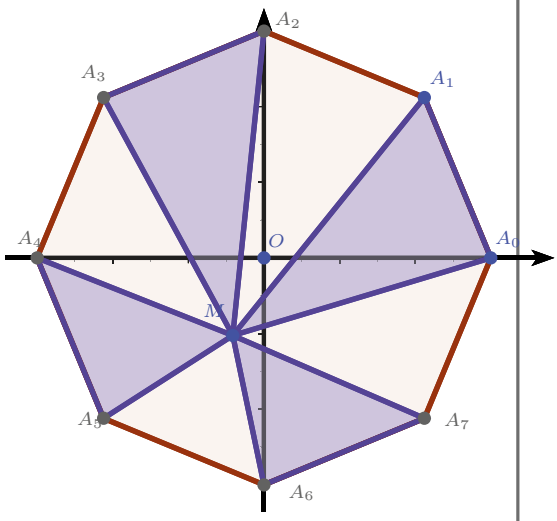
Résoudre l'équation

$$\left[\ z + 3\overline{z} = (2+i\sqrt{3})|z|, \quad \text{inconnue } z \in \mathbb{C}\ \right]$$

**Exercice 18.**

1. Soit $A$ et $B$ deux points d'affixes respectives $a$ et $b$. On suppose que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \theta \in ]\ 0\ ,\ \pi\ [$. Démontrer que l'aire du triangle $OAB$ égale $\Im\left(\dfrac{1}{2}\overline{a}b\right)$.
2. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On considère un polygone $\mathcal{P}$ régulier $A_0A_1\ldots A_{2n}$ de centre $O$ avec $A_0$ d'affixe 1. Soit $M$, d'affixe $m$, un point intérieur à $\mathcal{P}$. On colorie un triangle sur deux comme sur la figure.

   Démontrer que la somme des aires des triangles coloriés égale la somme des aires des triangles non coloriés.




**Exercice 19.**

Soit $P(z)$ défini pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres complexes $p$ et $q$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-i)(z^2+pz+q)$.
3. Démontrer que les solutions de l'équation $[P(z) = 0;\ \text{ inconnue } z \in \mathbb{C}]$ sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle.

**Exercice 20.**

Soient $A$ d'affixe $i$ et $B$ d'affixe 2. On appelle $f$ la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = (1+i)z + 1$.

1. Montrer que $f$ a un unique point invariant.
2. (a) Montrer que pour tout nombre complexe $z$ distinct de $i$, $\dfrac{z'-z}{i-z} = -i$. Interpréter ce résultat en termes de distances et d'angles.
   (b) En déduire une méthode de construction de $M'$ à partir de $M$, pour $M$ distinct de $A$.
3. (a) Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1+i)(z-2)$.
   (b) En déduire que si $M$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $B$ et de rayon $\sqrt{5}$, $M'$ appartient au cercle $\mathscr{C}'$ que l'on déterminera.
   (c) Quelle est l'intersection des deux cercles ?

**Exercice 21.**

Démontrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{14}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{14}\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{14}\right) = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

### 12.6.1 Formes algébriques et trigonométriques

**Exercice 22** (Forme algébrique)**.**

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 4(-2+3i)+3(-5-8i)$,
2. $z_2 = (2-i)(3+8i)$,
3. $z_3 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$,
4. $z_4 = \frac{(3+5i)^2}{1-2i}$,
5. $z_5 = (1+i)^3$,
6. $z_6 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$,
7. $z_7 = (1-i)\overline{1+i}$.

**Exercice 23** (Forme trigonométrique)**.**

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$,
2. $z_2 = 9i$,
3. $z_3 = -3$,
4. $z_4 = \dfrac{-i\sqrt{2}}{1+i}$,
5. $z_5 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$,
6. $z_6 = \sin x + i\cos x$.

**Exercice 24** (Les deux à la fois - avec application)**.**

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 1 + i \text{ et } z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Écrire $z_3$ sous forme algébrique.
2. Écrire $z_3$ sous forme trigonométrique.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

**Exercice 25** (Forme algébrique, le retour)**.**

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivantes :

1. $z_1 = (2+2i)^6$,
2. $z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$,
3. $z_3 = \frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}$.

**Exercice 26** (Réel positif)**.**

Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

**Exercice 27** (Forme trigonométrique et formule d'Euler)**.**

Soient $a, b \in ]0, \pi[$. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + e^{ia}$,
2. $z_2 = 1 - e^{ia}$,
3. $z_3 = e^{ia} + e^{ib}$,
4. $z_3 = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$.

### 12.6.2 Module et argument

**Exercice 28** (Transformation de Cayley)**.**

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

**Exercice 29** (Le même module)**.**

Déterminer les nombres complexes non nuls $z$ tels que $z$, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

**Exercice 30** (Homographie)**.**

Soit $z$ un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

**Exercice 31** (Module de la somme et de la différence)**.**

Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls. Démontrer que

$$|z+z'| = |z-z'| \Longleftrightarrow \theta' = \theta + \frac{\pi}{2}[\pi].$$

**Exercice 32** (Entiers somme de deux carrés)**.**

On dit qu'un entier naturel $N$ est somme de deux carrés s'il existe deux entiers naturels $a$ et $b$ de sorte que $N = a^2 + b^2$.

1. Écrire un algorithme permettant de déterminer si un entier naturel N est somme de deux carrés.
2. On souhaite prouver que, si $N_1$ et $N_2$ sont sommes de deux carrés, alors leur produit $N_1N_2$ est aussi somme de deux carrés. Pour cela, on écrit $N_1 = a^2 + b^2$ et $N_2 = c^2 + d^2$, et on introduit $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$. Comment écrire $N_1$ et $N_2$ en fonction de $z_1$ et $z_2$ ? En déduire que $N_1N_2$ est somme de deux carrés.
3. Démontrer que si $N$ est somme de deux carrés, alors pour tout entier $p \geqslant 1$, $N^p$ est somme de deux carrés.

**Exercice 33** (Automorphisme du disque)**.**

Soit $a$ un complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$
$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}.$$
2. Déterminer les nombres complexes $z$ vérifiant $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$.

**Exercice 34** (Inégalité triangulaire itérée, et cas d'égalité)**.**

1. Justifier que, pour tout nombre complexe $z$, on a $\Re e(z) \leqslant |z|$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
2. Démontrer que pour tout couple $(z_1, z_2)$ de nombres complexes, on a $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.
3. On suppose de plus que $z_1$ et $z_2$ sont des nombres complexes non nuls. Justifier que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement s'il existe un réel positif $\lambda$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.
4. Démontrer que pour tout $n$-uplet $(z_1, \ldots, z_n)$ de nombres complexes, on a
$$|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|.$$
5. Démontrer que si $z_1, \ldots, z_n$ sont tous non nuls, alors l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si il existe des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a $z_k = \lambda_k z_1$.

### 12.6.3 Équations et nombres complexes

**Exercice 35** (Quelques équations)**.**

Résoudre les équations suivantes :

**1**. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z$ **2**. $2z + \overline{z} = 2 + 3i$ **3**. $2z + 2\overline{z} = 2 + 3i$.

**Exercice 36** (Racine carrée en détails)**.**

On cherche à déterminer les nombres complexes $z$ tels que $z^2 = 15 - 8i$. Pour cela, on pose $z = x + iy$.
Montrer que $z^2 = 15 - 8i$ si et et seulement si $(x, y)$ est solution du système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 15 \\ 2xy &= -8. \end{cases}$$

Démontrer que si $z^2 = 15 - 8i$, on a aussi $x^2 + y^2 = 17$. En déduire tous les nombres complexes $z$ tels que $z^2 = 15 - 8i$.
Voir aussi l'exemple 1.

**Exercice 37** (Racine carrée d'un nombre complexe)**.**

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 4i,\ z_2 = 8 - 6i$.

**Exercice 38** (Racine carrée de deux façons)**.**

Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice 39** (Équations du second degré)**.**

Résoudre les équations du second degré suivantes :
1. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$. 2. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$. 3. $z^2 - (7 + i)z + 12 + 3i = 0$.

**Exercice 40** (Racines $n$-ièmes)**.**

Résoudre les équations suivantes :

1. $z^5 = -i$. 2. $z^6 = \dfrac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$. 3. $z^5 = \dfrac{(1 + i\sqrt{3})^4}{(1 + i)^2}$.

**Exercice 41** (Presque des racines de l'unité)**.**

Résoudre les équations suivantes :

1. $(z - 1)^5 = (z + 1)^5$. 2. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$. 3. $(z + i)^n = (z - i)^n$.

**Exercice 42** (Systèmes)**.**

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ :

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ -2z_1 + 3iz_2 = -17 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1 - 7i \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}$$

On donnera les résultats sous forme algébrique.

**Exercice 43** (Variations sur les équations classiques)**.**

Résoudre les équations suivantes :

1. $iz^8 + iz^4 + 1 + i = 0$.
2. $z^n = \bar{z}$ $(n \geq 2)$.
3. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.
4. $1 + 2z + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

**Exercice 44** (Degré plus grand)**.**

On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = 0.$$

1. Rechercher une solution imaginaire pure $ai$ à l'équation.
2. Déterminer $b, c \in \mathbb{R}$ tels que
$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z - ai)(z^2 + bz + c).$$
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.
4. Sur le même modèle, résoudre l'équation $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$.

**Exercice 45** (Degré plus grand)**.**

Résoudre l'équation $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

**Exercice 46** (Somme et puissances de racines $n$-ièmes)**.**

Soit $n \geqslant 1$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

1. Calculer le produit des racines $n$-ièmes de l'unité.
2. Soit $p \geqslant 0$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = 2n$.

### 12.6.4 Nombres complexes et géométrie

**Exercice 47** (Équation et lieu géométrique)**.**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si $z$ est réel.

**Exercice 48** (Lieux géométriques)**.**

Déterminer le lieu géométrique des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie

1. $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} = 1$.
2. $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $|(1+i)z - 2i| = 2$.

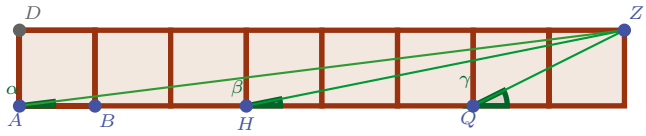
**Exercice 49** (Écriture complexe de transformations)**.**

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \mapsto \frac{1}{i} z$.
2. $z \mapsto z + (2+i)$.
3. $z \mapsto (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$.
4. $z \mapsto (1 + i\tan\alpha)z - i\tan\alpha,\ \alpha \in [0, \pi/2[$.

**Exercice 50** (Les huit carrés)**.**

Soit la figure suivante :




Le but de l'exercice est de démontrer que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$. On se place dans le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de sorte que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

1. Reproduire la figure et placer les points $E$ et $F$ sur $[DZ]$ tels que $\beta$ et $\gamma$ soient des mesures respectives de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AE})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AF})$.
2. Quelles sont les affixes des points $z_Z$, $z_E$ et $z_F$ ?
3. Démontrer que $z_Z \times z_E \times z_F = 65(1+i)$.
4. Conclure.

**Exercice 51** (Lieux géométriques)**.**

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer le lieu géométrique des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie la condition.
$I(i)$ et $M'(iz)$ sont alignés avec $M$ ; déterminer alors l'ensemble des points $M'$ correspondants ;

$$\Re e\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0;$$

$M, P$ d'affixe $z^2$ et $Q$ d'affixe $z^3$ sont les sommets d'un triangle rectangle.

**Exercice 52** (Points à coordonnées entières)**.**

Soit $ABCD$ un carré dans le plan complexe. Prouver que, si $A$ et $B$ sont à coordonnées entières, il en est de même de $C$ et $D$. Peut-on trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières ?

**Exercice 53** (Point de Vecten d'un triangle)**.**

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1. Soit $A$ et $B$ deux points du plan, d'affixes respectives $a$ et $b$. Donner les affixes $p$ et $p'$ des centres $P$ et $P'$ des deux carrés de côté $[AB]$.
2. Soit $ABC$ un triangle du plan. On considère les trois carrés extérieurs aux côtés du triangle, et on note $P$, $Q$ et $R$ les centres respectifs des carrés de côté $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
   (a) Donner les affixes $p$, $q$ et $r$ des points $P$, $Q$ et $R$ en fonction des affixes $a$,$b$ et$c$ des points $A$, $B$ et $C$.
   (b) Montrer que les triangles $ABC$ et $PQR$ ont même centre de gravité.
   (c) Démontrer que $PR = AQ$ et que les droites $(AQ)$ et $(PR)$ sont perpendiculaires.
   (d) Démontrer que les droites $(AQ), (BR)$ et $(CP)$ sont concourantes.

**Exercice 54** (À partir des racines $n$-ièmes)**.**

Soit a un nombre complexe de module 1, $z_1, \ldots, z_n$ les racines de l'équation $z^n = a$. Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont $(1 + z_1)^n, \ldots, (1 + z_n)^n$ sont alignés.

**Exercice 55** (Alignement de puissances)**.**

Trouver tous les nombres complexes $z$ tels que $z$, $z^2$ et $z^4$ soient alignés.

**Exercice 56** (Triangle équilatéral)**.**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés d'affixe $a$, $b$ et $c$. On note $j = e^{2i\pi/3}$.
Montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$. On ne suppose pas nécessairement que $ABC$ est équilatéral. On construit à partir de $ABC$ les trois triangles équilatéraux de base $AB$, $AC$ et $BC$ construits à l'extérieur du premier. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forme un triangle équilatéral.

**Exercice 57** (Triangle équilatéral)**.**

Montrer que le triangle de sommets $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ est équilatéral si et seulement si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3.$$

## 12.7 Solutions

**Solution 16**
Pour un nombre complexe de module 1, son inverse égale son conjugué.

1. Soit $u := \dfrac{a+b}{1+ab}$. En divisant numérateur et dénominateur par $ab \neq 0$,

$$\begin{aligned} u &= \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{ab}+1} \\ &= \frac{\overline{b}+\overline{a}}{\overline{ab}+1} \\ &= \overline{u} \end{aligned}$$

   Donc $u \in \mathbb{R}$.

2. On a donc

$$\begin{aligned} |ab+bc+ca| &= |abc|\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right| \\ &= 1\left|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right| \\ &= \left|\overline{a+b+c}\right| \\ &= |a+b+c|. \end{aligned}$$

**Solution 17**
Soit $z \in \mathbf{C}$. En conjuguant l'égalité, on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z+3\overline{z} & = & (2+i\sqrt{3})|z| \\ \overline{z}+3z & = & (2-i\sqrt{3})|z| \end{array} \right.$$

$$\left[z+3\overline{z} = (2+i\sqrt{3})|z|, \quad \text{inconnue } z \in \mathbf{C}\right]$$

On multiplie la première ligne par $-1$, la seconde par 3 et on ajoute pour obtenir

$$10z = (4-4i\sqrt{3})|z|.$$

En prenant les modules des deux membres, on obtient

$$10|z| = 8|z|,$$

donc $|z| = 0$ et $z = 0$.

Inversement, 0 est solution, donc l'unique solution de cette équation.

**Solution 18**

1. L'aire du triangle $OAB$ est $\dfrac{1}{2}|a| \times |b| \times \sin(\theta)$.
   Or

$$\frac{1}{2}\overline{a}b = \frac{1}{2}|a|\exp(-i\alpha) \times |b|\exp(i\beta) = |a||b|\exp(i(\beta-\alpha))$$

   où $\alpha$ et $\beta$ sont des arguments de $a$ et $b$ respectivement. Donc

$$\Im\left(\frac{1}{2}\overline{a}b\right) = \frac{1}{2}|a||b|\sin(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}|a||b|\sin(\theta).$$

2. Les triangles coloriés sont les triangles $A_{2k}MA_{2k+1}(k \in \{0,\dots,n-1\}$.
Tous les angles $\left(\overrightarrow{MA_{2k}},\overrightarrow{OA_{2k+1}}\right)$ admettent une mesure dans ] 0 , $\pi$ [. Donc la somme des aires des triangles coloriés égale

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_c &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Im\left(\exp\left(-\frac{2ik\pi}{n}\right)-\overline{m}\right)\times\left(\exp\left(\frac{i(2k+1)\pi}{n}\right)-m\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Im\left(\exp\left(\frac{i\pi}{n}\right)-m\exp\left(-\frac{2ik\pi}{n}\right)-\overline{m}\exp\left(\frac{i(2k+1)\pi}{n}\right)+m\overline{m}\right)\\ &= \frac{n}{2}\Im\left(\exp\left(\frac{i\pi}{n}\right)\right)-\frac{1}{2}\Im\left(m\overline{S_1}\right)-\frac{1}{2}\Im\left(\overline{m}S_2\right)+0,\end{aligned}$$

en posant

$$S_1 := \sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\ ; \qquad S_2 := \sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{i(2k+1)\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right)S_1.$$

Or $S_1$ est la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q := \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right) \neq 1$ soit

$$S_1 = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\exp\left(\frac{2in\pi}{n}\right)}{1-q} = 0.$$

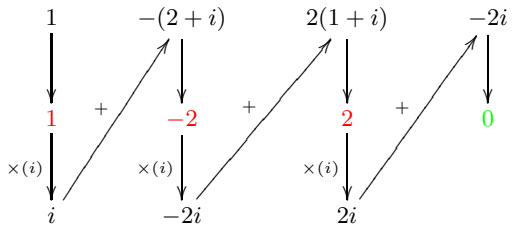
De même, la somme des aires des triangles non coloriés égale

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_b &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Im\left(\exp\left(-\frac{i(2k+1)\pi}{n}\right)-\overline{m}\right)\times\left(\exp\left(\frac{i(2k+2)\pi}{n}\right)-m\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Im\left(\exp\left(\frac{i\pi}{n}\right)-m\exp\left(-\frac{i(2k+1)\pi}{n}\right)-\overline{m}\exp\left(\frac{i(2k+2)\pi}{n}\right)+m\overline{m}\right)\\ &= \frac{n}{2}\Im\left(\exp\left(\frac{i\pi}{n}\right)\right)-\frac{1}{2}\Im\left(m\overline{S_2}\right)-\frac{1}{2}\Im\left(\overline{m}S_1\right),\end{aligned}$$

car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{i(2k+2)\pi}{n}\right) = \sum_{h=1}^{n}\exp\left(\frac{i(2h)\pi}{n}\right)$ par changement d'indice $h := k+1$
et que $\exp\left(\frac{i(2n)\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{i(2\times 0)\pi}{n}\right)$.
En fin de compte on a bien,

$$\mathscr{A}_c - \mathscr{A}_b = \frac{1}{2}\Im\left(-m\overline{S_1}-\overline{m}S_2+m\overline{S_2}+\overline{m}S_1\right) = 0.$$

**Solution 19**
Le schéma de Horner répond aux deux premières questions :



On trouve alors $P(z) = (z-i)(z^2-2z+2)$.

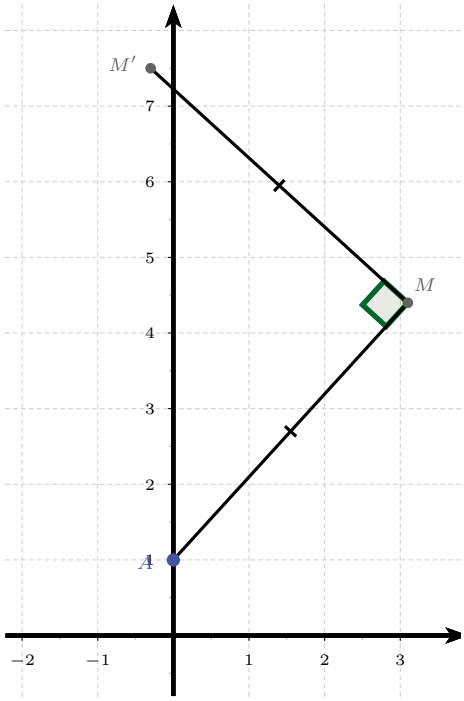
Les solutions sont $i$, $1+i$ et $1-i$. Ce sont les affixes d'un triangle rectangle au point d'affixe $1+i$.

**Solution 20**

1. Comme toutes les similitudes – voir le chapitre 7 du cours de terminale – (directes) qui ne sont pas des translations, $f$ admet un unique point fixe dont l'affixe $a$ vérifie $a = (1+i)a + 1$ soit $ia = -1$ soit $a = i$. Le point fixe est donc $A$.
2. (a) Pour tout nombre complexe $z$ distinct de $i$,

$$\begin{aligned}\frac{z'-z}{i-z} &= \frac{(1+i)z+1-z}{i-z}\\ &= \frac{iz+1}{i-z}\\ &= \frac{-i(-z+i)}{i-z}\\ &= -i.\end{aligned}$$

(b)




Le point $M'$ est le troisième sommet d'un triangle isocèle rectangle direct $AMM'$.

3. (a) Pour tout nombre complexe $z$,

$$z' - 3 - 2i - (1+i)(z-2) = (1+i)z + 1 - 3 - 2i - (1+i)(z-2) = 1 - 3 - 2i + 2(1+i) = 0.$$

Donc $z' - 3 - 2i = (1+i)(z-2)$.

(b) Si $M$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $B$ et de rayon $\sqrt{5}$, alors $|z-2| = \sqrt{5}$. De ce fait,

$$|z' - 3 - 2i| = |(1+i)(z-2)| = |(1+i)| \cdot |(z-2)| = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}.$$

Donc $M'$ appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre $\Omega$ d'affixe $3+2i$ et de rayon $\sqrt{10}$.

(c) Lorsqu'on considère la réunion des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, la droite $(\Omega B)$ qui passe par les centres des cercles est axe de symétrie de $\mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$. D'autre part $A \in \mathscr{C}$ puisque $AB = \sqrt{5}$. Donc $f(A) = A \in \mathscr{C}'$. De ce fait, $A \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$. Donc son symétrique par rapport à la droite $(\Omega B)$ appartient lui aussi à $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$. On remarque que $\Omega = f(B)$. De ce fait $B$ est le projeté orthogonal de $A$ sur l'axe de symétrie $(\Omega B)$. Comme $B$ est le milieu de $[AC]$ avec $C$ d'affixe $4 - i$, cela signifie que $C$ est l'autre point d'intersection des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

**Solution 21**

Comme tout est positif, cela revient à montrer que : $P := 4\cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right) 4\cos^2\left(\frac{3\pi}{14}\right) 4\cos^2\left(\frac{5\pi}{14}\right) = 7$, c'est-à-dire, $2(1+\cos(\frac{\pi}{7}))2(1+\cos(\frac{3\pi}{7}))2(1+\cos(\frac{5\pi}{7})) = 7$, ou encore, en posant $z = \mathrm{e}^{i\pi/7}$, $(2+z+\frac{1}{z})(2+z^3+\frac{1}{z^3})(2+z^5+\frac{1}{z^5}) = 7$, ou encore $(2+z-z^6)(2+z^3-z^4)(2+z^5-z^2) = 7$. On calcule donc :

$$\begin{aligned}
P &= (2+z-z^6)(2+z^3-z^4)(2+z^5-z^2)\\
&= z^{15} - z^{14} - z^{12} - z^{11} + z^{10} - 3z^9 + 4z^8 + z^7 - z^6 - 2z^4 + 2z^3 - 4z^2 + 4z + 8\\
&= z - 1 + z^5 + z^4 - z^3 + 3z^2 - 4z - 1 - z^6 - 2z^4 + 2z^3 - 4z^2 + 4z + 8\\
&= 6 + z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - z^6\\
&= 6 + \frac{z - z^7}{1+z} = 7
\end{aligned}$$

## 12.7.1 Formes algébriques et trigonométriques

**Solution 22 (Forme algébrique)**

On regroupe simplement les parties réelles et les parties imaginaires. On trouve

$$z_1 = (-8 + 12i) + (-15 - 24i) = -23 - 12i.$$

On développe, puis on regroupe pour trouver :

$$z_2 = 6 + 16i - 3i + 8 = 14 + 13i.$$

On multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur, et on obtient :

$$z_3 = \frac{-4(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = \frac{-4(1 - i\sqrt{3})}{1 + 3} = -1 + i\sqrt{3}.$$

On fait la même chose mais, pour simplifier les calculs, on développe d'abord le numérateur. On trouve :

$$z_4 = \frac{-16 + 30i}{1 - 2i} \times \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{-76 - 2i}{5}.$$

Le plus simple est de tout développer. On trouve

$$\begin{aligned}
z_5 &= (1+i)^3\\
&= (1+i)^2(1+i)\\
&= (1 + 2i + i^2)(1+i)\\
&= (1 + 2i - 1)(1+i)\\
&= 2i(1+i)\\
&= 2i + 2i^2\\
&= -2 + 2i.
\end{aligned}$$

Avec la formule du binôme, on écrit simplement

$$z_5 = (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i.$$

Ce n'est pas plus compliqué que les exemples précédents, mais il faut être méthodique dans les calculs. On écrit d'abord :

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+3i}{5}.$$

En élevant au carré,

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25}.$$

D'autre part, par la même méthode,

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{-3+6i}{5}.$$

En faisant la somme et en mettant tout au même dénominateur, on trouve finalement :

$$z_6 = -\frac{23}{25} + \frac{36}{25}i.$$

On écrit

$$z_7 = (1-i)(1-i) = 1 - 2i - 1 = -2i.$$

**Solution 23 (Forme trigonométrique)**
Le module de $1 + i\sqrt{3}$ est

$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2.$$

Il vient

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}.$$

On a $9i = 9e^{i\pi/2}$. On a $-3 = 3 \times (-1) = 3e^{i\pi}$. On écrit sous forme trigonométrique le numérateur et le dénominateur, puis on utilise les propriétés de l'exponentielle complexe. On a donc

$$-i\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}};$$

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

On conclut que

$$z_4 = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

On procède de la même façon. On a

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$$

d'où

$$(1 + i\sqrt{3})^3 = 8e^{i\pi}.$$

De même,

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4},$$

d'où

$$(1-i)^5 = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}.$$

On effectue le quotient et on trouve :

$$z_5 = \sqrt{2}e^{i\pi\left(1+\frac{5}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Il faut faire attention, il faut avoir quelque chose de la forme $\cos\theta + i\sin\theta$ pour obtenir une forme trigonométrique. L'idée ici est d'utiliser les formules de trigonométrie, et notamment le fait que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Il vient

$$z_6 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.$$

**Solution 24 (Les deux à la fois - avec application)**

1. On utilise (classiquement !) la quantité conjuguée du dénominateur :

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i.$$

2. On a

$$z_1 = 2e^{i\pi/3} \text{ et } z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4},$$

d'où

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)\right).$$

3. D'après l'écriture trigonométrique, on obtient une autre écriture algébrique de $z_3$ :

$$z_3 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}.$$

Par unicité de l'écriture algébrique, on en déduit

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Remarquons qu'on aurait aussi pu obtenir ce résultat à partir de la formule de $\cos(a-b)$ avec $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$.

**Solution 25 (Forme algébrique, le retour)**

La méthode la plus facile, ici, consiste à calculer d'abord la forme trigonométrique qui se comporte bien mieux vis à vis des puissances, puis à revenir à la forme algébrique.

On écrit

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

d'où

$$z_1 = 2^9 e^{3i\pi/2} = -512i.$$

On commence par passer par la forme trigonométrique :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2}\frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i7\pi/12}.$$

On en déduit que

$$z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = (\sqrt{2})^{20} e^{i\frac{140\pi}{12}} = 2^{10} e^{i\frac{35\pi}{3}}.$$

Puisque $35\pi = 3 \times 5 \times 2\pi + 5\pi$, on en déduit que

$$z_2 = 2^{10} e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2^9(1 - i\sqrt{3}) = 512 - i512\sqrt{3}.$$

Avec la même méthode, on a

$$(1+i)^{2000} = 2^{1000} e^{i500\pi} = 2^{1000}.$$

De même,

$$(i - \sqrt{3})^{1000} = 2^{1000} e^{i5000\pi/6}.$$

Or,

$$2500 = 833 \times 3 + 1$$

d'où

$$(i - \sqrt{3})^{1000} = 2^{1000} e^{i4\pi/3}.$$

Il vient finalement :

$$z_3 = e^{-i4\pi/3} = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

**Solution 26 (Réel positif)**
On commence par écrire $1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle :

$$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}.$$

En prenant la puissance $n$-ième, on trouve

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n e^{in\pi/3}.$$

Ceci est un réel positif si et seulement si $\sin(n\pi/3) = 0$ et $\cos(n\pi/3) \geqslant 0$. Or, $\sin(n\pi/3) = 0$ si et seulement si $n = 3k, k \in \mathbb{Z}$. Mais, pour ces valeurs de $n$, on a $\cos(n\pi/3) = \cos(k\pi)$, et ceci est positif si et seulement si $k$ est pair. Ainsi, les entiers qui conviennent sont les multiples de 6.

**Solution 27 (Forme trigonométrique et formule d'Euler)**
On utilise la méthode suivante : dans une somme ou une différence de deux complexes de module 1, $e^{ix} \pm e^{iy}$, on met en facteur $e^{i\frac{x+y}{2}}$ puis on utilise les formules d'Euler.

$$z_1 = e^{ia/2}\left(e^{-ia/2} + e^{ia/2}\right) = 2\cos(a/2)e^{ia/2}.$$

De plus, $\cos(a/2) > 0$ car $a \in ]0, \pi[$, et on a bien obtenu l'écriture trigonométrique du complexe. La même méthode donne

$$\begin{aligned} z_2 &= e^{ia/2}\left(e^{-ia/2} - e^{ia/2}\right) \\ &= -2i\sin(a/2)e^{ia/2} \\ &= 2\sin(a/2)e^{i\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On a cette fois

$$z_3 = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

C'est bien une forme trigonométrique de $z_3$, car $-\frac{\pi}{2} < \frac{a-b}{2} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) > 0$. En utilisant le résultat de la première question, on trouve

$$z_4 = \frac{2\cos(a/2)e^{ia/2}}{2\cos(b/2)e^{ib/2}} = \frac{\cos(a/2)}{\cos(b/2)}e^{i\frac{a-b}{2}}.$$

## 12.7.2 Module et argument

**Solution 28 (Transformation de Cayley)**
On écrit $z = e^{i\theta}, z' = e^{i\theta'}$ et on utilise les formules d'Euler en mettant en facteur $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ en facteur au numérateur et au dénominateur. Il vient

$$\begin{aligned}\frac{z+z'}{1+zz'} &= \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i(\theta+\theta')}} \\ &= \frac{e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}}{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}+e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}.\end{aligned}$$

On obtient bien un nombre réel, de module $\left|\frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\right|$.

**Solution 29 (Le même module)**
De $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$, on tire que $|z|^2 = 1$, donc que $|z| = 1$, c'est-à-dire que $z = e^{i\theta}$, où $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculons maintenant le module de $1 - z$. On écrit

$$1 - z = 1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right) = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}.$$

Le module de $1 - z$ vaut donc 1 si et seulement si $|\sin(\theta/2)| = 1/2$. L'équation $\sin(\theta/2) = 1/2$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$ donne $\theta = \pi/3$ ou $\theta = 5\pi/3$. L'équation $\sin(\theta/2) = -1/2$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ n'a pas de solutions. L'ensemble des solutions est donc $\{e^{i\pi/3}, e^{i5\pi/3}\}$.

**Solution 30 (Homographie)**
Supposons d'abord que $|z| = 1$. Alors $z$ s'écrit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. On peut alors écrire :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos(\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)} = i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

qui est bien un élément de $i\mathbb{R}$. Remarquons que l'on a le droit d'effectuer ce calcul car $\sin(\theta/2)$ ne s'annule pas. Réciproquement, supposons que $\frac{1+z}{1-z} = ia$, avec $a$ un réel. On va exprimer $z$ en fonction de $a$, puis calculer son module. Il vient :

$$\frac{1+z}{1-z} = ia \iff 1+z = ia(1-z) \iff z(1+ia) = -1+ia \iff z = \frac{-1+ia}{1+ia}.$$

On en déduit que

$$|z| = \left|\frac{-1+ia}{1+ia}\right| = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1,$$

ce qui prouve la réciproque.

**Solution 31 (Module de la somme et de la différence)**
L'idée est de passer au carré, et de développer.

$$|z+z'| = |z-z'| \iff |z+z'|^2 = |z-z'|^2 \iff |z|^2+|z'|^2+2\Re e(z\overline{z'}) = |z|^2+|z'|^2-2\Re e(z\overline{z'}).$$

En simplifiant par les termes égaux, ceci est donc équivalent à

$$\Re e(z\overline{z'}) = 0.$$

Or, $z\overline{z'} = \rho\rho' e^{i(\theta-\theta')}$. Ceci a une partie réelle nulle si et seulement si $\cos(\theta-\theta') = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

**Solution 32 (Entiers somme de deux carrés)**

1. Voici un algorithme qui convient (mais qui n'est pas du tout optimal !) :

```
Variables : N,a,b,compteur
Algorithme :
  Lire N
  compteur=0
  Pour a allant de 0 à N faire
     Pour b allant de 0 à N faire
        Si (N=a*a+b*b) alors compteur=compteur+1; Finsi.
     Fin pour
  Fin pour
  Si (compteur>0)
      alors Afficher N est somme de deux carrés
      sinon Afficher N n'est pas somme de deux carrés.
```

2. Il est facile de remarquer que $N_1 = |z_1|^2$ et que $N_2 = |z_2|^2$. On écrit, en utilisant le résultat de la question précédente, que
$$N_1 N_2 = |z_1 z_2|^2.$$
Or,
$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc) = e + if$$
avec $e = ac - bd$ et $f = ad + bc$ qui sont des entiers. Ainsi,
$$N_1 N_2 = e^2 + f^2$$
est somme de deux carrés.

3. Prouvons par récurrence sur $p$ la propriété $\mathcal{P}(p)$ : "$N^p$ est somme de deux carrés". Clairement, la propriété $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Soit $p \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vérifiée. Alors $N^{p+1} = N^p \times N$ est le produit de deux nombres qui sont chacun somme de deux carrés. D'après la question précédente, $N^{p+1}$ est lui aussi somme de deux carrés, et $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout entier $p \geqslant 1$.

**Remarque 8.**

On a démontré que pour tous réels $a, b, c, d$,
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$
Voir aussi l'exercice 27 page 177 du cours de seconde (en changeant $b$ en son opposé).
L'égalité reste vraie pour $a, b, c, d$ complexes, mais la démonstration plus haut n'est pas appropriée dans ce cas.

**Solution 33 (Automorphisme du disque)**

1. Il suffit de développer les modules au carré. Précisément, on a :

$$\begin{aligned} 1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 &= \frac{|1-\bar{a}z|^2-|z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1-\bar{a}z-a\bar{z}-|a|^2|z|^2-|z|^2-|a|^2+\bar{a}z+a\bar{z}}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1-|a|^2|z|^2-|z|^2-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}. \end{aligned}$$

2. On commence par remarquer que :

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1 \iff \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 \leq 1.$$

Ensuite, on a d'après la question précédente

$$1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}.$$

Ainsi, on a l'équivalence :

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leqslant 1 \iff \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} \geq 0.$$

Or, $1-|a|^2 \geqslant 0$ et $|1-\bar{a}z|^2 \geqslant 0$. On a donc la propriété voulue si et seulement si

$$1-|z|^2 \geqslant 0 \iff |z| \leqslant 1.$$

**Solution 34 (Inégalité triangulaire itérée, et cas d'égalité)**

1. Écrivons le nombre complexe $z$ sous la forme $z = x+iy$. Alors on a

$$\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2},$$

la dernière inégalité étant une conséquence de la croissance de la fonction racine carrée. Pour déterminer les cas d'égalité, la méthode est simple : on repère toutes les inégalités utilisées, et on aura égalité si et seulement si ces inégalités sont des égalités. Ici, les deux inégalités utilisées sont $\mathrm{Re}(z) \leqslant |\mathrm{Re}(z)|$ et $\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$. On a donc égalité si et seulement si $|x| = x$ et $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geqslant 0$ et $y = 0$. On a donc égalité si et seulement si $z$ est un réel positif ou nul.

2. C'est une question de cours ! Quand on travaille avec des modules, on a tout intérêt à se souvenir que ce qui est facile à calculer, c'est le carré du module. Tout étant positif, il suffit ici de démontrer que $|z_1+z_2|^2 \leqslant (|z_1|+|z_2|)^2$. Mais on a

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\times\overline{(z_1+z_2)} \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z_2}+z_2\bar{z_1} \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(\bar{z_1}z_2), \\ (|z_1|+|z_2|)^2 &= |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1z_2|. \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le résultat de la première question à $z = \bar{z_1}z_2$, puisque $|z_1z_2| = |\bar{z_1}z_2|$.

3. C'est une question nettement plus difficile. On étudie la preuve de la question précédente pour savoir où on a utilisé des inégalités plutôt que des égalités. La seule inégalité utilisée est $\mathrm{Re}(\bar{z_1}z_2) \leqslant |\overline{z_1}z_2|$. D'après le résultat de la question 1, on a égalité si et seulement si $\bar{z}_1 z_2$ est un réel positif ou nul. Puisque $z_1, z_2$ ne sont pas nuls, on a égalité si et seulement s'il existe $\mu > 0$ tel que $\overline{z_1}z_2 = \mu$. Il faut maintenant passer au résultat demandé. Pour cela, on peut aussi écrire $z_1 = re^{i\theta}$ de sorte que $\bar{z_1} = re^{-i\theta}$ ce qui entraine encore que
$$\frac{1}{\bar{z}_1} = \frac{1}{r}e^{i\theta} = \frac{1}{r^2}z_1.$$
Ainsi, on a démontré qu'on avait égalité si et seulement s'il existe $\mu > 0$ tel que
$$z_2 = \frac{\mu}{r^2}z_1.$$

4. Posant $\lambda = \mu/r^2$, on obtient le résultat. Il s'interprète en disant que $z_1$ et $z_2$ ont le même argument modulo $2\pi$. On va procéder par récurrence. Pour $n \geqslant 1$, considérons $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante :
$$\text{"}\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C},\ |z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|\text{."}$$
La proposition $\mathcal{P}(1)$ est trivialement vraie et la proposition $\mathcal{P}(2)$ a été vérifiée lors d'une question précédente. Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $z_1, \dots, z_{n+1}$ des nombres complexes et posons $Z_1 = z_1 + \cdots + z_n, Z_2 = z_{n+1}$. Puisque $\mathcal{P}(2)$ est vraie, on sait que
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|.$$
On utilise maintenant $\mathcal{P}(n)$ pour trouver que
$$|Z_1| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$
On a donc bien prouvé $\mathcal{P}(n+1)$ et par le principe de récurrence, le résultat est démontré pour tout entier $n$.

5. Là encore, une récurrence s'impose et là encore, elle est délicate. La proposition de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est cette fois :
$$\text{"}\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*,\ \left|\sum_{k+1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \forall k \in \{1, \dots, n\},\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ z_k = \lambda_k z_1\text{."}$$
L'initialisation $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2)$ ne pose pas de problème. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Comme précédemment, considérons $z_1, \dots, z_{n+1}$ des nombres complexes non-nuls et posons $Z_1 = z_1 + \cdots + z_n, Z_2 = z_{n+1}$. De la chaine d'inégalités
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = |Z_1 + Z_2| \leqslant |Z_1| + |Z_2| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|,$$
on déduit que l'on a égalité si et seulement si $|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$ et $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$. Ici, il faut faire attention ! On ne peut pas directement appliquer $\mathcal{P}(2)$ à $|Z_1 + Z_2|$ car pour le moment, rien ne nous dit que $Z_1 \neq 0$. On commence donc par appliquer $\mathcal{P}(n)$ à $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ pour en déduire que, pour $k = 1, \dots, n$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$. On en déduit que $Z_1 = (1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)z_1$ est non-nul, et on peut donc appliquer $\mathcal{P}(2)$ à $|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$. Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_{n+1} = \mu Z_1$. Posant $\lambda_{n+1} = \mu(1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$, on en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Il reste à écrire la conclusion du raisonnement par récurrence.

### 12.7.3 Équations et nombres complexes

**Solution 35 (Quelques équations)**

1. On distingue deux cas. D'abord, $z = 0$ est solution de l'équation. Si $z \neq 0$, alors on peut simplifier par $z$ et l'équation est équivalente à

$$(4-2i)z = 1+5i \iff z = \frac{1+5i}{4-2i} = \frac{(1+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{-6+22i}{20} = \frac{-3}{10} + \frac{11}{10}i.$$

   L'équation admet donc deux solutions, $z = 0$ et $z = \frac{-3}{10} + \frac{11}{10}i$.

2. On écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $2z + \bar{z} = 3x + iy = 2 + 3i$ si et seulement si $x = \frac{2}{3}$ et $y = 3$. L'équation admet donc une unique solution, $z = \frac{2}{3} + 3i$.

3. On procède de la même façon, mais cette fois on constate que $2z + 2\bar{z} = 4x$ est réel : il ne pourra jamais être égal à $2 + 3i$. L'équation n'admet pas de solutions.

**Solution 36 (Racine carrée en détails)**

On a

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires, $z^2 = 15 - 8i$ si et seulement si $(x, y)$ est solution du système proposé. Si $z^2 = 15 - 8i$, on doit avoir $|z^2| = |15 - 8i|$. Or,

$$|z^2| = x^2 + y^2$$

et

$$|15 - 8i| = 17.$$

En utilisant le système et la question précédente, on trouve que si $z^2 = 15 - 8i$, alors $2x^2 = 17 + 15$. Ceci donne $x^2 = 16$ et donc $x = \pm 4$. De plus, si $x = 4$, alors l'équation $2xy = -8$ donne $y = -1$ tandis que si $x = -4$, alors $y = 1$. On vérifie alors facilement que $4 - i$ et $-4 + i$ sont bien solution de $z^2 = 15 - 8i$. Ce sont les deux seules solutions de cette équation.

**Solution 37 (Racine carrée d'un nombre complexe)**

La méthode est toujours la même. On pose $z = a + ib$, de sorte que $z^2 = (a^2 - b^2) + 2iab$. L'équation $z^2 = 3 + 4i$ est donc équivalente à

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

On peut ajouter une troisième équation en remarquant que

$$|z|^2 = |3+4i| \iff a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5.$$

On trouve alors $2a^2 = 8$, soit $a = \pm 2$ et $2b^2 = 2$, soit $b = \pm 1$. L'équation $2ab = 4$ oblige $a$ et $b$ à avoir même signe, et donc les deux solutions sont $2 + i$ et $-2 - i$. Pour l'équation $z^2 = 8 - 6i$, on peut suivre une méthode exactement identique, et les solutions sont cette fois $3 - i$ et $-3 + i$.

**Solution 38 (Racine carrée de deux façons)**

Soit $w = a + ib$ tel que $w^2 = Z$. On obtient le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= \sqrt{3} \\ 2ab &= 1 \\ a^2 + b^2 &= |3+i| = 2. \end{cases}$$

Il vient $a^2 = \dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$ et $b^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$. Puisque $a$ et $b$ ont le même signe, les solutions sont donc

$$w = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \text{ et } w = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

Pour la résolution sous forme trigonométrique, on remarque que

$$Z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}.$$

Les racines carrées de $Z$ sont donc

$$w = \sqrt{2}e^{i\pi/12} \text{ et } w = -\sqrt{2}e^{i\pi/12}.$$

Comme les deux calculs donnent le même résultat, en identifiant les parties réelles, on trouve :

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}},$$

d'où on tire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

**Solution 39 (Équations du second degré)**

1. Le discriminant de cette équation du second degré vaut :

$$\Delta = (-2i)^2 - 4(-1+2i) = -8i.$$

Une racine carré de $\Delta$ est donnée par $\delta = i \times 2\sqrt{2} \times e^{i\pi/4} = -2+2i$. En appliquant les formules du cours, on trouve que les racines sont :

$$\frac{2i-2+2i}{2} = -1+2i \text{ et } \frac{2i+2-2i}{2} = 1.$$

2. Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = (4i-3)^2 - 4i(i-5) = -4i-3.$$

On en cherche une racine carrée sous la forme $\delta = a+ib$. Calculant $\delta^2$, et utilisant aussi la relation

$$|\delta^2| = |-4i-3| = 5,$$

on trouve le système :

$$\begin{cases} a^2-b^2 &= -3 \\ 2ab &= -4 \\ a^2+b^2 &= 5 \end{cases}$$

On en déduit que $\delta = 1-2i$ est solution de $\delta^2 = \Delta$ (l'autre solution est $-1+2i$). Utilisant les formules du cours, les racines de l'équation initiale sont donc :

$$\frac{-4i+3+1-2i}{2i} = -3-2i \text{ et } \frac{-4i+3-1+2i}{2i} = -1-i.$$

3. Le discriminant de cette équation égale $(7+i)^2-4(12+3i)=2i$. Une racine carrée de ce discriminant est $1+i$. Les racines de l'équation sont donc :

$$\frac{7+i-1-i}{2}=3 \text{ et } \frac{7+i+1+i}{2}=4+i.$$

**Solution 40 (Racines $n$-ièmes)**
C'est du cours !

1. On a $-i=e^{-i\pi/2}$, et donc

$$z^5=-i=\exp(-i\pi/2) \text{ soit } z=\exp\left(\frac{2ik\pi}{5}-\frac{i\pi}{10}\right),\ k\in\mathbb{Z};$$

on obtient 5 racines distinctes pour $k=0,\dots,4$.

2. On a

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\exp(i\pi/3).$$

On en déduit que

$$\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}=-2\exp(-i\pi/3)=2\exp(2i\pi/3).$$

Finalement,

$$z^6=\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} \text{ soit } z=2^{1/6}\exp\left(\frac{ik\pi}{3}+\frac{i\pi}{9}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

3. On a

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}=\frac{2^4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2^3\frac{e^{i\frac{\pi}{3}\times 4}}{e^{i\frac{\pi}{4}\times 2}}.$$

L'équation qu'on doit résoudre est donc :

$$z^5=2^3e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ soit } \left(\frac{z}{2^{3/5}e^{i\pi/6}}\right)^5=1.$$

On en déduit que les solutions sont les complexes de la forme

$$z=2^{3/5}\exp\left(i\frac{\pi}{6}+\frac{2ik\pi}{5}\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

**Solution 41 (Presque des racines de l'unité)**

1. 1 n'est pas solution, et l'équation est donc équivalente à

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5=1.$$

Posons $w=\frac{z+1}{z-1}$, c'est-à-dire $z=\frac{w+1}{w-1}$. On a $w^5=1$ si et seulement s'il existe $k\in\{0,\dots,4\}$ tel que $w=e^{2ik\pi/5}$. Si l'on retourne à $z$, on doit exclure $w=1$ car l'équation $\frac{z+1}{z-1}=1$ n'admet pas de solutions. On a donc 4 solutions qui sont

$$z=\frac{e^{2ik\pi/5}+1}{e^{2ik\pi/5}-1},$$

pour $k = 1, \ldots, 4$. On peut encore simplifier en utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \exp\left(\tfrac{2ik\pi}{5}\right) + 1 &= \exp\left(\tfrac{2ik\pi}{5}\right) + \exp(0) \\ &= \exp\left(\tfrac{ik\pi}{5}\right)\left(\exp\left(\tfrac{ik\pi}{5}\right) + \exp\left(\tfrac{-ik\pi}{5}\right)\right) \\ &= 2\exp\left(\tfrac{ik\pi}{5}\right)\cos(k\pi/5). \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\exp\left(\frac{2k\pi}{5}\right) - 1 = 2i\exp\left(\frac{ik\pi}{5}\right)\sin(k\pi/5).$$

L'ensemble des solutions est donc $\{-i\text{cotan}(k\pi/5);\ k = 1, \ldots, 4\}$.

2. Posons $w = \dfrac{z+1}{z-1}$. L'équation devient $w^3 + \dfrac{1}{w^3} = 0$, soit $w^6 = -1 = e^{i\pi}$. Ses racines sont

$$e^{i\pi/6 + k\pi/3},\ k = 0, \ldots, 5.$$

On retrouve alors $z$ car $z = \frac{w+1}{w-1}$. Pour $k = 1$ ou $k = 4$, on trouve $z = \pm i$. Pour les autres valeurs de $k$, on trouve $z = \pm i(2 \pm \sqrt{3})$.

3. Remarquons d'abord que $z = i$ n'est pas solution de l'équation. Ainsi, l'équation est équivalente à

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

Ceci est équivalent à dire qu'il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que

$$\frac{z+i}{z-i} = \omega_k,$$

en notant $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Pour $k = 0, \omega_k = 1$ et l'équation $\frac{z+i}{z-i} = 1$ n'a pas de solutions. Sinon, pour $k = 1, \ldots, n-1$, on obtient les solutions

$$z_k = i\frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}.$$

**Solution 42 (Systèmes)**
Le fait de résoudre des systèmes avec des nombres complexes ne change pas les méthodes de résolution. Seuls les calculs sont plus compliqués !

On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2z_1 - z_2 &=& i \\ -2z_1 + 3iz_2 &=& -17 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2z_1 - z_2 &=& i \\ (3i-1)z_2 &=& -17 + i \text{ (L1)+(L2)} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2z_1 &=& i + z_2 \\ z_2 &=& \frac{-17+i}{3i-1}. \end{array}\right.$$

On met $z_2$ sous forme algébrique en multipliant numérateur et dénominateur par $-3i - 1$ et on trouve $z_2 = 2 + 5i$. Finalement, revenant à $z_1$, on trouve que $z_1 = 1 + 3i$. Le système admet une unique solution donnée par $z_1 = 1 + 3i$ et $z_2 = 2 + 5i$. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3iz_1 + iz_2 &=& 1 - 7i \\ iz_1 + 2z_2 &=& 11i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3iz_1 + iz_2 &=& i + 7 \\ 3iz_1 + 6z_2 &=& 33i \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} (i-6)z_2 &=& 7 - 32i \\ iz_1 + 2z_2 &=& 11i. \end{array}\right.$$

On a donc $z_2 = \dfrac{7 - 32i}{i - 6} = -2 + 5i$ après mise sous forme algébrique. On en déduit facilement que $z_1 = 1 - 4i$. Ce second système admet donc une unique solution donnée par $z_1 = 1 - 4i$ et $z_2 = -2 + 5i$.

**Solution 43 (Variations sur les équations classiques)**

1. On commence par poser $u = z^4$, et l'équation devient $iu^2 + iu + 1 + i = 0$. Son discriminant est

$$\Delta = -1 - 4i(1+i) = 3 - 4i.$$

On cherche une racine carrée $\delta$ de $\Delta$ en posant $\delta = a + ib$, en utilisant $\delta^2 = \Delta$ et $|\delta|^2 = |\Delta| = 5$, et on trouve qu'une des deux racines est $\delta = 2 - i$. Les racines de l'équation $iu^2 + iu + 1 = 0$ sont donc les complexes

$$u_1 = \frac{-i - 2 + i}{2i} = i \text{ et } u_2 = \frac{-i + 2 - i}{2i} = -1 - i.$$

Reste à résoudre les équations $z^4 = u_1$ et $z^4 = u_2$. Pour cela, on pose $z = re^{i\theta}$ et on remarque que $u_1 = e^{i\pi/2}$ et que $u_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$. On en déduit

$$z^4 = e^{i\pi/2} \iff z = e^{i\pi/8 + k\pi/2},\ k = 0, \ldots, 3;$$

$$z^4 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} \iff z = 2^{1/8}e^{i5\pi/16 + k\pi/2},\ k = 0, \ldots, 3.$$

2. Puisque $|z| = |\overline{z}|$, on a $|z|^{n-1} = 1$ et donc $|z| = 1$. On peut donc poser $z = e^{i\theta}$ et l'équation devient

$$e^{in\theta} = e^{-i\theta} \iff e^{i(n+1)\theta} = 1 \iff \theta = 2k\pi/(n+1),\ k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

3. Remarquons que $z = -1$ n'est pas racine de l'équation. On reconnaît alors le début de la somme géométrique de raison $-z$. L'équation est donc équivalente à

$$\frac{1 - (-z)^5}{1 + z} = 0 \iff z^5 = -1 = e^{i\pi}.$$

Les solutions de cette dernière équation sont les complexes de la forme $e^{i\frac{(1+2k)\pi}{5}}, k = 0, \ldots, 5$ mais il faut faire attention que pour $k = 2$, on retrouve -1, valeur interdite ! Les solutions de l'équation initiale sont donc les quatre nombres complexes $e^{i\pi/5}, e^{3i\pi/5}, e^{7i\pi/5}, e^{9i\pi/5}$.

4. On commence par écrire :

$$1 + 2z + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = (1 + z + \cdots + z^{n-1}) + (z + \cdots + z^n).$$

On reconnaît deux sommes géométriques de raison $z$. Comme $z = 1$ n'est pas solution de l'équation, celle-ci est équivalente à

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} + \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} = 0 \iff 1 - z^n + z - z^{n+1} = 0 \iff (1 + z)(1 - z^n) = 0.$$

Les solutions sont donc $z = -1$ et les racines $n$-ièmes de l'unité, excepté 1. Autrement dit, 1 et $e^{2ik\pi/n}, k = 1, \ldots, n-1$.

**Solution 44 (Degré plus grand)**

1. $ai$ est solution de l'équation si et seulement si

$$-i + (i-1)ai - (1+i)a^2 - ia^3 = (-a - a^2) + i(-1 - a - a^2 - a^3) = 0.$$

La partie réelle et la partie imaginaire du complexe doivent être nuls, et donc $ai$ est solution de l'équation si et seulement si

$$\begin{cases} a + a^2 &= 0 \\ 1 + a + a^2 + a^3 &= 0. \end{cases}$$

La première équation donne $a = 0$ ou $a = -1$, et seul $-1$ convient pour la deuxième équation. Donc $-i$ est solution de l'équation.

2. On cherche $b, c$ tels que $z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2+bz+c)$. Pour cela, on développe le second membre et on trouve

$$(z+i)(z^2+bz+c) = z^3 + (b+i)z^2 + (ib+c)z + ic.$$

Par identification, on doit avoir

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b+i & = & 1+i \\ ib+c & = & i-1 \\ ic & = & -i \end{array} \right.$$

On trouve $b = 1$ et $c = -1$ et donc la factorisation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2+z-1).$$

3. $z$ est solution de l'équation si et seulement si $z = -i$ ou $z^2 + z - 1 = 0$. Les racines de cette équation sont $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. L'équation admet donc trois solutions, qui sont $-i$, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. On trouve que les solutions sont $i, 1+i$ et $1-i$.
4. On trouve $a = i$ comme racine imaginaire pur. On factorise $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = (z-i)(z^2+bz+2)$. En développant, on trouve le coefficient en $z$ : $2 - ib = 2 + 2i$ soit $b = -2$. On résout $z^2 - 2z + 2 = 0$. On trouve finalement :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{i, 1+i, 1-i\}}$$

**Solution 45 (Degré plus grand)**
Soit $x$ une racine réelle, i.e. $4ix^3 + 2(1+3i)x^2 - (5+4i)x + 3(1-7i) = 0$. Partie réelle et partie imaginaire du membre de gauche doivent être nulles, on obtient donc après identification :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x^2 - 5x + 3 & = & 0 \\ 4x^3 + 6x^2 - 4x - 21 & = & 0. \end{array} \right.$$

Il est facile de résoudre la première équation et de vérifier si on obtient une racine de l'autre équation. On trouve que $3/2$ est racine. On factorise alors le polynôme par $z - 3/2$, et on trouve (par exemple en procédant par identification) :

$$4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = (z-3/2)\big(4iz^2 + 2(1+6i)z + 2(-1+7i)\big).$$

Reste à résoudre ensuite l'équation :

$$4iz^2 + 2(1+6i)z + 2(-1+7i) = 0$$

dont les solutions sont $-2 + \frac{3}{2}i$ et $-1 - i$.

**Solution 46 (Somme et puissances de racines $n$-ièmes)**

1. Les racines $n$-ièmes de l'unité sont les complexes $\omega^k$, avec $k = 0, \ldots, n-1$. Leur produit vaut donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{n(n-1)/2} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

(résultat qu'on vérifie facilement pour $n = 1, 2, 3, 4$).

2. On a ici une somme géométrique de raison $\omega^p$. Si $p$ est un multiple de $n$, la raison est donc égale à 1, et la somme fait $n$. Sinon, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0$$

puisque $\omega^n = 1$.

3. On développe la puissance à l'intérieur de la somme en utilisant la formule du binôme, et on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\omega^{kp} \\ &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}.\end{aligned}$$

On utilise le résultat de la question précédente : la somme $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$ est nulle, sauf si $p=0$ ou si $p=n$. Dans ce cas, cette somme égale $n$. On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n = \binom{n}{0}n + \binom{n}{n}n = n+n = 2n.$$

## 12.7.4 Nombres complexes et géométrie

**Solution 47 (Équation et lieu géométrique)**
On peut faire un raisonnement algébrique, en posant $z = x+iy$ et en calculant effectivement les deux modules. Voici un raisonnement plus géométrique. Soit $A$ le point d'affixe $i$, $B$ le point d'affixe $-i$, et $M$ le point d'affixe $z$. Alors $|z-i|$ est la longueur $AM$, $|z+i|$ est la longueur $BM$, et la condition recherchée est $AM = BM$, c'est-à-dire $M$ est sur la médiatrice de $[AB]$, soit encore $M$ sur l'axe réel, soit $z$ réel.

**Solution 48 (Lieux géométriques)**

1. $z=5$ n'est pas solution et l'équation est équivalente à $|z-3| = |z-5|$. Autrement dit, le point $M$ d'affixe $z$ est à égale distance du point $A$ d'affixe 3 et du point $B$ d'affixe 5. L'ensemble des points recherché est donc la médiatrice de $[AB]$.
2. On a

$$\begin{aligned}\frac{|z-3|}{|z-5|} = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2 \\ &\iff (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\ &\iff z\bar{z} - (z+\bar{z}) = 7 \\ &\iff |z-1|^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2.\end{aligned}$$

M décrit donc le cercle de centre le point $A(1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

3. Factorisons par $1+i$ dans le module. On trouve :

$$|1+i|\left|z - \frac{2i}{1+i}\right| = 2.$$

Puisque $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\frac{2i}{1+i} = 1+i$, ceci est équivalent à

$$\left|z - \big(1+i\big)\right| = \sqrt{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des points $M$ correspondants est le cercle de centre le point $A(1,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

**Solution 49 (Écriture complexe de transformations)**

1. On écrit $\frac{1}{i}z = e^{-i\pi/2}z$, et on remarque que l'on a affaire à une rotation d'angle $-\pi/2$.
2. On a ici l'écriture d'une translation de vecteur $(2,1)$.
3. L'application de la forme $z \mapsto az+b$ est une similitude directe. Cherchons son centre qui est le point invariant, c'est-à-dire le point vérifiant $z = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$. On trouve $z = 1+i$, le centre de la similitude est donc le point $A(1,1)$. On a de plus

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}.$$

Le rapport de la similitude est donc égal à 2, et l'angle à $\pi/3$.

4. Si $\alpha = 0$, la transformation est simplement l'identité. Sinon, on a affaire à une similitude directe. Son point invariant est le nombre complexe $z$ solution de l'équation

$$z = (1 + i\tan\alpha)z - i\tan\alpha \iff z = 1.$$

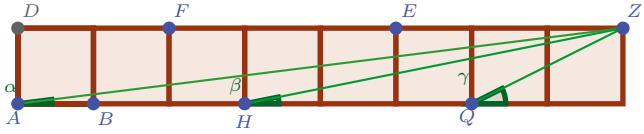
Le centre de la similitude est donc le point $A(1,0)$. De plus, on a

$$1 + i\tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \times (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha}.$$

Ainsi, la similitude est de rapport $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ et d'angle $\alpha$.

**Solution 50 (Les huit carrés)**

1. Ces points s'obtiennent par translation (rappelons qu'une translation préserve les angles orientés). On obtient :




2. On a $z_Z = 8+i$, $z_E = 5+i$ et $z_F = 2+i$.
3. On a $z_Z \times z_E = 39 + 13i$, puis

$$z_Z \times z_E \times z_F = (39+13i) \times (2+i) = 65 + 65i = 65(1+i).$$

4. On écrit sous forme trigonométrique le nombre complexe précédent. Puisque $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, il vient

$$z_Z \times z_E \times z_F = 65\sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

D'où $\arg(z_Z \times z_E \times z_F) = \pi/4\ [2\pi]$. Puisque l'argument d'un produit est la somme des arguments, on a

$$\arg(z_Z) + \arg(z_E) + \arg(z_F) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

On conclut car, modulo $2\pi$, $\arg(z_Z) = \alpha, \arg(z_E) = \beta$ et $\arg(z_F) = \gamma$.

**Solution 51 (Lieux géométriques)**
On sait que les points $I$, $M$ et $M'$ sont alignés si et seulement si

$$(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = 0[\pi] \ \text{ ou } \ M = I \ \text{ ou } \ M' = I \ \text{ ou } \ M = M'.$$

En termes de nombres complexes, ceci se traduit par

$$\arg\left(\frac{iz - i}{z - i}\right) = 0\ [\pi] \text{ ou } z = i \text{ ou } iz = i \text{ ou } iz = z.$$

Introduisons le point $A$ d'affixe 1. Alors, ceci devient

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0\ [\pi] \ \text{ ou } \ M = I \ \text{ ou } \ M = A \text{ ou } \ M = O \\
\iff &(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{2}\ [\pi] \ \text{ ou } \ M = I \ \text{ ou } \ M = A \ \text{ ou } \ M = O \\
\iff &(IM) \perp (AM) \ \text{ ou } \ M = I \ \text{ ou } \ M = A \ \text{ ou } \ M = O.
\end{aligned}$$

Les points $M$ solutions sont donc les points du cercle de diamètre $[AI]$ ($O$ étant également un point de ce cercle). Puisque $M'$ est image de $M$ par rotation de centre $O$ et d'angle $\pi/2$, les points $M'$ correspondants sont sur l'image de ce cercle par cette rotation. Notons $A$ d'affixe 1 et $I$ d'affixe $i$. La question s'écrit encore

$$\frac{z-1}{z-i} = ia, \text{ avec } a \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux. Autrement dit, la condition est vérifiée si et seulement si $M$ appartient au cercle de diamètre $[AI]$, excepté $I$ (on doit avoir $z \neq i$ pour définir le quotient).

On va d'abord supposer que $z \neq 0, 1, -1$ pour que les trois points $M, P, Q$ soient distincts et qu'on soit sûr d'avoir affaire à un vrai triangle. On va utiliser la condition suivante : soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$. Les droites $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \frac{c-a}{b-a} = mi \iff \Re e\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0.$$

On distingue alors trois cas : le triangle est rectangle en $M$. Ceci est équivalent à

$$\Re e\left(\frac{z^3 - z}{z^2 - z}\right) = 0 \iff \Re e(z+1) = 0 \iff \Re e(z) = -1.$$

Les points $M$ solutions sont alors ceux de la droite d'équation $x = -1$. le triangle est rectangle en $P$. Ceci est équivalent à

$$\Re e\left(\frac{z^3 - z^2}{z - z^2}\right) = 0 \iff \Re e(z) = 0.$$

Les points $M$ solutions sont alors ceux de la droite d'équation $x = 0$. le triangle est rectangle en $Q$. Ceci est équivalent à

$$\Re e\left(\frac{z - z^3}{z^2 - z^3}\right) = 0 \iff \Re e\left(\frac{z+1}{z}\right) = 0.$$

Notons $D$ d'affixe $-1$ et $O$ d'affixe 0. On obtient que les droites $(DM)$ et $(OM)$ sont orthogonales, c'est-à-dire que $M$ décrit le cercle de diamètre $[OD]$.

**Solution 52 (Points à coordonnées entières)**
On note $a = x + iy$ et $b = x' + iy'$ les affixes respectives de $A$ et $B$. Par hypothèse, $x$, $x'$, $y$ et $y'$ sont des entiers. Puisque $ABCD$ est un carré, $D$ est l'image de $B$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\pi/2$. Traduit en termes de nombres complexes, si $d$ est l'affixe de $D$, ceci signifie que

$$d - a = i(b - a) \implies d = a + i(b - a) = x + iy + i\big((x' - x) + i(y' - y)\big) = x + y - y' + i(y + x' - x).$$

Ainsi, les coordonnées de $D$ sont bien des entiers. Pour prouver que les coordonnées de $C$ sont des entiers, on procède de la même façon, en utilisant cette fois le fait que $C$ est l'image de A dans la rotation de centre $D$ et d'angle $\pi/2$. Imaginons maintenant que $ABC$ soit un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières, et gardons les notations précédentes. Alors, $C$, d'affixe $c = x'' + iy''$ est l'image de $B$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\pi/3$. Autrement dit,

$$c - a = e^{i\pi/3}(b - a) \implies c = (x + iy) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\big((x' - x) + i(y' - y)\big).$$

On développe, et après calcul, on trouve que

$$c = x + \frac{x - x'}{2} - \frac{\sqrt{3}(y' - y)}{2} + i\left(y + \frac{y' - y}{2} + \frac{\sqrt{3}(x' - x)}{2}\right).$$

Pour que la partie réelle de $c$ soit un entier, il est nécessaire que $y = y'$ et pour que la partie imaginaire de $c$ soit nulle, il est nécessaire que $x = x'$. Finalement, ceci entraine $A = B$, c'est-à-dire que le triangle est réduit à un point !

**Solution 53 (Point de Vecten d'un triangle)**

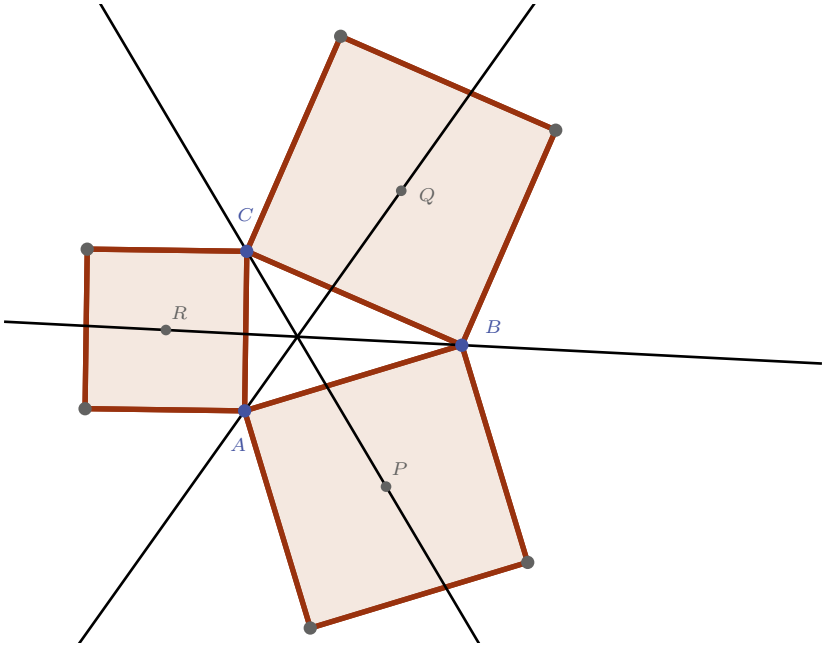
1. Soit $C$ l'image de $B$ par la rotation d'angle $-\pi/2$ et de centre $A$. Notons $c$ son affixe. Alors $c-a = -i(b-a)$ et donc $c = (1+i)a - ib$. Le point $P$ est le milieu de $[BC]$. Son affixe est donc

$$p = \frac{(1+i)a + (1-i)b}{2}.$$

Notons ensuite $D$, d'affixe $d$, l'image de $B$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\pi/2$, de sorte que $d - a = i(b-a)$. Le point $P'$ est le milieu de $[BD]$ et un calcul similaire prouve que son affixe $p'$ vérifie

$$p' = \frac{(1-i)a + (1+i)b}{2}.$$

2.




(a) Il y a une difficulté ici due à la définition du carré « extérieur » au triangle $ABC$. On va supposer, comme dans la figure, que $C$ est dans le même demi-plan défini par la droite $(AB)$ que l'image de $B$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\pi/2$. Le centre du carré extérieur à $ABC$ de côté $[AB]$ est alors exactement le point $P$ construit à la question précédente. En particulier, il vérifie

$$p = \frac{(1+i)a + (1-i)b}{2}.$$

Faisant tourner le rôle de $A$, $B$ et $C$, on en déduit immédiatement que

$$q = \frac{(1+i)b + (1-i)c}{2}$$

et

$$r = \frac{(1+i)c + (1-i)a}{2}.$$

(b) L'affixe du centre de gravité de $ABC$ est $(a+b+c)/3$. L'affixe du centre de gravité de $PQR$ est $(p+q+r)/3$. C'est un calcul élémentaire de vérifier que

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{p+q+r}{3};$$

(c) Soit $z_1$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AQ}$ et $z_2$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{PR}$. Alors on a

$$z_1 = \frac{c(1-i)}{2} + \frac{b(1+i)}{2} - a$$
$$z_2 = \frac{c(1+i)}{2} + \frac{b(-1+i)}{2} - ia.$$

Puisque $i(1-i) = 1+i$, on en déduit que $z_2 = iz_1$, ce qui démontre à la fois que $AQ = PR$ et que les droites $(AQ)$ et $(PR)$ sont parallèles.

(d) D'après la question précédente, $(AQ)$ est la hauteur du triangle $PQR$ issue de $Q$. De même, $(BR)$ est la hauteur du triangle $PQR$ issue de $R$ et $(CP)$ est la hauteur du triangle $PQR$ issue de $P$. Comme les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, on en déduit que les droites $(AQ)$, $(BR)$ et $(CP)$ sont concourantes.

**Solution 54 (À partir des racines $n$-ièmes)**
Posons $a = e^{i\theta}$. Alors les racines de $z^n = a$ sont données par $z_k = e^{(2ik\pi+\theta)/n}$, $k = 0, \dots, n-1$. Factorisant par l'angle moitié et utilisant les formules d'Euler, on a

$$1 + z_k = 2\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right) e^{i(2k\pi+\theta)/2n}$$

soit

$$(1+z_k)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right) e^{i(2k\pi+\theta)/2} = 2^n \cos^n\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right) e^{i(k\pi+\theta/2)}.$$

Tous les points d'affixe $(1+z_k)^n$ sont donc situés sur la droite qui fait un angle $\theta/2$ avec l'axe des abscisses. Ainsi, ils sont alignés.

**Solution 55 (Alignement de puissances)**
On commence par étudier les cas où deux de ces points sont confondus. L'équation $z = z^2$ a pour solution $z = 1$ et $z = 0$. L'équation $z = z^4$ a pour solutions $z = 0$ et $z = 1, j, j^2$. L'équation $z^2 = z^4$ a pour solutions $z = 0, 1, -1$. On suppose désormais que $z$ est différent des nombres précédemment trouvés, et on remarque que les points sont alignés si et seulement si

$$\arg\left(\frac{z^4-z}{z^2-z}\right) = 0\ [\pi] \iff \frac{z^4-z}{z^2-z} \in \mathbb{R}.$$

Or, en notant $z = x + iy$, on a

$$\frac{z^4-z}{z^2-z} = \frac{z(z-1)(z^2+z+1)}{z(z-1)} = z^2+z+1 = (x^2-y^2+x+1) + iy(2x+1).$$

Ainsi, on en déduit que, dans ce cas, les points $z$, $z^2$ et $z^4$ sont alignés si et seulement si $y = 0$ ou $x = -1/2$, c'est-à-dire si et seulement si $z$ est réel ou sa partie réelle vaut $-1/2$. Remarquons que l'on retrouve les solutions précédentes, $1, -1, j$ et $-j$.

**Solution 56 (Triangle équilatéral)**
$ABC$ est équilatéral direct si et seulement si $C$ est l'image de $B$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\pi/3$. En termes de nombres complexes, ceci se caractérise par

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2 \iff c - a + j^2 b - j^2 a = 0.$$

Or, $1 + j^2 = -j$ et en multipliant par $j^2$, on obtient le résultat voulu. Quitte à échanger les rôles de $B$ et $C$, on peut toujours supposer que le triangle est direct, c'est-à-dire que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est dans $]0, \pi[$. Notons $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$ les triangles équilatéraux directs obtenus. Soient aussi $a', b', c'$ les affixes respectives de $A'$, $B'$ et $C'$. Alors, par la question précédente, on a les trois équations :

$$\begin{cases} a + jc' + j^2 b &= 0 \\ b + ja' + j^2 c &= 0 \\ c + jb' + j^2 a &= 0. \end{cases}$$

Soit $E, F, G$ les centres de gravité respectifs de $AC'B$, $BAC'$ et $CB'A$, d'affixe respectives $e = \frac{1}{3}(a+c'+b)$, $f = \frac{1}{3}(b+a'+c)$ et $g = \frac{1}{3}(c+b'+a)$. D'après la question précédente, il suffit de prouver que $e+jf+j^2 g = 0$. Or,

$$3(e + jf + j^2 g) = a + c' + b + jb + ja' + jc + j^2 c + j^2 b' + j^2 a.$$

Or, $c' = -j^2 a - b$, $ja' = -b - j^2 c$ et $j^2 b' = -jc - a$, ce qui prouve bien que $e + jf + j^2 g = 0$. Le triangle $EFG$ est équilatéral direct.

**Solution 57 (Triangle équilatéral)**
Le triangle est équilatéral si et seulement si

$$z_3 - z_1 = e^{i\pi/3}(z_2 - z_1) \text{ ou } z_3 - z_1 = e^{-i\pi/3}(z_2 - z_1),$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$z_3 - (1 - e^{i\pi/3})z_1 - e^{i\pi/3} z_2 = 0 \text{ ou } z_3 - (1 - e^{-i\pi/3})z_1 - e^{-i\pi/3} z_2 = 0.$$

Ceci est encore équivalent à dire que le produit de ces deux quantités est nul, c'est-à-dire à

$$(z_3 - (1 - e^{i\pi/3})z_1 - e^{i\pi/3} z_2)(z_3 - (1 - e^{-i\pi/3})z_1 - e^{-i\pi/3} z_2) = 0.$$

En développant ce produit, on trouve exactement la condition demandée.

## 12.8 Exercices supplémentaires

**Exercice 58.**

Soit $\alpha$ un nombre complexe, racine de $x^{10} + tx + 1 = 0$.
On suppose que $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi racine de $x^{10} + tx + 1 = 0$.
Calculer $t$.

**Solution 58**
On a $\alpha^{10} + t\alpha + 1 = 0$ et comme $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi racine de $x^{10} + tx + 1 = 0$, on a $\alpha^{10} + t\alpha^9 + 1 = 0$. Donc $t = 0$ ou $\alpha^8 = 1$ et dans ce dernier cas, $\alpha^2 + t\alpha + 1 = 0$ donc $t = -\left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)$ soit $t = -2\cos\frac{\pi k}{4}$, $0 \le k \le 3$.

**Exercice 59.**

Trouver tous les entiers $a > b > c > d$ tels que $ab + cd = 34 \quad , \quad ac - bd = 19$.

**Solution 59**

On a :

$(a^2 + d^2)(c^2 + b^2) = (ab + cd)^2 + (ac - bd)^2 = 1517 = 37 \times 41$,

$a = 6, b = 5, c = 4, d = 1$ et $a = 34, b = 1, c = 0, d = -19$.

**Exercice 60.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 3$. Trouver tous les $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tels que $z^n$ et $(z+1)^n$ soient réels.

**Solution 60**

$z^n \in \mathbb{R} \iff z^n = \overline{z}^n \iff \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^n = 1$. Donc $\frac{z}{\overline{z}} = \zeta_k$, avec $\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ , $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

De même, d'après $(1+z)^n \in \mathbb{R}$ on obtient : $\frac{1+z}{1+\overline{z}} = \zeta_p$ , $p \in \{0, \ldots, n-1\}$. Mais pour $k = p$, on a $\frac{1+z}{1+\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}} \iff z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$, contradiction.

Donc on a $k \neq p$. Mais on a aussi $\overline{z} = \frac{z}{\zeta_k}$ ce qui réinjecté dans la relation $\frac{1+z}{1+\overline{z}} = \zeta_p$, donne $\boxed{z = \frac{\zeta_k\zeta_p - \zeta_k}{\zeta_k - \zeta_p}}$, pour tous $k, p \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ , $k \neq p$.

**Exercice 61.**

Démontrer que $\boxed{\forall\, m, n \in \mathbb{N},\ n \geq 3,\ n \geq m+1, \sum_{k=1}^{n} \cos^m \frac{k\pi}{n} \cdot \cos\frac{mk\pi}{n} = \frac{n}{2^m},}$.

**Solution 61**

C'est plus ZamuZant en Z : on regarde la partie réelle de $S = \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\frac{k\pi}{n} \cdot e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)^m = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{2}\right)^m = \frac{1}{2^m}\sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)^m$.

Maintenant on développe chacun des $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)^m = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} e^{\frac{2ikp\pi}{n}}$ par la formule du binôme, et on intervertit les sommes : $S = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ikp\pi}{n}}$.

Or $\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ikp\pi}{n}}$ est nul sauf lorsque $p$ est un multiple de $n$, ce qui ne se produit que lorsque $p = 0$

puisqu'on a supposé au départ $m < n$. Dans ce cas seulement cette dernière somme vaut $n$. On trouve bien

$$\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ikp\pi}{n}} \text{ et } S = \frac{n}{2^m}$$

ce qui donne bien le résultat demandé en passant à la partie réelle.

**Exercice 62.**

soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible. Démontrer que les centres de gravité des triangles $ABC$, $CDA$, $BCD$, $DAB$ sont cocycliques (ou alignés).

**Solution 62**

On considère $a, b, c, d$, les affixes respectives des points $A, B, C, D$. Puisque ces points sont cocycliques, le birapport $\lambda = \dfrac{b-d}{c-d} \cdot \dfrac{c-a}{b-a}$ est réel. Soit $C_1, C_2, C_3, C_4$ les centres de gravité respectifs des triangles $ABC$, $CDA$, $BCD$, $DAB$ et soit $c_1, c_2, c_3, c_4$ leurs affixes respectives. On a donc $c_1 = \dfrac{a+b+c}{3}, c_2 = \dfrac{b+c+d}{3}, c_3 = \dfrac{c+d+a}{3}, c_4 = \dfrac{d+a+b}{3}$ Il suffit de montrer que le birapport $\mu = \dfrac{c_1 - c_3}{c_2 - c_3} \cdot \dfrac{c_2 - c_4}{c_1 - c_4}$ est réel. Or $\mu = \dfrac{b-d}{b-a} \cdot \dfrac{c-a}{c-d} = \lambda \in \mathbb{R}$.

**Exercice 63.**

Déterminer la représentation complexe de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta$ passant par l'origine et d'angle polaire $\vartheta$.

**Solution 63**

Pour $\vartheta \equiv 0 \pmod{\pi}$ on a $z' = \overline{z}$ comme représentation complexe de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Sinon on fait venir $\Delta$ sur l'axe des abscisses par rotation (de centre $O$) d'angle $-\vartheta$ soit $z_1 = e^{-i\vartheta} z$ puis symétrie orthogonale $\overline{z}$ soit $z_2 = \overline{e^{-i\vartheta} z} = e^{i\vartheta}\overline{z}$, puis on fait revenir la droite sur $\Delta$ par rotation $e^{i\vartheta} z$ soit $z' = e^{i\vartheta} e^{i\vartheta}\overline{z} = e^{2i\vartheta}\overline{z}$.

Vérification : 1 a bien pour image $e^{2i\vartheta}$.

**Exercice 64.**

Résoudre $\sqrt{3}\sin x(\cos x - \sin x) + (2 - \sqrt{6})\cos x + 2\sin x + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \ = \ 0$.

**Solution 64**

On pose $x = t + \frac{\pi}{4}$, pour obtenir l'équation $\sqrt{3}\sin(t)(1 - \sin(t) - \cos(t)) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(1 - \cos(t)) = 0$.

En posant $t = 2u$, on obtient $\sin(u)^2(\sqrt{3}\sin(t) - \sqrt{3}\cos(t) - 2\sqrt{2}) = 0 \iff \sin(u)^2(\sin(t - \frac{\pi}{4}) - \frac{2}{\sqrt{3}}) = 0$.

Puisque $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$, l'unique solution est $u = k\pi$ et donc $\boxed{x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi}$.

**Exercice 65.**

Démontrer les identités :

1. $\sin(x+y).\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x = \dfrac{\tan^2 x - \tan^2 y}{(1+\tan^2 x).(1+\tan^2 y)}$
2. $\cos(x+y).\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x = \dfrac{1-\tan^2 x.\tan^2 y}{(1+\tan^2 x).(1+\tan^2 y)}$
3. $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \dfrac{\dfrac{\tan x}{\tan y}+1}{\dfrac{\tan x}{\tan y}-1}$
4. $\tan x + \tan y + \tan z - \tan x.\tan y.\tan z = \dfrac{\sin(x+y+z)}{\cos x.\cos y.\cos z}$
5. $\sin(u+v+w) = \sin u + \sin v + \sin w - 4\sin\dfrac{u+v}{2}\sin\dfrac{v+w}{2}\sin\dfrac{w+u}{2}$
6. $\cos(u+v+w) = 4\cos\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{v+w}{2}\cos\dfrac{w+u}{2} - \cos u - \cos v - \cos w$
7. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 2.\cos x.\cos y.\cos z - 1 = (\cos x - \cos(y-z)).(\cos x - \cos(y+z))$.
8. $\dfrac{\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{4\sin x}{3-4\sin^2 x}$
9. $\cos^2(x-y)+\cos^2(y-z)+\cos^2(z-x) - 2.\cos(x-y).\cos(y-z).\cos(z-x) = 1$
10. $\tan(x-y)+\tan(y-z)+\tan(z-x) = \tan(x-y).\tan(y-z).\tan(z-x)$.

**Solution 65**

1. $2.\sin a.\sin b = \cos(a-b)-\cos(a+b)$. Donc $2.\sin(x+y).\sin(x-y) = \cos(x+y-x+y)-\cos(x+y+x-y) = \cos(2y)-\cos(2x) = 2\cos^2 y - 1 - 2\cos^2 y + 1 = 2\cos^2 y - 2\cos^2 x$ D'où $\sin(x+y).\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x = 1 - \sin^2 y - 1 + \sin^2 x = \sin^2 x - \sin^2 y$ . Maintenant, $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ . D'où $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ et $\cos^2 y - \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} - \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \dfrac{\tan^2 x - \tan^2 y}{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y)}$ .
   Autre solution : Soit $y$ fixé dans $\mathbb{R}$. On pose $f(x) = \sin(x+y).\sin(x-y) - (\sin x+\sin y)(\sin x - \sin y)$.
   $f'(x) = \cos(x+y).\sin(x-y) + \sin(x+y).\cos(x-y) - \cos x(\sin x - \sin y) - (\sin x + \sin y)\cos x$
   $= \sin(x+y+x-y) - 2\cos x \sin x = \sin 2x - \sin 2x = 0$. Donc $f$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = -\sin^2 y + \sin^2 y = 0$, on a bien $\sin(x+y).\sin(x-y) = (\sin x+\sin y)(\sin x - \sin y) \forall x, y \in \mathbb{R}$.
2. De même $2.\cos a.\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$. Donc $2.\cos(x+y).\cos(x-y) = \cos(x+y+x-y)+\cos(x+y-x+y) = \cos(2x)+\cos(2y) = 2\cos^2 x - 1 + 1 - 2\sin^2 y = 2\cos^2 x - 2\sin^2 y$ D'où $\cos(x+y).\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y = 1 - \sin^2 x - 1 + \cos^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x$.
   Maintenant, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et
   $$\cos^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 y} - \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1-\tan^2 x.\tan^2 y - \tan^2 y}{(1+\tan^2 x)(1+\tan^2 y)}.$$
3. $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \dfrac{\sin x.\cos y + \cos x.\sin y}{\sin x.\cos y - \cos x.\sin y} = \dfrac{\dfrac{\tan x}{\tan y}+1}{\dfrac{\tan x}{\tan y}-1}$ en divisant en haut et en bas par $\cos x.\sin y$.

L'égalité est vraie pour $\sin(x-y)\neq 0$ et $\sin y\neq 0$.

4.

$$\begin{aligned}\sin(x+y+z) &= \sin(x+y).\cos z+\cos(x+y).\sin z\\ &= \sin x.\cos y.\cos z+\cos x.\sin y.\cos z+\cos x.\cos y.\sin z-\sin x.\sin y.\sin z.\end{aligned}$$

D'où, en divisant en haut et en bas par $\cos x.\cos y.\cos z$,

$$\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x.\cos y.\cos z}=\tan x+\tan y+\tan z-\tan x.\tan y.\tan z.$$

5. C'est plus Zamuzant en Z : On a $\exp(i(u+v+w))=\exp\left(i\frac{u+v}{2}\right)\exp\left(i\frac{v+w}{2}\right)\exp\left(i\frac{w+u}{2}\right)$ .
On trouve la partie imaginaire en prenant un nombre impair de parties imaginaires (une ou trois) :

$$\begin{aligned}\sin(u+v+w) &= -\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}+\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}\\ &\quad+\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{v+w}{2}\cos\frac{w+u}{2}+\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\cos\frac{w+u}{2}\\ &= -4\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}+\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}\\ &\quad+\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}+\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{v+w}{2}\cos\frac{w+u}{2}\\ &\quad+\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}+\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\cos\frac{w+u}{2}\\ &\quad+\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}\\ &= -4\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}\\ &\quad+\left(\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{v+w}{2}+\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\right)\sin\frac{w+u}{2}\\ &\quad+\left(\cos\frac{v+w}{2}\cos\frac{w+u}{2}+\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}\right)\sin\frac{u+v}{2}\\ &\quad+\left(\cos\frac{w+u}{2}\cos\frac{u+v}{2}+\sin\frac{w+u}{2}\sin\frac{u+v}{2}\right)\sin\frac{v+w}{2}\\ &= -4\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}+\cos\frac{u-w}{2}\sin\frac{w+u}{2}\\ &\quad+\cos\frac{v-u}{2}\sin\frac{v+u}{2}+\cos\frac{w-v}{2}\sin\frac{w+v}{2}\\ &= -4\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}+\frac{1}{2}(\sin u+\sin w)\\ &\quad+\frac{1}{2}(\sin v+\sin u)\,\frac{1}{2}(\sin w+\sin v)\\ &= -4\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v+w}{2}\sin\frac{w+u}{2}-\sin u-\sin v-\sin w.\end{aligned}$$

6. Même travail avec la partie réelle.

7.

$$\begin{aligned}(\cos x-\cos(y-z)).(\cos x-\cos(y+z)) &= (\cos x-\cos y.\cos z-\sin y.\sin z)\times\\ &\qquad\times(\cos x-\cos y.\cos z+\sin y.\sin z)\\ &= (\cos x-\cos y.\cos z)^2-(\sin y.\sin z)^2\\ &= \cos^2 x-2.\cos x.\cos y.\cos z+\cos^2 y.\cos^2 z\\ &\quad-(1-\cos^2 y)(1-\cos^2 z)\\ &= \cos^2 x-2.\cos x.\cos y.\cos z+\cos^2 y.\cos^2 z\\ &\quad-1+\cos^2 y+\cos^2 z-\cos^2 y.\cos^2 z\\ &= \cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-2.\cos x.\cos y.\cos z-1.\end{aligned}$$

8. $\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin x.\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin x.$
$2.\sin a.\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$. Donc $2.\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos 2x$
$=-1/2-1+2.\sin^2 x=-3/2+2.\sin^2 x$. D'où le résultat.
9. On pose $a=x-y; b=y-z; c=z-x$. On a $a+b+c=0$, et d'après 5.
$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c-2.\cos a.\cos b.\cos c-1=(\cos a-\cos(b-c)).(\cos a-\cos(b+c))$.
Comme $a=-(b+c)$, $\cos a=\cos(-(b+c))=\cos(b+c)$.
Le deuxième facteur est nul, donc $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c-2.\cos a.\cos b.\cos c=1$,
soit $\cos^2(x-y)+\cos^2(y-z)+\cos^2(z-x)-2.\cos(x-y).\cos(y-z).\cos(z-x)=1$.
10. On pose $a=x-y; b=y-z; c=z-x$. On a $a+b+c=0$. Or

$$\begin{aligned}\tan(a+b+c) &= \frac{\tan(a+b)+\tan c}{1-\tan(a+b).\tan c}=\frac{\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}+\tan c}{1-\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}.\tan c}\\ &= \frac{\tan a+\tan b+\tan c-\tan a.\tan b.\tan c}{1-\tan a.\tan b-\tan b.\tan c-\tan\ c.\tan a}\end{aligned}$$

Comme $\tan(a+b+c)=0$, on a $\tan a+\tan b+\tan c-\tan a.\tan b.\tan c=0$. Ce qu'il fallait vérifier.
Autre solution : Voir 4.

**Exercice 66.**

Démontrer que pour tous réels $a_i$ et $x_i$,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\cos(a_i-a_j)\geqslant 0.$$

**Solution 66**

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\cos(a_i-a_j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\cos a_i\cos a_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\sin a_i\sin a_j\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\cos a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sin a_i\right)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

**Exercice 67.**

Si $a+b+c=\pi$, démontrer que

$$A := \sin^3 a.\cos(b-c)+\sin^3 b.\cos(c-a)+\sin^3 c.\cos(c-a) = 3\sin a.\sin b.\sin c.$$

**Solution 67**

On a pour tous réels $x$ et $y$, $2.\sin x.\cos y = \sin(x+y)+\sin(x-y)$, donc

$$\begin{aligned}
A &= \sin^3 a.\cos(b-c)+\sin^3 b.\cos(c-a)+\sin^3 c.\cos(c-a)\\
&= \frac{1}{2}\left\{\sin^2 a\,(\sin(a+b-c)+\sin(a-b+c))+\sin^2 b\,(\sin(b+c-a)+\sin(b-c+a))\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\sin^2 c\,(\sin(c+a-b)+\sin(c-a+b))\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\sin(a+b-c)\left(\sin^2 a+\sin^2 b\right)+\sin(b+c-a)\left(\sin^2 b+\sin^2 c\right)+\sin(a+c-b)\left(\sin^2 c+\sin^2 a\right)\right\}
\end{aligned}$$

Comme $a+b-c=\pi-2c, \sin(a+b-c)=\sin(2c)$ etc. On obtient donc

$$\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2}\left\{\ \sin(2c)\left(\ \sin^2 a+\sin^2 b\ \right)+\sin(2a)\left(\ \sin^2 b+\sin^2 c\ \right)+\sin(2b)\left(\ \sin^2 c+\sin^2 a\ \right)\ \right\}\\
&= \cos c.\sin c.\sin^2 a+\cos c.\sin c.\sin^2 b+\cos a.\sin a.\sin^2 b+\cos a.\sin a.\sin^2 c+\cos b.\sin b.\sin^2 c\\
&\qquad +\cos b.\sin b.\sin^2 a+\cos b.\sin b.\sin^2 a\\
&= \sin c.\sin a[\cos c.\sin a+\sin c.\cos a]+\sin c.\sin b[\cos c.\sin b+\sin c.\cos b]+\sin a.\sin b[\cos b.\sin a+\sin b.\cos a]\\
&= \sin c.\sin a.\sin(a+c)+\sin c.\sin b.\sin(b+c)+\sin a.\sin b.\sin(a+b)\\
&= \sin c.\sin a.\sin(\pi-b)+\sin c.\sin b.\sin(\pi-a)+\sin a.\sin b.\sin(\pi-c)\\
&= \sin c.\sin a.\sin b+\sin c.\sin b.\sin a+\sin a.\sin b.\sin c\\
&= 3.\sin a.\sin b.\sin c
\end{aligned}$$

**Exercice 68.**

Résoudre les équations suivantes :

1. $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos\vartheta+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\vartheta=2.$
2. $\sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\sin 3\vartheta+\sin 4\vartheta=0.$
3. $\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\cos 3\vartheta=0.$
4. $\cos\vartheta-\cos 2\vartheta=\sin 3\vartheta.$
5. $\cos\vartheta+\cos 7\vartheta=\cos 4\vartheta.$
6. $\cos 2\vartheta+\cos 12\vartheta=\sqrt{3}\cos 5\vartheta.$
7. $\sin 7\vartheta-\sin\vartheta=\sin 3\vartheta.$
8. $\cos^3\vartheta\sin 3\vartheta+\cos 3\vartheta\sin^3\vartheta=\dfrac{3}{4}.$
9. $\sin\vartheta\sin 3\vartheta=\sin 5\vartheta\sin 7\vartheta.$
10. $3\tan\vartheta=2\cos\vartheta.$
11. $\tan 4\vartheta=4\tan\vartheta.$
12. $\operatorname{cotan}\vartheta-\tan\vartheta=\cos\vartheta+\sin\vartheta.$
13. $\begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \tan(x+y)=4/3\end{cases}$

**Solution 68**

1.
$$4\cos\left(\vartheta-\frac{\pi}{12}\right)=2\Leftrightarrow\vartheta\equiv\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\,(2\pi)\,.$$

2. $\sin\vartheta+\cdots+\sin 4\vartheta=2\sin\vartheta\cos\vartheta(4\cos^2\vartheta+2\cos\vartheta-1)=4\sin(5\vartheta/2)\cos\vartheta\cos(\vartheta/2)$
   $4\cos^2\vartheta+2\cos\vartheta-1=0\iff\cos\vartheta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos(2\pi/5)$ ou $\cos\vartheta=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\sin(2\pi/5)$
   $\Rightarrow$ modulo $2\pi$, $\vartheta\in\{0,\pi,\pi/2,3\pi/2,2\pi/5,4\pi/5,6\pi/5,8\pi/5\}$.

3. $\cos\vartheta \in \left\{-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \iff \vartheta \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\,(2\pi)$ ou $\vartheta \equiv \frac{\pi}{4}\,\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
4. $2\sin(3\vartheta/2)\sin(\vartheta/2) = 2\sin(3\vartheta/2)\cos(3\vartheta/2) \iff \vartheta \Leftrightarrow 0\,\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $\vartheta \equiv \frac{\pi}{4}\,(\pi)$ ou $\vartheta \equiv \frac{3\pi}{2}\,(2\pi)$.
5. $2\cos 4\vartheta\cos 3\vartheta = \cos 4\vartheta \iff \vartheta \equiv \frac{\pi}{8}\,\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ou $\vartheta \equiv \pm\frac{\pi}{9}\,\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
6. $2\cos 7\vartheta\cos 5\vartheta = \sqrt{3}\cos 5\vartheta \iff \vartheta \equiv \frac{\pi}{10}\,\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ou $\vartheta \equiv \pm\frac{\pi}{42}\,\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.
7. $\vartheta \equiv 0\,\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ou $\vartheta \equiv \pm\frac{\pi}{12}\,\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
8. $\cos^3\vartheta\sin 3\vartheta + \cos 3\vartheta\sin^3\vartheta = \frac{3}{4}\sin 4\vartheta \Rightarrow \vartheta \equiv \frac{\pi}{8}\,\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
9. $\vartheta \equiv 0\,\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
10. $\sin\vartheta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \vartheta \equiv \frac{\pi}{6}\,(2\pi)$ ou $\vartheta \equiv \frac{5\pi}{6}\,(2\pi)$.
11. $\vartheta \equiv 0, \pm\arctan\sqrt{5}\,(\pi)$.
12. $\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta = \cos\vartheta\sin\vartheta(\cos\vartheta + \sin\vartheta)$.
    $\cos\vartheta + \sin\vartheta = 0 \iff \vartheta \equiv -\frac{\pi}{4}\,(\pi)$.
    $$\cos\vartheta - \sin\vartheta = \cos\vartheta\sin\vartheta \Rightarrow (\cos\vartheta\sin\vartheta)^2 + 2\cos\vartheta\sin\vartheta = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1}{2} \\ \sin\vartheta = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}+1}{2}. \end{cases}$$
    Les valeurs trouvées conviennent.
13. $\tan x = \tan y = \frac{1}{2}$.

**Exercice 69.**

Calculer $\displaystyle\sum_{q=0}^{2n-1}\cos^{2n}\left(x+\frac{q\pi}{2n}\right)$.

**Solution 69**
$$\sum_{q=0}^{2n-1}\cos^{2n}\left(x+\frac{q\pi}{2n}\right) = \sum_{q=0}^{2n-1}\left(\frac{e^{i\left(x+\frac{q\pi}{2n}\right)}+e^{-i\left(x+\frac{q\pi}{2n}\right)}}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{q=0}^{2n-1}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{i\left(x+\frac{q\pi}{2n}\right)(k-2n+k)}$$
$$= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\sum_{q=0}^{2n-1}e^{i2(k-n)x}\times e^{2i(n-k)\frac{q\pi}{2n}} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}e^{i2(k-n)x}\sum_{q=0}^{2n-1}\left[e^{2i\frac{(n-k)\pi}{2n}}\right]^q$$
On a la somme des $2n$ premiers termes d'une suite géométrique. Lorsque $k \neq n$, on a $e^{2i\frac{(n-k)\pi}{2n}} \neq 1$ et $\displaystyle\sum_{q=0}^{2n-1}\left[e^{2i\frac{(n-k)\pi}{2n}}\right]^q = 0$. Reste le terme obtenu pour $k = n$. On a alors $\displaystyle\sum_{q=0}^{2n-1}\left[e^{2i\frac{(n-k)\pi}{2n}}\right]^q = 2n$. Finalement $\displaystyle\sum_{q=0}^{2n-1}\cos^{2n}\left(x+\frac{q\pi}{2n}\right) = \frac{2n\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

**Exercice 70.**

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\dfrac{\sin^4\alpha}{a} + \dfrac{\cos^4\alpha}{b} = \dfrac{1}{a+b}$.
Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\sin^{2n+2}\alpha}{a^n} + \frac{\cos^{2n+2}\alpha}{b^n} = \frac{1}{(a+b)^n}.$$

**Solution 70**
On pose $t = \cos^2\alpha$. On a donc $\sin^2\alpha = 1 - t$ et donc $\dfrac{(1-t)^2}{a} + \dfrac{t^2}{b} = \dfrac{1}{a+b}$. Donc

$$\begin{aligned} 0 &= (a+b)\left[b(1-t)^2 + at^2\right] - ab \\ &= ab\left[(1-t)^2 + t^2 - 1\right] + b^2(1-t)^2 + a^2t^2 \\ &= -2abt(1-t) + b^2(1-t)^2 + a^2t^2 \\ &= \left[at - b(1-t)\right]^2 \end{aligned}$$

Donc $t = \dfrac{b}{a+b} = \cos^2\alpha$ et $\sin^2\alpha = 1 - t = \dfrac{a}{a+b}$.
Maintenant $\dfrac{\sin^{2n+2}\alpha}{a^n} + \dfrac{\cos^{2n+2}\alpha}{b^n} = \dfrac{(\frac{a}{a+b})^{n+1}}{a^n} + \dfrac{(\frac{b}{a+b})^{n+1}}{b^n} = \dfrac{1}{(a+b)^n}$.
On a donc bien $\dfrac{\sin^{2n+2}\alpha}{a^n} + \dfrac{\cos^{2n+2}\alpha}{b^n} = \dfrac{1}{(a+b)^n}$.

**Exercice 71.**

Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x & + & \dfrac{3x-y}{x^2+y^2} & = & 3 \\ y & - & \frac{x+3y}{x^2+y^2} & = & 0 \end{cases}.$$

**Solution 71**
Soit $x + iy = z$ En multipliant la deuxième ligne par $i$ et en additionnant les deux équations

$$z + \frac{3z + iz}{z\overline{z}} = 3$$

soit

$$z^2 - 3z + 3 - \iota = 0 \implies z = 2 + i,\ 1 - i$$

d'où

$$(x, y) = (2, 1),\ (1, -1)$$

**Exercice 72.**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \cos a & + & \cos(a+x) & + & \cos(a+y) & = & 0 \\ \sin a & + & \sin(a+x) & + & \sin(a+y) & = & 0 \end{array} \right.$$

**Solution 72**

1. C'est plus ZamuZant en Z : $e^{ia} + e^{i(a+x)} + e^{i(a+y)} = 0$. On considère les points $A, B$ et $C$ d'affixes respectives $e^{ia}, e^{i(a+x)}$ et $e^{i(a+y)}$. Le triangle $ABC$ est inscrit dans le cercle unité, et par hypothèse l'origine est son centre de gravité. Or un triangle pour lequel le centre du cercle inscrit est aussi centre de gravité est équilatéral. On en déduit que $x \equiv \pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $y \equiv \mp\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

2. $\left\{ \begin{array}{ccccccc} \cos a & + & \cos(a+x) & + & \cos(a+y) & = & 0 \\ \sin a & + & \sin(a+x) & + & \sin(a+y) & = & 0 \end{array} \right.$

   soit $e^{ia} + e^{i(a+x)} + e^{i(a+y)} = 0$

   soit $1 + e^{ix} + e^{iy} = 0$

   donc $2\cos\frac{x-y}{2} e^{i\frac{x+y}{2}} = -1$

   donc $\left\{ \begin{array}{l} \cos\frac{x-y}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{x+y}{2} = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{l} \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x+y}{2} = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$

   donc $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-y}{2} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \\ \frac{x+y}{2} = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-y}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z}) \\ \frac{x+y}{2} = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$

   donc $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ y = -\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \end{array} \right.$ $(k, k' \in \mathbb{Z})$ ou $\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ y = \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \end{array} \right.$ $(k, k' \in \mathbb{Z})$.

**Exercice 73.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right).$$

**Solution 73**

Soit $t = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}$. On a $\pi - 3t = \frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}$. Donc on est ramené à résoudre l'équation $\sin 3t = 2\sin t$. Or $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$ donc l'équation devient $\sin t(1 - 4\sin^2 t)$ et admet comme solutions $0, \pi, \pm\frac{\pi}{6}$ et $\pm\frac{5\pi}{6}$ comme solutions modulo $2\pi$. On revient à $x = \frac{3\pi}{5} - 2t$ qui donne les solutions $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{15}$ et $\frac{16\pi}{15}$ modulo $2\pi$.

**Exercice 74.**

Démontrer que $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$,

$$10(\cos^6 \vartheta + \sin^6 \vartheta) - 15(\cos^8 \vartheta + \sin^8 \vartheta) + 6(\cos^{10} \vartheta + \sin^{10} \vartheta) = 1.$$

**Indication 1.**

Homogénéiser les degrés à l'aide de $\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$.

**Solution 74**

On a

$10(\cos^6 \vartheta + \sin^6 \vartheta)$
$= 10(\cos^6 \vartheta + \sin^6 \vartheta)(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)^2$
$= 10\cos^{10} \vartheta + 20\cos^8 \vartheta \sin^2 \vartheta + 10\cos^6 \vartheta \sin^4 \vartheta + 10\cos^4 \vartheta \sin^6 \vartheta + 20\cos^2 \vartheta \sin^8 \vartheta + 10\sin^{10} \vartheta$
$-15(\cos^8 \vartheta + \sin^8 \vartheta)$
$= -15(\cos^8 \vartheta + \sin^8 \vartheta)(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)$
$= -15\cos^{10} \vartheta - 15\cos^8 \vartheta \sin^2 \vartheta - 15\cos^2 \vartheta \sin^8 \vartheta - 15\sin^{10} \vartheta$

D'où $10(\cos^6 \vartheta + \sin^6 \vartheta) - 15(\cos^8 \vartheta + \sin^8 \vartheta) + 6(\cos^{10} \vartheta + \sin^{10} \vartheta)$
$= \cos^{10} \vartheta + 5\cos^8 \vartheta \sin^2 \vartheta + 10\cos^6 \vartheta \sin^4 \vartheta + 10\cos^4 \vartheta \sin^6 \vartheta + 5\cos^2 \vartheta \sin^8 \vartheta + \sin^{10} \vartheta$
$= (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)^5 = 1.$

**Exercice 75.**

On suppose que $\sin B = \dfrac{1}{5}\sin(2A + B)$. Démontrer que $\tan(A + B) = \dfrac{3}{2}\tan A$.

**Solution 75**

En posant $x = A + B, y = A$, on a $5\sin(x - y) = \sin(x + y)$.

Donc $5\sin x \cos y - 5\cos x \sin y = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, soit $2\sin x \cos y = 3\cos x \sin y$.

Autrement dit $\tan x = \dfrac{3}{2}\tan y$.

**Exercice 76.**

Démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

**Solution 76**

▶ Soit $u := 1 + ix$ et $v := 1 + iy$. On a $uv = 1 - xy + i(x + y)$. Donc $|u|^2 |v|^2 = |uv|^2$, soit $(1 + x^2)(1 + y^2) = (x + y)^2 + (1 - xy)^2$.

En posant cette fois $A := x + y$ et $B := 1 - xy$, on a $(A - B)^2 \geqslant 0$, soit $2AB \leqslant A^2 + B^2$.

De même, $-2AB \leqslant A^2 + B^2$ d'où $|AB| \leqslant \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$. □

► Soit $x := \tan(a)$ et $y := \tan(b)$, on a $\dfrac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \dfrac{1}{2}\sin(2(a+b))$. □

**Exercice 77.**

Résoudre l'équation : $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.

**Solution 77**

On a $e^{2ix} + e^{6ix} - e^{8ix} - e^{0ix} = e^{4ix}(e^{-2ix} + e^{2ix} - e^{4ix} - e^{-4ix}) = e^{4ix}(\cos 2x - \cos 4x)$. Or en posant $T := \cos 2x$, on a $\cos 4x = 2T^2 - 1$ et $2T^2 - T - 1 = (2T+1)(T-1)$.

On a donc à résoudre $(\cos 2x - 1)(2\cos 2x + 1)\cos 4x = 0$. Ce qui donne les solutions :

$k\pi, k \in \mathbb{Z},\ (2k+1)\dfrac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}\ \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ \dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 78.**

Soit $n$ un entier naturel et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pour lesquels $z^n$ et $(z+1)^n$ sont réels. Trouver toutes les valeurs de $z$.

**Solution 78**

On a

$\arg(z) = \frac{p\pi}{n} \pmod{\pi}$ pour un entier $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ et $\arg(z+1) = \frac{q\pi}{n} \pmod{\pi}$ pour un entier $q \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ainsi : $z = x(\cos\frac{p\pi}{n} + i\sin\frac{p\pi}{n})$ pour un certain $x \neq 0$ et $z+1 = y(\cos\frac{q\pi}{n} + i\sin\frac{q\pi}{n})$ pour un certain $y \neq 0$.

Donc $x(\cos\frac{p\pi}{n} + i\sin\frac{p\pi}{n}) + 1 = y(\cos\frac{q\pi}{n} + i\sin\frac{q\pi}{n})$

On obtient un système linéaire simple en $x, y$. Sa solution est $x = \dfrac{\sin\frac{q\pi}{n}}{\sin\frac{(p-q)\pi}{n}}$ lorsque $p \neq q$.

Il y a donc $(n-1)(n-2)$ solutions pour $z$ : $z = \dfrac{\sin\frac{q\pi}{n}}{\sin\frac{(p-q)\pi}{n}} e^{\frac{p\pi}{n}i}$ où $p, q$ sont deux entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

**Exercice 79.**

Démontrer que pour des nombres complexes $(a_i)_{1\leq i\leqslant n}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de module plus petits que 1, le module de la différence des produits est plus petit que la somme des modules des différences.

**Solution 79**

$\prod_{i=1}^{n+1} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i = a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i - b_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i = a_{n+1}(\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i) + (a_{n+1} - b_{n+1})\prod_{i=1}^{n} b_i$ et, en passant au module, on obtient

$$\left|\prod_{i=1}^{n+1} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i\right| \leqslant |a_{n+1}| \cdot \left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| + |a_{n+1} - b_{n+1}| \cdot \left|\prod_{i=1}^{n} b_i\right|.$$

En appliquant la proposition de récurrence, puisque les nombres complexes sont de module inférieur à 1, on obtient $\left|\prod_{i=1}^{n+1} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} |a_i - b_i|$.

ou

Utilisant le cas $n = 2$, on peut aussi noter que

$$\left|\prod_{i=1}^{n+1} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i\right| = \left|a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i - b_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i\right| \leqslant |a_{n+1} - b_{n+1}| + \left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right|.$$

**Exercice 80.**

Démontrer que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{13}\right) = \frac{-1+\sqrt{13}}{4}.$$

**Solution 80**

On pose $c_k = \cos\frac{k\pi}{13}$ et $s = c_2 + c_6 + c_8$.

On a

$$s^2 = c_2^2 + c_6^2 + c_8^2 + 2c_2c_6 + 2c_2c_8 + 2c_6c_8 = \frac{c_4+1}{2} + \frac{c_{12}+1}{2} + \frac{c_{16}+1}{2} + (c_8 + c_4) + (c_6 + c_{10}) + (c_{14} + c_2)$$

Soit

$$\begin{aligned} 2s^2 &= 3 + 2c_2 + 3c_4 + 2c_6 + 2c_8 + 2c_{10} + c_{12} + 2c_{14} + c_{16} \\ &= 3 + 2c_2 + 3c_4 + 2c_6 + 2c_8 + 3c_{10} + 3c_{12} \\ &= 3 + 3(c_2 + c_4 + c_6 + c_8 + c_{10} + c_{12}) - s \end{aligned}$$

On a facilement $c_2 + c_4 + c_6 + c_8 + c_{10} + c_{12} = -\frac{1}{2}$ donc $s$ est solution de l'équation :

$$2s^2 + s - \frac{3}{2} = 0.$$

Donc $s = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}$

On a immédiatement $s = c_2 + c_6 + c_8 = c_6 + (c_2 - c_5) > 0$.

D'où le résultat $\boxed{s = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{4}}$.

**Exercice 81.**

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}$ tels que $|a| = |b| = |c| = 1$. On suppose que $a + b + c = 1$.
Démontrer que l'un de ces trois nombres est égal à 1.

**Solution 81**
Bon, vu ce à quoi on doit arriver, ça donne envie de calculer :

$$\begin{aligned}(1-e^{it_1})(1-e^{it_2})(1-e^{it_3}) &= e^{i(t_1+t_2+t_3)} - (e^{i(t_1+t_2)} + e^{i(t_2+t_3)} + e^{i(t_1+t_3)}) + (e^{it_1} + e^{it_2} + e^{it_3}) \\ &\quad - (1-e^{it_1})(1-e^{it_2})(1-e^{it_3}) \\ &= e^{i(t_1+t_2+t_3)} - (e^{i(t_1+t_2)} + e^{i(t_2+t_3)} + e^{i(t_1+t_3)})\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{(1-e^{it_1})(1-e^{it_2})(1-e^{it_3})}{e^{i(t_1+t_2+t_3)}} = 1 - (e^{-it_3} + e^{-it_1} + e^{-it_2})$,
soit $\dfrac{(1-a)(1-b)(1-c)}{e(t_1+t_2+t_3)} = 1 - \overline{(a+b+c)} = 0.$

**Exercice 82.**

Calculer $S = \cos\left(\dfrac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\dfrac{9\pi}{20}\right)$.

**Solution 82**
On part de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

On en déduit

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

Par ailleurs, en posant $\alpha = \frac{\pi}{20}$, on a

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{20}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{20}\right) = \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Donc

$$S^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin(2\alpha) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

Sachant que $S$ est positif puisque $\alpha$ est dans le premier quadrant, on en déduit que

$$S = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{2}.$$

Pour $\theta = \frac{2\pi}{5}$ ou $\frac{2\pi}{5}$, on a

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 1 = 0$$

soit

$$2\cos\theta + 2\cos(2\theta) + 1 = 0.$$

En posant $T = \cos\theta$, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ sont les racines de

$$2T + 2(2T^2 - 1) + 1 = 0$$

soit

$$4T^2 + 2T - 1 = 0.$$

On en déduit pour des raisons de signes que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

et que

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

## 12.9 Problème

**Problème 19 (Parties de $\mathbb{C}$ de type $S$)**
(Concours général 2017)

Une partie $\mathscr{A}$ non vide de $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes) est dite de type $S$, si pour tout $z_1 \in \mathscr{A}$ et $z_2 \in \mathscr{A}$ le produit $z_1 z_2$ et la somme $z_1^2 + z_2^2$ sont encore dans $\mathscr{A}$. Dans tout le problème $\mathscr{A}$ désigne une partie de $\mathbb{C}$ de type $S$. On note $b(\mathscr{A})$ le nombre de nombres complexes $z$ de $\mathscr{A}$ dont le module $|z|$ est inférieur ou égal à 1. On note $b(\mathscr{A}) = \infty$ si ce nombre est infini.

**Partie A** : Quelques exemples simples

1. Les ensembles suivants sont des parties de $\mathbb{C}$ de type $S$ (on ne demande pas de le vérifier), préciser pour chacun d'eux la valeur de $b(\mathscr{A})$ :
   (a) $\mathscr{A} = \{0\}$.
   (b) $\mathscr{A} = \mathbb{C}$.
   (c) $\mathscr{A} = \mathbb{N}$.
   (d) $\mathscr{A} = \mathbb{N}^*$.
2. (a) Donner une partie $\mathscr{A}$ de type $S$ telle que $b(\mathscr{A}) = 0$.
   (b) Donner une partie $\mathscr{A}$ de type $S$ telle que $b(\mathscr{A}) = 3$.
3. On note $\overline{\mathscr{A}} = \{\overline{z},\ z \in A\}$ , c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée des nombres complexes conjugués des éléments de $\mathscr{A}$. Montrer que $\overline{\mathscr{A}}$ est de type $S$ et préciser $b\left(\overline{\mathscr{A}}\right)$.

**Partie B** : Deux exemples de parties de $\mathbb{C}$ de type $S$

1. On définit le complexe $j$ par $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ et on note $\mathbb{Z}[j] = \left\{a + bj, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $a + bj$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.
   (a) Calculer $1 + j + j^2$.
   (b) Justifier que $\mathbb{Z}[j]$ est de type $S$.
   (c) Montrer que $b\left(\mathbb{Z}[j]\right) = 7$.
   (d) On note $\mathbb{Z}[j]^* = \mathbb{Z}[j] \setminus \{0\}$ (les éléments non nuls de $\mathbb{Z}[j]$). Justifier que $\mathbb{Z}[j]^*$ est de type $S$ et déterminer $b\left(\mathbb{Z}[j]^*\right)$.
2. On définit la partie $\mathscr{R}$ de $\mathbb{C}$ par
$$\mathscr{R} = \left\{z \in \mathbb{C}, z^2 \in \mathbb{Z}[j]\right\}.$$
   Ainsi un nombre complexe $z$ est dans $\mathscr{R}$ si et seulement si son carré est dans $\mathbb{Z}[j]$.
   (a) Montrer que $\mathscr{R}$ est de type $S$.
   (b) Déterminer $b(\mathscr{R})$.

**Partie C** : À la recherche des valeurs possibles de $b(\mathscr{A})$

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $0 < |a| < 1$. Montrer que $b(\mathscr{A}) = \infty$.
2. On considère, dans cette question, un nombre complexe $a$ de module 1. On note $\text{Arg}\,(a)$ l'unique argument de a inclus dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On suppose de plus que $\text{Arg}\,(a)$ n'est ni un multiple de $\frac{\pi}{6}$, ni un multiple de $\frac{\pi}{4}$.
   (a) Montrer que si $\text{Arg}\,(a) \in ]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}[$, alors l'un des deux nombres complexes $a^2 + a^4$ ou $a^4 + a^8$ possède un module non nul et strictement inférieur à 1.
   (b) De même montrer que si $\text{Arg}\,(a) \in ]0, \frac{\pi}{6}[$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.
   (c) Montrer que si $\text{Arg}\,(a) \in ]-\frac{2\pi}{3}, 0[$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.
   (d) Conclure qu'il existe toujours $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.
3. On suppose, dans cette question, que $b(\mathscr{A})$ est fini et supérieur ou égal à 2.
   (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathscr{A}$ tel que $|a| = 1$.
   (b) Quelles sont alors les valeurs possibles pour $\text{Arg}\,(a)$ ?
   (c) En déduire que $b(\mathscr{A}) \leqslant 17$.
4. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type $S$ telle que $b(\mathscr{A}) = 5$.
5. Donner une partie $\mathscr{A}$ de type $S$ telle que $b(\mathscr{A}) = 9$.
6. Quelles sont les valeurs possibles de $b(\mathscr{A})$ ?

## 12.10 Corrigé

**Correction 19 (Parties de $\mathbb{C}$ de type $S$)**
**Partie A** : Quelques exemples simples

1. En notant $\mathbb{U}_{\mathscr{A}}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{A}$ de module inférieur ou égal à 1, on a clairement
   (a) $\mathbb{U}_{\{0\}} = \{0\}$ et $b(\{0\}) = 1$.
   (b) $b(\mathbb{C}) = \infty$.
   (c) $\mathbb{U}_{\mathbb{N}} = \{0, 1\}$ et $b(\mathbb{N}) = 2$.
   (d) $\mathbb{U}_{\mathbb{N}} = \{1\}$ et $b(\mathbb{N}^*) = 1$.
2. (a) $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ est clairement de type $S$ et $b(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) = 0$.
   (b) $\mathbb{Z}$ est clairement de type $S$ et $b(\mathbb{Z}) = 3$.
3. Soit $u_1$ et $u_2$ deux éléments de $\overline{\mathscr{A}}$. Il existe $z_1$ et $z_2$ dans $\mathscr{A}$ tels que $u_1 = \overline{z_1}$ et $u_2 = \overline{z_2}$. On a alors $u_1 u_2 = \overline{z_1} z_2 = \overline{z_1 z_2}$. Or $\mathscr{A}$ est de type $S$, donc $z_1 z_2 \in \mathscr{A}$ et par définition de $\overline{\mathscr{A}}$, $\overline{z_1 z_2} = u_1 u_2 \in \overline{\mathscr{A}}$.
   De même, $u_1^2 + u_2^2 = \overline{z_1}^2 + \overline{z_2}^2 = \overline{z_1^2 + z_2^2} \in \overline{\mathscr{A}}$ puisque $z_1^2 + z_2^2 \in \mathscr{A}$.
   C'est bien dire que $\overline{\mathscr{A}}$ est de type $S$.

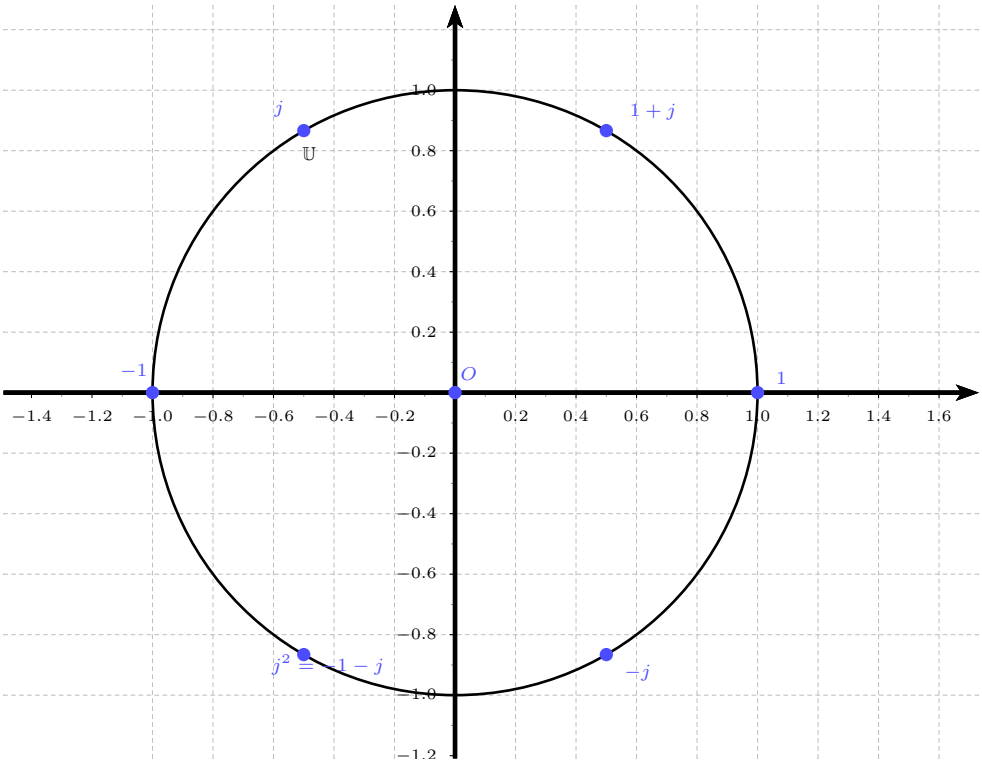
   La conjugaison est clairement une bijection de $\mathscr{A}$ sur $\overline{\mathscr{A}}$ puisqu'elle est son propre inverse. De plus un nombre complexe a même module que son conjugué, donc $\mathbb{U}_{\overline{\mathscr{A}}}$ est l'ensemble $\{\overline{z},\ z \in \mathbb{U}_{\mathscr{A}}\}$. De ce fait $b\left(\overline{\mathscr{A}}\right) = b\left(\mathscr{A}\right)$.

**Partie B** : Deux exemples de parties de $\mathbb{C}$ de type $S$

1. (a) On a $j^3 - 1 = \exp(2i\pi) - 1 = 1 - 1 = 0$. Donc $(1-j)(1+j+j^2) = 0$ et $1+j+j^2 = 0$ puisque $1 - j \neq 0$.

   (b) Soit $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$ – avec $a_1, a_2, b_1, b_2$ quatre entiers relatifs – deux éléments de $\mathbb{Z}[j]$.
   On a $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j \in \mathbb{Z}[j]$ dans la mesure où $a_1 + a_2 \in \mathbb{Z}$ et $b_1 + b_2 \in \mathbb{Z}$.
   De même – en utilisant la question précédente – $z_1 z_2 = (a_1 a_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)j + (b_1 b_2)j^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 - b_1 b_2)j \in \mathbb{Z}[j]$ dans la mesure où $a_1 a_2 - b_1 b_2 \in \mathbb{Z}$ et $a_1 b_2 + b_1 a_2 - b_1 b_2 \in \mathbb{Z}$.
   En particulier $\forall z \in \mathbb{Z}[j],\ z^2 \in \mathbb{Z}[j]$ et par suite, $\forall (z_1, z_2) z \in \mathbb{Z}[j]^2,\ z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{Z}[j]$.
   On a bien vérifié que $\mathbb{Z}[j]$ est de type $S$.

   (c) Les sept nombres $0, 1, 1+j = -j^2, j, -1, j^2 = -1-j, -j$ appartient à $\mathbb{U}_{\mathbb{Z}[j]}$. Donc $b(\mathbb{Z}[j]) \geqslant 7$.




D'autre part on a, pour tous $a$ et $b$ dans $\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} |a+bj|^2 &= (a+bj)(a+bj^2) \\ &= a^2 + abj^2 + abj + b^2 j^3 \\ &= a^2 - ab + b^2 \\ &= \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \\ &\geqslant \frac{3b^2}{4}. \end{aligned}$$

De ce fait, lorsque $|a+bj|^2 \leqslant 1$ on a $b^2 \leqslant \dfrac{4}{3} < 4$ donc $|b| < 2$ soit $|b| \leqslant 1$.

De même – puisque les rôles de $a$ et $b$ sont symétriques dans $a^2 - ab + b^2$, on a $|a| \leqslant 1$. Donc $b(\mathbb{Z}[j]) \leqslant 9$.

Reste à éliminer deux points parmi les $a + bj$ avec $a$ et $b$ dans $\{-1, 0, 1\}$. On a pour $a = 1$ et $b = -1$, $a^2 - ab + b^2 = 1 + 1 + 1 = 3$. Donc $1 - j \notin \mathbb{U}_{\mathbb{Z}[j]}$. De même pour son opposé, $-1 + j \notin \mathbb{U}_{\mathbb{Z}[j]}$.

Finalement on a bien $\mathbb{U}_{\mathbb{Z}[j]} = \left\{0, 1, 1+j = -j^2, j, -1, j^2 = -1-j, -j\right\}$ et ainsi $b(\mathbb{Z}[j]) = 7$.

(d) Soit $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$ – avec $a_1, a_2, b_1, b_2$ quatre entiers relatifs – deux éléments de $\mathbb{Z}[j]^*$. D'après la question (b), on a $z_1 z_2 \in \mathbb{Z}[j]$, et $z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{Z}[j]$.

Reste à démontrer que $z_1 z_2 \neq 0$ – ce qui est évident – et que $z_1^2 + z_2^2 \neq 0$ ce qui l'est moins.

Or $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2)$.

On a

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 &= a_1 + \frac{b_1 i\sqrt{3}}{2} + ia_2 - \frac{b_2\sqrt{3}}{2} \\ &= a_1 - \frac{b_2\sqrt{3}}{2} + i\left(a_2 + \frac{b_1\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

On suppose que $z_1 + iz_2 = 0$.

- Si $a_1 \neq 0$ alors $b_2 = \dfrac{2a_1}{\sqrt{3}}$ n'est pas possible car $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
- De même si $b_1 \neq 0$ alors $a_2 = -\dfrac{b_1\sqrt{3}}{2}$ n'est pas possible car $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Comme $z_1 \neq 0$ on est au moins dans l'un des deux cas ci-dessus. Donc $z_1 + iz_2 = 0$.

De même le cas $z_1 - iz_2 = 0$ ne peut pas se produire.

Finalement, $\mathbb{Z}[j]^*$ est bien de type $S$.

On a clairement $b(\mathbb{Z}[j]^*) = 6$.

2. (a) Soit $z_1 \in \mathscr{R}$ et $z_2 \in \mathscr{R}$. Par définition de $\mathscr{R}$, il existe $u_1$ et $u_2$ dans $\mathbb{Z}[j]$ tels que $z_1^2 = u_1$ et $z_2^2 = u_2$.

On a alors $(z_1 z_2)^2 = z_1^2 z_2^2 = u_1 u_2 \in \mathbb{Z}[j]$ d'après 1.(b). C'est bien dire que $z_1 z_2 \in \mathscr{R}$.

De même $\left(z_1^2 + z_2^2\right)^2 = (u_1 + u_2)^2 \in \mathbb{Z}[j]$ toujours d'après 1.(b).

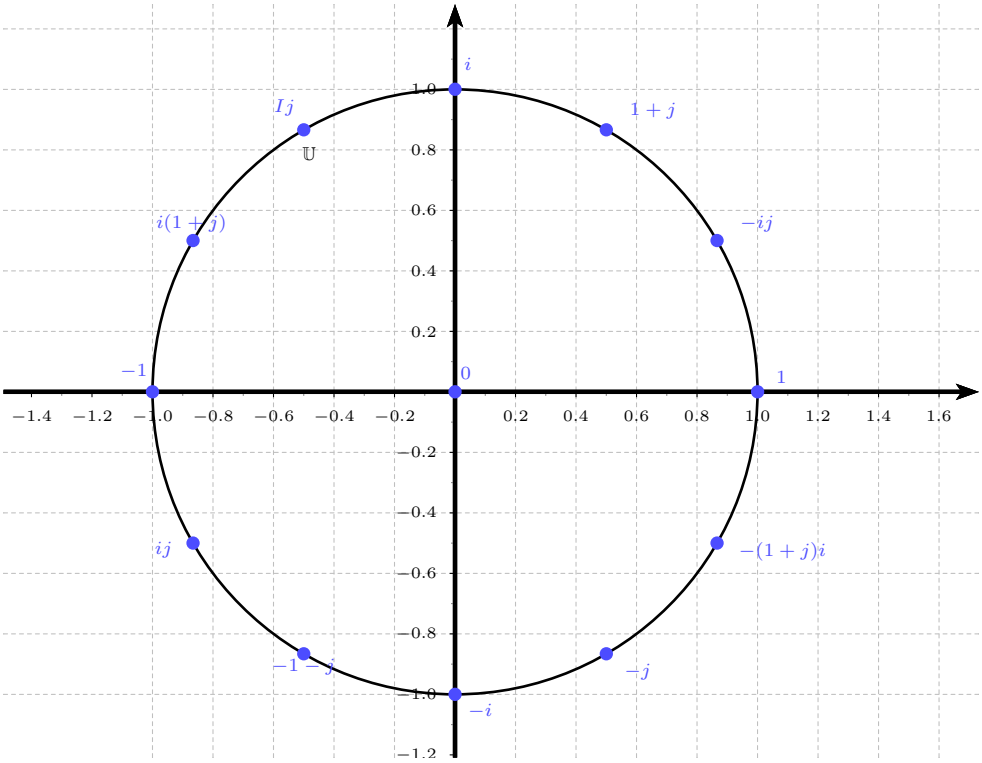
Donc $z_1^2 + z_2^2 \in \mathscr{R}$.

C'est bien dire que $\mathscr{R}$ est de type $S$.

(b) Soit $z \in \mathbb{U}_{\mathscr{R}}$. Il existe $u \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $z^2 = u$. De plus $u \in \mathbb{U}_{\mathbb{Z}[j]}$.

Le nombre complexe $0 \in \mathbb{U}_{\mathbb{Z}[j]}$ admet une unique racine carrée : $0 \in \mathbb{U}_{\mathscr{R}}$.

Les racines sixièmes de l'unité appartenant à $\mathbb{U}_{\mathbb{Z}[j]}$ admettent exactement deux racines carrées appartenant à $\mathbb{U}_{\mathscr{R}}$. On obtient donc douze éléments dans $\mathscr{R}$, auxquels il faut ajouter zéro. Donc $b(\mathscr{R}) = 13$.




**Partie C** : À la recherche des valeurs possibles de $b(\mathscr{A})$

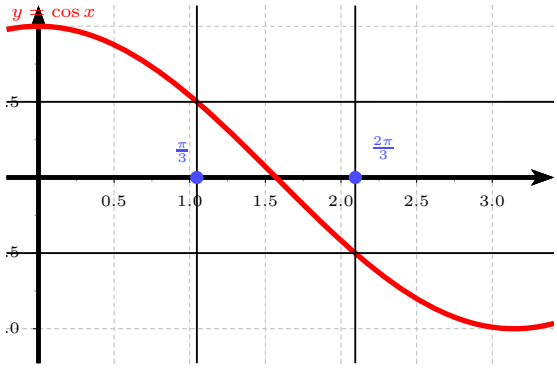
1. Puisque $a \in \mathscr{A}$ et que $\mathscr{A}$ est de type $S$, $a^2 = a.a \in \mathscr{A}$ et par une récurrence sans difficulté, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = a.a^{n-1} \in \mathscr{A}$.

   Les nombres $(a^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont tous distincts deux à deux puisque la suite de leurs modules est strictement décroissante. Enfin ils ont des modules inférieurs à 1. Donc $b(\mathscr{A}) = \infty$.

2. (a) On écrit $a = \exp(i\theta)$ avec $\theta = \operatorname{Arg}(a)$. On calcule

$$a^2 + a^4 = \exp(2i\theta) + \exp(4i\theta) = \exp(3i\theta)(\exp(-i\theta) + \exp(i\theta)) = 2\cos(\theta)\exp(3i\theta).$$

   Donc $|a^2 + a^4| = 2|\cos(\theta)|$. De même $|a^4 + a^8| = 2|\cos(2\theta)|$.



La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[\ 0\ ,\ \pi\ ]$ donc si on prend $\theta \in ]\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ [$ on a $-1 < 2\cos(\theta) < 1$ et de plus $\cos(\theta) \neq 0$ dans la mesure où $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ puisque $\theta$ n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{4}$.

On a donc

- $|a^2 + a^4| < 1$.
- $|a^2 + a^4| \neq 0$.
- $z_1 = a \in \mathscr{A}$ donc $z_2 = a^2 \in \mathscr{A}$ donc $z_1^2 + z_2^2 = a^2 + a^4 \in \mathscr{A}$.

D'après la question précédente, on a $b(\mathscr{A}) = \infty$.

De même, si on prend $\theta \in ]\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ [$ on a $2\theta \in ]\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ [$ et on est ramené au cas précédent :

- $|a^4 + a^8| < 1$.
- $|a^4 + a^8| \neq 0$ car $\theta$ n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{4}$.
- $z_1 = a^2 \in \mathscr{A}$ donc $z_2 = a^4 \in \mathscr{A}$ donc $z_1^2 + z_2^2 = a^4 + a^8 \in \mathscr{A}$.

D'après la question précédente, on a $b(\mathscr{A}) = \infty$.

On a bien passé tous les cas en revue puisque $\theta = \frac{\pi}{3}$ est exclu puisque $\theta$ n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{6}$.

(b) Toujours avec $\theta = \mathrm{Arg}\,(a)$, on a $\left|a^{2n} + a^{4n}\right| = 2\cos(n\theta)$.

L'intervalle ouvert $\left]\ \dfrac{\pi}{3}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\ \right[$ ne contient aucun multiple de $\frac{\pi}{6}$ ni aucun multiple de $\frac{\pi}{4}$. De plus l'intervalle ouvert $\left]\ \dfrac{\pi}{3\theta}\ ,\ \dfrac{\pi}{2\theta}\ \right[$ a une longueur égale à $\dfrac{\pi}{2\theta} - \dfrac{\pi}{3\theta} = \dfrac{\pi}{6\theta} > 1$. Il contient au moins un entier $n$. Cet entier vérifie alors $0 < 2\cos(n\theta) < 1$ et donc $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$.

(c) On considère $b = \overline{a} = \exp(-i\theta)$. On a donc $-\theta = -\mathrm{Arg}\,(a) \in \left]\ 0\ ,\ \dfrac{2\pi}{3}\ \right[$. D'après les cas précédents on a l'existence d'un $n \in \mathbb{N}^*$ – $n = 1$ ou 2 dans les deux premiers cas – tel que $0 < \left|b^{2n} + b^{4n}\right| < 1$. Comme $\left|a^{2n} + a^{4n}\right| = \left|b^{2n} + b^{4n}\right|$ le résultat demandé en résulte.

(d) Reste à étudier le cas $\mathrm{Arg}\,(a) \in \left]\ \dfrac{2\pi}{3}\ ,\ \pi\ \right[$, puisque le cas $\mathrm{Arg}\,(a) \in \left]\ -\pi\ ,\ -\dfrac{2\pi}{3}\ \right[$ s'y ramène par conjugaison.

Or si $\dfrac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ alors $\dfrac{4\pi}{3} < 2\theta < 2\pi$ et $-\dfrac{2\pi}{3} < 2\theta - 2\pi < 0$, soit $\mathrm{Arg}\,(a^2) \in \left]\ -\dfrac{2\pi}{3}\ ,\ 0\ \right[$.

On est ramené au cas précédent et on est assuré de l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \left|(a^2)^{2n} + (a^2)^{4n}\right| < 1$ soit $0 < \left|a^{4n} + a^{8n}\right| < 1$.

En résumé, ayant examiné tous les cas possibles, chaque fois qu'on peut trouver un élément de $\mathscr{A}$ de module 1 dont l'argument n'est n'est ni un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$, ni un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$, alors on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le nombre $a^{2n} + a^{4n}$ – nécessairement appartenant à $\mathscr{A}$ soit de module compris strictement entre 0 et 1. Dans ce cas, d'après la question 1., on a nécessairement $b(\mathscr{A}) = \infty$.

3. (a) En effet l'ensemble $\mathbb{U}_{\mathscr{A}} \setminus \{0\}$ a au moins un élément. S'il était de norme strictement inférieur à 1, d'après C.1., on aurait $b(\mathscr{A}) = \infty$.

(b) Les valeurs possibles pour $\mathrm{Arg}\,(a)$ appartiennent à

$$\mathscr{B} = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}\right\}$$

c'est-à-dire tous les multiples de $\dfrac{\pi}{6}$ ou de $\dfrac{\pi}{4}$. Tous les autres cas, on l'a vu, conduisent à $b(\mathscr{A}) = \infty$.

(c) Aux seize nombres complexes $\exp(i\theta), \theta \in \mathscr{B}$, on doit rajouter 0, ce qui donne au maximum 17 éléments dans $\mathscr{A}$.

4. Soit $\mathbb{Z}[i] = \left\{a + bi, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$, c'est-à-dire la partie de $\mathbb{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $a + bi$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

   $\mathbb{Z}[i]$ est de type $S$ car – à l'instar de $\mathbb{Z}[j]$ – la somme et le produit de deux éléments quelconques de $\mathbb{Z}[i]$ appartient à $\mathbb{Z}[i]$. De plus on a clairement $\mathbb{U}_{\mathbb{Z}[i]} = \{0, 1, i, -1, -i\}$ et $b(\mathbb{Z}[i]) = 5$.

5. Soit $\mathscr{A}_1 = \mathbb{Z}[i]$ et $\mathscr{A}_2 = \left\{z \in \mathbb{C},\ \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) z \in \mathscr{A}_1\right\}$. On considère $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$.

   On vérifie que
   - le produit de deux éléments de $\mathscr{A}_1$ appartient à $\mathscr{A}_1$ (déjà vu),
   - le produit de deux éléments de $\mathscr{A}_2$ appartient à $\mathscr{A}_1$ car $\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) = -i$,
   - le produit d'un élément de $\mathscr{A}_1$ par un élément de $\mathscr{A}_2$ appartient à $\mathscr{A}_2$.

   Dans tous les cas le produit de deux éléments de $\mathscr{A}$ appartient à $\mathscr{A}$.

   De plus – d'après ce qui précède – si $z_1, z_2 \in \mathscr{A}$, alors $z_1^2$ tout comme $z_2^2 \in \mathscr{A}_1$. De ce fait leur somme $z_1^2 + z_2^2 \in \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$.

   Donc $\mathscr{A}$ est bien de type $S$.

   Les éléments de $\mathscr{A}$ de module 1 sont de deux catégories. Les éléments de $\mathscr{A}_1$ : $1, i, -1, -i$, et les éléments de $\mathscr{A}_2$ qui sont ceux de $\mathscr{A}_1$, multipliés par $\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$ :

   $\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right), i\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right), -\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right), -i\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$. Ces huit complexes sont clairement distincts deux à deux. Pour compléter $\mathbb{U}_{\mathscr{A}}$ il convient de rajouter 0 ce qui nous donne bien $b(\mathscr{A}) = 9$.

6. On se place dans le cas où $b(\mathscr{A}) \neq \infty$, ce qui entraîne $b(\mathscr{A}) \leqslant 17$ (C.3.(c)). On a déjà vu les cas possibles suivants :
   - $b(\mathscr{A}) = 0$ pour $\mathscr{A} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. (A.2.)
   - $b(\mathscr{A}) = 1$ pour $\mathscr{A} = \{0\}$. (A.1.)
   - $b(\mathscr{A}) = 2$ pour $\mathscr{A} = \mathbb{N}$. (A.1.)
   - $b(\mathscr{A}) = 3$ pour $\mathscr{A} = \mathbb{Z}$. (A.2.(b))
   - $b(\mathscr{A}) = 5$ pour $\mathscr{A} = \mathbb{Z}[i]$. (C.4.)
   - $b(\mathscr{A}) = 6$ pour $\mathscr{A} = \mathbb{Z}[j]^*$. (B.1.(d))
   - $b(\mathscr{A}) = 7$ pour $\mathscr{A} = \mathbb{Z}[j]$. (B.1.(c))
   - $b(\mathscr{A}) = 9$ pour $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$. (C.5.(a))
   - $b(\mathscr{A}) = 13$ pour $\mathscr{A} = \mathscr{R}$. (B.2.(b))

   On remarque d'abord que si $i \in \mathscr{A}$, alors $i^4 = 1 \in \mathscr{A}$ et par suite $i^2 + 1^2 = 0 \in \mathscr{A}$.

   Ensuite, soit $\zeta$ un nombre complexe de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$. On sait que $\zeta$ admet un argument multiple de $\frac{\pi}{4}$ ou de $\frac{\pi}{6}$. On en déduit que nécessairement $\zeta^8 = 1$ dans le premier cas ou $\zeta^{12} = 1$. Dans le premier cas $\overline{\zeta} = \dfrac{1}{\zeta} = \zeta^7 \in \mathscr{A}$. et dans le second cas $\overline{\zeta} = \dfrac{1}{\zeta} = \zeta^{11} \in \mathscr{A}$.

   ► On suppose que le nombre de nombre complexe de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$ est supérieur ou égal à 13.

   On découpe alors l'intervalle $]\ -\pi\ ,\ \pi\ ]$ en douze parts égales $\left]\ k\frac{\pi}{6}\ ,\ (k+1)\frac{\pi}{6}\ \right]$ pour $k \in \{-6, \ldots, 5\}$. D'après le principe des tiroirs, il existe un intervalle qui contient deux nombres distincts $a_1 < a_2$ tels que $\exp(ia_1) \in \mathscr{A}$ et $z_2 = \exp(ia_2) \in \mathscr{A}$. Or $z_1 = \exp(-ia_1) \in \mathscr{A}$. Donc $z = z_1 z_2 = \exp(i(a_2 - a_1)) \in \mathscr{A}$ avec $0 < a_2 - a_1 < \dfrac{\pi}{6}$. On a donc $z^{12} = \exp(12i(a_2 - a_1))$ avec $0 < 12(a_2 - a_1) < 2\pi$, ce qui entraîne que $z^{12} \neq 1$.

   On a de même $z^8 \neq 1$, ce qui indique bien que la situation $b(\mathscr{A}) \geqslant 14$ ne se produit pas.

   ► On suppose qu'il existe douze nombres complexes $\exp(ia_k)_{0 \leqslant k < 12}$ de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$ avec $0 \leqqslant a_0 < a_1 < \ldots < a_{11} < 2\pi$. Le raisonnement précédent permet d'établir que tous

les écarts $a_{k+1}-a_k$ sont supérieurs ou égaux à $\dfrac{\pi}{6}$ pour $0 \leqslant k < 11$ et pour la même raison, $0 \geqslant a_0 + 2\pi - a_{11} \geqslant \dfrac{\pi}{6}$. Donc, en sommant ces 12 inégalités, on obtient

$$2\pi = a_0 + 2\pi - a_{11} + \sum_{k=0}^{10}(a_{k+1}-a_k) \geqslant 12 \times \frac{\pi}{6} = 2\pi.$$

De ce fait les inégalités ne peuvent pas être strictes et on a donc $a_{k+1}-a_k = \dfrac{\pi}{6}$. Le même raisonnement précédent permet d'établir que chacun des intervalles $\left]\ k\dfrac{\pi}{6}\ ,\ (k+1)\dfrac{\pi}{6}\ \right]$ pour $k \in \{0,\dots,11\}$ ne peut contenir qu'un seul des $a_k$. On a donc $a_0 = 0$ puisque $1 \in \mathscr{A}$ puis $a_1 = \dfrac{\pi}{6}$. On a donc $\zeta = \exp\left(i\dfrac{\pi}{6}\right) \in \mathscr{A}$. Donc les douze nombres distincts $\zeta^k$ pour $0 \leqslant k < 12$ appartiennent aussi à $\mathscr{A}$. Donc $i = \zeta^3 \in \mathscr{A}$ et par suite $0 \in \mathscr{A}$. Ainsi $b(\mathscr{A}) = 13$.

- ► Le raisonnement précédent permet d'établir que s'il existe $k$ nombres complexes appartenant à de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$ avec $9 \leqslant k \leqslant 11$, en découpant l'intervalle $]\ -\pi\ ,\ \pi\ ]$ en huit parts égales $\left]\ \ell\dfrac{\pi}{4}\ ,\ (\ell+1)\dfrac{\pi}{4}\ \right]$ pour $\ell \in \{-4,\dots,3\}$ on démontre qu'il existe $\zeta = \exp(ia) \in \mathscr{A}$ avec $0 < a < \dfrac{\pi}{4}$. De ce fait $\zeta^8 = 1$ est impossible. Reste donc $\zeta^{12} = 1$. On en déduit que $a = \dfrac{\pi}{6}$, donc qu'il y a au moins douze nombres complexes appartenant à de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$ ce qui contredit $9 \leqslant k \leqslant 11$. De ce fait $b(\mathscr{A}) \notin \{10,11,12\}$.
- ► On suppose qu'il existe huit nombres complexes $\exp(ia_k)_{0\leqslant k<8}$ de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$. En copiant le raisonnement développé pour les douze points, on démontre que ces huit points sont les $\zeta^k$ avec $\zeta = \exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $0 \leqslant k < 8$. On en déduit qu'alors $i = \zeta^2 \in \mathscr{A}$ et par suite $0 \in \mathscr{A}$. Ainsi $b(\mathscr{A}) = 9$.
- ► On suppose qu'il existe sept nombres complexes $\exp(ia_k)_{0\leqslant k<7}$ de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$. En découpant l'intervalle $]\ -\pi\ ,\ \pi\ ]$ en six parts égales $\left]\ \ell\dfrac{\pi}{3}\ ,\ (\ell+1)\dfrac{\pi}{3}\ \right]$ pour $\ell \in \{-3,\dots,2\}$ on démontre qu'il existe $\zeta = \exp(ia) \in \mathscr{A}$ avec $0 < a < \dfrac{\pi}{3}$. De ce fait $\zeta^6 = 1$ est impossible. Reste donc $\zeta^{12} = 1$ ou $\zeta^8 = 1$. On en déduit que $a = \dfrac{\pi}{6}$ ou $a = \dfrac{\pi}{4}$, donc qu'il y a au moins huit nombres complexes appartenant à de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$ ce qui contredit $k = 7$. En particulier $b(\mathscr{A}) \neq 8$.
- ► On suppose qu'il existe trois nombres complexes $\exp(ia_k)_{0\leqslant k<2}$ de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$. Soit $\zeta \notin \{-1,1\}$ l'un d'entre eux. Puisque $\zeta^8 = 1$ ou $\zeta^{12} = 1$, on peut affirmer que $\zeta^2 = 1$ ou $\zeta^3 = 1$, sinon on pourrait trouver strictement plus de trois puissances de $\zeta$, nombres complexes de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$.
  $\zeta^2 \neq 1$ puisqu'on a choisi $\zeta$ différent de 1 et $-1$. Reste $\zeta^3 = 1$ et $\zeta = \exp(\pm 2i\pi/3)$. De ce fait $\zeta^2$ et $\zeta^3 = 1$ appartiennent à $\mathscr{A}$, donc $\{1, j, j^2\} \subset \mathscr{A}$. Donc $1 + j^2 = -j \in \mathscr{A}$ et $(-j)^3 \in \mathscr{A}$ ce qui fait au moins cinq nombres complexes de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$. Contradiction.
- ► On suppose qu'il existe quatre nombres complexes $\exp(ia_k)_{0\leqslant k<3}$ de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$. Soit $\zeta \notin \{-1,1\}$ l'un d'entre eux. Puisque $\zeta^8 = 1$ ou $\zeta^{12} = 1$, on peut affirmer que $\zeta^2 = 1$ ou $\zeta^3 = 1$ ou $\zeta^4 = 1$, sinon on pourrait trouver strictement plus de quatre puissances de $\zeta$, nombres complexes de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$.
  $\zeta^2 \neq 1$ puisqu'on a choisi $\zeta$ différent de 1 et $-1$ et $\zeta^3 = 1$ donnerait au moins cinq nombres complexes de module 1 appartenant à $\mathscr{A}$. Reste $\zeta^4 = 1$. Donc $\zeta = \pm i$ donc $0 \in \mathscr{A}$ et $b(\mathscr{A}) = 5$.

Les deux derniers cas excluent $b(\mathscr{A}) = 4$.

Finalement, les valeurs possibles de $b(\mathscr{A})$ sont $0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13, \infty$.

# Chapitre 13

# Matrices

**Sommaire**


**13.1 Définitions . . . . . 573**
**13.2 Opérations . . . . . 576**
**13.3 Géométrie . . . . . 586**
**13.4 Exercices . . . . . 588**
**13.5 Solutions . . . . . 593**
**13.6 Problème . . . . . 602**
**13.7 Corrigé . . . . . 603**


## 13.1 Définitions

**Définition 1.**

Une **matrice** $n \times p$ est un tableau de plusieurs nombres à $n$ lignes et $p$ colonnes. Elle peut représenter (ou symboliser) plusieurs choses : un *graphe orienté* ou un *système linéaire de $n$ équations à $p$ inconnues* par exemple. On dit que la matrice est **carrée** d'ordre $n$ si $p = n$.

**Exemple 1**
La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice (de dimension) $3 \times 2$.

On notera $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ la matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & & \vdots & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ j\text{-ème colonne} \\ \downarrow \\ \\ \end{array}$$

**Définition 2.**

Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que $\mathbf{A}$ est la **matrice identité** si :

$$\begin{cases} a_{ii} = 1 & , \ 1 \leqslant i \leqslant n \\ a_{ij} = 0 & , \ i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant n \end{cases}$$

**Remarque 1.**

La matrice identité d'ordre $n$ est notée $\mathbf{I}_n$ et on peut écrire :

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \ ,$$

où $\delta_{ij}$ est le **symbole de Kronecker**.
Pour tous entiers naturels $i$ et $j$, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

**Définition 3.**

Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

- On dit que $\mathbf{A}$ est **diagonale** si :

$$\forall i \neq j, \ a_{ij} = 0, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

- On dit que $\mathbf{A}$ est **triangulaire supérieure** si :

$$\forall i > j, \ a_{ij} = 0, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

- On dit que $\mathbf{A}$ est **triangulaire inférieure** si :

$$\forall i < j, \ a_{ij} = 0, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

**Exemple 2**

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.
- $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.
- $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

**Définition 4.**

Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une matrice de dimension $n \times p$.
La **transposée** de $\mathbf{A}$ est la matrice de dimension $n \times p$, notée ${}^t\mathbf{A}$, telle que :

$$ {}^t\mathbf{A} = (a_{ji})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} . $$

**Exemple 3**

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Alors, ${}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

**Définition 5.**

Soient $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ deux matrices de mêmes dimensions.
On dit que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si pour tous entiers $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$, $a_{ij} = b_{ij}$.

**Exemple 4**

Si $\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $x - 1 = 3$, soit $x = 4$.

## 13.2 Opérations

### 13.2.1 Addition

**Théorème 1**
Soient $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de mêmes dimensions.
Posons $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (s_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (d_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$. Alors, pour tous entiers $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$,

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad ; \qquad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

**Exemple 5**
Soient $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+6 \\ 5+3 & -3+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-6 \\ 5-3 & -3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Théorème 2**
L'addition de deux matrices est commutative : si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux matrices de mêmes dimensions, alors :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

La vérification ne pose pas de problème. En effet l'addition de deux matrices est commutative (théorème 5 page 67 du cours de seconde).

### 13.2.2 Multiplication

**Définition 6.**

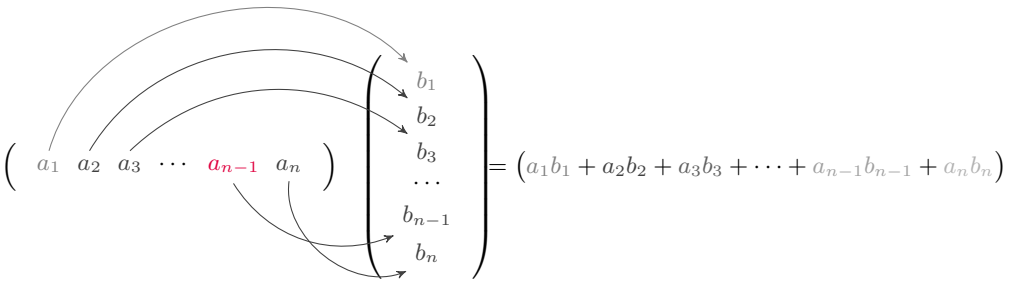
Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et soit $\lambda$ un réel.
On définit la matrice $\lambda\mathbf{A}$ par :

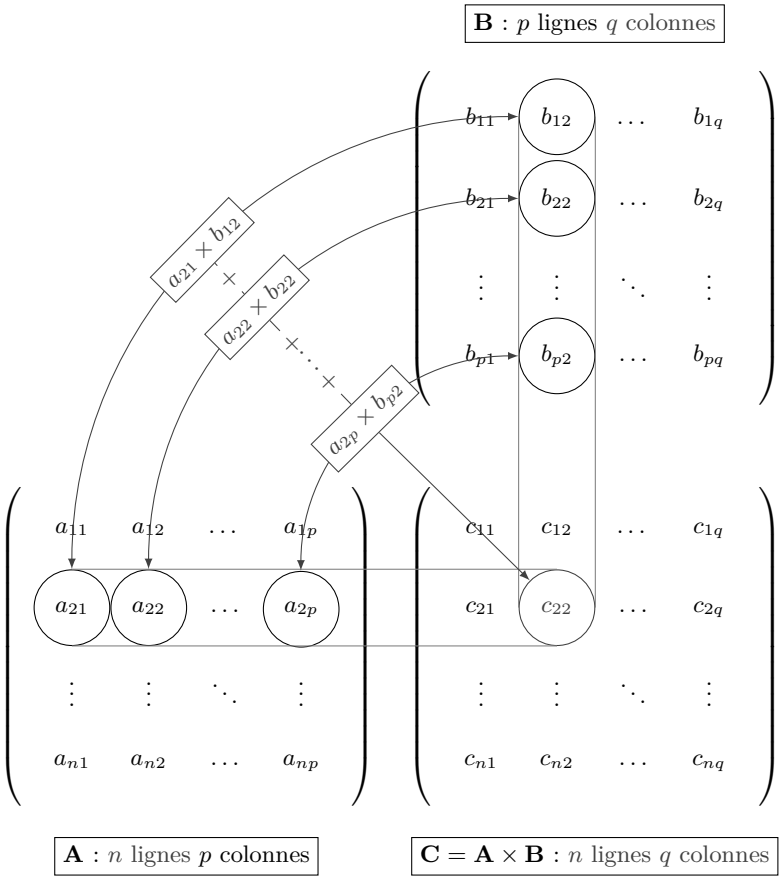
$$\lambda\mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

**Théorème 3**
Soient $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, de dimension $n \times p$, et $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant m}}$, de dimension $p \times m$, deux matrices.
Le produit $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$ sera une matrice de dimensions $n \times m$ définie par : pour tous $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Si on prend le cas simple d'un vecteur ligne multiplié par un vecteur colonne, cela donne :






**Exemple 6**

1. Soient $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a :

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-1) \times 3 + 3 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Soient $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

On a d'une part :

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1\times(-1)+2\times(-3) & 1\times(-2)+2\times 0\\ 3\times(-1)+4\times(-3) & 3\times(-2)+4\times 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-7 & -2\\ -15 & -6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Et on a d'autre part :

$$\begin{aligned}\mathbf{BA} &= \begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(-1)\times 1+(-2)\times 3 & (-1)\times 2+(-2)\times 4\\ (-3)\times 1+0\times 3 & (-3)\times 2+0\times 4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-7 & -10\\ -3 & -6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Remarque 2.**

Attention : le produit de deux matrices n'est en général pas commutatif : **AB** n'a aucune raison d'être égale à **BA**. Elles peuvent très bien avoir des dimensions différentes, l'une exister et pas l'autre.
C'est pourquoi on précise toujours que **BA** est le **produit à gauche** par **B** de **A** et que **AB** est le **produit à droite** par **B** de **A**.

### 13.2.3 « Associativité »

**Théorème 4 (« Associativité » du produit matriciel)**
Soient $\mathbf{A} = (a_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant k\leqslant p}}$, $\mathbf{B} = (b_{k\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ 1\leqslant \ell\leqslant q}}$ et $\mathbf{C} = (c_{\ell j})_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$.

Les quatre produits $\mathbf{D} := \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{F} := \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$, $\mathbf{G} := (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$, et $\mathbf{H} := \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ sont définis. De plus,

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}).$$

La démonstration qui suit est longue, pénible et d'un intérêt médiocre quand on sait qu'il existe un point de vue – que nous n'adopterons pas, il faut bien en garder pour les années à venir – qui rend cette dernière égalité parfaitement évidente. Pour autant elle n'est pas bien compliquée. Elle utilise de façon

cruciale – bien que masquée par le flot des calculs – l'égalité évidente [1]

$$(ab)c = a(bc), \tag{13.1}$$

vraie pour tous réels $a$, $b$ et $c$.

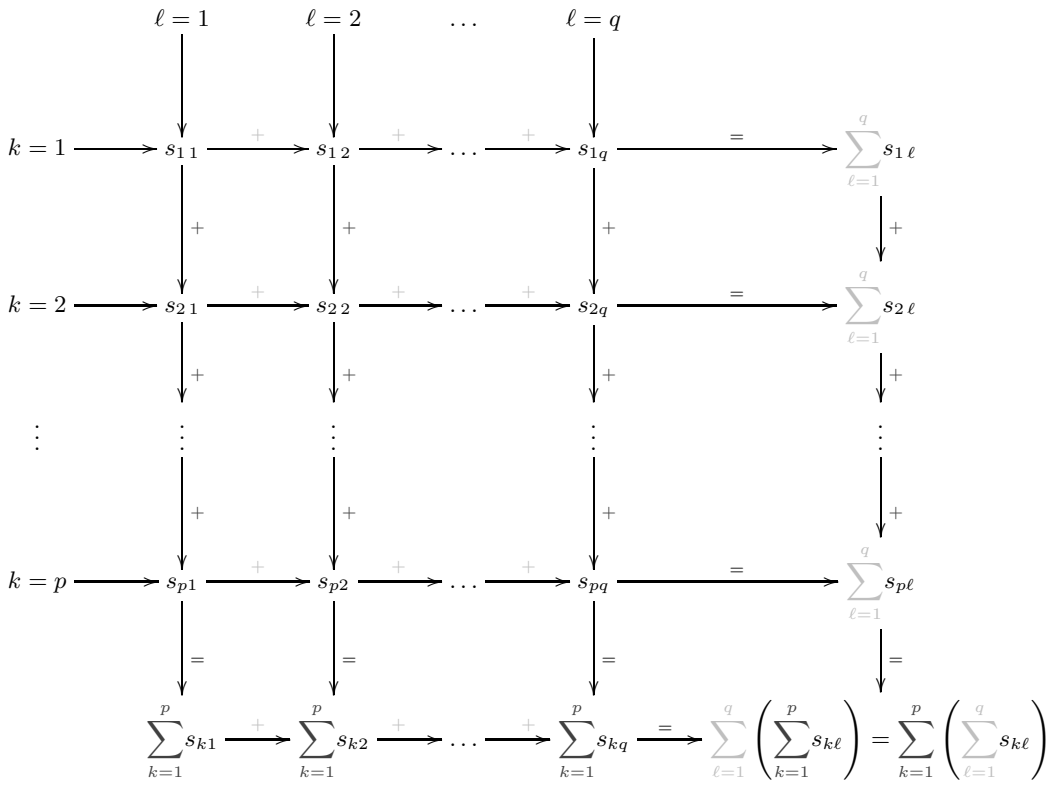
Pour commencer, un lemme crucial qui va servir dans la démonstration.

**Lemme 5**
Soit $\mathbf{S} = (s_{k\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ 1\leqslant \ell\leqslant q}}$ une matrice. On a

$$\sum_{\ell=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} s_{k\ell}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\ell=1}^{q} s_{k\ell}\right).$$

**Démonstration 5**
Le membre de droite égale la somme des termes de la dernière ligne.

Le membre de gauche égale la somme des termes de la dernière colonne.




1. Évidente ? Pas si sûr ! Le lecteur curieux pourra se demander comment elle se démontre, en commençant déjà par le cas de trois entiers naturels.

Ces deux membres sont égaux à la somme de tous les nombres réels du tableau. □

**Remarques 3.**

Le lecteur sourcilleux remarquera que les... cachent des récurrences, et il aura raison. Toutefois – si jamais il s'aventurait dans la rédaction d'une telle récurrence – il risquerait de rencontrer des obstacles de taille pour obtenir un résultat dont le bon sens saute aux yeux.
Ce théorème très simple – auquel on associe le nom de Guido Fubini (1879-1943) – est à la base de nombreux théorèmes.

Maintenant la démonstration proprement dite du théorème d'« associativité » :

**Démonstration 4**

Soit $\mathbf{D} = (d_{i\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant \ell\leqslant q}}$ avec $d_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{k\ell}$ et $\mathbf{F} = (f_{kj})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ avec $f_{kj} = \sum_{\ell=1}^{q} b_{k\ell}.c_{\ell j}$.

Soit $\mathbf{G} = (g_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ avec $g_{ij} = \sum_{\ell=1}^{q} d_{i\ell}.c_{\ell j}$ et $\mathbf{H} = (h_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ avec $h_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.k_{kj}$.

On a donc pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et tout $j \in \{1,\dots,m\}$,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{q} d_{i\ell}.c_{\ell j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{q} \left( \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{k\ell} \right).c_{\ell j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{q} \left( \sum_{k=1}^{p} \left(a_{ik}.b_{k\ell}\right).c_{\ell j} \right) \end{aligned}$$

Car pour tout indice $\ell \in \{1,\dots,q\}$, le nombre $c_{\ell j}$ est en facteur de $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{k\ell}$. On a donc développé ce produit. On peut continuer, grâce à l'égalité évidente (13.1),

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{q} \left( \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.\left(b_{k\ell}.c_{\ell j}\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left( \sum_{\ell=1}^{q} a_{ik}.\left(b_{k\ell}.c_{\ell j}\right) \right), \end{aligned}$$

D'après le théorème 5, en posant $s_{k\ell} := a_{ik}.\left(b_{k\ell}.c_{\ell j}\right)$. Maintenant on peut mettre en facteur $a_{ik}$ dans la somme interne, soit

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.\left( \sum_{\ell=1}^{q} b_{k\ell}.c_{\ell j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.f_{kj} \\ &= h_{ij}. \end{aligned}$$

Les matrices $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont donc égales, ce qu'il fallait démontrer. □

### 13.2.4 Inverse

**Définition 7** (Matrice inverse)**.**

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. S'il existe une matrice $\mathbf{B}$ telle que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$, alors $\mathbf{B}$ est appelée la **matrice inverse** de $\mathbf{A}$ et est notée $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Dans ce cas, on dit que $\mathbf{A}$ est **inversible**.

**Théorème 6**
Soit un système linéaire d'écriture matricielle $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, où $\mathbf{A}$ est une matrice inversible.
Alors, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

**Démonstration 6**
Si $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, alors, en multipliant à gauche par $\mathbf{A}^{-1}$, on a : $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.
Or, par définition, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, et $\mathbf{I}_n\mathbf{X} = \mathbf{X}$. Donc, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. □

**Théorème 7**

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$\mathbf{A}$ est inversible si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, son inverse est :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Remarques 4.**

Nous avons déjà noté le nombre réel $ad - bc := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ le déterminant des systèmes associés à la matrice $\mathbf{A}$. Voir la définition 4 page 386 du cours de seconde. On l'appelle aussi **déterminant** de la matrice $\mathbf{A}$.
Pour les matrices carrées de taille supérieure on peut utiliser la claculatrice ou un programme `python`. Voir les solutions 2 et 3 pour les détails.

**Démonstration 7**
Effectuons le produit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & db-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\times(ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I}_2\end{aligned}$$

Effectuons maintenant le produit :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\times\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ba+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I}_2\end{aligned}$$

Ces calculs prouvent donc que $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lorsque $ad-bc\neq 0$. □

**Théorème 8 (Principe du vestiaire)**
Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices carrées inversibles de même ordre $n\in\mathbb{N}^*$.
Alors la matrice $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ est inversible. De plus $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

**Démonstration 8**
On a

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})\times\mathbf{A})\times\mathbf{B} \\ &= \mathbf{B}^{-1}\times\mathbf{I}_n\times\mathbf{B} \\ &= \mathbf{B}^{-1}\times\mathbf{B} \\ &= \mathbf{I}_n.\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times(\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1}) \\ &= \mathbf{A}\times\mathbf{I}_n\times\mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{A}\times\mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{I}_n.\end{aligned}$$

### 13.2.5 Systèmes linéaires

**Théorème 9**
On considère le système linéaire : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.
En posant $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$, l'écriture matricielle du système est :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{C}$$

**Démonstration 9**
Il suffit d'écrire $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$ et de multiplier le membre de gauche :

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} = \mathbf{C} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ a'x + b'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarque 5.**

Une telle écriture est possible pour tout système linéaire de $n$ équations à $n$ inconnues. Par exemple,

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

**Théorème 10**
On considère la matrice diagonale d'ordre $p \in \mathbb{N}$ : $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{pp} \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors,} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} d_{11}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{pp}^n \end{pmatrix}$$

**Démonstration 10**
On raisonne par récurrence sur $n$ et on considère la propriété $\mathcal{P}_n$ qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété $\mathcal{P}_1$ est clairement vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pour lequel on a $\mathcal{P}_n$. On peut écrire $\mathbf{D}^n = (q_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, avec $q_{ii} := d_{ii}^n$ et $q_{ij} := 0$ pour $i \neq j$, et notons
$\mathbf{D}^{n+1} = \mathbf{D}^n\mathbf{D} = (c_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Alors,

$$c_{ij} = \sum_{m=1}^{p} q_{im} d_{mj}$$

Or, $d_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Donc :

$$\begin{aligned} c_{ii} &= q_{i1}d_{1i} + q_{i2}d_{2i} + \cdots + q_{ii}d_{ii} + q_{i(i+1)}d_{(i+1)i} + \cdots + q_{ip}d_{pi} \\ &= 0 + 0 + \cdots + d_{ii}^n d_{ii} + 0 + \cdots + 0 \\ &= d_{ii}^{n+1} \end{aligned}$$

et pour $i < j$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= q_{i1}d_{1j} + q_{i2}d_{2j} + \cdots + q_{ii}d_{ij} + \cdots + q_{ij}d_{jj} + \cdots + q_{ip}d_{pj} \\ &= 0 + 0 + \cdots + d_{ii}^n \times 0 + 0 \times d_{ii} + 0 + \cdots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Idem pour $i > j$. On a bien $\mathcal{P}_{n+1}$.

En résumé, on a $\mathcal{P}_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n$. □

**Théorème 11**
Soit $\mathbf{A}$ une matrice telle que :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \quad , \quad \big(a\ ;\ b\big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

En convenant de noter :

$$\mathbf{A} = a\mathbf{I}_2 + b\mathbf{N} \qquad , \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pour tout entier naturel $n$,

$$\mathbf{A}^n = a^n\mathbf{I}_2 + na^{n-1}b\mathbf{N}.$$

**Démonstration 11**
On raisonne par récurrence sur $n$ et on considère la propriété $\mathcal{H}_n$ qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation.**
  Pour $n = 0$, $a^n\mathbf{I}_2 + na^{n-1}b\mathbf{N} = \mathbf{I}_2 = \mathbf{A}^n$. Donc l'initialisation est faite.

– **Hérédité.**
Supposons que l'égalité soit vraie pour un entier naturel $k$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{A}^k \\ &= (aI_2 + b\mathbf{N})(a^k\mathbf{I}_2 + ka^{k-1}b\mathbf{N}) \\ &= a^{k+1}\mathbf{I}_2 + ka^k b\mathbf{N} + a^k b\mathbf{N} + ka^{k-1}b^2\mathbf{N}^2 \\ &= a^{k+1}\mathbf{I}_2 + (k+1)a^k b\mathbf{N} \quad (\text{ car } \mathbf{N}^2 = 0)\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.
La propriété est donc vraie pour tout entier naturel $n$. □

**Théorème 12**
Soient $\mathbf{A}$ une matrice carrée d'ordre $p$, $\mathbf{P}$ une matrice carrée inversible d'ordre $p$ et $\mathbf{D}$ une matrice diagonale d'ordre $p$ telle que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$.
Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$$

**Démonstration 12**
On raisonne par récurrence sur $n$ et on considère la propriété $\mathcal{H}_n$ qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété $\mathcal{H}_1$ est clairement vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pour lequel on a $\mathcal{H}_n$. On peut donc écrire $\mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{n+1} &= \mathbf{A}^n\mathbf{A} \\ &= \left(\mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}\right)\cdot\left(\mathbf{PDP}^{-1}\right) \qquad \text{d'après } \mathcal{H}_n \\ &= (\mathbf{PD}^n)\underbrace{\left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\right)}_{=\mathbf{I}_p}\left(\mathbf{DP}^{-1}\right) \text{ d'après le théorème 4} \\ &= \mathbf{PD}^n\mathbf{DP}^{-1} \\ &= \mathbf{PD}^{n+1}\mathbf{P}^{-1}\end{aligned}$$

On a bien $\mathcal{H}_{n+1}$.

En résumé, on a $\mathcal{H}_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}_n$. □

## 13.3 Géométrie

Les matrices interviennent naturellement en géométrie. Le plan (ou l'espace) est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère la rotation de centre $\Omega$ ( $a$ , $b$ ) et d'angle $\theta$. Son écriture complexe est $z' - \omega = (\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)) \times (z - \omega)$ en appelant $z' := x' + iy'$ l'image de $z := x + iy$ où $x, y, x'$ et $y'$ sont réels et $\omega := a + ib$. En égalant les parties réelles et imaginaires on obtient

$$\text{soit} \quad \begin{cases} x' &= \cos(\theta)(x-a) &- \sin(\theta)(y-b) &+ a \\ y' &= \sin(\theta)(x-a) &+ \cos(\theta)(y-b) &+ b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= \cos(\theta)x &- \sin(\theta)y &- a\cos(\theta) + b\sin(\theta) + a \\ y' &= \sin(\theta)x &+ \cos(\theta)y &- a\sin(\theta) + b\cos(\theta) + b \end{cases}$$

ce qui peut se traduire matriciellement par

$$\mathbf{X}' = \mathbf{M}\mathbf{X} + \mathbf{A}$$

avec

$$\mathbf{X}' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\ \mathbf{X} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \mathbf{M} := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A} := \begin{pmatrix} -a\cos(\theta) + b\sin(\theta) + a \\ -a\sin(\theta) + b\cos(\theta) + b \end{pmatrix}$$

Cette façon naturelle d'introduire les matrices dans les transformations ponctuelles n'est pas pour autant la plus efficace. En infographie – mais pas seulement – on représente les points du plan par un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ et les points de l'espace par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$. Bien entendu, $x$ désigne l'abscisse, $y$ l'ordonnée et $z$ la cote éventuelle.

Ce repérage à l'aide de trois coordonnées (quatre pour l'espace) s'appelle les **coordonnées homogènes**. L'exemple ci-dessus se traduit par $\mathbf{X}'_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{X}_1$ avec

$$\mathbf{X}'_1 := \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}\ \mathbf{X}_1 := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{M}_1 := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & -a\cos(\theta) + b\sin(\theta) + a \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & -a\sin(\theta) + b\cos(\theta) + b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \end{matrix} \begin{matrix} \text{abscisse de l'image de l'origine} \\ \text{ordonnée de l'image de l'origine} \\ \end{matrix}$$

où l'on retrouve la matrice $\mathbf{M}$ en haut à gauche de la matrice $\mathbf{M}_1$.

Lorsque $a = b = 0$, c'est-à-dire lorsque le centre de la rotation est à l'origine, la matrice $\mathbf{M}_1$ s'écrit

$$\mathbf{M}_0 := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque ainsi que la rotation de centre $\Omega\ (\ a\ ,\ b\ )$ et d'angle $\theta$ est la composée $t_{\overrightarrow{u}} \circ \rho \circ t_{-\overrightarrow{u}}$ où $t_{\overrightarrow{v}}$ désigne le vecteur $\overrightarrow{v}$ – c'est-à-dire la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ – et $\rho$ la rotation de centre $O\ (\ 0\ ,\ 0\ )$ et d'angle $\theta$.



Attention à l'ordre ! Lorsqu'on considère $t_{\overrightarrow{u}} \circ \rho \circ t_{-\overrightarrow{u}}$, on commence par effectuer $t_{-\overrightarrow{u}}$, puis $\rho$ puis $t_{\overrightarrow{u}}$.

On a alors

$$M_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{de } t_{\overrightarrow{u}}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{de } \rho}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{de } t_{-\overrightarrow{u}}}}$$

On voit par là l'intérêt des coordonnées homogènes : la matrice de la composée est le produit des matrices.

## 13.4 Exercices

**Exercice 1.**

Devinette : Définir le symbole de Kronecker sans test, par conséquent sans le mot « si ».

### 13.4.1 Matrices et systèmes

**Exercice 2.**

Traduire le système $S\begin{cases} 3x - 2y + z = 17 \\ x - 3z = -51 \\ 3y + 2z = -34 \end{cases}$
par une égalité matricielle de la forme $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

À l'aide de la calculatrice déterminer la matrice $\mathbf{A}^{-1}$ et résoudre le système.

**Exercice 3.**

Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 7 \\ x + 3y + 4z = 1 \\ 3x - 4z = 5 \end{cases}$$

en utilisant la calculatrice.

**Exercice 4.**

Résoudre le système suivant à l'aide de la calculatrice :

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = -8 \\ 2x - z = 7 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases}$$

**Exercice 5.**

On donne les matrices suivantes :

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer à la main le produit $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$.
2. L'un des deux produits de matrices $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ est possible. Expliquer pourquoi et le calculer à la main.

*NB : On pourra vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.*

**Exercice 6.**

On donne les matrices :

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ($a$ étant un nombre réel).

1. (a) Calculer à l'aide de la calculatrice les matrices $\mathbf{M}^2$, $\mathbf{M}^3$, $\mathbf{M}^4$ et $\mathbf{M}^5$.
   (b) En déduire la formule de $\mathbf{M}^n$.
2. Donner l'expression générale de $\mathbf{P}^n$.

**Exercice 7.**

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4z = -39 \\ x - y + 7z = 54 \\ 3x + y - 2z = -11 \end{cases}$$

1. À l'aide de la calculatrice, résoudre ce système.
2. À la main, résoudre ce système.

**Exercice 8.**

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

1. À l'aide de la calculatrice, résoudre ce système.
2. À la main, résoudre ce système.
3. Résoudre graphiquement ce système à l'aide de deux droites $(D_1)$ et $(D_2)$ dont on précisera leurs constructions.
   On donnera notamment pour chacune d'entre elles :
   - trois points,
   - son coefficient directeur, calculé puis matérialisé sur le dessin,
   - son ordonnée à l'origine, calculée puis matérialisée sur le dessin,
   - son équation réduite sous la forme $y = ax + b$.

**Exercice 9.**

Calculer les matrices suivantes :

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B}; \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{A} - \mathbf{B}; \; \mathbf{M}_3 = \mathbf{A}^2; \quad \mathbf{M}_4 = \mathbf{B}^2; \quad \mathbf{M}_5 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2;$$

$$\mathbf{M}_6 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2; \quad \mathbf{M}_7 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}); \quad \mathbf{M}_8 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2.$$

Avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Commentaire.

**Exercice 10.**

Traduire le système $\mathcal{S} \begin{cases} -x + 2y + 4z = 4 \\ 3x - z = -2 \\ 2y + z = 6 \end{cases}$ par une égalité matricielle de la forme $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

À l'aide de la calculatrice déterminer la matrice $\mathbf{A}^{-1}$ et résoudre le système.

Déterminer l'intersection des trois plans de l'espace d'équations :
$\mathcal{P}_1 : -x + 2y + 4z = 4$
$\mathcal{P}_2 : 3x - z = -2$
$\mathcal{P}_3 : 2y + z = 6$.

### 13.4.2 Matrices et suites récurrentes

**Exercice 11** (Suite de Fibonacci)**.**

Soit la suite $(F_n)$ définie par : $\left\{ \begin{array}{rcl} F_0 = 0 & ; & F_1 = 1 \\ F_{n+2} & = & F_n + F_{n+1} \end{array} \right.$. (voir exemple 2 page 316 du cours de seconde)

On pose $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}_n := \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{U}_n$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{U}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{U}_0$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ \mathbf{U}_{n+p} = \mathbf{A}^n\mathbf{U}_p$.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.
4. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in \mathbb{N},\ F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}.$$
5. En s'inspirant de ce qui précède et de l'exponentiation rapide, (exemple 17 p. 357 du cours de seconde.) écrire une fonction `Python` qui calcule les nombres de Fibonacci.

**Exercice 12** (Nouvelle-Calédonie, Novembre 2004)**.**

On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies, pour tout entier naturel $n$, par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} v_0 & = & 4 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{array} \right. .$$

À l'aide d'une matrice, démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes. Déterminer leurs limites.

**Indication 1.**

On pourra se souvenir qu'il s'agit de l'exercice 10 page 73 et s'inspirer des étapes fournies dans l'énoncé et sa correction.

**Exercice 13.**

Dans une région supposée démographiquement stable, on compte 100 milliers d'habitants qui se déplacent pour se rendre à leur travail.

Au 1er janvier 2007 on considère que 50 000 personnes n'utilisent que leur voiture pour leurs déplacements ; 40 000 personnes n'utilisent que les transports en commun pour leurs déplacements ; les autres personnes utilisant un autre moyen de transport (vélo, roller etc...).

Une étude statistique réalisée les mois précédents a permis d'établir que d'un mois sur l'autre :
- parmi les personnes qui utilisent la voiture 30% optent pour les transports en commun et 60% continuent à utiliser leur voiture ;
- parmi les personnes qui utilisent les transports en commun 20% changent pour utiliser leur voiture et 10% changent pour un autre moyen de transport.
- parmi les personnes qui utilisent un autre moyen de transport 20% optent pour la voiture et 40% pour les transports en commun.

On considère que les résultats de cette étude sont valables pour les deux années suivantes.

On note $p_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \\ a_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne où $v_n$ est le nombre de personnes qui utilisent leur voiture, $c_n$ le nombre de personnes qui utilisent les transports en commun et $a_n$ le nombre de personnes qui utilisent un autre moyen de transport $n$ mois après le 1er janvier 2007.

1. Exprimer $v_1$, $c_1$ et $a_1$ en fonction de $v_0$, $c_0$ et $a_0$ . En déduire la matrice $\mathbf{M}$ telle que $p_1 = \mathbf{M} \times p_0$.
2. Exprimer à l'aide de $\mathbf{M}$, la matrice $\mathbf{N}$ telle que $p_3 = \mathbf{N} \times p_0$. Donner le nombre de personnes qui utilisent respectivement, la voiture, les transports en commun ou un autre moyen de transport le 1er avril 2007.
3. Donner une estimation du nombre de personnes, arrondi à la centaine près, qui utiliseront respectivement, la voiture, les transports en commun ou un autre moyen de transport deux ans après le 1er janvier 2007.

**Exercice 14.**

Devinette : Écrire le théorème 5 page 580 sous forme matricielle.

**Exercice 15.**

Soit $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{A}^n = (2^n - 1)\mathbf{A} + (2 - 2^n)\mathbf{I}_2$.
2. A-t-on $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{B}^n = (2^n - 1)\mathbf{B} + (2 - 2^n)\mathbf{I}_2$ ?

### 13.4.3 Géométrie

**Exercice 16** (Composées).

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit $f^{\circ k}$ la composée de $f$ par elle-même $k$ fois, c'est-à-dire que $f^{\circ 0}$ est l'identité de $R$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{\circ(k+1)} = f^{\circ k} \circ f = f \circ f^{\circ k}$.

Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ démontrer que $f^{\circ n}(x) = a^n x + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b$.

Déjà vu à l'exercice 35 page 22.

## 13.5 Solutions

**Solution 1**
Il faut tricher un peu : pour tous entiers naturels $i$ et $j$,

$$\delta_{ij} = \left\lfloor \frac{1}{|i-j|+1} \right\rfloor .$$

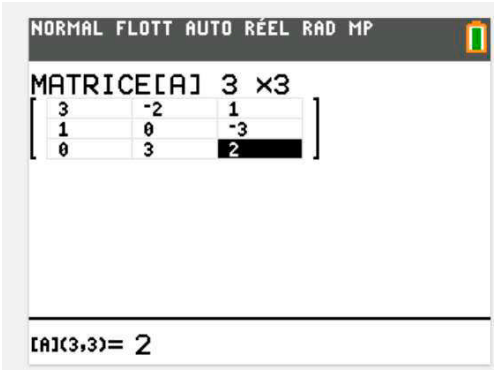
Le test est parti se cacher dans la partie entière.

### 13.5.1 Matrices et systèmes

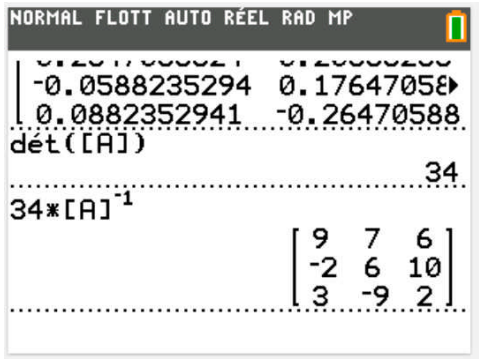
**Solution 2**
La traduction matricielle est aisée, il suffit de prendre $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 17 \\ -51 \\ -34 \end{pmatrix}$ avec bien sûr $\mathbf{X} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Avec une calculatrice TI. On commence par éditer la matrice [A] dans le menu matrice option ÉDIT.
Choisir 1 :[A]
Modifier la dimension de la matrice pour obtenir une matrice $3 \times 3$. Une fois la dimension de la matrice rentrée, modifier les coefficients.

Sortir avec 2nde mode, c'est-à-dire quitter.
L'inverse s'obtient naturellement :
matrice 1 : pour choisir la matrice [A] puis 2nde matrice c'est-à-dire $x^{-1}$.



Seul inconvénient : on récupère quelque chose de dégoûtant, avec des tas de chiffres après la virgule et qui ne tient pas dans l'écran. Bref, il faut agir.




On va se servir d'un outil magique qui relève des mathématiques supérieures : le déterminant que nous avons déjà vu pour les matrices d'ordre 2 à la remarque 4 page 582. Ici il se généralise à des matrices d'ordre 3 ou plus.
Pour cela, dans matrice option MATH.
Choisir 1 : dét( puis
matrice 1 : pour choisir la matrice [A] puis
)
Après entrer, l'écran affiche 34.
On multiplie la matrice $\mathbf{A}^{-1}$ pour obtenir
Donc $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ -2 & 6 & 10 \\ 3 & -9 & 2 \end{pmatrix}$. Magique, n'est-ce pas ?

Pour résoudre le système, on définit une matrice $\mathbf{B}$ de dimension $3 \times 1$ de la même façon puis on demande $[\mathtt{A}]^{-1} * [\mathtt{B}]$ pour obtenir $X = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -12 \\ -20 \\ 13 \end{pmatrix}$

Le système admet une unique (car $\mathbf{B}$ est inversible) solution : $x = -12$; $y = -20$ $z = 13$.

**Solution 3**

Soit $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

La calculette donne $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 12 & 12 & -3 \\ -16 & -7 & 13 \\ 9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ et surtout $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un programme Python :

```
import numpy as np                          #charge le module qui calcule les matrices.
from numpy.linalg import solve, inv

A = np.array([[1,-3,5],[2,0,-1],[3,-1,1]]) #definit la matrice ligne par ligne
B = np.array([[-8], [7], [6]])
B1= B.transpose()                           #transpose la matrice B
A1 = inv(A)                                 #inverse la matrice A
print(A1)
print(B)
print(B1)
print(solve(A,B))                           #solve resout le systeme
print(np.dot(A1,B))                         #np.dot effectue le produit matriciel
```

**Solution 4**

Soit $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

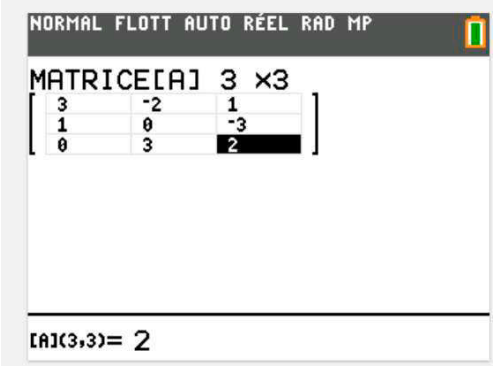
La calculette donne $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -5 & -14 & 11 \\ -2 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ et surtout $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**Solution 5**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 2\times 2 - 1\times 1 + 4\times 1 & 2\times 1 + 1\times 0 + 4\times 2 & 2\times 4 + 1\times 1 + 4\times 1 \\ -1\times 2 + 0\times 1 + 1\times 1 & -1\times 1 + 0\times 0 + 1\times 2 & -1\times 4 + 0\times 1 + 1\times 1 \\ 1\times 2 - 2\times 1 + 1\times 1 & 1\times 1 + 2\times 0 + 1\times 2 & 1\times 4 + 2\times 1 + 1\times 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Seul le produit **AB** est licite, car **A** a autant de colonnes que **B** a de lignes, tandis que **B** n'a pas autant de colonnes que **A** n'a de lignes.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 2\times 2 + 1\times 3 + 4\times 1 & 2\times 1 + 1\times 0 - 4\times 1 \\ -1\times 2 + 0\times 3 + 1\times 1 & -1\times 1 + 0\times 0 - 1\times 1 \\ 1\times 2 + 2\times 3 - 1\times 1 & 1\times 1 + 2\times 0 - 1\times 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$




**Solution 6**

La calculatrice donne $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ; $\mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} 27 & 81 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$ ;

$$\mathbf{M}^4 = \begin{pmatrix} 81 & 324 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} ; \mathbf{M}^5 = \begin{pmatrix} 243 & 1215 & 0 \\ 0 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}.$$

On peut imaginer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{P}_n$ : $\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^n & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

On a $\mathcal{P}_n$ pour tout entier $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un entier pour lequel on a $\mathcal{P}_n$.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^n &= \begin{pmatrix} 3^n & n3^n & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n \times 3 + n3^n \times 0 + 0 \times 0 & 3^n \times 3 + n3^n \times 3 + 0 \times 0 & 3^n \times 0 + n3^n \times 0 + 0 \times 3 \\ 0 \times 3 + 3^n \times 0 + 0 \times 0 & 0 \times 3 + 3^n \times 3 + 0 \times 0 & 0 \times 0 + 3^n \times 0 + 0 \times 3 \\ 0 \times 3 + 0 \times 0 + 3^n \times 0 & 0 \times 3 + 0 \times 3 + 3^n \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 0 + 3^n \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (n+1)3^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+1}$.

En résumé, on a $\mathcal{P}_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n$.

On a $\mathbf{P} = \dfrac{a}{3}\mathbf{M}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P} = \left(\frac{a}{3}\right)^n \mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

**Solution 7**

Afin d'avoir des calculs plus agréables, on intervertit les deux premières lignes puis on fait apparaître des zéros dans la première colonne en soustrayant le nombre congru de fois la première ligne dans la deuxième et la troisième :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & 7z & = & 54 & \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & -39 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3x & + & y & - & 2z & = & -11 & L_2 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

Soit

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & - & y & + & 7z & = & 54 & \\ & & 7y & - & 18z & = & -147 & \\ & & 4y & - & 23z & = & -173 & L_3 \longleftarrow 7L_3 - 4L_2 \end{array} \right.$$

Soit

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 7z & = & 54 \\ & & 7y & - & 18z & = & -147 \\ & & & - & 89z & = & -623 \end{array} \right.$$

Fin de la phase de descente. On peut remonter. On trouve $z = 7$ dans $L_3$, puis $7y = -147 + 18z = -21$ d'où $y = -3$ dans $L_2$. Enfin $x = y - 7z + 54 = -3 - 49 + 54 = 2$ dans $L_1$. Ainsi le système admet une unique solution ( 2 , −3 , 7 ).

**Remarque 6.**

Cette façon de résoudre les système est moins coûteuse en temps de calcul que l'inversion de la matrice du système. (Sauf si on a beaucoup de systèmes à résoudre avec la même matrice).

**Solution 8**

2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr|c|c} 2x & - & 5y & = & 11 & \times(-3) & \times 4 \\ 3x & + & 4y & = & 5 & \times 2 & \times 5 \\ \hline & & 23y & = & & -23 & \\ 23x & & & = & & & 69 \end{array}\right.$$

Soit $\big(x\ ,\ y\big) = \big(3\ ,\ -1\big)$.

3.

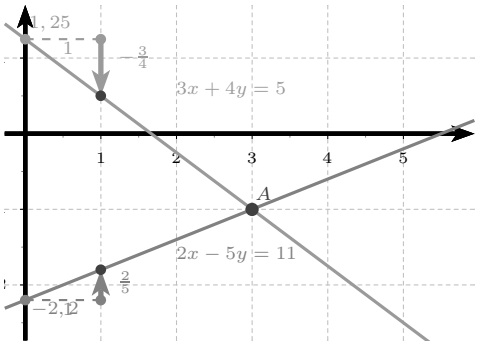
| $x=$ | 0 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $y=$ | $-2,2$ | $-1$ | $-0,2$ |
| $y=$ | $1,25$ | $-1$ | $-2,5$ |

Les ordonnées à l'origine sont $y_0 = -2,2$ et $y_0 = 1,25$

Coefficients directeurs :

$\frac{y_3 - y_0}{3-0} = \frac{-1+2,2}{3} = 0,4 = \frac{2}{5}$.

$\frac{y_3 - y_0}{3-0} = \frac{-1+-1,25}{3} = -0,75 = -\frac{3}{4}$.




**Solution 9**

Un programme `Python` :

```
import numpy as np                          #charge le module qui calcule les matrices.

A = np.array([[3,-1,0],[-2,-3,1],[0,2,3]]) #definit la matrice ligne par ligne
B = np.array([[-1,-1,2], [0,3,-1], [-1,-2,1]])
M1=A+B
print('M1 = ',M1)
M2=A-B
print('M2 = ',M2)
M3=np.dot(A,A)
print('M3 = ',M3)
M4=np.dot(B,B)                    #np.dot effectue le produit matriciel
print('M4 = ',M4)
print('M5 = ',np.dot(M1,M1))
print('M6 = ',M3+2*np.dot(A,B)+M4)
print('M7 = ',np.dot(M1,M2))
print('M8 = ',M3-M4)
```

Solutions

On constate que $\mathbf{M}_5 \neq \mathbf{M}_6$ et que $\mathbf{M}_7 \neq \mathbf{M}_8$.



Attention en utilisant les égalités remarquables avec des matrices qui ne commutent pas. La bonne égalité remarquable est

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}^2.$$

**Solution 10**
La calculette donne $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -3 & -1 & 11 \\ 6 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ et surtout $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3,5 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'intersection des trois plans est réduite au point de coordonnées ( $-1$ ; $3,5$ ; $-1$ ).

## 13.5.2 Matrices et suites récurrentes

**Solution 11 (Suite de Fibonacci)**

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} 0\times F_n + 1\times F_{n+1} \\ 1\times F_n + 1\times F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{n+1}$.
2. Récurrences sans difficulté.
3. On considère pour tout entier naturel non nul $\mathcal{P}_n$ : $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.
   On a clairement $\mathcal{P}_1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pour lequel on a $\mathcal{P}_n$. On a aussi
   $$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n-1}+F_n & F_n+F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}.$$
   On a bien $\mathcal{P}_{n+1}$.
   D'après le théorème de récurrence, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. On a
   $$\begin{pmatrix} F_{n+p} \\ F_{n+p+1} \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{n+p} = \mathbf{A}^n\mathbf{U}_p = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} F_p \\ F_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1}.F_p + F_n.F_{p+1} \\ F_n.F_p + F_{n+1}.F_{p+1} \end{pmatrix}.$$
   D'où l'égalité cherchée en regardant le terme du haut dans la matrice $\mathbf{U}_{n+p}$.
5. On code $F_{n+1}$ par `a`, $F_n$ par `b` et $F_{n-1}$ par `c` dans le programme suivant :

```
import time        #bibliotheque pour mesurer le temps

def fibo(n):
    L=[]           #debut de la conversion en binaire de n
    while n>0:
        L.append(n%2)
        n=n//2
    l=len(L)       #fin de la conversion en binaire de n
    a=1            #initialisation de la matrice (I2)
    b=0
    c=1
    for k in range(l):
        a,b,c=a*a+b*b,b*(a+c),b*b+c*c #calcul de F(2n+1), F(2n) et F(2n-1)
                                      #en fonction de de F(n+1), F(n) et F(n-1).
```

```
        if L[1-k-1]==1:              #le cas echeant on decale les indices.
            a,b,c=a+b,a,b
    return(b)

tps1 = time.clock() #declenche le chronometre
print(fibo(201908))
tps2 = time.clock() #arrete le chronometre
print(tps2 - tps1) #affiche le temps d'execution
```

**Solution 12 (Nouvelle-Calédonie, Novembre 2004)**
Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par écrire

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} = \frac{u_n+v_n}{4} + \frac{v_n}{2} = \frac{u_n+3v_n}{4}.$$

On a alors

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{U}_n, \text{ en posant } \mathbf{U}_n := \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A} := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit via une récurrence immédiate que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{U}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{U}_0.$$

En s'inspirant de l'énoncé de l'exercice 10 page 73, on pose

$$\mathbf{W}_n := \mathbf{P}\cdot\mathbf{U}_n, \quad \text{avec } \mathbf{W}_n := \begin{pmatrix} w_n \\ t_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{P} := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et on a

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}_n = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{W}_n = \mathbf{D}\cdot\mathbf{W}_n,$$

En posant $\mathbf{D} := \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1}$. De ce fait

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{W}_n = \mathbf{D}^n\mathbf{W}_0.$$

Maintenant on calcule $\mathbf{D} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Le logiciel `Xcas` peut effectuer gracieusement ce calcul.

**Xcas en ligne**. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

P:=([[-1,1],[1/3,2/3]]); A:=([[1/2,1/2],[1/4,3/4]])

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\right]$$

D:=P*A*P^(-1)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit – via le théorème 10 – que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un surplus de gymnastique permet de récupérer les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ puisque $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}$ :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{A}^n = \left(\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}\right)^n = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{P}.$$

On trouve alors

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \times 4^n} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3 \times 4^n} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \times 4^n} \end{pmatrix}.$$

Puis

$$\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} - \frac{2}{3 \times 4^n} \\ \frac{11}{3} + \frac{1}{3 \times 4^n} \end{pmatrix}.$$

Les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont donc la même limite, à savoir $\frac{11}{3}$.

**Remarque 7.**

Le logiciel `Xcas` donne le résultat directement, sans état d'âme.

**Xcas en ligne**. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

U:=([[3],[4]]); A:=([[1/2,1/2],[1/4,3/4]])

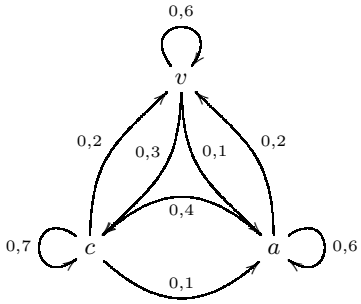
$$[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}]$$

B:=matpow(A,n)*U

$$\begin{pmatrix} 4(\frac{2}{3} + \frac{-\left(2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{3}) + 3(\frac{1}{3} + \frac{-\left(2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{-3}) \\ 4(\frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}) + 3(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{-3}) \end{pmatrix}$$

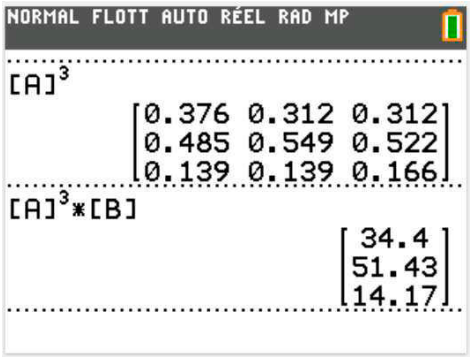
**Solution 13**

Un schéma permet, à partir des flux sortants donnés par l'énoncé, de déterminer les flux entrants utiles par la suite.




1. On a $\begin{cases} v_1 = 0,6v_0 + 0,2c_0 + 0,2a_0 \\ c_1 = 0,3v_0 + 0,7c_0 + 0,4a_0 \\ a_1 = 0,1v_0 + 0,1c_0 + 0,4a_0 \end{cases}$ soit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$

2. En rentrant dans [A] la matrice $\mathbf{M}$ et dans [A] la matrice $p_0 := \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$, on trouve pour $p_3$




Donc $v_3 = 34\,400$, $c_3 = 51\,430$ et $a_3 = 14\,170$.

3. En calculant cette fois $\mathbf{M}^{24}p_0$ on obtient, après arrondi $v_{24} = 33\,300$, $c_{24} = 52\,400$ et $a_{24} = 14\,300$.

**Solution 14**

Soit $\mathbf{U}_p$ la matrice colonne à $p$ lignes composée de 1.

Soit $\mathbf{V}_q$ la matrice ligne à $q$ colonnes composée de 1.

On a

$$S := \sum_{\ell=1}^{q} \left( \sum_{k=1}^{p} s_{k\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^{q} 1 \times \left( \sum_{k=1}^{p} s_{k\ell} \times 1 \right).$$

De ce fait $S$ est l'unique élément de la matrice $1 \times 1$ égale à $\mathbf{V}_q \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_p)$.

De même

$$T := \sum_{k=1}^{p} \left( \sum_{\ell=1}^{q} s_{k\ell} \right)$$

est l'unique élément de la matrice $1 \times 1$ égale à $(\mathbf{V}_q \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{U}_p$.

Autrement dit, le théorème 5 page 580 s'écrit :

$$\mathbf{V}_q \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_p) = (\mathbf{V}_q \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{U}_p.$$

Bien entendu, il est hors de question d'invoquer le théorème d'« associativité » pour établir cette égalité, puisque c'est elle qui est au cœur de la démonstration du-dit théorème d'« associativité ».

**Solution 15**

Soit $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ , $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Soit, pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : $\mathbf{A}^n = (2^n - 1)\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2$.
   Pour $n = 0$, on a bien $\mathbf{A}^0 = (2^0 - 1)\mathbf{A} + (2 - 2^0)\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2$. Par récurrence forte
   Supposons $\mathcal{P}(k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors, d'après $\mathcal{P}(n)$, et en multipliant par $\mathbf{A}$, on a
   $$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} = ((2^n - 1)\mathbf{A} + (2 - 2^n)\mathbf{I}_2)\mathbf{A} = (2^n - 1)\mathbf{A}^2 + (2 - 2^n)\mathbf{A}.$$
   Mais d'après $\mathcal{P}(2)$, on a
   $$\mathbf{A}^2 = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2.$$
   Donc
   $$\mathbf{A}^{n+1} = (2^n - 1)(3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) + (2 - 2^n)\mathbf{A} = [3(2^n - 1) + (2 - 2^n)]\mathbf{A} - 2(2^n - 1)\mathbf{I}_2,$$
   et finalement $\mathbf{A}^{n+1} = (2^{n+1} - 1)\mathbf{A} + (2 - 2^{n+1})\mathbf{I}_2$ , ce qui donne $\mathcal{P}(n + 1)$.
2. La réponse est non : $n = 2$ est un contrexemple. Pourtant, le raisonnement de la question précédente s'applique ! Conclusion : le raisonnement de la question 1 est insuffisant (donc faux). En effet, il manque la vérification de $\mathcal{P}(2)$ dont on se sert dans la démonstration de l'hérédité.

### 13.5.3 Géométrie

**Solution 16 (Composées)**

La fonction $f$ est représentée par la fonction $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De ce fait, la fonction $f^{\circ n}$ est représentée par la fonction $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Une récurrence simple montre que $\mathbf{A}^n := \begin{pmatrix} a^n & \sum_{i=0}^{n-1} a^i b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $f^{\circ n}(0) = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{\circ n}(x) = a^n x + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b$.

## 13.6 Problème

**Problème 20 (Les matrices complexées)**

Nous avons défini les nombres complexes au chapitre 12 à l'aide d'un mystérieux nombre $i$. Tout s'est bien passé, et nous commençons à apprivoiser ces nombres. Pourtant il reste une ombre au tableau. Ce nombre $i$ existe-t-il ? Nous avons envie de dire oui puisque nous n'avons pas trouvé de contradiction – comme un nombre réel dont le carré serait strictement positif. On peut très bien manipuler des objets mathématiques sans qu'ils existent !

Le but de ce problème est de donner une construction des nombres complexes.

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels. On pose

$$\mathbf{M}(a,b) := \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad ; \qquad \mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}(0,1) \quad ; \qquad \mathbf{O} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}(0,0).$$

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $\mathbf{M}$ carrées d'ordre 2 telles qu'il existe deux nombres réels $a$ et $b$ pour lesquels $\mathbf{M} = \mathbf{M}(a, b)$.

On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des matrices $\mathbf{M}$ carrées d'ordre 2 telles qu'il existe un nombres réel $a$ pour lequel $\mathbf{M} = \mathbf{M}(a, 0)$.

1. Vérifier que $\mathbf{I}_2 \in \mathcal{C}$.
2. Démontrer que $J^2 = -\mathbf{I}_2$.
3. Soit $a$ et $b$ deux nombres réels. Vérifier que $-\mathbf{M}(a, b) \in \mathcal{C}$.
4. Soit $(a, b) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que $\mathbf{M}(a, b)$ est inversible et que son inverse $\mathbf{M}(a, b)^{-1}$ appartient à $\mathcal{C}$.
5. Soit $a$, $b$, $a'$ et $b'$ quatre nombres réels.
   (a) Vérifier que si $\mathbf{M}(a, b) = \mathbf{M}(a', b')$ alors $(a, b) = (a', b')$.
   (b) Démontrer que $\mathbf{M}(a, b) + \mathbf{M}(a', b')$ et $\mathbf{M}(a, b) \times \mathbf{M}(a', b')$ appartiennent à $\mathcal{C}$.
   (c) Démontrer que $\mathbf{M}(a, b) \times \mathbf{M}(a', b') = \mathbf{M}(a', b') \times \mathbf{M}(a, b)$.
   Autrement dit la multiplication est commutative dans $\mathcal{C}$.
6. Soit $a$, $b$, $a'$, $b'$, $a''$ et $b''$ six nombres réels.
   Démontrer que $(\mathbf{M}(a, b) \times \mathbf{M}(a', b')) \times \mathbf{M}(a'', b'') = \mathbf{M}(a', b') \times (\mathbf{M}(a, b) \times \mathbf{M}(a'', b''))$.
7. Dans quelle mesure a-t-on construit l'ensemble des nombres complexes ? Dans cette construction, comment se traduit le conjugué d'un nombre complexe ?

## 13.7 Corrigé

**Correction 20**

1. On a $\mathbf{I}_2 = \mathbf{M}(1, 0)$.
2. Vérification aisée.
3. On a $-\mathbf{M}(a, b) = \mathbf{M}(-a-, b) \in \mathcal{C}$.
4. On a $\det \mathbf{M}(a, b) = a^2 + b^2 \neq 0$, donc $\mathbf{M}(a, b)$ est inversible d'après le théorème 7.
   De plus le théorème précise que son inverse $\mathbf{M}(a, b)^{-1}$ est : $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \mathbf{M}\left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right) \in \mathcal{C}$.
5. Soit $a$, $b$, $a'$ et $b'$ quatre nombres réels.
   (a) Cela résulte de la définition 5.
   (b) On vérifie facilement que $\mathbf{M}(a, b) + \mathbf{M}(a', b') = \mathbf{M}(a + a', b + b')$ et moins facilement que $\mathbf{M}(a, b) \times \mathbf{M}(a', b') = \mathbf{M}(aa' - bb', ab' + a'b)$.
   (c) La proposition est claire puisque $a$ et $a'$ d'une part et $b$ et $b'$ d'autre part jouent des rôles symétriques.
   Autrement dit, $aa' - bb' = a'a - b'b$ et $ab' + a'b = a'b + ab'$.
6. La proposition est une conséquence du théorème d'« associativité » (théorème 4).
   Ainsi on peut affirmer que le produit des matrices dans $\mathcal{C}$ est associatif.
7. Dans la mesure où on assimile les éléments de $\mathcal{R}$ aux réels, via la bijection $x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbf{M}(x, 0) \in \mathcal{R}$, c'est-à-dire que l'on écrit $x := \mathbf{M}(x, 0)$, on peut abréger, pour tous réels $a$ et $b$ :

$$\mathbf{M}(a, b) = \mathbf{M}(a, 0) + \mathbf{M}(b, 0) \times \mathbf{M}(0, 1) = a + b \times \mathbf{J}.$$

On abrège $\mathbf{J}$ en $i$, et on obtient l'écriture $\mathbf{M}(a,b) = a + bi$. L'égalité $J^2 = -\mathbf{I}_2$ devient l'égalité familière $i^2 = -1$.

Dans ces conditions, le conjugué de $\mathbf{M}(a,b) \in \mathcal{C}$ est $\mathbf{M}(a,-b) \in \mathcal{C}$.

# Table des matières du cours de seconde


**1 De quoi parlons-nous ? 1**

1.1 Le vrai et le faux . . . 2
1.2 La négation . . . 2
1.3 La conjonction . . . 3
1.4 La disjonction . . . 3
1.5 Négation de « et » et de « ou » . . . 4
1.6 L'implication . . . 4
1.7 Équivalence . . . 8
1.8 Égalités . . . 8
1.9 Quantification . . . 9
1.10 Raisonnement par l'absurde . . . 11
1.11 Exercices . . . 12
1.12 Solutions . . . 16

**2 Programmation 25**

2.1 Qu'est-ce qu'un algorithme ? . . . 26
2.2 Types . . . 27
2.3 Entrées/Sorties . . . 30
2.4 Tests . . . 30
2.5 Boucles . . . 30
2.6 Fonctions . . . 31
2.7 Un exemple . . . 32
2.8 Exercices . . . 33
2.9 Solutions . . . 34

**3 Ensembles 37**

3.1 Le langage des ensembles . . . 38
3.2 Quantification . . . 42
3.3 Représentations graphiques . . . 46
3.4 Exercices . . . 46
3.5 Solutions . . . 47

**4 Événements** **49**
4.1 Les événements, l'univers et le reste . . . 50
4.2 Représentation des événements . . . 52
4.3 « ET » et « OU » . . . 53
4.4 Exercices . . . 56
4.5 Solutions . . . 58

**5 Nombres réels** **61**
5.1 Au commencement était le nombre . . . 62
5.2 Ordre . . . 62
5.3 Intervalles . . . 65
5.4 Propriétés des nombres réels . . . 67
5.5 Valeur absolue . . . 71
5.6 Valeurs approchées . . . 73
5.7 Calcul littéral . . . 74
5.8 Équations . . . 84
5.9 Racine carrée . . . 87
5.10 Quiz . . . 92
5.11 Méthodes pour factoriser . . . 96
5.12 Exercices . . . 104
5.13 Solutions . . . 112
5.14 Travaux dirigés . . . 125
5.15 Problèmes . . . 130
5.16 Corrigés . . . 131

**6 Géométrie plane** **135**
6.1 Aires des figures de référence . . . 136
6.2 Symétries . . . 138
6.3 Angles géométriques . . . 141
6.4 Quadrilatères . . . 144
6.5 Parallélogrammes . . . 144
6.6 Théorèmes fondamentaux . . . 149
6.7 Angles inscrits, angles au centre . . . 154
6.8 Triangles . . . 155
6.9 Repérage dans le plan . . . 163
6.10 Intersection d'une droite et d'un cercle . . . 166
6.11 Quiz . . . 166
6.12 Exercices . . . 168
6.13 Solutions . . . 182
6.14 Problèmes . . . 204
6.15 Corrigés . . . 207

**7 Vecteurs** **215**
7.1 Direction et sens . . . 216
7.2 Vecteurs du plan . . . 217
7.3 Coordonnées cartésiennes dans un repère . . . 225
7.4 Méthodes . . . 230

7.5 Quiz . . . 235
7.6 Exercices . . . 236
7.7 Solutions . . . 248
7.8 Problèmes . . . 267
7.9 Corrigés . . . 270

**8 Statistiques** **279**
8.1 Vocabulaire . . . 280
8.2 Représentations graphiques . . . 281
8.3 Paramètres d'une série statistique . . . 284
8.4 Représentations graphiques, suite . . . 296
8.5 Quiz . . . 301
8.6 Corrigé . . . 302
8.7 Exercices . . . 302
8.8 Solutions . . . 304
8.9 Travaux dirigés . . . 309

**9 Suites** **313**
9.1 Définitions . . . 314
9.2 Suites usuelles . . . 318
9.3 Représentation graphique . . . 323
9.4 Sens de variation . . . 324
9.5 Exercices . . . 327
9.6 Solutions . . . 330
9.7 Problème . . . 333
9.8 Corrigé . . . 333

**10 Le langage des fonctions** **335**
10.1 Approche intuitive . . . 336
10.2 Fonctions numériques . . . 338
10.3 Antécédents . . . 344
10.4 Variations . . . 346
10.5 Extremums . . . 348
10.6 Symétries . . . 349
10.7 Composition . . . 351
10.8 Injection, surjection . . . 352
10.9 Suites récurrentes . . . 355
10.10 Récursivité . . . 356
10.11 Quiz . . . 358
10.12 Exercices . . . 360
10.13 Solutions . . . 364
10.14 Problèmes . . . 370
10.15 Solutions . . . 371
10.16 Travaux dirigés . . . 373

**11 Droites** **379**
11.1 Vecteurs directeurs . . . 380
11.2 Équations de droites . . . 380
11.3 Équations réduites . . . 382
11.4 Systèmes et intersection de deux droites . . . 385
11.5 Dans un repère orthonormé . . . 387
11.6 Fonctions affines . . . 388
11.7 Méthodes . . . 390
11.8 Quiz . . . 394
11.9 Corrigé . . . 394
11.10 Exercices . . . 395
11.11 Solutions . . . 399
11.12 Travaux dirigés . . . 412

**12 Calculs des probabilités** **417**
12.1 Probabilité sur un ensemble fini . . . 418
12.2 Équiprobabilité . . . 418
12.3 « ET » et « OU » . . . 419
12.4 Notion de probabilité conditionnelle . . . 421
12.5 Méthodes . . . 427
12.6 Quiz . . . 434
12.7 Exercices . . . 435
12.8 Solutions . . . 442
12.9 Travaux dirigés . . . 455

# Table des matières du cours de terminale


**1 Barycentres** **1**

1.1 Définitions et premières propriétés . . . 2
1.2 Propriétés du barycentre . . . 5
1.3 Fonction scalaire de Leibniz. Lignes de niveau . . . 7
1.4 Exercices . . . 10
1.5 Solutions . . . 14
1.6 Travaux dirigés . . . 18

**2 Arithmétique** **23**

2.1 Relation de divisibilité, division euclidienne . . . 24
2.2 PGCD, théorèmes d'Euclide et de Bézout . . . 29
2.3 Nombres premiers . . . 37
2.4 Cryptage RSA . . . 41
2.5 Résidus quadratiques . . . 44
2.6 Exercices . . . 51
2.7 Solutions . . . 66
2.8 Problèmes . . . 86

**3 Intégration : théorie élémentaire** **99**

3.1 Sommes de Riemann . . . 100
3.2 Définition de l'intégrale d'une fonction . . . 103
3.3 Propriétés élémentaires de l'intégrale . . . 109
3.4 Le théorème fondamental de l'analyse . . . 111
3.5 Méthodes de calcul des primitives et des intégrales . . . 114
3.6 Calcul d'aires . . . 117
3.7 Intégrabilité de certaines fonctions . . . 118
3.8 Quiz . . . 125
3.9 Exercices : Primitives . . . 129
3.10 Solutions . . . 130
3.11 Exercices : Intégrales . . . 133
3.12 Solutions . . . 138
3.13 Problèmes . . . 149
3.14 Travaux dirigés . . . 155

**4 Fonctions convexes** **157**
4.1 Définition . . . 158
4.2 Inégalités de convexité . . . 159
4.3 Fonctions convexes dérivables . . . 163
4.4 Exemple . . . 165
4.5 Quiz . . . 165
4.6 Exercices . . . 166
4.7 Solutions . . . 168
4.8 Problèmes . . . 172
4.9 Corrections . . . 174

**5 Courbes et limites complexes** **183**
5.1 Limites des suites à termes complexes . . . 183
5.2 Limites de fonctions à valeurs complexes . . . 186
5.3 Dérivées de fonctions à valeurs complexes . . . 187
5.4 Courbes planes . . . 189
5.5 Travaux dirigés . . . 193
5.6 Exercices . . . 195
5.7 Solutions . . . 196

**6 Exponentielle et logarithme** **203**
6.1 Une nouvelle fonction . . . 204
6.2 Propriétés . . . 207
6.3 Logarithme népérien . . . 211
6.4 Retour vers l'intégration . . . 215
6.5 Les autres fonctions exponentielles . . . 219
6.6 Exponentielle complexe . . . 223
6.7 Vrai ou Faux ? . . . 231
6.8 Exercices . . . 233
6.9 Solutions . . . 245
6.10 Travaux dirigés . . . 273
6.11 Problèmes . . . 278

**7 Triangles semblables** **301**
7.1 Similitudes directes . . . 302
7.2 Similitudes indirectes . . . 307
7.3 Caractérisation des similitudes . . . 311
7.4 Cas de similitude des triangles . . . 313
7.5 Cas d'égalité des triangles . . . 315
7.6 Exercices . . . 317
7.7 Solutions . . . 333

**8 Coniques** **361**
8.1 Définitions et premières propriétés . . . 362
8.2 Étude de la parabole : e = 1 . . . 364
8.3 Étude de l'ellipse : 0 < e < 1 . . . 367
8.4 Étude de l'hyperbole : 1 < e . . . 372

8.5 Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole . . . 377
8.6 Courbes algébriques dans le plan . . . 379
8.7 Intersection d'un cône et d'un plan . . . 384
8.8 Exercices . . . 386
8.9 Solutions . . . 398

**9 Équations différentielles** **431**
9.1 Définitions et premières propriétés. . . . 432
9.2 Équations différentielles du premier ordre homogènes : $y' - ay = 0$ . . . 432
9.3 Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$ . . . 433
9.4 Exercices . . . 439
9.5 Solutions . . . 441
9.6 Problème . . . 446
9.7 Corrigé . . . 447
9.8 Travaux dirigés . . . 449

**A Principes des dénombrements** **457**
A.1 Cardinaux et bijections . . . 458
A.2 Opérations sur les ensembles finis . . . 463

**B Fonctions trigonométriques** **467**
B.1 Enroulement complexe . . . 468
B.2 Nouvelles définitions . . . 468
B.3 Équation fonctionnelle . . . 470
B.4 Dérivabilité . . . 472
B.5 Le cercle trigonométrique . . . 473
B.6 Le retour du sinus et du cosinus . . . 474

# Index


Adhérent, 101
Affixe
    d'un point, 496
    d'un vecteur, 496
Archimède
    suites d', 91
Argument, 502
Arrangement, 474
Axe
    d'une parabole, 176
    radical, 286

Base directe, 343
Bernoulli
    épreuve de, 426
    inégalité, 59
    loi de, 426
Bibliothèque, 182
Binôme, 400
Binomiale
    loi, 427
Boule, 318

Canonique
    forme, 173
Centre radical, 286
Cercle
    grand, 348
    trigonométrique, 212
Chasles
    relation de, 215
Chiasme, 470
Coefficient
    binomial, 429
    d'un polynôme, 398
Combinaison
    $p$-combinaison, 472
Complexe, 492
    plan, 495
Conjugué d'un complexe, 496
Coordonnées
    homogènes, 587
Coplanaire, 319
Cosinus
    loi des, 281
Cote, 330

Degré
    d'un polynôme, 401
Déterminant d'une matrice $2 \times 2$, 582
Développement décimal, 91
Dichotomie, 113
Discriminant, 178
Distance
    à un plan, 344
    d'un point à une droite, 279
Droite
    normale, 339
    perpendiculaire à un plan, 337
    réelle, 495
Droites
    confondues, 320
    orthogonales, 336
    parallèles, 320
    perpendiculaires, 336

Écart-type, 422
Échec, 426
Écriture
    algébrique, 495
    trigonométrique, 502
Équation de plan, 340
Espérance, 422
Exhiber, 175

Fonction

arctangente, 235
dérivée, 134
dérivable, 131
dérivable à droite, 133
inverse, 96
polynôme, 398
Forme indéterminée, 58
Formule
de Binet, 8
de Moivre, 508
de Pascal, 432
du binôme, 493

Homothétie, 513
Horner
schéma de, 404

Image, 214
d'un complexe, 496
Inégalité
de Bernoulli, 59
de Cauchy-Schwarz, 276
de Fejér-Jackson, 262
de Huygens, 413
de Nesbitt, 162
des accroissements finis, 142
triangulaire, 277
Intérieur
point, 139
Intervalle de fluctuation, 435
Inverse
d'un complexe, 500
d'une matrice, 582

Jacobi
identité de, 294, 483
Jaguar casqué, 56

Lemme, 433
Limite
à droite, 105
à gauche, 105
Liste
$p$-liste, 473

Majorant, 44
Matrice, 573
carrée, 573
diagonale, 574
identité, 574
inverse, 582
inversible, 582
transposée, 575
triangulaire inférieure, 574
triangulaire supérieure, 574
Méridien, 349
Mesure
d'un angle, 215
principale, 216
Méthode
de Cardan, 416
de Descartes, 416
Minorant, 44
Module, 498
Monôme, 400
Moustique, 42

Nombre
complexe, 492
conjugué, 496
d'or, 117
dérivé, 131
dérivé à droite, 133
dérivé à gauche, 133
réel, 495
Norme, 324, 332

Origine, 330

Parabole, 176
Parallèle, 349
Parallélogramme
de l'espace, 324
Paramètre, 331, 427
Paramétrique
représentation, 331
Partition, 470
Perspective, 315
Pizza, 317
Plan
complexe, 495
médiateur, 338
perpendiculaire à une droite, 337
Plans
confondus, 322

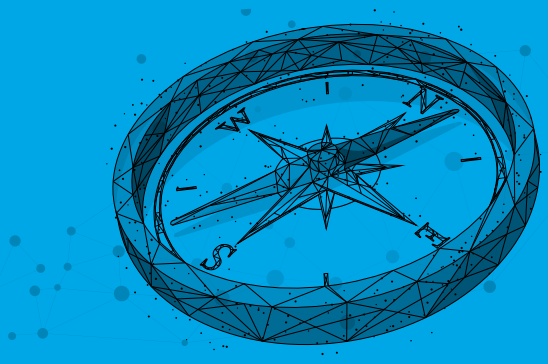
parallèles, 322
sécants, 322
strictement parallèles, 322
Point
fixe, 116
intérieur, 139
Polynôme, 398
du second degré, 172
Principe du vestiaire, 583
Produit
scalaire, 270, 334
vectoriel, 341
Projeté, 330
orthogonal, 338
Puissance
d'un point par rapport à un cercle, 286
d'un point par rapport à une sphère, 349
Pyramide, 317

Racine, 178
évidente, 183
$n$-ième, 507
carrée, 504
d'un polynôme, 402
double, 178
Radian, 215
Radical
axe, 286
centre, 286
Récurrence
à deux pas, 7
double, 7
Règle de la chaîne, 138
Relation de Chasles, 215
Repère
de l'espace, 330
orthogonal, 330
orthonormé, 330
orthonormal, 330
Rotation, 214, 514

Saut d'une fonction monotone, 143
Sens
direct, 212
indirect, 212
négatif, 212
positif, 212
rétrograde, 212
trigonométrique, 212
Sommet d'une parabole, 176
Sphère, 318
Succès, 426
Suite
bornée, 44
de Fibonacci, 8, 18, 591
divergente, 51
majorée, 44
minorée, 44
Suites
adjacentes, 61
Symbole de Kronecker, 574

Tétraèdre, 317
Théorème
de Faulhaber, 483
de Ptolemée, 310
de Rolle, 140
de Rolle & Rolle, 402
des accroissements finis, 141
Tinky Winky, 332
Translation de l'espace, 324
Triangle de Pascal, 432
Trinôme, 400
du second degré, 172

Variable aléatoire, 420
Variable muette, 99
Variance, 422
Vecteur
de l'espace, 324
normé, 214
normal, 277, 339
unitaire, 214
Vecteurs orthogonaux, 270, 334
Vélomoteur, 130



# Mathématiques d'excellence

**Niveau 1re**

Ce livre – le deuxième volume d'une série de trois – a été conçu au départ pour des personnes soucieuses d'avoir des **bases solides en mathématiques**. Il pourrait tout à fait servir, également, de manuel de mathématiques offrant un cours exigeant pour des élèves de **niveau première** qui veulent aborder des études supérieures en ayant un **raisonnement rigoureux et de qualité**.

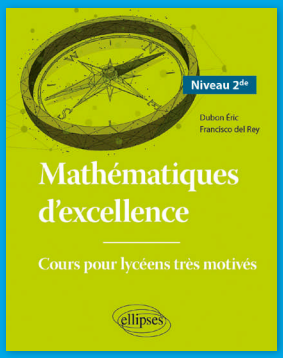
En évitant autant que possible les deux écueils principaux – le manque de rigueur et le manque d'applications – les auteurs proposent un cours susceptible d'intéresser les enseignants souhaitant compléter leur cours comme les étudiants préparant le capes de mathématiques.

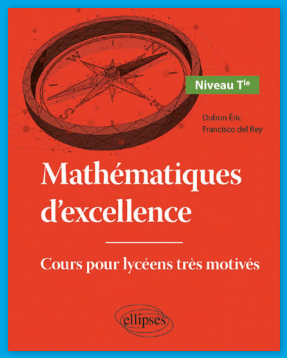
Grâce à des **exercices variés et corrigés** pour la plupart, il pourra servir également aux élèves préparant le **Concours Général des Lycées**.

Le contenu se veut le plus exhaustif possible en présentant **tous les thèmes nécessaires à la bonne compréhension des mathématiques** et c'est pour cette raison que tous les **résultats importants** sont **démontrés**. Le lecteur va ici – au prix d'un effort certain – se familiariser avec les mathématiques du lycée, mais avec une approche bien différente !

Le cours, les problèmes, les exercices et même leurs solutions demandent du soin et de l'attention. Le lecteur devra acquérir une aisance en calcul disparue actuellement.

Ce deuxième tome est consacré à l'**analyse**, à la **géométrie dans l'espace** ainsi qu'aux **nombres complexes**.




www.editions-ellipses.fr
9 782340 048034