Mathématiques

Première année Bac sciences mathématiques

Tome 1

Programme Marocain-BIOF

12 Cours bien détaillés

12 Résumés bien précis

12 Séries d'exercices

6 Devoirs libre

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Version, 03/09/2024

Table des matières

1 : Notions de logique.....03
2 : Fonctions numériques.....17
Devoir Libre 1.....23
3 : Les ensembles.....24
4 : Les applications.....29
Devoir Libre 2.....34
5 : Barycentre.....35
6 : Analytique du produit scalaire dans le plan.....46
Devoir Libre 3.....63
7 : Suites numériques.....64
8 : Trigonométrie.....73
Devoir Libre 4.....82
9 : L'imite d'une fonction.....83
10 : Rotation.....90
Devoir Libre 5.....99
11 : Dérivation.....100
12 : Etude de fonctions.....110
Devoir Libre 6.....121

Dans Tome 2 (Prochainement) :

13 : Arithmétique.....
14 : Dénombrement.....
Devoir Libre 7.....
15 : Vecteurs et analytique de l'espace.....
16 : Produit scalaire dans l'espace.....
17 : Produit vectoriel.....
Devoir Libre 8.....

1

Notions de logique



1) Proposition –Fonction propositionnelle

A retenir 1 :

1/On appelle proposition (ou assertion) tout énoncé mathématique ayant un sens et qui pouvant être soit vrai soit faux (il ne peut être à la fois vrai et faux).

2/On appelle fonction propositionnelle tout énoncé mathématique qui contient une variable (ou plus) appartenant à un ensemble donné, et qui devient une proposition chaque fois qu'on remplace cette variable par un élément de cet ensemble.

Remarques 1 :

1/*/ Si une proposition est vraie, alors on dit que sa valeur de vérité est vraie et on la note par : V ou 1

***/ Si une proposition est fausse, alors on dit que sa valeur de vérité est fausse et on la note par : F ou 0.**

***Le tableau suivant est appelé le tableau de vérité de la proposition P :**

P
V
F

2/ Une proposition est souvent notée par les lettres : P, Q, R...

3/ Selon le nombre des variables, les fonctions proportionnelles sont notées :

$P(x)$, $Q(x;y)$, $R(x;y;z)$...

Exemple 1 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 " 1 **est un entier relatif** "

P_2 " $\sqrt{9+16}=\sqrt{9}+\sqrt{16}$ "

P_3 " $\frac{2}{5}$ **est un nombre décimale**"

P_4 " 2 **est le seul nombre pair et premier** "

P_5 " **Un carrée est un parallélogramme** "



Application 1 : Déterminer la nature des énoncés mathématiques suivants :

P " $\pi=3,14$ "

Q " $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2\in\mathbb{N}$ "

$A(x)$ " $x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$ "

$B(x)$ " $x\in\mathbb{R},\ x^2\geq x$ "

R " $\sqrt{2}$ **est un nombre rationnel** "

$C(n)$ " $n\in\mathbb{N}^*,\ n^2+n+1$ **est un nombre premier** "

$D(n;m)$ " $(n;m)\in\mathbb{N}^2,\ n+m=10$ "

2) Quantificateurs

Activité

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $x^2-x-6<0$

2) En déduire la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 " **Quel que soit** x **appartient à** $]-2;3[$: $x^2-x-6<0$ "

P_2 " **Il existe au moins un nombre** x **appartient à** $\mathbb{R}$ **tel que** $x^2-x-6<0$ "

P_3 " **Quel que soit** x **appartient à** $\mathbb{R}$: $x^2-x-6<0$ "

P_4 " **Il existe au moins un nombre** x **appartient à** $]-2;3[$ **tel que** $x^2-x-6<0$ "

P_5 " **Il existe un unique nombre réel** x **tel que** $x^2-x-6=0$ "

A retenir 2 :

1/ L'expression " quel que soit " s'appelle le quantificateur universel et se note $\forall$

2/ L'expression " il existe au moins " s'appelle quantificateur existentiel et se note $\exists$

3/ L'expression " il existe un unique " s'appelle quantificateur existentiel de l'unicité et se note $\exists!$

4/ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par un ou plusieurs quantificateurs on obtient une proposition.

Remarque 2 :

Exemples des propositions liés aux fonctions propositionnelles $P(x)$ et $P(x;y)$

1/ $(\forall x \in E)\ P(x)$	**5/** $(\forall x \in E)(\exists y \in F)\ P(x;y)$
2/ $(\exists x \in E)\ P(x)$	**6/** $(\forall x \in E)(\forall y \in F)\ P(x;y)$
3/ $(\exists! x \in E)\ P(x)$	**7/** $(\exists x \in E)(\exists y \in F)\ P(x;y)$
4/ $(\exists x \in E)(\forall y \in F)\ P(x;y)$	

Exemple 2 : Ecrire les propositions suivantes avec des quantificateurs et des connecteurs logiques puis déterminer leurs vérités :

***P* : L'équation $x^2+x+1=0$ admet au moins une solution réelle.**

***Q* : Tous les nombres naturels sont positifs.**

***R* : Certains nombres réels ne sont pas rationnels.**

***S* : L'équation $2x+1=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$**

***T* : Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel m on a : $m=2n$**

***U* : Pour tout nombre réel x, il existe un réel y tel que $y>x$**

***V* : Il existe un réel y tel que pour tout nombre réel x : $y>x$**

Remarques 3 :

1/ On peut permuter des quantificateurs de même nature.

2/ On ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

3/ */ Quand on écrit $(\exists x \in E)(\forall y \in F)\ P(x;y)$ l'élément x est fourni une bonne fois pour toutes avant les y est donc constant quand y varie.

***/ Quand on écrit $(\forall y \in F)(\exists x \in E)\ P(x;y)$ l'élément x est fourni après chaque y il dépend de y et peut donc varier quand y varie.**

Exemple : Voici une phrase vraie « Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone », bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fausse : « Il existe un numéro, pour toutes les personnes ». Ce serait le même numéro pour tout le monde !

4/ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5/ $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow [(\exists (a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) : x=\frac{a}{b}$ **et** $a \wedge b = 1]$.

Exemple 3 :

Etudier la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 : $(\exists! x \in \mathbb{R})\ x^2=4$	P_5 : $(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\ n-m=12$
P_2 : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2+x+1>0$	P_6 : $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\ n-m=12$
P_3 : $(\exists x \in \mathbb{N})\ 3x-1=0$	P_7 : $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})\ n-m=12$
P_4 : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \lvert x\rvert = x$	P_8 : $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})\ n-m=12$



Application 2 :

Exercice 1 de la série 1.

3) Négation d'une proposition

A retenir 3 :

1/ La négation d'une proposition P **est la proposition qui vraie si** P **est fausse ; et qui est fausse si** P **est vraie on la note :** $\overline{P}$

2/ Le tableau suivant est appelé le tableau de vérité de la négation :

P	$\overline{P}$
V	**F**
F	**V**

3/ La négation des symboles usuels :

Symbole	$\forall$	$\exists$	$=$	$\in$	$\leq$	$\geq$	$<$	$>$
Négation	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$\notin$	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$



4/ Négation d'une proposition quantifiée :

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x d'un ensemble non vide E

*/ La négation de la proposition $(\forall x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\exists x \in E)\ \overline{P(x)}$

*/ La négation de la proposition $(\exists x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\forall x \in E)\ \overline{P(x)}$

Exemple 4 : Donner la valeur de vérité des propositions suivantes et déterminer leur négation :

$P_1 : \sqrt{1+\sqrt{3}} = 2$; $P_2 : \pi > 3,14$; $P_3 : \sqrt{11} \in [3;4]$; $P_4 : 3 < \sqrt{11} < 4$

Exemple 5 : Donner la négation des propositions suivantes :

P "$(\forall x \in \mathbb{R})\ |x| > x$ " ; Q "$(\exists x \in \mathbb{Z})\ \sqrt{x} = x^2$ " ; R "$(\exists m \in \mathbb{Z})(\forall n \in \mathbb{N})\ : mn = m+n$"

Exemple 6 : Déterminer la valeur de vérité et la négation des propositions suivantes :

$P_1 :\ (\exists x \in \mathbb{N})\ x^2 = 36$	$P_4 :\ (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ y = \frac{x}{2}$
$P_2 :\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq x$	$P_5 :\ (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ y = \sqrt{x}$
$P_3 :\ (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\ y = 2x$	$P_6 :\ (\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\ y = \sqrt{x}$

Application 3 : Exercices 2 et 3 de la série 1

4) Opérations sur deux propositions

4-1 Conjonction - Disjonction

A retenir 4 :

1/ La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps on la note $(P\ et\ Q)$ ou $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

2/ La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note $(P\ ou\ Q)$ ou $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

Exemple 7 :

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 $2<7$ **et** $10=5$

P_2 $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ **et** $|-4|=4$

P_3 $2<7$ **ou** $10=5$

P_4 $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ **ou** $|-4|=4$

P_5 $2<-7$ **ou** $10=5$

P_6 $8\leq 8$ **ou** $9\leq 10$



Exemple 8 :

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1) $(\exists x\in\mathbb{R})\ x+1=0\ et\ (\exists x\in\mathbb{R})\ x-2=0$

2) $(\exists x\in\mathbb{R})\ x+1=0\ et\ x-2=0$

3) $(\forall x\in\mathbb{R})\ x\leq 0\ ou\ (\forall x\in\mathbb{R})\ x\geq 0$

4) $(\forall x\in\mathbb{R})\ x\leq 0\ ou\ x\geq 0$

Remarques 4 :

1/ On dit que deux propositions sont équivalent s'ils ont la même valeur de vérité.

2/ Soient P **et** Q **deux propositions :**

Les propositions :

***/** $P\wedge Q$ **et** $Q\wedge P$ **sont équivalent, on dit que la conjonction logique est commutative.**

***/** $P\wedge Q$ **et** $Q\wedge P$ **sont équivalent, on dit que la disjonction logique est commutative.**

***/** $(P\wedge Q)\wedge R$ **et** $P\wedge(Q\wedge R)$ **sont équivalent, on dit que la conjonction logique est associative**

***/** $(P\vee Q)\vee R$ **et** $P\vee(Q\vee R)$ **sont équivalent, on dit que la disjonction logique est associative.**

3/ Soit $P(x)$ **et** $Q(x)$ **deux fonctions propositionnelles d'une variable** x **d'un ensemble non vide** E **.**

***/ Les propositions suivantes sont équivalentes :**

$\left[(\forall x\in E)\ P(x)\ et\ Q(x)\right]$ **et** $\left[(\forall x\in\mathbb{R})\ P(x)\ et\ (\forall x\in\mathbb{R})\ Q(x)\right]$

$\left[(\exists x\in E)\ P(x)\ ou\ Q(x)\right]$ **et** $\left[(\exists x\in\mathbb{R})\ P(x)\ ou\ (\exists x\in\mathbb{R})\ Q(x)\right]$

***/ Les propositions suivantes ne sont pas équivalentes :**

$\left[(\forall x\in E)P(x)\ ou\ Q(x)\right]$ **et** $\left[(\forall x\in\mathbb{R})\ P(x)\ ou\ (\forall x\in\mathbb{R})\ Q(x)\right]$

$\left[(\exists x\in E)\ P(x)\ et\ Q(x)\right]$ **et** $\left[(\exists x\in\mathbb{R})\ P(x)\ et\ (\exists x\in\mathbb{R})\ Q(x)\right]$

4-2 Implication

A retenir 5 :

Soient P **et** Q **deux propositions :**

La proposition $\left(\overline{P}\ ou\ Q\right)$ **qui est fausse seulement si** P **est vraie et** Q **est fausse s'appelle l'implication de deux propositions** P **et** Q **(dans cet ordre) se note** $P\Rightarrow Q$

P	Q	$P\Rightarrow Q$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Remarques 5 :

1/L'implication : $P \Rightarrow Q$ **se lit :**

***/** P **implique** Q**.**

***/ Si on a** P **alors** Q**.**

***/** P **est une condition suffisante pour avoir** Q**.**

***/** Q **est une condition nécessaire pour** P**.**

2/Les propositions $P \Rightarrow Q$ **et** $Q \Rightarrow P$ **n'ont pas la même table de vérité, alors l'implication logique n'est pas commutative.**

3/ L'implication $Q \Rightarrow P$ **s'appelle l'implication réciproque de l'implication** $P \Rightarrow Q$

Exemple 9 : Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) 5 **un nombre impair** $\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\ \ x^2 \geq 0$

2) $\pi \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \neq 2$

3) $1 = 2 \Rightarrow 3 = 4$

4) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{(-3)^2} = -3$

4-3 Equivalence

A retenir 6 :

L'équivalence de deux propositions P **et** Q**, est la proposition qu'on note** $P \Leftrightarrow Q$ **et elle est vraie seulement si** P **et** Q **ont la même valeur de vérité.**

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V



Remarques 6 :

1/L'équivalence : $P \Leftrightarrow Q$ **se lit :**

***/** P **équivalent à** Q**.**

***/** P **si et seulement si** Q**.**

***/** $P \Rightarrow Q$ **et** $Q \Rightarrow P$

2/Les propositions $P \Leftrightarrow Q$ **et** $Q \Leftrightarrow P$ **ont la même table de vérité, alors l'équivalence logique est commutative.**

Exemple 10 :

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

$P: |-4| = 4 \Leftrightarrow 3 \leq 12$; $Q: 1 + \sqrt{6}^2 = 7 \Leftrightarrow 12 = 2^2 \times 3^2$; $R: \pi < 3 \Leftrightarrow 5 \leq \sqrt{2}$

5) Lois logiques

Activité : Dresser le tableau de vérité de la proposition : $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

A retenir 7 :

Une loi logique est une proposition formée de plusieurs propositions P, Q,..... **liée entre elles par des connecteurs logiques et qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions** P, Q,.....

Remarque 7 :

Pour montrer qu'une proposition est une loi logique il suffit de dresser sa table de vérité.

Exemple 11 :

P, Q et R sont des propositions. Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1) $P \Rightarrow (\overline{P} \Rightarrow Q)$

2) $\left[P ou (Q et R)\right] \Leftrightarrow \left[(P ou Q) et (P ou R)\right]$

Solution :

1) (Voir le cahier)

2) Nous avons :

P	Q	R	$Q et R$	$P ou Q$	$P ou R$	$P ou (Q et R)$	$(P ou Q) et (P ou R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Donc l'équivalence $\left[P ou (Q et R)\right] \Leftrightarrow \left[(P ou Q) et (P ou R)\right]$ **est vraie dans tous les cas, d'où la proposition** $\left[P ou (Q et R)\right] \Leftrightarrow \left[(P ou Q) et (P ou R)\right]$ **est une loi logique.**

Application 5 : **Exercice 5 de la série 1.**

Remarque 8 : **Quelles que soit les propositions** P, Q **et** R, **les propositions suivantes sont des lois logiques :**

1/ Lois logiques usuelles

$\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} ou Q)$

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)]$

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$

2/ La commutativité

$(P et Q) \Leftrightarrow (Q et P)$

$(P ou Q) \Leftrightarrow (Q ou P)$

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$

3/ L'associativité

$\left[(P\ et\ Q)\ et\ R\right] \Leftrightarrow \left[P\ et\ (Q\ et\ R)\right]$

$\left[(P\ ou\ Q)\ ou\ R\right] \Leftrightarrow \left[P\ ou\ (Q\ ou\ R)\right]$

4/ La distributivité

$\left[P et (Q ou R)\right] \Leftrightarrow \left[(P et Q) ou (P et R)\right]$

$\left[P ou (Q et R)\right] \Leftrightarrow \left[(P ou Q) et (P ou R)\right]$

5/ Lois de Morgan

$\overline{(P et Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} ou \overline{Q})$ **(On dit que la négation de** $(P et Q)$ **est** $(\overline{P} ou \overline{Q})$**)**

$\overline{(P ou Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} et \overline{Q})$ **(On dit que la négation de** $(P ou Q)$ **est** $(\overline{P} et \overline{Q})$**)**

6/ Négation de l'implication

$\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P et\ \overline{Q})$ **(On dit que la négation de** $(P \Rightarrow Q)$ **est** $(P et\ \overline{Q})$**)**

7/ Négation de l''équivalence

$\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow \overline{[(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)]}$

$\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow Q)$

$\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow \overline{Q})$



Exemple 12 : **Soit** $a, b, c \in \mathbb{R}$ **, déterminer la négation des propositions suivantes :**

$P: x > 2 \Rightarrow x \leq 5$ $\quad$ $Q: a = b\ ou\ b = c$ $\quad$ $R: x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ $\quad$ $S: a < b\ \ et\ \ b < c$

Remarque 9 : la négation de $\exists!$

Soit $P(x)$ **une fonction propositionnelle d'une variable** x **d'un ensemble non vide** E

La proposition $Q: (\exists! x \in E)\ P(x)$ **signifie que** $\left[\left((\exists x \in E)\ P(x)\right) et \left((\forall x; y \in E)\ P(x) = P(y) \Rightarrow x = y\right)\right]$

Donc la négation de la proposition Q **est** $\overline{Q}: \left[\left((\forall x \in E)\ \overline{P(x)}\right) ou \left((\exists x; y \in E)\ P(x) = P(y) et\ x \neq y\right)\right]$

Application 6 : **Exercice 6 de la série 1.**

6) Raisonnements mathématiques

6-1 Raisonnement par contre-exemple

A retenir 8 :

Pour montrer qu'une proposition de type $(\forall x \in E)\ P(x)$ est fausse, il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse.

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par contre-exemple.



Exemple 13 : Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})$ **:** $x^2 + x - 2 = 0$

2) $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right)$**:** $3x + 5y = 8$

3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$**:** $\dfrac{4xy}{4+y^2} > 1$

Application 7 : Exercice 7 de la série 1.

6-2 Raisonnement direct (déductif)

A retenir 9 :

Pour démontrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on utilise l'un des méthodes suivantes :

1/ On montre que $P \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow Q$ à l'aide des opérations est des propriétés mathématiques.

$$\left[(P \Rightarrow R)\ et\ (R \Rightarrow Q)\right] \Rightarrow \left[P \Rightarrow Q\right]$$

2/ On suppose P est vraie et on montre que Q est vraie.

Ce type de démonstration est appelé raisonnement direct ou raisonnement déductif ou raisonnement par des implications successives.

Exemples 14 :

1) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$**:** $|x| \le 2 \Rightarrow |3x+1| \le 7$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$**:** $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \ge 2$

Application 8 : Exercice 8 de la série 1.

6-3 Raisonnement par contraposée

A retenir 10 :

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$$

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par contraposée.

Remarques 10 :

1/ Il faut bien distinguer entre la négation, la contraposé et la réciproque.

- ***/ la négation de $P \Rightarrow Q$ est $(P\ et\ \overline{Q})$**
- ***/ la réciproque de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$**
- ***/ la contraposé de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$**

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $n^2\ est\ pair \Rightarrow n\ est\ pair$

Exemples 15 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $n^2\ est\ pair \Rightarrow n\ est\ pair$

2) Soit a et b deux nombres réels tel que $a \neq -b$. Montrer que : $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$

3) Soit x et y deux nombres réels. Montrer que : $\left(x \neq y \text{ et } x+y \neq -1\right) \Rightarrow x^2 + x \neq y^2 + y$

Application 9 : Exercice 9 de la série 1.

6-4 Raisonnement par équivalence

A retenir 11 :

1/ Pour démontrer qu'une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on utilise l'un des méthodes suivantes :

***/ On montre que $P \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow Q$ à l'aide des opérations est des propriétés mathématiques.**

➢ **Ce type de démonstration est appelé raisonnement par des équivalences successives.**

***/ On montre que les deux implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies.**

$$\left[(P \Leftrightarrow R) \ et \ (R \Leftrightarrow Q)\right] \Rightarrow \left[P \Leftrightarrow Q\right]$$

2/ Pour démontrer qu'une proposition P est vraie il suffit de montrer que $P \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow Q$ à l'aide des opérations est des propriétés mathématiques où Q une proposition vraie.

Exemples 16 :

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \ |x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$

2) Montrer que $(\forall x \in [-2;2]) \ \sqrt{4-x^2} < x + 2\sqrt{2}$

3) Montrer que $(\forall x \in [1;+\infty[)(\forall y \in [4;+\infty[) \ \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = 2$ **et** $y = 8$



Remarque 11 : Raisonnement par double implication

Pour prouver une équivalence de type $P \Leftrightarrow Q$, il suffit de prouver les doubles implications :

$P \Rightarrow Q$ **et** $Q \Rightarrow P$

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par double implication.

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \left[(P \Rightarrow Q) et (Q \Rightarrow P)\right]$$

Application 10 : Exercice 10 de la série 1.

6-5 Raisonnement par disjonction des cas

A retenir 12 :

Pour montrer qu'une proposition de type $(\forall x \in E) \ P(x)$ est vraie, il suffit de montrer que $P(x)$ est vraie dans tous les cas de la variable x dans E .

$$\left[(R \Rightarrow P) \ et \ (Q \Rightarrow P)\right] \Rightarrow \left[(R \ ou \ Q) \Rightarrow P\right]$$

Ce type de démonstration est appelé raisonnement par disjonction des cas.

Exemples 17 :

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ x^2 - x + 1 \geq |x-1|$

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ n(n+1)$ **est pair.**

Application 11 : Exercice 11 de la série 1.

6-6 Raisonnement par l'absurde

A retenir 13 :

Pour montrer qu'une proposition est vraie par le raisonnement par l'absurde on suppose que $\overline{P}$ est vraie (C'est-à-dire que P est fausse) et on cherche à trouver une contradiction.

$$\left[(\overline{P} \Rightarrow Q) \ et \ (\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})\right] \Rightarrow P$$

Exemples 18 :

1) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$**, on pose :** $A = \frac{n+3}{n+5}$**, montrer que** $A \neq 1$

3) Soit ABC **un triangle et** $a > 0$ **tel que** $BC = 3a$, $CA = 2a$ **et** $AB = 4a$. **Montrer que** ABC **n'est pas rectangle.**

Solution :

1) On suppose que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ donc $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}^*$et $a\wedge b=1$ (d'après la remarque 3 page 5)

Donc $2=\frac{a^2}{b^2}$, c'est-à-dire $a^2=2b^2$ (I)

Donc a^2 est pair. On déduit que a est pair (d'après la remarque 10 page 10)

Donc$(\exists k\in\mathbb{N})$ $a=2k$, on remplace dans (I) on obtient $b^2=2k^2$ donc b^2 est pair.

Par suite b est pair (d'après la remarque 9), or a est pair, alors $a\wedge b\neq 1$, contradiction !

2) et 3) (Voir le cahier)

Application 12 :

Exercice 12 de la série 1.

6-7 Raisonnement par récurrence

A retenir 14 : **Principe de récurrence**

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle sur $\mathbb{N}$ et $n_0\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{cases}P(n_0)\\(\forall n\geq n_0)\quad P(n)\Rightarrow P(n+1)\end{cases}\Rightarrow(\forall n\geq n_0)\quad P(n)$$

Pour montrer que la proposition $(\forall n\geq n_0)$ $P(n)$ est vraie, on suive les étapes suivantes :

- **Initialisation : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.**
- **Hérédité : Soit $n\geq n_0$, on suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie.**

Exemples 19 :

1) Montrer que la proposition : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ est vraie.

2) Soit $a\in\mathbb{R}^+$, montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $(1+a)^n\geq 1+na$

3) Montrer que :$(\forall n\in\mathbb{N})$: 7 divise $2^{3n+2}-4$

Remarque 11 :

Le symbole sigma « $\sum$ » permet de simplifier l'écriture d'une somme qui contient plusieurs termes :

Exemples :

$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n}k$$

$$1+3+5+.....+2n+1=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$$



Application 13 :

Exercice 13 de la série 1.

Résumé 1 : Notions de logique

Proposition-fonction propositionnelle

1/ Une proposition (ou assertion) est tout énoncé mathématique ayant un sens et qui pouvant être soit vrai soit faux (il ne peut être à la fois vrai et faux).

2/ On appelle fonction propositionnelle tout énoncé mathématique qui contient une variable (ou plus) appartenant à un ensemble donné, et qui devient une proposition chaque fois qu'on remplace cette variable par un élément de cet ensemble.

3/ Si on lie la variable d'une fonction propositionnelle par un ou plusieurs quantificateurs on obtient une proposition.

Opérations sur les propositions

		conjonction	*disjonction*	*implication*	*équivalence*
P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Négation

1/ Tableau de vérité de la négation :

P	$\overline{P}$
V	**F**
F	**V**

2/ La négation des symboles usuels :

Symbole	$\forall$	$\exists$	$=$	$\in$	$\leq$	$\geq$	$<$	$>$
Négation	$\exists$	$\forall$	$\neq$	$\notin$	$>$	$<$	$\geq$	$\leq$

3/ Négation d'une proposition quantifiée :

A/ La négation de la proposition $(\forall x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\exists x \in E)\ \overline{P(x)}$

B/ La négation de la proposition $(\exists x \in E)\ P(x)$ est la proposition $(\forall x \in E)\ \overline{P(x)}$

4/Négation de la conjonction, disjonction, implication et équivalence :

A/ La négation de $(P\ et\ Q)$ est $\left(\overline{P}\ ou\ \overline{Q}\right)$

B/ La négation de $(P\ ou\ Q)$ est $\left(\overline{P}\ et\ \overline{Q}\right)$

C/ La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $\left(P\ et\ \overline{Q}\right)$

D/ La négation de $(P \Leftrightarrow Q)$ est $\left(\overline{P} \Leftrightarrow Q\right)$

(ou bien $\left(P \Leftrightarrow \overline{Q}\right)$ ou bien $\overline{[(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)]}$)

Loi logique

1/ Une loi logique est une proposition formée de plusieurs propositions P, Q,..... liée entre elles par des connecteurs logiques et qui est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité des propositions P, Q,.....

2/ Pour montrer qu'une proposition est une loi logique il suffit de dresser sa table de vérité

Raisonnements mathématiques

Question	**Raisonnement convenable**	**Méthode d' utilisation**
Montrer que $P \Leftrightarrow Q$	Raisonnement par équivalence (ou par double implication)	Voir à retenir 11 (page 11)
Montrer que $P \Rightarrow Q$	Type 1 : Si P et Q ne contiens pas le symbole $\neq$, on utilise souvent le rais.déductif.	Voir à retenir 9 (page 10)
	Type 2 : Si P et Q contiens le symbole $\neq$, on utilise souvent le rais. par contraposée	Voir à retenir 10 (page 10)
Montrer que P	Type 1 : Si P contient la valeur absolue, on utilise souvent le rais. par disjonction des cas. On utilise aussi ce type de raisonnement dans les équations et inéquations.	Voir à retenir 12 (page 11)
	Type 2 : Si P contient l' un des mots : n' appartient pas, n' admet pas, n' est pas..., on utilise souvent le rais. par l' absurde.	Voir à retenir 13 (page 11)
	Type 2 : Si P est une proposition ni de type 1 ni de type 2, on utilise souvent le rais. par équivalence	Voir à retenir 11 (page 11)
Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ P(n)$ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ P(n)$	On utilise souvent le rais. par récurrence	Voir à retenir 14 (page 12)
Montrer que $(\forall x \in E)\ P(x)$ est fausse	On utilise le rais. par contre-exemple	Voir à retenir 8 (page 10)

Il existe d'autres raisonnements mathématiques (de base) comme le calcul de la différence de deux expressions (Comparaison) ou la simplification d'une expression pour obtient une autre (Egalité de deux expressions).

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSMF	**Série 1** **Notions de logique**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1

Ecrire en utilisant les quantificateurs les propositions suivantes :

P : Pour tout entier naturel n il existe un entier naturel m tel que $n+m=10$

Q : Il existe un réel M tel que pour toute x de $\mathbb{R}$ on a : $x \le M$

R : Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation : $x^2 = 2$

S : Entre deux réels il existe toujours un rationnel.

Exercice 2

Déterminer la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sqrt{x^2} = x$

P_2 : $(\forall x \ge 0)\ x^2 - x - 2 \ge 0$

P_3 : $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ y < -x$

P_4 : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ y < -x$

P_5 : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)\ x^2 + y^2 \ne 1$

P_6 : $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ y \ne sin(x)$

Exercice 3

Donner la négation de chacune des phrases suivantes :

P : Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.

Q : Certains nombres entiers sont pairs.

R : Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

S : Tout entier naturel divisible par 3 est divisible par 9

Exercice 4

Déterminer la négation des propositions suivantes :

P : $(\forall x \in \mathbb{R})(x = 0\ ou\ x < 50)$

Q : $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 < 54\ et\ x \in \mathbb{Z})$

R : $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\ x < y - 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 \ge x^2 + y^2$

Exercice 5 : Loi logique

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1) $\overline{(P\ et\ Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\ ou\ \overline{Q})$

2) $\overline{(P\ ou\ Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}\ et\ \overline{Q})$

3) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P}\ ou\ Q)$

4) $\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \Leftrightarrow Q)$

5) $\overline{(P \Leftrightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow \overline{Q})$

6) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$

7) $[P \Rightarrow (Q\ \ ou\ \ R)] \Leftrightarrow [(P\ \ et\ \ \overline{Q}) \Rightarrow R]$



Exercice 6

$a, b, c \in \mathbb{R}$, déterminer la négation des propositions suivantes :

R_1 : $a > b \Rightarrow a \le c$

R_2 : $a = b = c$

R_3 : $a \le b \le c$

R_4 : $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ -1 \le x+y \le 2 \Rightarrow |x+y| \le 2$

R_5 : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)\ x - y = 1 \Leftrightarrow x > 1$

R_6 : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x \ge 0\ \ ou\ \ x \le 0$

R_7 : $(\forall a; b \in \mathbb{R}^*)(\exists x \in \mathbb{R})\ cos(x) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ et\ sin(x) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exercice 7 : Rais. par contre-exemple

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1) Tous les nombres premiers est impair.

2) Tous les nombres impairs est premier.

3) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n^2 + n + 1$ est premier.

4) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ 3x + 5y = 8$

5) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ |x| + |y| = |x+y|$

6) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ cos(x+y) = cos(x) + cos(y)$

7) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ sin(x+y) = sin(x) + sin(y)$

8) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ x^2 - xy + y^2 = 0$

Exercice 8 : Rais. ditect

Montrer que :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ |x| \le 2 \Rightarrow |3x+1| \le 7$

2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x > 0 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} \ge 2$

3) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x > 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 > 0$

4) $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)\ \ 1 + xy = x + y \Rightarrow (x = 1\ \ ou\ \ y = 1)$

5) $(a \in \mathbb{Q}\ et\ b \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{Q}$

6) $(\forall a \in \mathbb{R}^*)(\forall b; c \in \mathbb{R})\ ac \le 0 \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R})\ ax^2 + bx + c = 0$

Exercice 9 : Rais. par contraposée

1) $(\forall x; y \in \mathbb{R})\ \ x \ne y \Rightarrow (x+1)(y-1) \ne (x-1)(y+1)$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \ x \ne 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \ne 1 + \dfrac{x}{2}$

3) $(\forall x; y \in \mathbb{R})\ \ (x \ne y\ et\ xy \ne 1) \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1} \ne \dfrac{y}{y^2+y+1}$

4) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ x^2 + x - 2 \le 0 \Rightarrow x \le 1$

5) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n^2\ est\ impair\ \Rightarrow n\ est\ impair$

6) $(\forall x; y \in \mathbb{R})\ \ (x \ne y\ et\ x + y \ne 2) \Rightarrow x^2 - 2x \ne y^2 - 2y$

7) $(\forall x; y; z \in \mathbb{R})\ \ x + y \le z\ \Rightarrow \left(x \le \dfrac{1}{2}z\ \ ou\ \ y \le \dfrac{1}{2}z\right)$

Exercice 10 : Rais. par équivalence

1) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}_+)\ \sqrt{2x+2}=1+\sqrt{x}\Leftrightarrow x=1$

2) Montrer que $(\forall x\in[1;+\infty[)\ \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}\le\dfrac{1}{2}$

3) Montrer que : $(\forall x;y\in\mathbb{R})\ |x|+|y|=|x+y|\Leftrightarrow xy\ge 0$

4) Montrer que

$(\forall x;y\in\mathbb{R})\ \ x^2+y^2=0\Leftrightarrow(x=0\ \ et\ \ y=0)$

Exercice 11 : Rais. par disjonction des cas

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2+|x-4|+2=0$

2) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ \sqrt{x^2+1}+x>0$

3) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ n(n+1)$ est pair.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2-5x+6}>x+4$

5) Soit $m\in\mathbb{R}^*$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$mx^2-(m+1)x+m-1=0$

Exercice 12 : Rais. par l'absurde

1) Soit ABC un triangle et $a>0$ tel que

$BC=3a,\ CA=2a$ et $AB=4a$.

Montrer que ABC n'est pas rectangle.

2) Soit $a;b\in\mathbb{Q}$ montrer que :

$$a-b\sqrt{2}=0\Rightarrow(a=0\ \ et\ \ b=0)$$

3) Soit $a;b\in\mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$ab=1\Rightarrow(a\le 1\ \ ou\ \ b\le 1)$$

4) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\notin\mathbb{Q}$

Exercice 13 : Rais. par récurrence

Montrer que :

1) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}3^k=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

3) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4) $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$

5) $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ 2^n>n$

6) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $3^n\ge 2n+1$

7) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\times(k+1)}=\frac{n}{n+1}$ (par deux méthodes)

8) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{3}{4}-\frac{(-1)^{n+1}}{4\times 3^n}$

9) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

$$1\times 2+2\times 3+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

10) $(\forall n\in\mathbb{N})$: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\ge 1+\dfrac{n}{2}$

11) 9 divise 10^n-1 pour tout $n\in\mathbb{N}$

Exercice 14

1) Montrer que 0 n'est pas une racine du polynôme

$P(x)=x^4+5x^7+5x^2-8x-1$

2) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*):\sqrt{1+x^2}\ne 1+\dfrac{x^2}{2}$

3) $x,\ y$ et z des nombres réels tel que : $x+y+z>1$.

Montrer que $x>\dfrac{1}{3}$ ou $y>\dfrac{1}{3}$ ou $z>\dfrac{1}{3}$

4) x et y deux nombres réels positifs non nuls.

Montrer que : $\left|\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right|\ne 1\Rightarrow\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\ne\sqrt{5}$

5) Sachant que $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$, montrer que $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\notin\mathbb{Q}$.

Exercice 15

1) Montrer que l'assertion $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ x+\dfrac{1}{x}\ge 2$ est fausse.

2) Soit a et b deux réels positifs

a- Montrer que : $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}<\dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}}\Leftrightarrow a<b$

b- Montrer que : $a\sqrt{a^2+1}=b\sqrt{b^2+1}\Leftrightarrow a=b$

3) Montrer que

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2:|2x^2+5xy+3y^2|\le 3\Rightarrow|x+y|\le\sqrt{3}$ ou $|2x+3y|\le\sqrt{3}$

4) a- Montrer que tout entier naturel impair n s'écrit sous la forme $n=4k+1$ ou $n=4k+3$ avec $k\in\mathbb{N}$.

b- En déduire que si l'entier n^2-1 n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

5) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ \sqrt{n^2+4n+2}\notin\mathbb{N}$.

Exercice 16

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: « 17 divise $2^{6n+3}+3^{4n+2}$ »

2) $x,y,a,b\in\mathbb{R}^*$, montrer $ax+by=1\Rightarrow\dfrac{1}{x^2+y^2}\le a^2+b^2$

3) Soit $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $a^2+b^2=1$.

Montrer que : $|a+b|\le\sqrt{2}$

4) Soient a, b et c des réels.

a) Montrer que : $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$

B) Montrer que : $(a^3+a=b^3+b)\Leftrightarrow a=b$

Exercice 17

Sans utiliser le tableau de vérité montrer que la proposition $\left[P \Rightarrow (Q \ \ ou \ \ R)\right] \Leftrightarrow \left[\left(P \ \ et \ \ \overline{Q}\right) \Rightarrow R\right]$ est une loi logique.

Exercice 18

Montrer que :

1) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$: « $3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 25 »

2) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$ « $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ est divisible par 23 »

3) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$: « $11 \ divise \ 3^{2n} + 2^{6n-5}$ »

4) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$: $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)....\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \le 3 - \frac{1}{n}$

5) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$: $\frac{3n}{2n+1} \le 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}$

7) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

8) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$: $\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$

9) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$

10) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$: $\sum_{k=1}^{n} (k+1)k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

Exercice 19

1) Montrer par récurrence :

$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)\left(\exists (a_n ; b_n) \in \mathbb{N}^2\right)$: $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$

2) Déterminer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3) Calculer $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$.

Exercice 20 : Inégalités d'olympiade

1) $a,b \in \mathbb{R}$, M.q : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}$

2) $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, M.q : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $x^{n+1} + y^{n+1} \ge x^n y + x y^n$

Exercice 21

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $\frac{x^n + y^n}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$

2) Supposons que $x + y = 1$

a- Montrer que $xy \le \frac{1}{4}$ et $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $x^n + y^n \ge \frac{1}{2^{n-1}}$

b- En déduire que $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ $\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\left(1+\frac{1}{y^n}\right) \ge \left(1+2^n\right)^2$

Exercice 22

1) Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $\sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$

2) Déduire que si $a, \ b \in \mathbb{N}$ tels que $a > b > 0$,

alors : $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 23

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$

2) Soient a et b deux nombres de $\mathbb{Q}$ tels que $a \neq b$

Montrer que : $\frac{a+b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \notin \mathbb{Q}$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\sqrt{n^2 + 5n + 8} \notin \mathbb{N}$

4) Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + 8a + 3}}} \notin \mathbb{N}$$

Exercice 24

Soient a, b et c des réels.

1) Montrer que :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c \Rightarrow (|b| < c \ et \ |a| < c)$$

2) Montrer que :

$$(|b| < c \ et \ |a| < c) \Rightarrow \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c$$

Exercice 25

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $\left(\forall x \in [-1;1]\right)$ $\left|ax^2 + bx + c\right| \le 1$.

1) Montrer que $|c| \le 1$, $|a+b+c| \le 1$ et $|a-b+c| \le 1$.

2) En déduire que $|a+c| \le 1$ et $|a| \le 2$.

3) Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \le 5$.

Exercice 26

Soit a, b et c des entiers relatifs distincts de 1.

Montrer que $\begin{cases} a+b \le ab \\ b+c \le bc \end{cases} \Rightarrow c + a \le ca$.

Exercice 27

Soit $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ tel que $ab < c$. Montrer que $a + b \le c$

Exercice 28

Soit a, b et c des mesures des côtés d'un triangle tel que $a+b+c=1$. Montrer que $\frac{1}{3} \le a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$.

Exercice 29

Soit ABC un triangle isocèle de sommet B.

I et J deux points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que : $(IJ) // (BC)$

Soit K un point du segment $[BC]$

Montrer que $(JK) // (AB) \Leftrightarrow AI = BK$

Exercice 30 : Inégalités d'olympiade

Soit $x_1, \ x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$

1) Montrer que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $\left(\sum_{k=1}^{n} x_i\right)^n \ge n^n \times \prod_{k=1}^{n} x_i$

2) En déduire que $\left(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+\right)$ $(x+y+z)^3 \ge 27xyz$

3) En déduire que $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge \prod_{k=1}^{n} k$

2

Fonctions numériques



Résumé 2 : Fonctions numériques

Soit f une fonction numérique, D_f son ensemble de définition, $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit x et y deux éléments distincts de D_f, on pose $T(x;y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ (Le taux de variation de f entre x et y).

I un intervalle de D_f.

1/ Ensemble de définition d'une fonction

- $D_f=\{\text{les réels } x \text{ pour lesquels on peut calculer } f(x)\}$
- Si f est un polynôme alors $D_f=\mathbb{R}$
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ alors $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ Q(x)\neq 0\}$
- Si $f(x)=\sqrt{P(x)}$ alors $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ P(x)\geq 0\}$

2/ Parité d'une fonction

2-1 Définition :

- f est paire $\Leftrightarrow\begin{cases}D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0\\(\forall x\in D_f)\ f(-x)=f(x)\end{cases}$
- f est impaire $\Leftrightarrow\begin{cases}D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0\\(\forall x\in D_f)\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$

2-2 Propriété :

- f est paire $\Leftrightarrow\begin{cases}(\mathcal{C}_f) \text{ est symétrique par rapport}\\\text{à l'axe des ordonnés}\end{cases}$
- f est impaire $\Leftrightarrow\begin{cases}(\mathcal{C}_f) \text{ est symétrique par rapport}\\\text{à l'origine du repère}\end{cases}$

3/ Variations d'une fonction

3-1 Définition :

- f est croissante sur $I\Leftrightarrow\left[(\forall x;y\in I):\ x>y\Rightarrow f(x)\geq f(y)\right]$
- f est décroissante sur $I\Leftrightarrow\left[(\forall x;y\in I):\ x>y\Rightarrow f(x)\leq f(y)\right]$
- f est constante sur $I\Leftrightarrow\left[(\forall x;y\in I):\ x>y\Rightarrow f(x)=f(y)\right]$

3-2 Propriété :

- f est croissante sur $I\Leftrightarrow(\forall x,y\in I):\ T(x;y)\geq 0$
- f est décroissante sur $I\Leftrightarrow(\forall x,y\in I):\ T(x;y)\leq 0)$
- f est constante sur $I\Leftrightarrow((\forall x,y\in I):\ T(x;y)=0$

3-3 Variations et parité :

Soit I et J deux intervalles symétriques par rapport à 0 de D_f

- Si f est paire, alors :

f est croissante sur $I\Leftrightarrow f$ est décroissante sur J

f est décroissante sur $I\Leftrightarrow f$ est croissante sur J

- Si f est impaire, alors :

f est croissante sur $I\Leftrightarrow f$ est croissante sur J

f est décroissante sur $I\Leftrightarrow f$ est décroissante sur J

4/Fonction majorée, minorée, bornée et extremums

4-1 Définition : Soit $M,m\in\mathbb{R}$

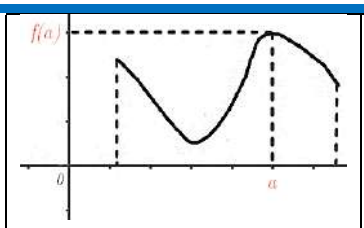
- f est majorée par M sur $I\Leftrightarrow(\forall x\in I)\ f(x)\leq M$
- f est minorée par m sur $I\Leftrightarrow(\forall x\in I)\ f(x)\geq m$
- f est bornée sur $I\Leftrightarrow f$ est majorée et minorée sur I

4-2 Propriété :

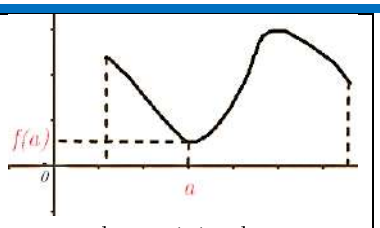
- f est bornée sur $I\Leftrightarrow(\exists m,M\in\mathbb{R})\ (\forall x\in I)\ \ m\leq f(x)\leq M$
- f est bornée sur $I\Leftrightarrow(\exists M\in\mathbb{R})\ (\forall x\in I)\ \ |f(x)|\leq M$

4-3 Définition :

- $f(a)$ valeur maximale de f sur $I\Leftrightarrow(\forall x\in I)\ f(x)\leq f(a)$
- $f(a)$ valeur minimale de f sur $I\Leftrightarrow(\forall x\in I)\ f(x)\geq f(a)$



$f(a)$ valeur maximale



$f(a)$ valeur minimale

- $f(a)$ est un extremum de $f\Leftrightarrow\begin{cases}f(a)\ valeur\ maximale\ de\ f\\\quad ou\\f(a)\ valeur\ minimale\ de\ f\end{cases}$

4-4 Propriété :

- M valeur maximale de f sur I

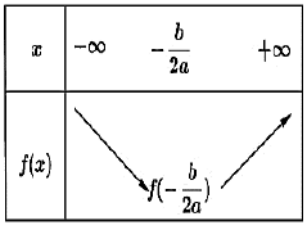
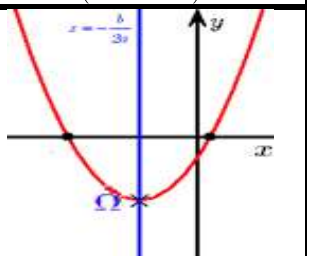
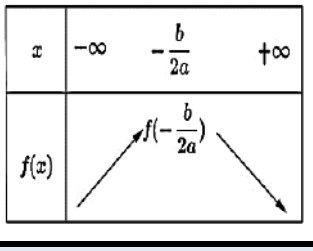
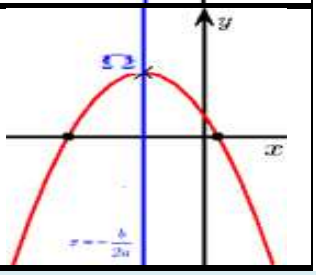
$\Leftrightarrow\begin{cases}f\ est\ majorée\ par\ M\ sur\ I\\l'équation\ f(x)=M\ admet\ au\ moins\ une\ solution\ dans\ I\end{cases}$

- m valeur minimale de f sur I

$\Leftrightarrow\begin{cases}f\ est\ minorée\ par\ m\ sur\ I\\l'équation\ f(x)=m\ admet\ au\ moins\ une\ solution\ dans\ I\end{cases}$

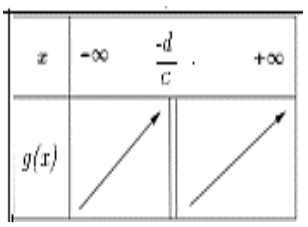
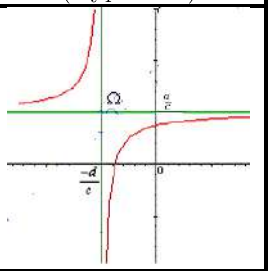
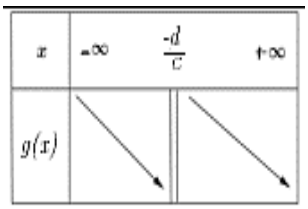
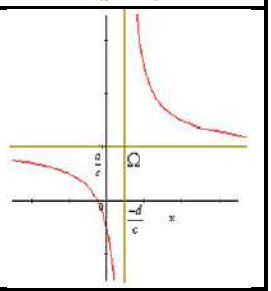
5/Etude de la fonction f tel que $f(x)=ax^2+bx+c$

- f est appelé : fonction polynomiale de deuxième degré.
- $D_f=\mathbb{R}$
- $(\mathcal{C}_f)$ est une parabole de **sommet** $\Omega\left(-\dfrac{b}{2a};f(-\dfrac{b}{2a})\right)$ et d'**axe de symétrie** la droite $x=-\dfrac{b}{2a}$

	Tableau de variations de f	La courbe $(\mathcal{C}_f)$ (Parabole)
$a>0$		
$a<0$		

6/Etude de la fonction g tel que $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

- g est appelé : fonction homographique
- $D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$
- $(\mathcal{C}_g)$ est une hyperbole de **centre** $\Omega_2\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'**asymptotes** les droites $x=\dfrac{-d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

	Tableau de variations de g	La courbe $(\mathcal{C}_g)$ (Hyperbole)
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$		
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$		

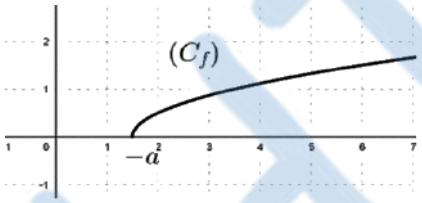
7/Résolution graphique des équations et inéquations

L'équation	$f(x)=m$	$f(x)=g(x)$
Les abscisses des points d'intersection de	$(\mathcal{C}_f)$ avec la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ avec $(\mathcal{C}_g)$
L'inéquation	$f(x)>m$	$f(x)>g(x)$
Sont les intervalles dont	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite $y=m$	$(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_g)$

8/Etude de fonctions $f(x)=\sqrt{x+a}$, $g(x)=ax^3$, $h(x)=f(x)+c$ et $k(x)=c\times f(x)$

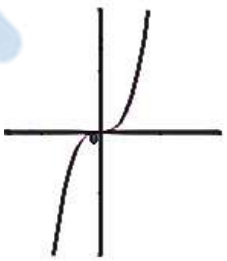
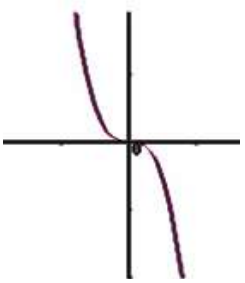
8-1 Etude de la fonction $f(x)=\sqrt{x+a}$

- $D_f=[-a;+\infty[$
- f est strictement croissante sur D_f
- La courbe $(\mathcal{C}_f)$



8-2 Etude de la fonction $g(x)=ax^3$

- $D_g=\mathbb{R}$
- g est une fonction impaire

	Les variations de g	La courbe $(\mathcal{C}_g)$
$a>0$	g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	
$a<0$	g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	

8-3 Etude de la fonction $h(x)=f(x)+c$

- $D_h=D_f$; • La fonction h est de mêmes variations que f

8-4 Etude de la fonction $k(x)=c\times f(x)$

- $D_k=D_f$
- Si $c>0$ alors la fonction k est de mêmes variations que f
- Si $c<0$ alors k et f sont de variations opposées.

9/ Image d'un intervalle par une fonction

Soit I un intervalle

- $f(I)=\{f(x)\ /\ x\in I\}$
- Si f admet une valeur minimale $V_{\min}$ sur I et une valeur maximale $V_{\max}$ sur I, alors $f(I)=[V_{\min};V_{\max}]$
- On peut déterminer $f(I)$ à partir de $(\mathcal{C}_f)$ ou à partir du tableau de variations de f ou par une méthode algébrique.
- $(\forall x\in I)\ f(x)\in J \Leftrightarrow f(I)=J$

10/ Composé de deux fonctions

- $(\forall x\in D_{gof})\quad gof(x)=g(f(x))$
- $D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}/\ x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\}$
- $D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}/\ x\in D_g \text{ et } g(x)\in D_f\}$

11/ Variations de gof

- $\begin{cases} f \text{ est croissante sur } I \\ g \text{ est croissante sur } f(I) \end{cases} \Rightarrow gof \text{ est croissante sur } I$

12/Fonction périodique

13-1 Définition : Soit $T\in\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases} f \text{ est périodique} \\ \text{de période } T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x\in D_f)\ (x+T)\in D_f \\ (\forall x\in D_f)\ f(x+T)=f(x) \end{cases}$$

13-2 Exemples classiques :

- Cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période : $T=2\pi$ car : $\begin{cases} (\forall x\in\mathbb{R})\ (x+2\pi)\in\mathbb{R} \\ (\forall x\in\mathbb{R})\ cos(x+2\pi)=cos(x) \end{cases}$

et $\begin{cases} (\forall x\in\mathbb{R})\ (x+2\pi)\in\mathbb{R} \\ (\forall x\in\mathbb{R})\ sin(x+2\pi)=sin(x) \end{cases}$

- La fonction tangente est périodique de période : $T=\pi$

car : $\begin{cases} (\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\})\ (x+\pi)\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\} \\ (\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\})\ tan(x+\pi)=tan(x) \end{cases}$

13/ Fonction partie entière

- Soit $x\in\mathbb{R}$. la partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On le note par $E(x)$ ou $[x]$
- $(\forall x\in\mathbb{R})\quad E(x)\le x<1+E(x)$
- $(\forall x\in\mathbb{Z})\quad E(x)=x$
- $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{Z})\quad E(x+n)=x+n$
- $(\forall x\in\mathbb{R})\quad E(x)=m\Leftrightarrow\ m\le x<1+m$ et $m\in\mathbb{Z}$

14/Remarques :

- $f=g\Leftrightarrow\begin{cases} D_f=D_g \\ (\forall x\in D_f)\ f(x)=g(x) \end{cases}$ (Égalité de deux fonctions)
- $M(x;y)\in(\mathcal{C}_f)\Leftrightarrow x\in D_f$ et $f(x)=y$

Intersection avec les axes du repère :

- Les points $M(x;0)$ tel que x est une solution de l'équation $f(x)=0$ sont les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
- Le point $B(0;f(0))$ est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.

Exemples

Exemple 1 : Ensemble de définition d'une fonction

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

$f(x)=\sqrt{x-1}$ $f(x)=\frac{1}{x-1}$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\frac{2x+3}{x^2-x-2}$ $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$

$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$ $f(x)=\sqrt{7-x}$ $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Exemple 2 : Parité d'une fonction

Etudié la parité de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=x^2+1$ $f(x)=x+\frac{1}{4x}$ $f(x)=|x|+5$

$f(x)=x^2+3x+1$ $f(x)=\sqrt{x-3}$ $f(x)=cos(x)$

$f(x)=sin(x)$ $f(x)=tan(x)$

Exemple 3 : Variations d'une fonction

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x+\frac{1}{4x}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Vérifier que f est impaire.

3) Montrer que pour tout x et y distincts de D_f on a :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=1-\frac{1}{4xy}$$

4) Etudier les variations de f sur : $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\left]0;\frac{1}{2}\right]$.

5) En déduire les variations de f sur : $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et $\left[-\frac{1}{2};0\right[$.

6) Dresser le tableau de variations de f.

Exemple 4 : Fonction majorée-valeur minimale

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x)=x+\frac{1}{x}$ et $g(x)=x^2+6x+5$.

1) Montrer que f est majorée par -2 sur $\mathbb{R}^*_-$.

2) Vérifier que -4 est la valeur minimale de g sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5 : Etude de la fonction $x\mapsto ax^2+bx+c$

On considère la fonction f définie par : $f(x)=-x^2+2x+3$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Calculer $f(-1)$ et $f(1)$ puis déduire que f est ni paire, ni impaire.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

5) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé.

Exemple 6 : Etude d'une fonction homographique

On considère la fonction g définie par : $g(x)=\frac{x+7}{x+1}$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g.

2) Dresser le tableau de variations de g.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

4) Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère orthonormé.

Exemple 7 : Résolution graphique et algébrique des équations et des inéquations

1) On considère la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f de l'exemple 5 : $f(x)=-x^2+2x+3$

a) Résoudre graphiquement puis algébriquement les équations : $f(x)=3$ et $f(x)=0$

b) Résoudre graphiquement puis algébriquement les inéquations : $f(x)\le 3$ et $f(x)>0$

2) a) Représenter $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère, où g est la fonction de l'exemple 6 : $g(x)=\frac{x+7}{x+1}$.

b) Résoudre graphiquement : $f(x)=g(x)$ et $f(x)\ge g(x)$

3) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\})\ f(x)-g(x)=\frac{-(x-1)(x-2)(x+2)}{x+1}$

4) Résoudre algébriquement : $f(x)=g(x)$ et $f(x)\ge g(x)$

(On pourra remarquer que $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$).

Exemple 8 : Eude des fonctions $x\mapsto\sqrt{x+a}$ et $x\mapsto ax^3$

Dresser le tableau de variations des fonctions f et g définies par : $f(x)=\sqrt{x+2}$ et $g(x)=2x^3$.

Exemple 9 : Image d'un intervalle par une fonction

1) On considère la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f de l'exemple 5.

Déterminer par deux méthodes l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas suivants :

$I=[1;2]$; $I=[-2;4]$; $I=[2;+\infty[$; $I=\mathbb{R}$.

2) Déterminer par deux méthodes l'image de l'intervalle $I=[2;+\infty[$ par la fonction g de l'exemple 6.

Exemple 10 : Composé de deux fonctions

$f(x)=x^2+x$; $g(x)=2x-1$; $h(x)=(2x-1)^2+1$; $k(x)=sin(2x+1)$

1) Déterminer gof et fog puis conclure.

2) Ecrire la fonction h sous forme de composé de deux fonctions.

3) Ecrire la fonction k sous forme de composé de deux fonctions.

Exemple 11 : Variations de composé de deux fonctions

On pose : $f(x)=-x^2+2x+3$ et $g(x)=\frac{x+7}{x+1}$ (Les fonctions des exemples 5 et 6) et la fonction h définie par : $h(x)=\frac{-x^2+2x+10}{-x^2+2x+4}$

1) Déterminer D_{gof} sans déterminer l'expression de gof.

2) Montrer que $\left(\forall x\in D_{gof}\right)\ h(x)=gof(x)$.

3) En déduire que $h=gof$.

4) En déduire les variations de la fonction h sur $I=[1;2]$ (On pourra utiliser les résultats des exemples 5, 6 et 10).

Exemple 12 : Fonction périodique

On considère la fonction f définie par : $f(x)=cos(3x+5)$

Montrer que f est périodique de période : $T=\frac{2\pi}{3}$.

Exemple 13 : La fonction partie entière

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\mapsto E(x)$ la fonction partie entière.

1) Calculer $E(\pi), E(\sqrt{2}), E(\frac{n}{n+1})$ et $E(\frac{n+1}{n})$

2) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad x-1<E(x)\le x$

3) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{Z})\quad E(x+n)=E(x)+n$

4) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists r\in[0;1[)\quad x=E(x)+r$

Exercice 1 :

Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

$f(x)=\sqrt{x-5}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{|x^2-1|-3}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-|x-1|}}$

$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{1-E(x)}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x-E(x)}$

Exercice 2 :

A) On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2+2x-3$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f, on a : $T=x+y+2$

4) Etudier les variations de f sur $[-1;+\infty[$ et $]-\infty;-1]$

5) Dresser le tableau de variations de f et déduire les extrémums de f

6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ puis le construire.

B) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\frac{4x}{|x|+1}$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g

2) Montrer que g est impaire.

3) Montrer que $g(x)=\frac{4x}{x+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

4) En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}^+$

5) Dresser le tableau de variations de g sur D_g

6) Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

7) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $(x^2+2x-3)(|x|+1)=4x$

Exercice 3 :

Soit f et g les fonctions définies par :

$f(x)=\dfrac{5\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ et $g(x)=\dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}$

1) Montrer que f est bornée par -2 et 5 sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\ \left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\le 1$

b) En déduire que g est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f(x)=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$

1) Montrer que f est majorée par 2 et minorée par $-\dfrac{1}{2}$

2) On pose $u(x)=\sqrt{x}$ déterminer la fonction v tel que $f=v\circ u$

3) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+3}{|x|+1}$

1) Etudier la parité de f

2) Montrer que 2 est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$

3) Etudier les variations de f sur $[0;1]$ et $[1;+\infty[$

4) En déduire les variations de f sur $[-1;0]$ et $]-\infty;-1]$

5) Dresser le tableau de variations de f

Exercice 6 :

Soit f et g les fonctions définies par :

$f(x)=\dfrac{9x-10}{2x-3}$ et $g(x)=x^3$

Soient (C_f) et (C_g) les courbes de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer la nature de (C_f) et ses éléments caractéristiques.

2) Dresser les tableaux de variations de f et g

3) Vérifier que les courbes (C_f) et (C_g) sont concourantes aux points $A(1;1)$ et $B(2;8)$

4) Tracer (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{9x-10}{2x-3}-x^3\ge 0$

6) a) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\ge 8$

b) Résoudre algébriquement l'inéquation : $f(x)\ge 8$

7) Déterminer graphiquement l'image des intervalles $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ par la fonction f

8) On considère la fonction h définie par $h(x)=\left(\dfrac{9x-10}{2x-3}\right)^3$

a- Déterminer D_h l'ensemble de définition de h

b- Vérifier que $(\forall x\in D_h)\quad h(x)=gof(x)$

c- Etudier les variations de h sur $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+9}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

2) Montrer que f admet une valeur minimale en -4

3) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)\ |f(x)|<1$

b) Que peut-on conclure pour la fonction f ?

c) Que peut-on conclure pour la courbe de la fonction f ?

Exercice 8 :

1) On considère la fonction f définie par $f(x)=x-E(x)$

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$

2) On considère la fonction g définie par $g(x)=\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}$

a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de g

b) Montrer que g est bornée sur D_g

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=x+2-2\sqrt{x+1}$

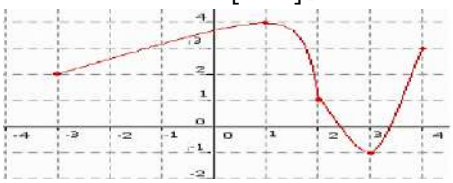
1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

2) Etudier les variations de f sur $[-1;0]$ et $[0;+\infty[$

4) En déduire que f admet un extremum en 0

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie sur $[-3;4]$ par sa courbe :



1) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de f.

2) En déduire que $(\forall x\in[-3;4])\quad -1\le f(x)\le 4$

3) Déterminer graphiquement $f([-3;1])$; $f([-3;2])$; $f([2;4])$; $f([3;4])$

4) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par son tableau de variations sur $[-1;4]$:

x	-1		0		3		4
$f(x)$	-2	↗	5	↘	-3	↗	1

1) Déterminer les extrémums de f sur $[-1;4]$

2) Comparer $f(1)$ et $f(2)$

3) Déterminer $f([-1;0])$; $f([-1;3])$; $f([0;4])$

4) Sachant que f est paire dresser sa table de variations sur $[-4;4]$

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) Montrer que $(\forall x\in D_f)\ f(x)=1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$

3) Etudier les variations de f sur $[0;1[$ et $[1;+\infty[$

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-3}$

1) Dresser le tableau de variations de f

2) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$

3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\ge 0$

4) Tracer dans le même repère la courbe de la fonction $g:x\mapsto|f(x)|$

5) On pose $h(x)=\sqrt{f(x)}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h

b) Etudier les variations de h

Exercice 14 :

On considère les fonctions f et g définie par $f(x)=x^2-2x$ et $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et de g

2) Dresser les tableaux de variations de f et g

3) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2-2x-\dfrac{x}{x-2}\le 0$

5) On pose $h(x)=\dfrac{-x^2+4x}{(x-2)^2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de h

b) En utilisant les variations de f et g déduire les variations de h

Exercice 15 :

On considère les fonctions f et g définie par $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ et $g(x)=\sqrt{x+2}$

1) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $(x+2)\sqrt{x+2}\le 1$

5) On pose $h=fog$

a) Déterminer l'ensemble de définition de h

b) En utilisant les variations de f et g déduire les variations de h

c) Montrer que h est majorée par 0 et que $\frac{1}{2}$ est sa valeur minimale.

Exercice 16 :

1) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $E(x)=m\Leftrightarrow 0\le x-m<1$ et $m\in\mathbb{Z}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{x+1}{3}$

Exercice 17 :

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Montrer que f est bornée sur I si et seulement si $(\exists M\in\mathbb{R})\ (\forall x\in I)\quad |f(x)|\le M$

2) Montrer que la fonction g définie par $g(x)=x^2+2x+3$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 18 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur J tel que $f(I)\subset J$. On pose $h=g\circ f$

1) On suppose que I est symétrique par rapport à 0.

a) Montrer que f est paire $\Rightarrow$ h est paire.

b) Etudier la parité de h si f est impaire.

2) Montrer que : g est bornée sur $J\Rightarrow$ h est bornée sur I

3) On suppose que $I=\mathbb{R}$

Montrer que f est périodique $\Rightarrow$ h est périodique

4) Montrer que $\begin{cases}f \text{ est constante}\\ \text{ou}\\ g \text{ est constante}\end{cases}\Rightarrow h$ est constante

Exercice 19 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que $f(I)=J$ tel que J est un intervalle de $\mathbb{R}$

1) Montrer que si f est strictement monotone sur I alors f est bijective de I vers J

2) Montrer que si $0\in J$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans I.

3) Montrer que si f est strictement monotone sur I et $0\in J$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans I.

4) Soit a et b deux éléments distincts de I tel que $f(a)f(b)<0$ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans I.

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL1

1BACSMF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Notions de logique)

1) a) Ecrire en utilisant les quantificateurs les propositions :

P_1 : Le produit de deux nombres entiers naturels consécutifs est pair.

P_2 : Entre deux réels il existe toujours un rationnel.

P_3 : Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation : $x^2=2$

b) Déterminer la valeur de vérité et la négation des propositions P_1 et P_3

2) Soit $a;b;c\in\mathbb{R}_+$

a) Montrer que : $\sqrt{a}\neq 8\sqrt{b}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}\neq\dfrac{2}{3}$

b) Montrer que : $\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

c) En déduire que

$$\left(\forall a;b;c\in\mathbb{R}_+\right)\ a+b+c\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

3) a) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ 6\ divise\ n^3-n$

4) Soit $x;y\in\mathbb{Q}_+$ tel que $x^3y+xy^3=8$, montrer que $x\neq y$

5) a) Montrer que :

$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ \sqrt{x^2+1}>|x|$ (rappel $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ |x|^2=x^2$)

b) Montrer par disjonction des cas que :

$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ \sqrt{x^2+1}>-x$

6) Soit $a;b;x;y\in\mathbb{R}^*$, montrer que :

$$ax+by=1\Rightarrow\frac{1}{x^2+y^2}\leq a^2+b^2$$

7) Soit $x;y\in\mathbb{R}$, montrer que :

$$\left(|x|\leq 1\ \text{et}\ |y|\leq 1\right)\Rightarrow\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|\leq 1$$

8) Soient P et Q deux propositions.

Montrer que la proposition :

$\left[(P\Rightarrow Q)\ et\ (\overline{P}\Rightarrow Q)\right]\Rightarrow Q$ est une loi logique.

9) Soient a, b et c des réels.

a) Montrer que :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c\Rightarrow(|b|<c\ et\ |a|<c)$$

b) Montrer que :

$$(|b|<c\ et\ |a|<c)\Rightarrow\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|<c$$

10) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$\sqrt{x^2-x+2}>3x-4$; $E\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+4}{3}$

Exercice 2 (Fonctions numériques)

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=-x^2+2x+1$ et $g(x)=\sqrt{x-1}$

1) Montrer que f est ni paire ni impaire.

2) Dresser les tableaux de variations de f et de g.

3) Montrer que pour tous réels x et y distincts de D_f, on a : $T=-x-y+2$

4) En déduire par une autre méthode les variations de f sur $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$

5) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère et montrer que $A(2;1)\in(\mathcal{C}_f)\cap(\mathcal{C}_g)$

6) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

7) a) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x)=-2$

b) Résoudre algébriquement l'équation : $f(x)=-2$

8) Résoudre graphiquement l'équation : $x^2-2x-1+\sqrt{x-1}=0$

9) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)>-2$

10) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2-2x-1+\sqrt{x-1}<0$

11) Déterminer par deux méthodes l'image de chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;2]$ par la fonction f

12) On considère la fonction h définie par $h(x)=\sqrt{x(2-x)}$

a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h

b) Vérifier que $\left(\forall x\in D_h\right)\ \ h(x)=g\circ f(x)$; c) Etudier les variations de h sur $[0;1]$ et $[1;2]$

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

3

Les ensembles



Résumé 3 : Les ensembles

Inclusion et égalité

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

- On dit que A est inclue dans B si chaque élément de A est un élément de B. On écrit $A \subset B$
- $A \subset B \Leftrightarrow \left[(\forall x \in E)\ ;\ x \in A \Rightarrow x \in B\right]$
- $A \not\subset B \Leftrightarrow \left[(\exists x \in E)\ ;\ x \in A \text{ et } x \notin B\right]$
- $A = B \Leftrightarrow \left[(\forall x \in E)\ ;\ x \in A \Leftrightarrow x \in B\right]$
- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$
- Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$

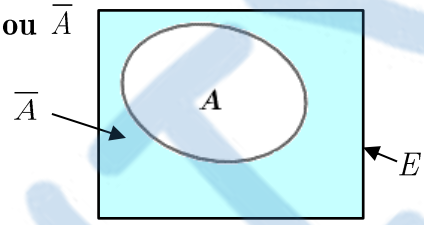
Ensemble des parties

- On appelle ensemble des parties de E, et on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des sous-ensembles de E.
- $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$
- On a $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$
- $a \in E \Leftrightarrow \{a\} \subset \mathcal{P}(E)$
- Si E est un ensemble fini de n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ contient 2^n éléments.

Le complémentaire

Soit A une partie d'un ensemble E.

- L'ensemble des éléments de E qui n'appartenant à l'ensemble A est appelé le complémentaire de A dans E. On le note C_E^A ou $\overline{A}$

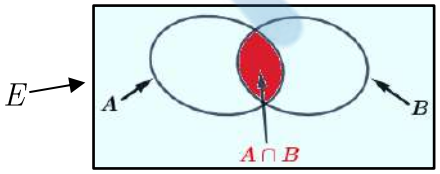


- $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$
- $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$
- On a $\overline{E} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = E$; $\left(\overline{A}\right) = A$
- $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

Intersection

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

- L'intersection des ensembles A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et dans B.

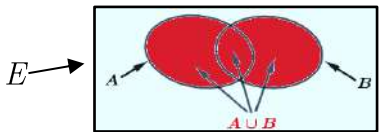


- $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$
- $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$
- $A \cap B = B \cap A$; $A \cap A = A$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cap E = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Réunion

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

- La réunion des ensembles A et B, notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B.

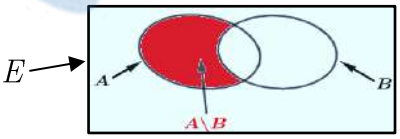


- $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$
- $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- $A \cup B = B \cup A$; $A \cup A = A$; $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cup E = E$; $A \cup \varnothing = A$
- $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Différence de deux ensembles

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

- La différence des ensembles A et B dans cet ordre, notée $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.



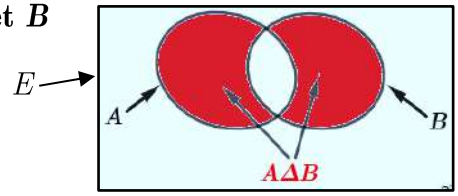
- $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$
- $A \setminus B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$
- On a $A \setminus B = A \cap C_E^B$ et $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

Différence symétrique de deux ensembles

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

On pose $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

L'ensemble $A \Delta B$ est appelé la différence symétrique des ensembles A et B



Règles de calcul

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Produit cartésien

Soit E et F deux ensembles.

- Le produit cartésien des ensembles E et F, noté $E \times F$ est l'ensembles des couples $(x;y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$
- $x \in E \times F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in F)$
- $E \times F = \{(x;y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$

Exemple 1 : Extension - Compréhension

1) Ecrire en extension les ensembles suivantes :

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\quad -\frac{5}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right\}$

$B=\left\{x\in\mathbb{R}/\quad x^2+x+1=0\right\}$

$C=\left\{x\in\mathbb{Z}/\quad x^2+(x+1)^2+(x^2-2)^2=0\right\}$

2) Ecrire en compréhension les ensembles suivantes :

$E=\{0;2;4;6;8;10;....\}$

$F=\{1;3;5;7;9;11;....\}$

$G=\{0;1;4;9;16;25;....\}$

Exemple 2 : Inclusion

On considère les ensembles suivants :

$A=\{-3;-1;0;1;3\}$; $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/\quad \frac{4}{|x|+1}\in\mathbb{Z}\right\}$

$C=\left\{x\in\mathbb{Z}/\quad \frac{2x}{|x|+1}\in\mathbb{Z}\right\}$; $D=\{-1;0;1\}$

Montrer que $A\subset B$; $D\subset C$; $A\not\subset C$; $B\not\subset C$

Exemple 3 : Ensemble des parties

On pose $E=\{a;b;c\}$

Déterminer en extension $\mathcal{P}(E)$

Exemple 4 : Egalité de deux ensembles

1) On considère les ensembles suivants :

$A=\left\{x\in\mathbb{R}/\quad \left|1-\frac{x}{2}\right|<1\right\}$ et $B=]0;4[$

Montrer que $A=B$

Exemple 5 : Le complémentaire

On considère l'ensemble $A=\left\{x\in\mathbb{N}/\quad x^2-4x>0\right\}$

Déterminer en extension $C_{\mathbb{N}}^{A}$

Exemple 6 : Intersection

Soit $A=\left\{x\in\mathbb{R}/\quad |x-1|<3\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/\quad x\le 3\right\}$

Déterminer en extension $A\cap B$

Exemple 7 : Réunion

Soit $A=\left\{x\in\mathbb{N}/\quad x^2<19\right\}$

et $B=\left\{x\in\mathbb{Z}/\quad |x+3|\le 5\right\}$

Déterminer en extension $A\cup B$

Exemple 8 : Règles de calcul

A, Bet C des parties d'un ensemble E.

Montrer que :

- $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
- $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Exemple 9 : Différence de deux ensembles

A, B et C des parties d'un ensemble E.

Montrer que :

- $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$
- $A\setminus B=A\cap\overline{B}$
- $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$
- Si $A\subset B$ alors $A\setminus B=\varnothing$ et $B\setminus A=\overline{A}$

Exemple 10 : Produit cartésien

On considère les ensembles suivants :

$E=\{a;b;c\}$ et $F=\{1;2\}$

Déterminer $E\times F$ et F^2

Exemple 11 :

On considère les ensembles suivants :

$A=\left\{x\in\mathbb{N}/\quad n^2+12\le 8n\right\}$; $B=\left\{n\in\mathbb{N}/\quad \frac{2n+16}{n+2}\in\mathbb{N}\right\}$

$C=\left\{x\in\mathbb{R}/\quad |x-4|\le 2\right\}$

1) Montrer que $A\subset C$

2) Déterminer en extension $A\cup B$ et $A\cap B$

3) Construire dans un repère orthonormé le diagramme cartésien de $B\times C$



Exercice 1

1) Ecrire en extension les ensembles suivantes :

$A=\{x\in\mathbb{Z}/|2x-1|\le 3\}$

$B=\{x\in\mathbb{Q}/(x^2-2)(|x|-6)=0\}$

$C=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/x^2-4y^2=12\}$

$D=\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/9\le x^2+y^2\le 16\}$

2) Ecrire en compréhension les ensembles suivantes :

$E=\{1;2;4;8;16;32;....\}$

$F=\left\{.....;\frac{1}{9};\frac{1}{3};1;3;9;....\right\}$

$G=\{.....;-8;-3;2;7;12;....\}$

Exercice 2

A, B et C des parties d'un ensemble E, tels que :

$E=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$

$A=\{1;3;4;7;8;9;10\}$

$B=\{2;3;5;6;7;9;10;11;12\}$ et $C=\{2;3;9;11\}$

Déterminer les ensembles :

$A\cap B$; $A\cap C$; $A\cup B$; $A\cup C$; $A\cap B\cap C$;

$A\setminus B$; $B\setminus A$; $C\setminus A$; C_E^A ; C_E^B ; $C_E^A\cup C_E^B$;

$C_E^{A\cap B}$; $C_E^A\cap C_E^B$; $C_E^{A\cup B}$; $\mathcal{P}(C)$

Exercice 3

On considère l'ensemble $E=\{1;2;3;.....;18\}$ et les parties : $A=\{x\in E/(\exists k\in E):x=2k\}$

$B=\{x\in E/(\exists k\in E):x=3k\}$

1) Ecrire en comprehension l'ensemble E et écrire en extension les ensembles A et B.

2) Déterminer en extension $\overline{A}$, $\overline{A\cup B}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$ et $A\cap B$

3) Déterminer $\mathcal{P}(A\cap B)$

Exercice 4

Soit $E=\{x;y;z\}$, déterminer les propositions vraies parmi les propositions suivantes :

$x\in E$; $x\subset E$; $\{x\}\in E$; $\{x\}\subset E$; $\{x\}\subset\mathcal{P}(E)$

$\{x\}\in\mathcal{P}(E)$; $\varnothing\in E$; $\varnothing\subset E$; $\{\varnothing\}\in E$; $\{\varnothing\}\subset E$

$E\in E$; $E\subset E$; $\{x;y\}\subset E$; $x;z\in E$; $(x;z)\subset E$

Exercice 5

Montrer que $A=B$ Tels que

$A=\{5n+2/n\in\mathbb{Z}\}$ et $B=\{5n-3/n\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 6

A et B deux parties d'un ensemble E, tels que :

$A\cap B=\{a;b\}$; $A\cup B=\{a;b;c;d;e\}$; $A\setminus B=\{c\}$

Déterminer A ; B ; $B\setminus A$; $A\Delta B$; $\overline{A}\Delta\overline{B}$

Exercice 7 /Classique

A, B, C et D des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1) $A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$

2) $A\cup B=A\cap B\Leftrightarrow A=B$

3) $A\cup B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing$ et $B=\varnothing$

4) $A\cup B=A\cap C\Leftrightarrow B\subset A\subset C$

5) $A\setminus B=A\Leftrightarrow B\setminus A=B$

6) a) $A\cup B=E\Leftrightarrow\overline{A}\subset B$

b) $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset\overline{B}$

7) $\begin{cases}A\cup B=A\cup C\\A\cap B=A\cap C\end{cases}\Leftrightarrow B=C$

8) a) $A\cap B=A\cap C\Leftrightarrow A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$

b) $A\cup B=A\cup C\Leftrightarrow\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$

9) $A\cap(A\Delta B)=A\setminus B$ et $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$

10) $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$ (utiliser des questions précédentes)

11) $A\Delta B=A\cap B\Leftrightarrow A=\varnothing$ et $B=\varnothing$

12) $A\Delta B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$

13) $\begin{cases}B\subset A\\C=A\setminus B\end{cases}\Rightarrow A=B\cup C$

14) $\begin{cases}(B\setminus C)\subset A\\(C\setminus D)\subset A\end{cases}\Rightarrow(B\setminus D)\subset A$

15) $A\times B\subset A\times C\Rightarrow B\subset C$

16) $A\times B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing$ ou $B=\varnothing$

Exercice 8 /Classique

A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrer que :

1) $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$

2) $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

3) $(A\setminus C)\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$

4) $(A\setminus C)\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$

5) $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=A\setminus(B\cup C)$

6) $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=A\setminus(B\cap C)$

7) $(A\cap B)\setminus C=A\cap(B\setminus C)$

8) $(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$

9) $A\cup B=(A\Delta B)\Delta(A\cap B)$

10) $A\setminus B=(A\cup B)\Delta B$

11) $C\cap(A\Delta B)=(C\cap A)\Delta(C\cap B)$

12) $C\cup(A\Delta B)=(C\cup A)\Delta(C\cup B)$

13) $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

14) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

15) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

16) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$

17) $\overline{A\times B}=(\overline{A}\times E)\cap(E\times\overline{B})$

Exercice 9

On pose $A=\left\{x\in\mathbb{N}/\dfrac{3x+2}{x-2}\in\mathbb{Z}\right\}$

$B=\left\{x\in\mathbb{N}/\dfrac{5x+7}{x-1}\in\mathbb{N}\right\}$

1) Ecrire en extension A et B.

2) Déterminer $A\Delta B$

3) On considère l'ensemble $C=\{3;6;9;12\}$

Déterminer $C\cup(A\Delta B)$ et $(C\cup A)\Delta(C\cup B)$

Exercice 10

Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, on pose :

$E=[-2;2]$; $F=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\le 4\right\}$

$G=\{x\in\mathbb{R}/|x+1|<\alpha\}$; $H=\left\{x\in\mathbb{R}/|x-1|<\dfrac{3}{2}\right\}$

1) a) Montrer que $F\neq\varnothing$ et $G\neq\varnothing$

b) Montrer que $F\subsetneq E^2$

2) Déterminer s'il existe des valeurs de α tel que :

a) $G=H$

b) $G\cap H=\varnothing$

Exercice 11

1) Déterminer l'ensemble

$[-3\pi;2\pi]\cap\left[-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{k\pi}{4}/k\in\mathbb{Z}\right]$

2) On considère les ensembles $A=[(2k+1)\pi/k\in\mathbb{Z}]$

et $B=\left\{-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$, montrer que $A\subset B$

3) On considère les ensembles

$C=\left\{-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $D=\left\{-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$,

montrer que $C\cap D=\varnothing$

Exercice 12

Déterminer les ensembles :

$A=\left[x\in\mathbb{N}/\dfrac{4x^2-4x+10}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right]$,

$B=\left[x\in\mathbb{N}/\dfrac{x+10}{x-5}\in\mathbb{N}\right]$, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$.

Exercice 13

On considère l'ensembles :

$F=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2<y\ \ et\ \ y^2\le x\right\}$

1) Montrer que $F\neq\varnothing$

2) Montrer que $F\subset[0;1]\times[0;1]$

Exercice 14/Classique

E et F deux ensembles, montrer que :

1) $\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)=\mathcal{P}(E\cap F)$

2) $\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)\subset\mathcal{P}(E\cup F)$

Exercice 15

Soit $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2+xy-2y^2=5\right\}$

1) Vérifier que :

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y)$

2) Déterminer en extension l'ensemble $F=E\cap\mathbb{Z}^2$

3) Montrer que : $E=\left\{\left(\dfrac{2t^2-5}{3t};\dfrac{-t^2-5}{3t}\right)/t\in\mathbb{R}^*\right\}$

Exercice 16

Soit E un ensemble non vide et $A,X,Y\in\mathcal{P}(E)$ tel que $X\cap A=Y\cup A$, montrer que : $Y\subset A\subset X$

Exercice 17

Soit E un ensemble non vide et $A,B\in\mathcal{P}(E)$

Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les équations :

1) $X\cup A=B$

2) $X\cap A=B$

Exercice 18

Soit E un ensemble non vide,

$A,B\in\mathcal{P}(E)$ tel que $B\subset A$,

Montrer que :

1) $(\forall X\in\mathcal{P}(E)):A\cap X=B\Leftrightarrow B\subset X\subset\overline{A}\cup B$

2) $(\forall X\in\mathcal{P}(E)):A\setminus X=B\Leftrightarrow A\cap\overline{B}\subset X\subset\overline{B}$

Exercice 19

Soit E un ensemble non vide et $A,B,C\in\mathcal{P}(E)$

1) Montrer que :

a) $(\forall X\in\mathcal{P}(E)):X=(X\cup A)\cap(X\cup\overline{A})$

b) $(\forall X\in\mathcal{P}(E)):X=(X\cap A)\cup(X\cap\overline{A})$

2) Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation $X\setminus A=A\setminus X$

3) Supposons que $B\subset A$ et $A\cap C=\varnothing$

Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ le système $\begin{cases}A\setminus X=B\\X\setminus A=C\end{cases}$

4) Sachant que $A\subset B$, résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation $X\cap B=X\cup A$

5) Supposons que $B\subset A\subset C$

a) Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ le système $\begin{cases}A\cap X=B\\X\setminus A=C\end{cases}$

b) Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ le système $\begin{cases}A\setminus X=B\\X\setminus A=\overline{C}\end{cases}$



4

Les applications



Résumé 4 : Les applications

Définition d'une application

Soit E et F deux parties d'un ensemble non vide.

- **On appelle application de E vers F toute relation f qui à tout élément x de E associe un unique élément y de F**
- **f application de E vers $F \Leftrightarrow (\forall x \in E)(\exists! y \in F)$; $y = f(x)$**

Image directe d'une partie

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F

A et B deux parties de E.

- **L'image directe de A par f, notée $f(A)$ est définie par :**

$f(A) = \{f(x) / \ x \in A\}$

- $y \in f(A) \Leftrightarrow [(\exists x \in A);\ y = f(x)]$

Propriétés

- $f(A) \subset F$
- $A = \varnothing \Leftrightarrow f(A) = \varnothing$
- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- $f(A) = C \Leftrightarrow (\forall x \in A)\ \ f(x) \in C$



Image réciproque d'une partie

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F

C et D deux parties de F.

- **L'image réciproque de C par f, notée $f^{-1}(C)$ est définie par :**

$f^{-1}(C) = \{x \in E / \ f(x) \in C\}$

- $x \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow f(x) \in C$

Propriétés

- $f^{-1}(C) \subset E$
- $f^{-1}(F) = E$
- $C = \varnothing \Rightarrow f^{-1}(C) = \varnothing$
- $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Application injective

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

On dit que f est injective si tout élément de F à au moins un antécédent dans E par f :

- **f est injective $\Leftrightarrow (\forall (x;y) \in E^2)\ \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$**
- **f n'est pas injective $\Leftrightarrow (\exists (x;y) \in E^2);\ f(x) = f(y)$ et $x = y$**

Application surjective

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

On dit que f est surjective si tout élément de F à au plus un antécédent dans E par f :

- **f est surjective $\Leftrightarrow (\forall y \in F)(\exists x \in E)\ \ y = f(x)$**
- **f est surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$**
- **f n'est pas surjective $\Leftrightarrow$ Il existe $y \in F$ qui n'admet aucun antécédent**
- **f n'est pas surjective $\Leftrightarrow f(E) \neq F$**

Application bijective

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F.

On dit que f est bijective si tout élément de F admet exactement un antécédent dans E par f :

- **f est bijective $\Leftrightarrow (\forall y \in F)(\exists! x \in E)\ \ y = f(x)$**
- **f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective et surjective**
- **f n'est pas bijective $\Leftrightarrow$ f n'est pas injective ou n'est pas surjective**

Application réciproque d'une bijection

Soit $f : E \to F$ une application bijective

Pour déterminer l'expression de l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ de f on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$, on a : $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F \end{cases}$

Composition des applications

- **Le composé de deux applications injectives est injectif.**
- **Le composé de deux applications surjectives est surjectif.**
- **Le composé de deux applications bijectives est bijectif.**
- **Soit $f : E \to F$**

  Si f est bijective alors $(\forall x \in E)\ \ fof^{-1}(x) = x$ et $(\forall x \in F)\ \ f^{-1}of(x) = x$

Exemple 1 : Image directe d'une partie

On considère l'application $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x-4\sqrt{x}+1$

1) Déterminer $f([0;4])$

2) Montrer que $f(]1;+\infty[)=[-3;+\infty[$

Exemple 2

On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 3-2x^2$

Déterminer $f([-1;0]\cup[1;2])$

Exemple 3 : Image réciproque d'une partie

On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2+2x$

1) Déterminer $f^{-1}([-1;0])$ et $f^{-1}([3;+\infty[)$

2) Montrer que $f^{-1}([-1;0]\cap[3;+\infty[)$

Exemple 4 : Egalité de deux applications

Montrer que les applications suivantes sont égales :

$f:\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 1-(cos(x)-sin(x))^2$ et $g:\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{2tan(x)}{1+tan^2(x)}$

Exemple 5 : Restriction et prolongement

1) On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2x-|x|+3$

Déterminer l'application g la restriction de f sur $]-\infty;0]$

2) On considère l'application $h:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{x}{|x|}$

Déterminer un prolongement de h à la partie $\mathbb{R}$

Exemple 6 : Application injective

On considère l'application $f:[1;+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2-2x+3$

Montrer que f est injective.

Exemple 7

1) On considère l'application $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 1+\frac{1}{x^2}$

a) Déterminer $f^{-1}(\{2\})$

b) En déduire que f n'est pas injective.

2) Soit g la restriction de f sur $]-\infty;0]$

Montrer que g est injective.

Exemple 8 : Application surjective

Montrer que l'application $f:]-\infty;4[\to]-\infty;1[$, $x\mapsto\frac{x+1}{x-4}$ est surjective.

Exemple 9

1) On considère l'application g de l'exemple 5

a) Résoudre dans $]-\infty;0[$ l'équation $g(x)=0$

b) En déduire que g n'est pas surjective.

2) On considère l'application $h:]-\infty;0[\to]1;+\infty[$, $x\mapsto 1+\frac{1}{x^2}$

Montrer que h est surjective.

Exemple 10 : Application bijective

On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\left[-\frac{1}{3};1\right[$, $x\mapsto\frac{x^2-1}{x^2+3}$

1) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\left[-\frac{1}{3};1\right[$

2) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f

Exemple 11

Montrer que l'application h de l'exemple 7 est bijective et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}

Exemple 12 : Composition des applications

1) On considère les applications :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto x^2+2$ et $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 3+\sqrt{x}$

Déterminer les applications : fog, gof et fof

2) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On considère les translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$

Déterminer $t_{\vec{u}}ot_{\vec{v}}$



Exercice 1

On considère l'application f définie de $]1;+\infty[$ vers $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

1) Montrer que f est injective.

2) Montrer que f est surjective.

3) En déduire que f est bijective puis donner sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 2

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+2}$

1) a- Déterminer l'image réciproque de l'ensemble $A=\left\{1;\dfrac{1}{2}\right\}$ par f

b- L'application f est-elle surjective ? Justifier.

2) Montrer que $f(\mathbb{R}^+)=\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right[$

3) Soit g l'application définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ par : $g(x)=f(x)$.

a) Montrer que g est injective.

b) En déduire que g est bijective puis définir g^{-1}

Exercice 3

On considère l'application f définie de $]0;+\infty[$ vers $[2;+\infty[$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1) a) Montrer que $(\forall x>0)\quad f(x)\geq 2$

b) En déduire que f est surjective ?

c) Montrer que f est injective.

d) En déduire que f est bijective puis définir f^{-1}

2) Soit g l'application définie de $]-3;+\infty]$ vers $[2;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{x^2+6x+10}{x+3}$.

a) Montrer que $(\forall x>-3)\quad g(x)=f(x+3)$

b) En déduire que g est bijective puis définir g^{-1}.

Exercice 4

Soit f une application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{1}{3}$

b) f est-elle injective ?

2) a) Montrer que $f(\mathbb{R})\subset\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$

b) f est-elle surjective ?

3) Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}^+$, montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[0;1]$ puis définir g^{-1}.

Exercice 5

On pose $I=\mathbb{R}_+^*$, soit f une application définie de $I\times I$ vers $I\times I$ par : $f((x;y))=\left(xy;\dfrac{x}{y}\right)$.

1) Montrer que f est injective.

2) En déduire que f est bijective puis définir f^{-1}.

Exercice 6

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x$

1) a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 0\leq f(x)\leq\frac{1}{2}$

b) L'application f est-elle surjective ?

2) Montrer que f est injective.

3) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[0;\frac{1}{2}[$ puis définir f^{-1}.

Exercice 7

Soit f une application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

1) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad \sqrt{x^2+1}>x$

2) Montrer que

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)-f(y)=(x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}-1\right)$$

3) En déduire que f est injective.

4) f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$? Justifier.

3) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$ puis définir f^{-1}.

Exercice 8

On pose $f(x)=\dfrac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$

1) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\quad f(\frac{1}{x})=f(x)$

2) L'application f est-elle injective ?

Exercice 9

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ par : $f((x;y))=(x^2-y^2;xy)$.

1) a) Soit $(a;b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, montrer que l'équation $x^2-ax-b^2=0$ admet deux solutions α et β de signes opposés. (Sans les déterminées).

b) En déduire que f est surjective.

2) L'application f est-elle injective ?

Exercice 10/Classique

On considère deux applications :
$f: E \to F$ et $g: F \to G$, montrer que :

1) gof est injective $\Rightarrow$ f est injective

2) $\begin{cases} gof \text{ est injective} \\ f \text{ est surjective} \end{cases} \Rightarrow g$ est injective

3) gof est surjective $\Rightarrow$ g est surjective

4) $\begin{cases} gof \text{ est surjective} \\ g \text{ est injective} \end{cases} \Rightarrow f$ est surjective

Exercice 11/Classique

Soit f une application de E vers F.
A et B deux parties de E, C et D deux parties de F
Montrer que :



1) $f(A) \subset F$
2) $A = \varnothing \Leftrightarrow f(A) = \varnothing$
3) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
4) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
5) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
6) $f^{-1}(C) \subset E$
7) $f^{-1}(F) = E$
8) $C = \varnothing \Rightarrow f^{-1}(C) = \varnothing$
9) $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
10) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
11) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
12) $A \subset f^{-1}(f(A))$
13) f est injective $\Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$
14) $f(f^{-1}(B)) \subset B$
15) f est surjective $\Rightarrow f(f^{-1}(B)) = B$
16) $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$
17) f est injective $\Rightarrow f(E \setminus A) \subset f(E) \setminus f(A)$
18) f est bijective $\Rightarrow f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$

Exercice 12

Soit f une application définie de $I = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $(\forall x \in I)\ f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x + 1$.
On pose $g(x) = \frac{x-1}{x}$

1) Vérifier que $(\forall x \in I)\quad g(x) \in I$
2) Calculer $gog(x)$ et $gogog(x)$ pour tout $x \in I$.
3) Montrer que

$$(\forall x \in I)\ f(x) + f(gog(x)) = -\frac{1}{x-1} + 1$$

4) Calculer $f(g(x)) + f(gog(x))$ en fonction de x
5) En déduire l'expression de f en fonction de x

Exercice 13

Soit f une application définie de $I = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $(\forall x \in I)\ f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x + 1$.
On pose $g(x) = \frac{x+1}{x}$

1) Vérifier que $(\forall x \in I)\quad g(x) \in I$
2) Calculer $gog(x)$ et $gogog(x)$ pour tout $x \in I$.
3) M.q $(\forall x \in I)\ f(x) + f(gog(x)) = \frac{1}{gog(x)} - gog(x) + 1$
4) En déduire $(\forall x \in I)\ f(x) = 1 - x$

Exercice 14/Classique

Soit E un ensemble non vide et A une partie de E.
On considère l'application f_A définie de E vers $\mathbb{R}$ par

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

1) Montrer que $(\forall A, B \in \mathcal{P}(E))\quad A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$
2) Montrer que $f_{\overline{A}} = 1 - f_A$
3) Montrer que $(\forall A, B \in \mathcal{P}(E))$:
   a) $f_{A \cap B} = f_A \times f_B$
   b) $f_{A \setminus B} = f_A - f_A \times f_B$
   c) $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \times f_B$
   d) $f_{A \Delta B} = f_A + f_B - 2 f_A \times f_B$
4) En déduire que $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$:
   a) $\overline{A} \Delta \overline{B} = A \Delta B$
   b) $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$
   c) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
   d) $C \cap (A \Delta B) = (C \cap A) \Delta (C \cap B)$
   e) $C \cup (A \Delta B) = (C \cup A) \Delta (C \cup B)$

Exercice 15

A et B deux parties d'un ensemble non vide E.
On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\mapsto (X \cap A; X \cap B) \end{aligned}$$

1) Déterminer $f(\varnothing)$, $f(A \cup B)$ et $f(E)$
2) Montrer que : f est injective $\Rightarrow E = A \cup B$
3) Montrer que : f est surjective $\Rightarrow A \cap B = \varnothing$
4) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective puis déterminer f^{-1}

Exercice 16

Montrer que si f est une fonction numérique strictement monotone, alors f est injective.

Exercice 17

Soit f l'application définie de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$ par :
$f((n;m)) = n + (n+m)(n+m+1)$.
Montrer que f est injective.

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL2

1BACSMF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Les ensembles)

1) Déterminer deux ensembles A et B sachant que
$A\cap B=\{2;3;4\}$, $A\cap B=\{1;2;3;4;5\}$, $1\notin B\setminus A$ et $5\notin A\setminus B$

2) Soit A, B et C des parties d'un ensemble E. Montrer que

a) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

b) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

c) $\begin{cases}A\cap B=A\cap C\\ B\setminus A=C\setminus A\end{cases}\Leftrightarrow B=C$

d) Si $A\subset B$ alors $A\setminus B=\varnothing$ et $B\setminus A=C_B^A$

3) Ecrire en compréhension les ensembles suivantes :

$A=\{0;1;4;16....\}$, $B=\{1;3;27;81....\}$ et $C=\left\{-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4}...\right\}$

4) Ecrire en extension les ensembles suivantes :

$A=\left\{x\in\mathbb{N}/\ \frac{5x+7}{x-1}\in\mathbb{N}\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{N}/\ \frac{x^2-2x+6}{x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$

$C=\left\{(x;y)\in\mathbb{Z}^2/(x+y)(x+2y)=1\right\}$

5) On considère les ensembles :

$A=\left\{\left(x;\sqrt{x+1}\right)/\ x\in[-1;+\infty[\right\}$ et $B=\left\{\left(x^2-1;x\right)/\ x\in\mathbb{R}^+\right\}$

Montrer que $A=B$

6) On considère les ensembles :

$A=]-\infty;-1[$ et $B=\left\{x\in\mathbb{R}/\ \frac{x}{x+1}>1\right\}$.

Montrer que $A=B$

7) On pose :

$A=\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}/\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, $B=\left\{-\frac{7\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}/\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

et $C=\left\{-\frac{3\pi}{8}+k\pi/\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

a) Montrer que $A=B$

b) A-t-on $B=C$?

8) On considère les deux ensembles A et B tel que $A=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{5}/\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

et $B=\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{5}/\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Montrer que $A\cap B=\varnothing$



Exercice 2 (Les applications)

Soit f une application définie de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}$

1) a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})\quad f(x)<1$

b) En déduire que f n'est pas surjective.

2) a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})\quad f(-x-2)=f(x)$

b) En déduire que f n'est pas injective.

3) Soit g la restriction de f sur $]-1;+\infty[$

a) Montrer que g est bijective de $]-1;+\infty[$ sur $]-\infty;1[$

b) Déterminer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(-3)$

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in]-\infty;1[$

Exercice 3 (Les applications)

On considère les applications :

$f:[-1;0]\to\left[0;\frac{1}{2}\right]$, $x\mapsto\frac{x^2}{1+x^2}$ et $g:[-1;0]\to[0;1]$, $x\mapsto\frac{x^2}{1+x^2}$

1) Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

2) Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

3) Déterminer une application h tel que $f=hog$

4) En déduire que h est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 4 (Les applications)

On considère l'application $f:\mathbb{Z}\times[0;1[\to\mathbb{R}$, $(n;x)\mapsto n+x$

1) Montrer que f est bijective.

2) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f

Exercice 5 (Les applications)

A et B deux parties d'un ensemble non vide E.

On considère l'application
$f:\mathcal{P}(E)\to\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$
$X\mapsto(X\cap A;X\cap B)$

1) Déterminer $f(\varnothing)$, $f(A\cup B)$ et $f(E)$

2) Montrer que : f est injective $\Rightarrow E=A\cup B$

3) Montrer que : f est surjective $\Rightarrow A\cap B=\varnothing$

4) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective puis déterminer f^{-1}

5

Barycentre



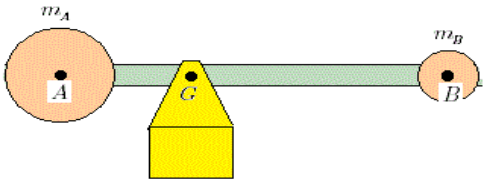
Activités

Activité 1 :

On considère un levier porte deux masses m_A et m_B

Principe du levier d'Archimède :

« Dans le cas d'équilibre on a $m_A \times GA = m_B \times GB$ »



1) Montrer que dans le cas d'équilibre on a $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

2) Le point G défini par la relation vectorielle $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ s'appelle le barycentre des points pondérés (ou massifs) $(A;m_A)$, $(B;m_B)$ et on le note $G=Bar\{(A;m_A);(B;m_B)\}$

Montrer que : $m_A\overrightarrow{GA}+m_B\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{m_B}{m_A+m_B}\overrightarrow{AB}$

3) En déduire la position du point G tel que $G=Bar\{(A;m_A);(B;m_B)\}$ dans chacun des cas suivants :

a) $m_A=m_B=1$; b) $m_A=3$ et $m_A=5$

4) Déterminer m_B sachant que $m_A=2$ et $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$



Activité 2 :

a et b deux réels.

Soit *A* et *B* deux points distinct du plan et *G* un point tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1) Montrer que $(a+b)\overrightarrow{AG}=b\overrightarrow{AB}$

2) En déduire que si $a+b=0$ alors le point G n'existe pas.

3) On suppose que $a+b\neq 0$ et soit G' un point du plan tel que $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $G'=G$

b) En déduire que le point *G* vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ est unique et que $G\in(AB)$

→ Le point *G* est appelé le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$ on note $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$

4) Montrer que : $G=bar\{(A;1);(B;1)\} \Leftrightarrow$ *G* le milieu du segment $[AB]$

5) Montrer que : $G=bar\{(A;1);(B;0)\} \Leftrightarrow G=A$ et $G=bar\{(A;0);(B;1)\} \Leftrightarrow G=B$

Activité 3 :

Soit a et b deux réels non nuls tel que $a+b\neq 0$ on pose $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$

1) Soit $k\in\mathbb{R}^*$ vérifier que : $\dfrac{a}{k}\overrightarrow{GA}+\dfrac{b}{k}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

2) En déduire que pour tout $k\in\mathbb{R}^*$ on a $G=bar\left\{(A;\dfrac{a}{k});(B;\dfrac{b}{k})\right\}$

3) Soit M un point du plan (P) montrer que : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}-(a+b)\overrightarrow{MG}=\vec{0}$

4) En déduire que si $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$ alors pour tout $M\in(P)$ on a $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

5) Montrer que si pour tout $M\in(P)$ on a $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ alors $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$

6) Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan, on pose $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$

a) En déduire que $\overrightarrow{OG}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}}{a+b}$

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $a\overrightarrow{OA}$ et $b\overrightarrow{OB}$ en fonction de a,b,x_A,y_A,x_B et y_B

c) En déduire les coordonnées de vecteur $\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}}{a+b}$ en fonction de a,b,x_A,y_A,x_B et y_B

d) En déduire que $G\left(\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b};\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$

Activité 4 :

a ,b et c trois réels.

Soit ***A*** et ***B*** deux points distinct du plan et ***G*** un point tel que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

1) Montrer que $(a+b+c)\overrightarrow{AG}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$

2) En déduire que si $a+b+c=0$ alors le point G n'existe pas.

3) On suppose que $a+b+c\neq 0$ et soit G' un point du plan tel que $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

a) Montrer que $G'=G$

b) En déduire que le point ***G*** vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ est unique.

→ ***G*** est appelé le barycentre du systèmes pondérés $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ on note $G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$

c) En déduire que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

4) Montrer que $(\forall k\in\mathbb{R}^*)\quad G=bar\left\{(A;\dfrac{a}{k});(B;\dfrac{b}{k});;(C;\dfrac{c}{k})\right\}$

5) Montrer que $(\forall M\in(P))\quad a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$

6) Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan, on pose $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$

Montrer que $G\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$



Activité 5 :

a ,b et c trois réels tels que $a+b+c\neq 0$ et $a+b\neq 0$

Soit ***ABC*** un triangle, ***G*** et ***H*** les points du plan tels que

$G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ et $H=bar\{(A;a);(B;b)\}$

1) a) Vérifier que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=-c\overrightarrow{GC}$

b) En utilisant la propriété caractéristique du barycentre sur ***H*** montrer que $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=(a+b)\overrightarrow{GH}$

c) En déduire que $G=bar\{(H;a+b);(C;c)\}$ et que $G\in(CH)$

Application :

2) On suppose que $a=b=c=1$

a) En déduire que $G\in(CH)$

b) Que présent le point ***H*** pour le segment $[AB]$

c) Soit ***I*** le milieu du segment $[BC]$ montrer que $G\in(AI)$

d) En déduire que ***G*** est le centre de la gravité du triangle ***ABC***

3) Supposons que $b+c\neq 0$ et $a+c\neq 0$

On pose $H=bar\{(A;a);(B;b)\}$; $K=bar\{(B;b);(C;c)\}$ et $L=bar\{(A;a);(C;c)\}$

Montrer que les droites (***CH***) ; (***AK***) et (***BL***) sont concourantes en ***G***.

Définitions et propriétés

Soit A un point du plan et a un nombre réel.

→ Le couple $(A;a)$ est appelé point pondéré ou point massif. Le réel a est appelé le poids ou la masse de A.

On dit aussi que le point A est affecté du coefficient a ou de la masse algébrique a.

→ Un système pondéré est une collection de points pondérés.

Barycentre de deux points pondérés

Soit $(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tel que : $a+b\neq 0$

1) Il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;a)$ et $(B;b)$

On dit aussi que G est le barycentre du système $\{(A;a);(B;b)\}$ on note $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$

$$1\quad G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

2) Si $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$ alors $G\in(AB)$ tel que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

$$2\quad G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$$

→ Cette dernière relation permet de construire le point G.

→ Le point le plus proche du barycentre G est celui dont le coefficient à la plus grande valeur absolue.

→ Le barycentre G est sur le segment $[AB]$ si les poids sont de même signe.

3) Le point $G=bar\{(A;1);(B;1)\}$ est appelé isobarycentre des points A et B c'est le milieu de $[AB]$

4) Si x et y deux réels tel que $x+y=0$ alors le système $\{(A;x);(B;y)\}$ n'admet pas du barycentre.

5) On a $G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow G=bar\{(A;k\times a);(B;k\times b)\}$ et $3\quad G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow G=bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k})\right\}$

pour tout $k\in\mathbb{R}^*$. En d'autres termes : le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle **homogénéité** du barycentre.

6) On a $4\quad G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$ pour tout $M\in(P)$. Cette propriété s'appelle **la propriété caractéristique** du barycentre.

7) Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points d'un repère.

On a $5\quad G=bar\{(A;a);(B;b)\}\Leftrightarrow G\left(\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b};\dfrac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$



Barycentre de trois points pondérés

Soit $(A;a),(B;b)$ et $(C;c)$ trois points pondérés du plan tel que : $a+b+c\neq 0$

1) Il existe un unique point G vérifiant la relation vectorielle $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Le point G est appelé le barycentre des points pondérés $(A;a),(B;b)$ et $(C;c)$

On dit aussi que G est le barycentre du système $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ on note $G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$

$$1\quad G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

2) Si $G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

$$2\quad G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

Cette dernière relation permet de construire le point G

3) Si x,y et z trois réels tel que $x+y+z=0$ alors le système $\{(A;x);(B;y);(C;z)\}$ n'admet pas du barycentre.

4) $3\ G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow G = bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k});(C;\frac{c}{k})\right\}$ pour tout $k \in \mathbb{R}^*$. En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie ou on divise ses coefficients par un même nombre réel non nul. Cette propriété s'appelle **homogénéité** du barycentre.

5) On a $4\ G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$ pour tout $M \in (P)$. Cette propriété s'appelle **la propriété caractéristique** du barycentre.

6) Soit $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ trois points d'un repère.

On a $5\ G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow G\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

7) Si $G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ et $H = bar\{(A;a);(B;b)\}$ alors $G = bar\{(H;a+b);(C;c)\}$. En d'autres termes : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux poids.

$6\ G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}\ \ et\ \ H = bar\{(A;a);(B;b)\} \Rightarrow G = bar\{(H;a+b);(C;c)\}$

Cette propriété s'appelle **l'associativité** du barycentre.

8) Le point $G = bar\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$ est appelé isobarycentre des points ***A***, ***B*** et ***C*** c'est le centre de gravité du triangle ABC.

Barycentre de quatre points pondérés

- De la même manière, on étend à quatre points les définitions et les propriétés vues pour le barycentre de trois points.
- **L'associativité** du barycentre : Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on remplace deux ou trois d'entre eux par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme de leurs poids.

Résumé 5 : Barycentre

	Barycentre de deux points	Barycentre de trois points
	$(A;a)$ et $(B;b)$ deux points pondérés du plan tel que : $a+b \neq 0$	$(A;a)$, $(B;b)$ et $(C;c)$ trois points pondérés du plan tel que : $a+b+c \neq 0$
Définition	$1\ G = bar\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$	$1\ G = bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
Construction	$2\ \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$	$2\ \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$
Homogénéité	$3\ G = bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k})\right\}$	$3\ G = bar\left\{(A;\frac{a}{k});(B;\frac{b}{k});(C;\frac{c}{k})\right\}$
Propriété caractéristique	$4\ a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$	$4\ a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$
Coordonnées	$5\ G\left(\frac{ax_A+bx_B}{a+b};\frac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$	$5\ G\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$
Associativité	6 Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme des deux poids.	

Remarques :

Soit ***A***, ***B*** et ***C*** trois points distincts du plan

1) G est le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow G = bar\{(A;1);(B;1)\}$

2) G est le centre de gravité du triangle $ABC \Leftrightarrow G = bar\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$

3) Pour montrer que $G \in (AB)$ il suffit de :

Trouver $a;b \in \mathbb{R}$ tel que $G = bar\{(A;a);(B;b)\}$ (ou montrer que les points ***A***, ***B*** et ***G*** sont alignés).

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exemples résolus

Exemple 1

Déterminer deux réels a ***et*** b ***tel que*** $G=bar\{(A;a);(B;b)\}$ ***dans les cas suivants :***

1) $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0}$; ***2)*** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{AB}$; ***3)*** $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Solution

1) $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BA}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}+3\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{GA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow G=bar\{(A;5);(B;-3)\}$ ***donc*** $a=5$ ***et*** $b=-3$ $\quad(5+(-3)\neq 0)$

2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow G=bar\{(A;4);(B;-2)\}$ ***donc*** $a=4$ ***et*** $b=-2$ $\quad(4+(-2)\neq 0)$

3) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}-\frac{2}{3}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow G=bar\left\{(A;-\frac{1}{3});(B;-\frac{2}{3})\right\}$ ***donc*** $a=-\frac{1}{3}$ ***et*** $b=-\frac{2}{3}$ $\quad(-\frac{1}{3}+(-\frac{2}{3})\neq 0)$



Exemple 2

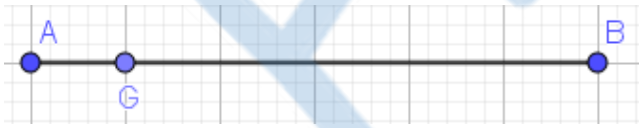
Soit A et B deux point du plan, construire le point G dans chacun des cas suivants :

1) $G=bar\{(A;-5);(B;-1)\}$ ***et*** $AB=6$ ***2)*** $G=bar\{(A;-1);(B;6)\}$ ***et*** $AB=5$

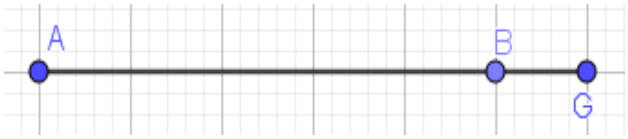
3) $G=bar\{(A;5);(B;-1)\}$ ***et*** $AB=4$ ***4)*** $G=bar\{(A;-8);(B;5)\}$ ***et*** $AB=3$

Solution

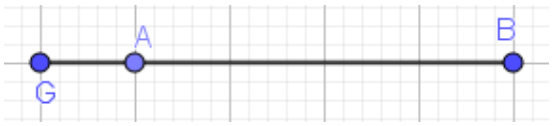
1) On a $G=bar\{(A;-5);(B;-1)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$



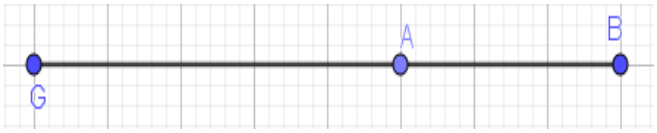
2) On a $G=bar\{(A;-1);(B;6)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$



3) On a $G=bar\{(A;5);(B;-1)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$



4) On a $G=bar\{(A;-8);(B;5)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$



Exemple 3

Soit A et B deux points distinct du plan et G un point tel que $G=bar\{(A;200);(B;300)\}$

1) Montrer que $G=bar\{(A;2);(B;3)\}$

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=0$ ***b)*** $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=20$ ***c)*** $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

Solution

1) On a $G=bar\{(A;200);(B;300)\}$ ***donc d'après la propriété de l'homogénéité*** $G=bar\left\{(A;\frac{200}{100});(B;\frac{300}{100})\right\}$

C'est-à-dire $G=bar\{(A;2);(B;3)\}$

2) Rappel : ***Les ensembles des points usuels du plan***

Soit A et B deux points distinct du plan et R un réel strictement positif

L'ensemble des points M du plan tel que	*Nature*
$MA=R$	Le cercle du centre A et de rayon R.
$MA=0$	Le singleton $\{A\}$
$MA=-R$	L'ensemble vide.
$MA=MB$	La médiatrice de segment $[AB]$

a) On a $G=bar\{(A;2);(B;3)\}$ ***donc d'après la propriété caractéristique :***

Pour tout $M\in(P)$ $\quad 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=(2+3)\overrightarrow{MG}=5\overrightarrow{MG}$

Donc $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=0\Leftrightarrow\left\|5\overrightarrow{MG}\right\|=0\Leftrightarrow MG=0$***, donc cet ensemble est le singleton*** $\{G\}$

b) On a $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=20\Leftrightarrow\left\|5\overrightarrow{MG}\right\|=20\Leftrightarrow MG=4$ ***donc cet ensemble est le cercle de centre G et de rayon 4***

c) Soit $G'=bar\{(A;3);(B;2)\}$ ***donc d'après la propriété caractéristique :***

Pour tout $M\in(P)$ $\quad 3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=(3+2)\overrightarrow{MG'}=5\overrightarrow{MG'}$

Donc $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|\Leftrightarrow\left\|5\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|5\overrightarrow{MG'}\right\|\Leftrightarrow MG=MG'$***, donc cet ensemble est la médiatrice de*** $[GG']$

Exemple 4

Soit ABC ***un triangle, on pose*** $G=bar\{(A;2);(B;3)\}$ ***et*** $G'=bar\{(A;-2);(C;7)\}$

1) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur G ***et*** G'

Montrer que : $(\forall M\in(P))\quad 3\overrightarrow{MB}+7\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG}+5\overrightarrow{MG'}$

2) Soit I un point du plan tel que $I=bar\{(B;3);(C;7)\}$

a) Simplifier par deux méthodes le vecteur $3\overrightarrow{IB}+7\overrightarrow{IC}$

b) En déduire que I est le milieu du segment $[GG']$



Solution

1) On a $G=bar\{(A;2);(B;3)\}$ ***et*** $G'=bar\{(A;-2);(C;7)\}$

Donc $(\forall M\in(P))\quad 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$ ***et*** $(\forall M\in(P))\quad -2\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG'}$

Donc $(\forall M\in(P))\quad \left(\cancel{2\overrightarrow{MA}}+3\overrightarrow{MB}\right)+\left(\cancel{-2\overrightarrow{MA}}+7\overrightarrow{MC}\right)=5\overrightarrow{MG}+5\overrightarrow{MG'}$

C'est-à-dire $(\forall M\in(P))\quad 3\overrightarrow{MB}+7\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG}+5\overrightarrow{MG'}$

2) a) On a $I=bar\{(B;3);(C;7)\}$ ***donc par définition*** $3\overrightarrow{IB}+7\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

D'autre part on a $(\forall M\in(P))\quad 3\overrightarrow{MB}+7\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG}+5\overrightarrow{MG'}$ ***en particulier*** $3\overrightarrow{IB}+7\overrightarrow{IC}=5\overrightarrow{IG}+5\overrightarrow{IG'}$

b) D'après la question précédente en déduit que $5\overrightarrow{IG}+5\overrightarrow{IG'}=\vec{0}$

Donc $\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IG'}=\vec{0}$

C'est-à-dire $I=bar\{(G;1);(G';1)\}$

Ainsi I est le milieu du segment $[GG']$

Exemple 5

1) Déterminer les réels a , b et c tel que $G=bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ sachant que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

2) Placer les points $A(0;3)$, $B(1;0)$ et $C(-2;1)$ dans un repère puis placer les points H et D sachant que :

$H=bar\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\}$ **et** $D=bar\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$

3) Montrer que $H=bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$

4) Montrer vectoriellement que le quadrilatère $ADHC$ est un parallélogramme.

5) Déterminer les coordonnées de H et D

6) Montrer en utilisant les coordonnées que le quadrilatère $ADHC$ est un parallélogramme.

7) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution

1) On a $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)-\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=-3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

On pose $a=3$; $b=-2$ **et** $c=-2$ **puisque** $a+b+c\neq 0$ **alors** $G=bar\{(A;3);(B;-2);(C;-2)\}$

2) On a $H=bar\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\}$

Donc $\overrightarrow{AH}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\frac{-3}{6+(-3)+(-6)}\overrightarrow{AB}+\frac{-6}{6+(-3)+(-6)}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

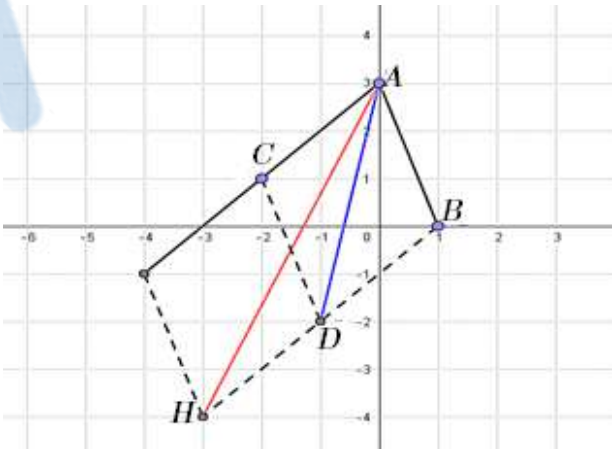
On a $D=Bar\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$

Donc $\overrightarrow{AD}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\frac{-1}{1+(-1)+(-1)}\overrightarrow{AB}+\frac{-1}{1+(-1)+(-1)}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

3) On a $H=bar\{(A;6);(B;-3);(C;-6)\}$

Donc $H=bar\left\{(A;\frac{6}{3});(B;\frac{-3}{3});(C;\frac{-6}{3})\right\}$

C'est-à-dire $H=bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$



4) Il suffit de montrer que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ **vectoriellement.**

On a $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Donc il suffit montrer que $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ **C.Q.F.D**

5) On a $H=bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$ **donc** $H\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

C'est-à-dire $H\left(\frac{2\times 0+(-1)\times 1+(-2)\times(-2)}{2+(-1)+(-2)};\frac{2\times 3+(-1)\times 0+(-2)\times 1}{2+(-1)+(-2)}\right)$ **d'où** $H(-3;-4)$

On a $D=bar\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$ **donc** $D\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c};\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$

C'est-à-dire $D\left(\frac{1\times 0+(-1)\times 1+(-1)\times(-2)}{1+(-1)+(-1)};\frac{1\times 3+(-1)\times 0+(-1)\times 1}{1+(-1)+(-1)}\right)$ **d'où** $D(-1;-2)$

6) Il suffit de montrer que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ **par des coordonnées.**

On a $\overrightarrow{AD}(x_D-x_A;y_D-y_A)=\overrightarrow{AD}(-1-0;-2-3)=\overrightarrow{AD}(-1;-5)$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Et $\overrightarrow{CH}\left(x_H-x_C;y_H-y_C\right)=\overrightarrow{CH}\left(-3+2;-4-1\right)=\overrightarrow{CH}\left(-1;-5\right)$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ **et** $\overrightarrow{CH}$ **ont de mêmes coordonnées donc** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ **C.Q.F.D**

7) On a $G=bar\{(A;3);(B;-2);(C;-2)\}$ **donc** $(\forall M\in(P))\ \ 3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\left(3+(-2)+(-2)\right)\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{MG}$

Et $H=Bar\{(A;2);(B;-1);(C;-2)\}$ **donc** $(\forall M\in(P))\ \ 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\left(2+(-1)+(-2)\right)\overrightarrow{MH}=-\overrightarrow{MH}$

On a donc $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|\Leftrightarrow\left\|-\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MH}\right\|$

$\Leftrightarrow MG=MH$

Ainsi cet ensemble est la médiatrice du segment $[GH]$

Exemple 6

ABC un triangle.

1) Placer les points D et G tel que $D=bar\{(A;2);(B;-3)\}$ **et** $G=bar\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$

2) En utilisant l'associativité du barycentre vérifier que G est le milieu du segment $[CD]$

3) On pose $H=bar\{(A;-4);(B;1)\}$ **;** $E=bar\{(B;1);(C;5)\}$ **et** $F=bar\{(A;-4);(C;5)\}$

Montrer que les droites (CH) ; (AE) et (BF) sont concourantes en un point à préciser.

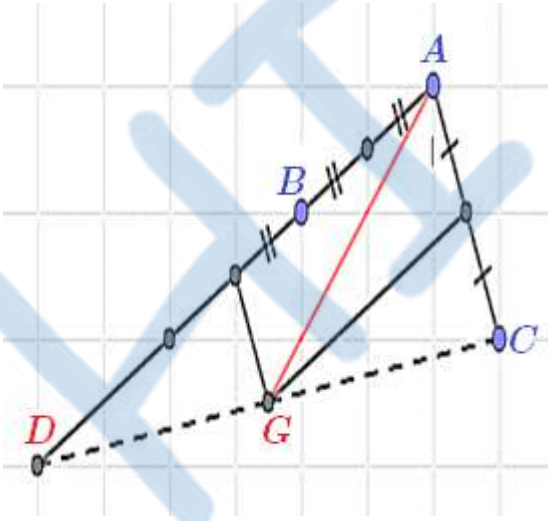
Solution

1) On a $D=bar\{(A;2);(B;-3)\}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}=\dfrac{-3}{2+(-3)}\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

Et $G=bar\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$

Donc : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\dfrac{-3}{2+(-3)+(-1)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{-1}{2+(-3)+(-1)}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$





2) On a $G=bar\{(A;2);(B;-3);(C;-1)\}$ **et** $D=bar\{(A;2);(B;-3)\}$ **donc par l'associativité du barycentre on obtient** $G=bar\{(D;2+(-3));((C;-1)\}$ **par suite** $G=bar\{(D;-1);((C;-1)\}$ **donc G est le milieu du segment** $[CD]$

3) On a les points H, E et F sont des barycentres partiels du barycentre $G'=bar\{(A;-4);(B;1);(C;5)\}$

(Le points G' existe est unique car $-4+1+5\neq0$ ***)***

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' **et H, on obtient** $G'=bar\{(H;-3);(C;5)\}$ **donc** $G'\in(HC)$

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' **et E, on obtient** $G'=bar\{(A;-4);(E;6)\}$ **donc** $G'\in(AE)$

-Appliquons l'associativité du barycentre sur G' **et F, on obtient** $G'=bar\{(F;1);(B;1)\}$ **donc** $G'\in(FB)$

Ainsi les droites (CH) ; (AE) et (BF) sont concourantes en G'**.**

Exercice 1

Déterminer deux réels a et b tel que $G = bar\{(A;a);(B;b)\}$ *dans chacun des cas suivants :*

1) $2\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; *2)* $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0}$

3) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{AB}$; *4)* $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

Soit A et B deux points du plan, construire le point G dans chacun des cas suivants :

1) $G = bar\{(A;-5);(B;-1)\}$ *et* $AB = 6$

2) $G = bar\{(A;-1);(B;6)\}$ *et* $AB = 5$

3) $G = bar\{(A;5);(B;-1)\}$ *et* $AB = 4$

4) $G = bar\{(A;-8);(B;5)\}$ *et* $AB = 3$

5) $G = bar\{(A;-2);(B;3)\}$ *et* $AB = 2$

6) $G = bar\{(A;6);(B;-5)\}$ *et* $AB = 1$

Exercice 3

On considère un triangle ABC et les points G, K et I tels que : $G = bar\{(A;-1);(B;-4);(C;3)\}$

$K = bar\{(A;-1);(B;-4)\}$ $I = bar\{(B;-4);(C;3)\}$

1) Construire les points G, K et I

2) En utilisant l'associativité du barycentre montrer que G est le milieu de $[AI]$.

3) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre montrer que :

$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ *et* $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$

b) En déduire que les points C, K et G sont alignés.

4) On considère le point $F = bar\{(A;-1);(C;3)\}$ *montrer que* $G \in (BF)$

5) En déduire que les droites (AI), (CK) *et* (BF) *sont concourantes en un point à déterminer.*

6) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|-\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = 32$

Exercice 4

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ *du plan, on considère les points* $A(2;0)$; $B(5;6)$; $C(-4;2)$; $D(-1;5)$

On pose $G = bar\{(A;1);(B;2)\}$ *et* $G' = bar\{(C;1);(D;2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de G et de G'

2) Soient I, J et K les milieux des segments $[AC]$, $[BD]$ *et* $[GG']$ *respectivement.*

a) Déterminer les coordonnées des points I, J et K

b) Montrer que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 5

On considère un triangle ABC et les points G, H et D tels que : $G = bar\{(A;1);(B;2);(C;1)\}$;

$H = bar\{(A;5);(B;2);(C;-3)\}$; *D est le milieu de* $[AC]$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{-3}{4}\overrightarrow{AC}$

b) Construire les points H et D

2) a) Exprimer D sous forme du barycentre de deux points

b) En appliquons la propriété de l'associativité du barycentre déduire que G est le milieu de $[DB]$

c) Placer le point G dans la figure.

3) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur G montrer que $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

b) En déduire que $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

c) En déduire que le quadrilatère CGHA est un parallélogramme.

4) Soit E le milieu de $[AB]$, *montrer que les points H, E et G sont alignés.*

5) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$

Exercice 6

On considère un triangle ABC et les points G, I et K tels que $G = bar\{(A;3);(B;2);(C;-1)\}$; *I est le milieu de* $[AC]$ *et* $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) En déduire que $(BI) \parallel (AG)$

3) a) Montrer que $K = bar\{(A;3);(B;2)\}$

b) Montrer que les points C, K et G sont alignés.

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $\left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 10$

Exercice 7

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de $(A;1)$, $(B;4)$ *et* $(C;-3)$.

1) Construire le barycentre I de $(B;4)$ *et* $(C;-3)$.

2) Montrer que $G = bar\{(A;1);(I;1)\}$

3) En déduire la position de G sur (AI).

Exercice 8

1) Placer dans un repère les points : $A(1;2)$, $B(3;4)$ *et* $C(2;5)$.

2) Soit G le barycentre des points pondérés : $(A;3)$, $(B;2)$ *et* $(C;4)$.

a) Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.

b) La droite (BG) *passe-t-elle par l'origine du repère ?*

Exercice 9

Soit ABC un triangle.

1) a) Construire le point I tel que $\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{BC}$

b) Montrer que $I=Bar\{(B;-2);(C;3)\}$

c) Montrer que $\overrightarrow{AI}=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

2) Soit $G=bar\{(A;-3);(B;-2);(C;3)\}$.

Montrer que $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3) a) En déduire que les points A, I et G sont alignés.

b) Construire le point G.

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :

a) $\left\|-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right\|$

b) $\left\|-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=3$

Exercice 10

$ABCD$ un quadrilatère dans le plan, on considère les points H, I et J tels que :

$\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

$I=bar\{(A;3);(C;-5)\}$

$J=bar\{(D;-1);(B;2)\}$

1) Montrer que $H=bar\{(A;3);(B;2);(C;-5);(D;-1)\}$

2) En appliquons la propriété de l'associativité du barycentre montrer que $H=bar\{(I;-2);(J;1)\}$

2) En déduire que I est le milieu de $[JH]$

Exercice 11

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(1;2)$, $B(-3;2)$ et $C(2;4)$

1) Déterminer les coordonnées du point G barycentre du système pondéré $\{(A;4);(B;-3);(C;3)\}$

2) Soit $m\in\mathbb{R}$, on considère le point G_m barycentre du système pondéré

$\{(A;3m+1);(B;-2m-3);(C;3-m)\}$

a) Etablir l'existence du point G_m

b) Trouver les coordonnées de G_m

c) Quel est l'ensemble des points G_m lorsque m varie sur $\mathbb{R}$

Exercice 12

Soit $ABCD$ un parallélogramme et $\alpha\in]0;+\infty[$

On considère les points K et L définis par

$\overrightarrow{DK}=(\alpha+2)\overrightarrow{DB}$ *et* $\overrightarrow{CL}=\alpha\overrightarrow{BC}$

Soit M le point d'intersection de (CK) et (DL)

Montrer que $\overrightarrow{DM}=\frac{\alpha+2}{\alpha^2+2\alpha+2}\overrightarrow{DL}$

Exercice 13

Soit ABC un triangle. Y est le milieu de $[BC]$.

1) Placer, en justifiant, le barycentre U de $(A;4)$ et $(C;1)$ puis placer le barycentre E de $(A;4)$ et $(B;1)$

2) Soit $G=bar\{(A;4);(B;1);(C;1)\}$. Montrer que G est aussi barycentre de $(E;5)$ et $(C;1)$.

3) Démontrer que les droites (EC), (AY) et (BU) sont concourantes.

Exercice 14

Soit $a\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ et $ABCD$ un trapèze tel que

$\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{CD}$

1) Déterminer les réels b et c pour que le point D soit le barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;b);(C;c)\}$

2) On suppose dans cette équation que $a=-1$

Soit E et F les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BE]$

Déterminer le nombre $\mathbb{1}$ pour que F soit le barycentre du système $\{(A;1);(B;-1);(C;1);(E;x)\}$

Exercice 15

Étant donné un triangle ABC et k un réel non nul donné, on définit les points D et E par les relations :

$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CE}=k\overrightarrow{CA}$

1) Faire une figure illustrant ces données lorsque $k=\frac{1}{3}$, puis lorsque $k=-1$.

2) Montrer que $D=bar\{(A;1-k);(B;k)\}$

3) Montrer que $E=bar\{(C;1-k);(A;k)\}$

4) En déduire que pour tout point M du plan, on a :

$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+k\overrightarrow{CB}=2\left(\overrightarrow{MB'}+k\overrightarrow{B'C'}\right)$ *où B' et C' sont les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.*

5) Soit I le milieu de $[DE]$. Déduire de la question précédente que I, B' et C' sont alignés.

Exercice 16

ABC est un triangle de centre de gravité G. On note I, J, M, N, R et S les points définis par :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Démontrer que les droites : (IS), (MR) et (NJ) sont concourantes en G.



6

Analytique du produit scalaire dans le plan



Rappel

1- Repère dans le plan :

1) Tous trois points O, I et J distincts non alignés déterminent un repère du plan notée $(O;I;J)$ ou $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

2) Si on pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le couple $(\vec{i},\vec{j})$ est appelé une base du plan

Si $\vec{i}\perp\vec{j}$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthogonale et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthogonal.

Si $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base normée et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère normé.

Si $\vec{i}\perp\vec{j}$ et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$ on dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée et que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé.

2- Coordonnées du milieu - coordonnées d'un vecteur

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

1) Pour tout point A du plan, il existe un unique couple (x_A,y_A) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}$

(x_A,y_A) est appelé couple de coordonnées de A dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et on écrit $A(x_A,y_A)$

On a donc : $A(x_A,y_A)\in(O;\vec{i};\vec{j})\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}$

2) Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple $(x;y)$ de nombres réels tel que : $\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$

$(x;y)$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ et on écrit $\vec{u}(x;y)$

On a donc : $\vec{u}(x;y)\in(\vec{i};\vec{j})\Leftrightarrow\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$

3) Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts du plan alors les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$ est $I(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$

4) Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan alors les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$

3-Formule trigonométrique du produit scalaire :

- Quel que soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan on a :

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times cos(\alpha)$ ou α est une mesure de l'angle $(\hat{\vec{u};\vec{v}})$

Autrement dit quel que soit les points A, B et C du plan on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos(B\hat{A}C)$

Cette formule est appelée la formule trigonométrique du produit scalaire.

- Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{u}$ est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$ on le note $\vec{u}^2$ donc $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}$
- $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$; $\overrightarrow{AB}^2=AB^2$

Produit scalaire et orthogonalité :

$\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow(AB)\perp(CD)$

4- Déterminant de deux vecteurs :

Soient $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ deux vecteurs du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le nombre $ab'-a'b$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre, on le note par $det(\vec{u};\vec{v})$ ou $\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}$ et on écrit : $det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Déterminant et colinéarité :

$det(\vec{u};\vec{v})=0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

5- Vecteur directeur - équation cartésienne d'une droite

- Soit (D) une droite du plan. Toute vecteur non nul $\vec{u}$ et de même direction de (D) est appelé vecteur directeur de la droite (D).
- Toute droite (D) du plan est un ensemble des points $M(x;y)$ vérifient l'équation $ax+by+c=0$ tel que $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ et $(a,b)\neq(0,0)$.

  L'équation $(D):\ ax+by+c=0$ est appelé une équation cartésienne de la droite (D).

  Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $(D):\ ax+by+c=0$

6- Représentation paramétrique d'une droite

Soit $B(x_B,y_B)$ un point du plan et $\vec{u}(a';b')$ un vecteur non nul du plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La droite (D) passant par le point $B(x_B,y_B)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a';b')$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifient le système $\begin{cases}x=x_B+a'\times t\\ y=y_B+b'\times t\end{cases}\ /\ t\in\mathbb{R}$
- Le système $(D):\ \begin{cases}x=x_B+a'\times t\\ y=y_B+b'\times t\end{cases}\ /\ t\in\mathbb{R}$ est appelé une représentation paramétrique de la droite (D).

7- Résolution graphique d'une inéquation de premier degré de deux inconnus

Soit (D) une droite d'équation $(D):\ ax+by+c=0$ dans un plan rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- La droite (D) partage le plan en deux demi-plans (D^+) et (D^-) tel que :

  (D^+) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $ax+by+c>0$

  (D^-) est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $ax+by+c<0$
- Pour déterminer (D^+) ou (D^-) graphiquement, on procède de la façon suivante :

  On trace la droite (D) ;

  On choisit un point du plan en dehors de la droite (D) et on teste s'il appartient au demi-plan cherché ou non. Le plus souvent, quand la droite ne passe pas par l'origine, on choisit $O(0,0)$ qui fournit le résultat facilement, mais si la droite passe par l'origine du repère on choisit un autre point.



8- Mesures principal usuelles :

Soit $\theta\in\left]-\pi;\pi\right]$ la mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$

$\begin{cases}cos(\theta)=\frac{1}{2}\\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$; $\begin{cases}cos(\theta)=\frac{1}{2}\\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}$; $\begin{cases}cos(\theta)=-\frac{1}{2}\\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\pi-\frac{\pi}{3}$; $\begin{cases}cos(\theta)=-\frac{1}{2}\\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\pi+\frac{\pi}{3}$

$\begin{cases}cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ sin(\theta)=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$; $\begin{cases}cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ sin(\theta)=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=-\frac{\pi}{6}$; $\begin{cases}cos(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ sin(\theta)=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\pi-\frac{\pi}{6}$; $\begin{cases}cos(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ sin(\theta)=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\pi+\frac{\pi}{6}$

$\begin{cases}cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$; $\begin{cases}cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}$; $\begin{cases}cos(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\pi-\frac{\pi}{4}$; $\begin{cases}cos(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ sin(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\pi+\frac{\pi}{4}$

Activités

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Activité 1 :

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs non nuls du plan.

1) Développer et simplifier le produit scalaire suivant $(x\vec{i}+y\vec{j}).(x'\vec{i}+y'\vec{j})$

2) En déduire que $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ puis montrer que $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\vec{u}(x;y)\Leftrightarrow\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$

$\|\vec{u}\|^2=\vec{u}.\vec{u}$

3) Vérifier que $cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

4) On considère les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$

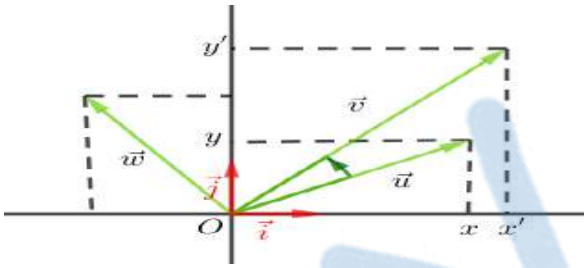
a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

b) En déduire que $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$AB^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2$

5) Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan tel que $(\vec{u};\vec{w})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\|\vec{u}\|=\|\vec{w}\|$ (Voir la figure ci-contre)

a) Montrer que $(\vec{v};\vec{w})\equiv\dfrac{\pi}{2}-(\vec{u};\vec{v})[2\pi]$ et $\vec{w}(-y;x)$



$(\vec{v};\vec{u})\equiv-(\vec{u};\vec{v})[2\pi]$

$(\vec{v};\vec{w})\equiv(\vec{v};\vec{u})+(\vec{u};\vec{w})[2\pi]$

$cos(\dfrac{\pi}{2}-x)=sin(x)$

b) Calculer $cos(\vec{v};\vec{w})$ par deux méthodes et en déduire que $sin(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Activité 2 :

Soit (Δ) la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ tels que $a;b;c\in\mathbb{R}$ et $(a;b)\neq(0;0)$

1) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de (Δ)

2) Montrer que le vecteur $\vec{n}(a;b)$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

On dit que $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à la droite (Δ)

3) Soit (D) la droite passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$

a) Montrer que pour tout point $M(x;y)$ du plan, on a : $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

b) En déduire que $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Activité 3 :

Soient (D) et (D') les droites définies respectivement par les équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$

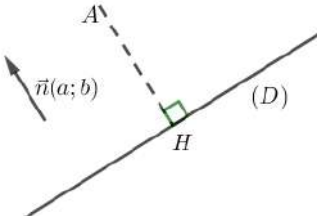
1) Déterminer un vecteur normal à chacun de (D) et (D')

2) En déduire que $(D)\perp(D')\Leftrightarrow aa'+bb'=0$

Activité 4 :

Soit (D) la droite du plan d'équation $ax+by+c=0$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$

On considère le point H le projeté orthogonal de $A(x_A;y_A)$ sur la droite (D)



1) Vérifier que $ax_H+by_H=-c$ et $\left|cos(\overrightarrow{AH};\vec{n})\right|=1$

2) En déduire que $\overrightarrow{AH}.\vec{n}=-(ax_A+by_A+c)$ et $\left|\overrightarrow{AH}.\vec{n}\right|=AH\times\|\vec{n}\|$

La distance AH est appelé la distance du point A à la droite (D) et on la note $d(A;(D))$

3) En déduire que $d(A;(D)) = AH = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Activité 5 :



A-Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2

1) a) Calculer les distances ΩA, ΩB et ΩC tels que $A(3;1)$, $B(2;2)$ et $C(\sqrt{3}+1;2)$

b) En déduire les points appartenant à (C) parmi les points **A**, **B** et **C**

2) Soit $M(x;y)$ un point du plan

a) Calculer la distance ΩM en fonction de x et y

b) En déduire que $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

L'équation $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ est appelé l'équation cartésienne de cercle (C)

B- Soit (C) le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R (avec $a;b;R \in \mathbb{R}$ et $R \geq 0$)

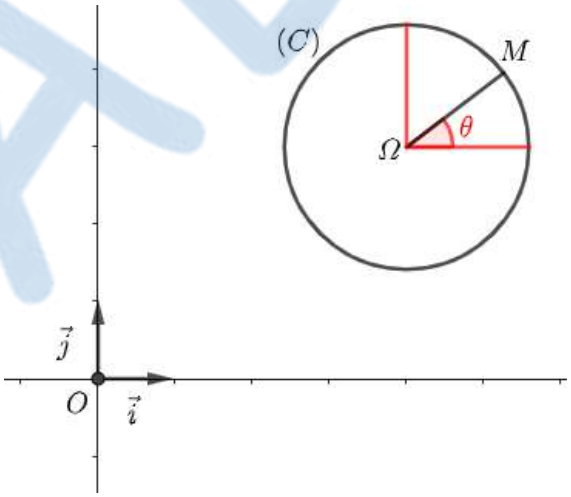
1) Montrer que l'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ est l'équation cartésienne de cercle (C)

2) Montrer que l'équation précédente peut s'écrire sous la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ où $c = a^2 + b^2 - R^2$

Activité 6 :

Soit (C) un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon **R**,

Partie 1 : ***M*** un point de (C) tel que $(\vec{i};\overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta[2\pi]$ $(\theta \in \mathbb{R})$



1) Montrer que $\vec{i}.\overrightarrow{\Omega M} = R\cos(\theta)$

2) Vérifier que $(\vec{j};\overrightarrow{\Omega M}) \equiv \dfrac{\pi}{2} - \theta[2\pi]$ et en déduire que $\vec{j}.\overrightarrow{\Omega M} = R\sin(\theta)$

3) Soit $(x;y)$ le couple des coordonnées du point M

a) Déterminer les coordonnes du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ et en déduire que :

$\overrightarrow{\Omega M} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j}$

b) En déduire que $\vec{i}.\overrightarrow{\Omega M} = x-a$ et $\vec{j}.\overrightarrow{\Omega M} = x-b$

c) En déduire que $M(x;y) \in (C) \Rightarrow \begin{cases} x = a + R\cos(\theta) \\ y = b + R\sin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$

Partie 2 : Soit $M(x;y)$ un point du plan. Montrer que $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow (\exists \theta \in \mathbb{R}) / \begin{cases} x = a + R\cos(\theta) \\ y = b + R\sin(\theta) \end{cases}$

Le système $\begin{cases} x = a + R\cos(\theta) \\ y = b + R\sin(\theta) \end{cases} / \theta \in \mathbb{R}$ est appelé une représentation paramétrique du cercle (C)

Activité 7 :

Soient $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ et (Γ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

1) Montrer que $M(x;y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2-4c}{4}$

2) On pose $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ en déduire que $M(x;y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{a^2+b^2-4c}{4}$

3) En déduire la nature de (Γ) dans chacun des cas suivants $a^2 + b^2 - 4c > 0$, $a^2 + b^2 - 4c = 0$ et $a^2 + b^2 - 4c < 0$

Activité 8 :

Soit (C) le cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon **R**, $A(x_A;y_A)$ un point du cercle (C) et (T) la tangente au cercle (C) au point ***A***

1) Déterminer un vecteur normal à la droite (T)

2) En déduire que $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM} = 0$

3) En déduire que $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow (a-x_A)(x-x_A) + (b-y_A)(y-y_A) = 0$

Résumé 6 : Analytique du produit scalaire dans le plan

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan, alors :

1 $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$

2 $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

3 $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

4 $cos(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$ et 5 $sin(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$

- L'aire du triangle ABC est : 6 $S = \dfrac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|$
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz : 20 $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \geq |\vec{u}.\vec{v}|$
- L'inégalité triangulaire 21 $\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\| \geq \|\vec{u}+\vec{v}\|$

- $\overrightarrow{AB}(\underbrace{x_B-x_A}_{x_{\overrightarrow{AB}}},\underbrace{y_B-y_A}_{y_{\overrightarrow{AB}}})$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{AC}}$
- $AB = \sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2+(y_{\overrightarrow{AB}})^2}$
- $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} & x_{\overrightarrow{AC}} \\ y_{\overrightarrow{AB}} & y_{\overrightarrow{AC}} \end{vmatrix}$
- $cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$
- $sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{AB\times AC}$
- $S = \dfrac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})\right|$
- $S = \dfrac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\right|$



7 Le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est normal à la droite $(D): ax+by+c=0$

- L'équation cartésienne de la droite passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ est 8 $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$
- Si $(D): ax+by+c=0$ et $(D'): a'x+b'y+c'=0$ alors 9 $(D)\perp(D') \Leftrightarrow aa'+bb'=0$
- Soit (D) la droite du plan d'équation $ax+by+c=0$ et $A(x_A;y_A)$ un point du plan : 10 $d(A;(D)) = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- L'équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est 11 $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$

Que l'on peut écrire 12 $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ où $c = a^2+b^2-R^2$

- Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$
- L'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est 13 $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

14 Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ où $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

Si $a^2+b^2-4c>0$ alors (Γ) est le cercle de centre $\Omega(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2})$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

Si $a^2+b^2-4c=0$ alors (Γ) est $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$

Si $a^2+b^2-4c<0$ alors (Γ) est l'ensemble vide.

15 Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon R et M un point du plan :

→ M est sur le cercle $(C) \Leftrightarrow \Omega M = R$

→ M est à l'intérieur du cercle $(C) \Leftrightarrow \Omega M < R$

→ M est à l'extérieur du cercle $(C) \Leftrightarrow \Omega M > R$

16 Si $(C): x^2+y^2+ax+by+c=0$ est une équation cartésienne du cercle (C) alors :

→ $M(x_M;y_M)$ est sur le cercle (C)
$\Leftrightarrow {x_M}^2+{y_M}^2+ax_M+by_M+c=0$

→ $M(x_M;y_M)$ est à l'intérieur du cercle (C)
$\Leftrightarrow {x_M}^2+{y_M}^2+ax_M+by_M+c<0$

→ $M(x_M;y_M)$ est à l'extérieur du cercle (C)
$\Leftrightarrow {x_M}^2+{y_M}^2+ax_M+by_M+c>0$

- Le cercle (C) de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système 17 $\begin{cases} x = a+R\cos(\theta) \\ y = b+R\sin(\theta) \end{cases} /\theta\in\mathbb{R}$

18 Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon R et (D) une droite dans le plan et soit $d = d(\Omega;(D))$ la distance du point Ω à la droite (D)

→ Si $d>R$ alors $(D)\cap(C)=\varnothing$

→ Si $d=R$ alors $(D)\cap(C)=\{H\}$

→ Si $d<R$ alors $(D)\cap(C)=\{A;B\}$

- La tangente au cercle (C) au point $A\in(C)$ est l'ensemble des points M du plan tel que 19 $\overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM}=0$

Exemples résolus

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exemple 1

On considère les vecteurs suivants $\vec{u}(5;-1)$, $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}$ **et** $\vec{w}=(5m+2)\vec{i}-\vec{j}$ $(m\in\mathbb{R})$

1) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ **et** $\|\vec{v}\|$

2) Calculer $cos(\vec{u};\vec{v})$, $sin(\vec{u};\vec{v})$ **et déduire** $(\vec{u};\vec{v})$.

3) Calculer $\vec{u}.\vec{w}$ **en fonction de** m .

4) En déduire la valeur de m **pour que** $\vec{u}$ **et** $\vec{w}$ **soient orthogonaux.**

5) On considère les points $A(1;4)$ **et** $B(-5;1)$, **calculer la distance** AB.

Solution

1) On a $\vec{u}(5;-1)$ **et** $\vec{v}(2;-3)$

Donc : $\vec{u}.\vec{v}=x\times x'+y\times y'=5\times 2+(-1)\times(-3)=13$; $\|\vec{u}\|=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$; $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$

2) $cos(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{13}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\dfrac{13}{13\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $sin(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\dfrac{\begin{vmatrix}5 & 2\\ -1 & -3\end{vmatrix}}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}}=\dfrac{-13}{13\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Et par conséquent $(\vec{u};\vec{v})\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

3) On a $\vec{u}(5;-1)$**et** $\vec{w}(5m+2;-1)$, **donc** $\vec{u}.\vec{w}=5\times(5m+2)+(-1)\times(-1)=25m+11$

4) On a $\vec{u}\perp\vec{w}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{w}=0$ **donc** $\vec{u}\perp\vec{w}\Leftrightarrow 25m+11=0$, **d'où** $\vec{u}\perp\vec{w}\Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{25}$

5) $AB=\sqrt{(-5-1)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{5}$

Exemple 2

Calculer l'aire du triangle ABC **sachant que** $A(2;-4)$, $B(1;3)$ **et** $C(-2;7)$

Solution

On a $\overrightarrow{AB}(-1;7)$ **et** $\overrightarrow{AC}(-4;11)$ **donc** $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 7 & 11\end{vmatrix}=17$.

Par suite l'aire du triangle ABC **est :** $S=\dfrac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|=\dfrac{17}{2}=4.5$



Exemple 3

1) Déterminer un vecteur normal à la droite (D) **dans les cas suivants :**

a) $(D):x-4y+1=0$

b) $(D):\dfrac{2}{3}x+3=0$

c) $(D):y=2$

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) **passant par le point** A **et de vecteur normal** $\vec{n}$ **dans les cas suivants :**

a) $A(4;-1)$ **et** $\vec{n}(1;-3)$

b) $A(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ **et** $\vec{n}(2\sqrt{2};3\sqrt{2})$

3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) **passant par le point** $A(4;2)$ **et de vecteur directeur** $\vec{u}(-1;3)$

Solution

1) a) On a l'équation cartésienne de (D) s'écrit : $1x+(-4)y+1=0$ donc le vecteur $\vec{n}(1;-4)$ est un vecteur normal à la droite (D)

b) On a l'équation cartésienne de (D) s'écrit : $\frac{2}{3}x+0y+3=0$ donc le vecteur $\vec{n}(\frac{2}{3};0)$ est un vecteur normal à la droite (D)

c) On a l'équation cartésienne de (D) s'écrit : $0x+1y-2=0$ donc le vecteur $\vec{n}(0;1)$ est un vecteur normal à la droite (D)

2) a)

Méthode 1

L'équation cartésienne de (D) s'écrit : $(D): a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

C'est-à-dire : $(D): 1(x-4)+(-3)(y-(-1))=0$

Ainsi $(D): x-3y-7=0$

Méthode 2

L'équation cartésienne de (D) s'écrit : $(D): ax+by+c=0$

C'est-à-dire : $(D): 1x-3y+c=0$

Puisque $A\in(D)$ alors $1x_A-3y_A+c=0$

C'est-à-dire : $1\times 4-3\times(-1)+c=0$, d'où $c=7$

Ainsi $(D): x-3y-7=0$.

b) L'équation cartésienne de (D) s'écrit : $(D): a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

C'est-à-dire : $(D): 2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+3\sqrt{2}(y-(-\sqrt{2}))=0$ on obtient $(D): 2\sqrt{2}x-4+3\sqrt{2}y+6=0$

Ainsi $(D): 2\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+2=0$

3) Rappel : si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) passant par A, alors :

$M\in(D) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$

On a : $M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & -1 \\ y-y_A & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3(x-4)+(y-2)=0$

$\Leftrightarrow 3x+y-14=0$. Ainsi l'équation cartésienne de (D) est $(D): 3x+y-14=0$

Exemple 4

Etudier la perpendicularité des droites (Δ) et (Δ') dans chacun des cas suivants :

1) $(\Delta): x-6y+2=0$ et $(\Delta'): 6x+y+1=0$

2) $(\Delta): 2x-y+3=0$ et $(\Delta'): x+y+2=0$

3) $(\Delta): x-y+4=0$ et $(\Delta'): \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \end{cases} / (t\in\mathbb{R})$

Solution

1) Puisque $1\times 6+(-6)\times 1=0$ alors : $(\Delta)\perp(\Delta')$

2) Puisque $2\times 1+(-1)\times 1=1\neq 0$ alors : (Δ) et (Δ') ne sont pas perpendiculaires.

3) On a le vecteur $\vec{n}(1;-1)$ est normal à (Δ) et $\vec{u}(2;3)$ est un vecteur directeur de (Δ').

Or $det(\vec{n};\vec{u})=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=3+2=5\neq 0$ alors (Δ) et (Δ') ne sont pas perpendiculaires.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exemple 5

Calculer la distance du point $A(5;-3)$ à la droite (D) d'équation $3x+2y+4=0$

Solution

La distance du point A à la droite (D) est : $d(A;(D))=\dfrac{|3x_A+2y_A+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|3\times 5+2\times(-3)+4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

Exemple 6

Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

1) **(C) est de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $R=2\sqrt{2}$.**

2) **(C) est de centre $\Omega(1;3)$ et passant par $A(-1;2)$.**

3) **(C) est de diamètre $[AB]$ tels que $A(-4;3)$ et $B(2;-1)$.**

4) **(C) est de centre $\Omega(2;-1)$ et la droite (Δ) d'équation $(\Delta): x-3y+5=0$ tangente à (C).**

Solution



1) On a : $a=2$, $b=-1$ et $R=2\sqrt{2}$

Méthode 1

L'équation cartésienne du cercle (C) est : $(x-2)^2+(y-(-1))^2=(2\sqrt{2})^2$

C'est-à-dire $x^2-4x+4+y^2+2y+1=8$ **ce qui donne :** $x^2+y^2-4x+2y-3=0$

Méthode 2

L'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times 2x-2\times(-1)y+c=0$ **où** $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=2^2+(-1)^2-(2\sqrt{2})^2=-3$, **d'où l'équation cartésienne du cercle (C) (C) est**

$x^2+y^2-4x-2y-3=0$

2) On a : $a=1$, $b=3$ et le rayon de (C) est $R=A\Omega=\sqrt{(1-(-1))^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times 1x-2\times 3y+c=0$ **où** $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=1^2+3^2-(\sqrt{5})^2=5$, **d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est** $x^2+y^2-2x-6y+5=0$

3) Méthode 1

L'équation cartésienne du cercle (C) est : $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

C'est-à-dire $(x-(-4))(x-2)+(y-3)(y-(-1))=0$ **ce qui donne :** $x^2+y^2+2x-2y-11=0$

Méthode 2

Le centre du cercle (C) est le milieu Ω de $[AB]$

On sait que : $a=x_\Omega=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-4+2}{2}=-1$ **et** $b=y_\Omega=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{3+(-1)}{2}=1$

Le rayon du cercle (C) est $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(2+4)^2+((-1-3)^2}}{2}=\sqrt{13}$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times(-1)x-2\times 1y+c=0$ **où** $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=(-1)^2+1^2-(\sqrt{13})^2=-11$, **d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est** $x^2+y^2+2x-2y-11=0$

4) On a : $a=2$, $b=-1$ et puisque (Δ) est tangente à (C) alors le rayon de (C) est :

$R=d(\Omega;(\Delta))=\dfrac{|x_\Omega-3y_\Omega+5|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|2-3\times(-1)+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\dfrac{|10|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

Donc l'équation cartésienne du cercle (C) est $x^2+y^2-2\times 2x-2\times(-1)y+c=0$ **où** $c=a^2+b^2-R^2$

On a : $c=2^2+(-1)^2-(\sqrt{10})^2=-5$, **d'où l'équation cartésienne du cercle (C) est** $x^2+y^2-4x+2y-5=0$

Exemple 7

Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) des points $M(x;y)$ du plan dans chacun des cas suivants :

1) $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ **2)** $x^2+y^2+6x-4y+16=0$ **3)** $x^2+y^2+4x+10y+29=0$

Solution

1) On a : $a=4$, $b=-6$ **et** $c=9$ **donc** $a^2+b^2-4c=4^2+(-6)^2-4\times 9=16>0$ **par conséquent** (Γ) **est le cercle de centre** $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ **et de rayon** $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ **c'est-à-dire** $\Omega(-2;3)$ **et de rayon** $R=2$

2) On a : $a=6$, $b=-4$ **et** $c=16$ **donc** $a^2+b^2-4c=6^2+(-4)^2-4\times 16=-12<0$ **par conséquent** (Γ) **est l'ensemble vide.**

3) On a : $a=4$, $b=10$ **et** $c=29$ **donc** $a^2+b^2-4c=4^2+10^2-4\times 29=0$, **d'où** (Γ) **est le singleton** $\Omega(-2;-5)$

Exemple 8

1) Déterminer la position du point M par rapport au cercle (C) dans chacun des cas suivants :

a) $C(\Omega(2;3);1)$ **et** $M(-1;2)$; **b)** $(C):x^2+y^2-2x+4y=0$ **et** $M(0;0)$

2) a) Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $x^2+y^2-2x+2y-7=($

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2+y^2-2x+2y-7<0$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x-y>0$

d) Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases}x^2+y^2-2x+2y-7<0\\x-y>0\end{cases}$



Solution

1) a) On a : le rayon de (C) **est** $R=1$ **et**

$\Omega M=\sqrt{(-1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}>1$

Donc M est à l'extérieur du cercle (C)

b) On sait que : (C) **est de centre** $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ **et de rayon** $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

Or $a=-2, b=4$ **et** $c=0$ **alors** $\Omega(1;-2)$ **et** $R=\sqrt{5}$

On a $\Omega M=\sqrt{(0-1)^2+(0+2)^2}=\sqrt{5}=R$

Donc M est sur le cercle (C).

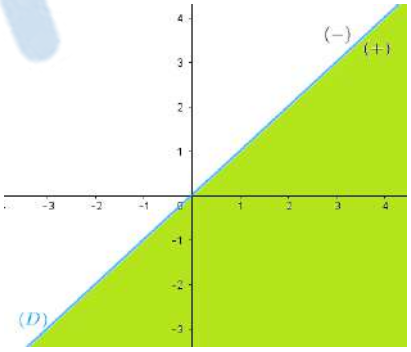
2) a) On a : $a=-2$; $b=2$ **et** $c=-7$.

Donc $a^2+b^2-4c=(-2)^2+2^2-4\times(-7)=36>0$.

Par conséquent (C) **est le cercle de centre** $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})=\Omega(1;-1)$ **et de rayon** $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=3$

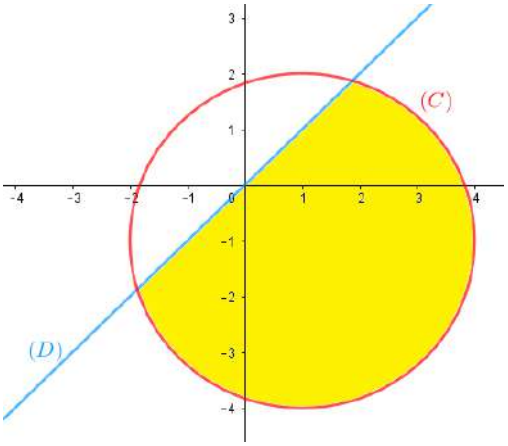
b) Les solutions graphiques de l'inéquation $x^2+y^2-2x+2y-7<0$ **sont les couples** $(x;y)$ **de coordonnées des points situés à l'intérieur du cercle** (C) **précédente.**

c) Les solutions graphiques de l'inéquation $x-y>0$ **sont les couples** $(x;y)$ **de coordonnées des points situés dans** (D^+) **tel que** (D) **est la droite d'équation :** $x-y=0$:



d) Les solutions graphiques du système : $\begin{cases}x^2+y^2-2x+2y-7<0\\x-y>0\end{cases}$ **sont les couples** $(x;y)$ **de coordonnées des points situés à l'intersection de l'intérieur du cercle** (C) **avec** (D^+)

C'est-à-dire les couples $(x;y)$ **des points appartenant à la partie colorée de la figure ci-dessous :**



Exemple 9

1) Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C) dans chacun des cas suivants :

a) (C) **est de centre** $\Omega(2;3)$ **et de rayon** $R=5$; **b)** $(C): x^2+y^2-2x+6y-6=0$

2) Déterminer l'ensemble (C) **des points** $M(x;y)$ **du plan tel que :** $\begin{cases} x=1+\sqrt{2}cos(\theta) \\ y=-3+\sqrt{2}sin(\theta) \end{cases} (\theta\in\mathbb{R})$

3) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) **de représentation paramétrique :** $\begin{cases} x=1+3cos(t) \\ y=-1+3sin(t) \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

Solution

1) a) une représentation paramétrique du cercle (C) **est donnée par** $\begin{cases} x=2+5cos(\theta) \\ y=3+5sin(\theta) \end{cases} (\theta\in\mathbb{R})$

b) Déterminons le centre et le rayon de (C)

$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+6y-6=0\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+6y-6=0\Leftrightarrow (x^2-2x+1)-1+(y^2+6y+9)-9-6=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)=16=4^2$ **. D'où** (C) **est de centre** $\Omega(1;-3)$ **et de rayon** $R=4$

Donc une représentation paramétrique du cercle (C) **est le système :** $\begin{cases} x=1+4cos(\theta) \\ y=-3+4sin(\theta) \end{cases} (\theta\in\mathbb{R})$

2) On a $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2}cos(\theta) \\ y=-3+\sqrt{2}sin(\theta) \end{cases} (\theta\in\mathbb{R})\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{2}cos(\theta) \\ y+3=\sqrt{2}sin(\theta) \end{cases} (\theta\in\mathbb{R})$

Donc $M(x;y)\in(C)\Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=2cos^2(\theta)+2sin^2(\theta)=2(cos^2(\theta)+sin^2(\theta))=2=\sqrt{2}^2$

C'est-à-dire que (C) **est le cercle de centre** $\Omega(1;-3)$ **et de rayon** $R=\sqrt{2}$

3) On a $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+3cos(t) \\ y=-1+3sin(t) \end{cases} (t\in\mathbb{R})\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3cos(t) \\ y+1=3sin(t) \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

Donc $(x-1)^2+(y+1)^2=9cos^2(t)+9sin^2(t)=9(cos^2(t)+sin^2(t))=9$

C'est-à-dire $(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)=9$ **d'où finalement** $x^2+y^2-2x+2y-7=0$

Exemple 10

Etudier l'intersection de la droite (D) **et du cercle** (C) **dans chacun des cas suivants :**

1) $(C): x^2+y^2-x-6y=0$ **et** $(D): x-y-1=0$

2) $(C): (x-1)^2+(y+1)^2=5$ **et** $(D): 2x+y+4=0$

3) $(C): x^2+y^2=9$ **et** $(D): y=4$



Solution

1) On sait que (C) **est de centre** $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ **et de rayon** $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

Or $a=-1$; $b=-6$ **et** $c=0$ **alors** (C) **est de centre** $\Omega(\frac{1}{2};3)$ **et de rayon** $R=\frac{\sqrt{37}}{2}$

On a $d(\Omega;(D))=\frac{|x_\Omega-y_\Omega-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|\frac{1}{2}-3-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|-\frac{7}{2}|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$ **donc** $d(\Omega;(D))<R$

Par conséquent, la droite (D) **coupe le cercle** (C) **en deux points** A **et** B

Déterminons le couple des coordonnées de A **et de** B

$M(x;y)\in(D)\cap(C)\Leftrightarrow \begin{cases} M(x;y)\in(D) \\ M(x;y)\in(C) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ x^2+y^2-x-6y=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ (y+1)^2+y^2-(y+1)-6y=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ 2y^2-5y=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ y(2y-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ y = 0 \quad ou \quad y = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0+1 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2}+1 = \frac{7}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ainsi les points d'intersection de (D) **et** (C) **sont :** $A(1;0)$ **et** $B(\frac{7}{2};\frac{5}{2})$

2) On a (C) **est de centre** $\Omega(1;-1)$ **et de rayon** $R=\sqrt{5}$

On a $d(\Omega;(D)) = \frac{|2x_\Omega + y_\Omega + 4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|2\times 1 - 1 + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ **donc** $d(\Omega;(D))) = R$ **par conséquent, la droite** (D) **coupe le cercle** (C) **en un point** H **.** ((D) **est tangente au cercle** (C))

Déterminons le couple des coordonnées du point H **:**

$$M(x;y) \in (D) \cap (C) \Leftrightarrow \begin{cases} M(x;y) \in (D) \\ M(x;y) \in (C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+4=0 \\ (x-1)^2+(y+1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-4 \\ (x-1)^2+(-2x-4+1)^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-4 \\ (x-1)^2+(-2x-3)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-4 \\ x^2-2x+1+4x^2+12x+9 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-4 \\ 5x^2+10x+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-4 \\ x^2+2x+1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x-4 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ y = -2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$ **, ainsi le point d'intersection de** (D) **et** (C) **est** $H(-1;-2)$ **.**

3) On a (C) **est de centre** $\Omega(0;0)$ **et de rayon** $R=3$ **et** $(D): 0x+1y-4=0$

On a $d(\Omega;(D)) = \frac{|0x_\Omega + y_\Omega - 4|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|0\times 0 + 0 - 4|}{1} = 4$ **, donc** $d(\Omega;(D)) > R$ **, par conséquent** $(D) \cap (C) = \varnothing$

Exemple 11

Vérifier que le point A **appartient au cercle** (C) **puis déterminer une équation cartésienne de la tangente** (T) **au cercle** (C) **au point** A **dans chacun des cas suivants :**

1) $(C): x^2+y^2+x-2y=0$ **et** $A(0;0)$ **;** **2)** $(C): (x-2)^2+(y-4)^2=4$ **et** $A(2;2)$ **;** **3)** $(C): x^2+y^2=1$ **et** $A(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$

Solution

1) On a : $x_A^2+y_A^2+x_A-2y_A = 0+0 = 0$**, donc** $A \in (C)$

On a $(C): x^2+y^2+x-2y=0$**, donc** (C) **est de centre** $\Omega(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}) = \Omega(-\frac{1}{2};-\frac{-2}{2}) = \Omega(-\frac{1}{2};1)$

Donc : $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}-x_A\right)(x-x_A)+(1-y_A)(y-y_A)=0$

$\Leftrightarrow (-\frac{1}{2}-0)(x-0)+(1-0)(y-0)=0$**, ainsi** $(T): \frac{1}{2}x-y=0$



2) On a : $(x_A-2)^2+(y_A-4)^2 = (2-2)^2+(2-4)^2 = 4$**, donc** $A \in (C)$

On a $(C): (x-2)^2+(y-4)^2=4$**, donc** (C) **est de centre** $\Omega(2;4)$

Donc : $M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (2-x_A)(x-x_A)+(4-y_A)(y-y_A)=0 \Leftrightarrow (2-2)(x-2)+(4-2)(y-2)=0$

$\Leftrightarrow 2y-4=0$**, d'où finalement** $(T): y-2=0$

3) On a : $x_A^2+y_A^2 = (-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1$ **donc** $A \in (C)$

On a $(C): x^2+y^2=1$**, donc** (C) **est de centre** $\Omega(0;0)$

$M(x;y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (0-x_A)(x-x_A)+(0-y_A)(y-y_A)=0 \Leftrightarrow (0+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})+(0-\frac{\sqrt{3}}{2})(y-\frac{\sqrt{3}}{2})=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1=0$**, ainsi** $(T): x-\sqrt{3}y+2=0$

Exemple 12

Trouver les tangentes au cercle (C) d'équation $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ qui sont parallèles à $(D):3x-4y=0$

Solution

On a le cercle (C) est de centre $\Omega(3;1)$ et de rayon $R=3$

Soit (T) une droite parallèle à $(D):3x-4y=0$ donc une équation cartésienne de (T) s'écrit : $(T):3x-4y+c=0$

On a : (T) est tangente au cercle $(C) \Leftrightarrow d(\Omega;(T))=R$

Donc (T) est tangente au cercle $(C) \Leftrightarrow \dfrac{|3\times 3-4\times 1+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5 \Leftrightarrow |5+c|=25 \Leftrightarrow 5+c=25 \quad ou \quad -(5+c)=25$

D'où $c=20 \quad ou \quad c=-30$ par suite les tangentes au cercle (C) qui sont parallèles à $(D):3x-4y=0$ sont : $(T_1):3x-4y+20=0$ et $(T_2):3x-4y-25=0$

Exemple 13

Vérifier que le point $A(4;-2)$ est à l'extérieur du cercle (C) d'équation : $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ puis trouver les équations cartésiennes des tangentes au cercle (C) issues de A

Solution

On a : $(x_A-3)^2+(y_A-1)^2=(4-3)^2+(-2-1)^2=1+9=10>5$ donc $A(4;-2)$ est à l'extérieur du cercle (C)

Méthode 1 :

→ **L'équation cartésienne d'une droite (T) tangente au cercle (C) issue de A s'écrit $ax+by+c=0$ ou $a;b;c\in\mathbb{R}$ et $(a;b)\neq(0;0)$**

→ **Puisque $A\in(T)$ alors $4a-2b+c=0$ ce qui donne $c=2b-4a$ par conséquent l'équation de (T) devient $(T):ax+by+2b-4a=0$**

→ **Puisque (T) est tangente au cercle (C) alors $d(\Omega;(T))=R=\sqrt{5}$**

→ **On a $d(\Omega;(T))=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|a\times 3+b\times 1+2b-4a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|3b-a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |3b-a|=\sqrt{5(a^2+b^2)}$**

→ **Puisqu'une droite admet une infinité d'équations cartésiennes et $(a;b)\neq(0;0)$ alors on peut se ramène au cas où $(a=1$ ou $b=1)$**

→ **Posons par exemple $a=1$ on a**

$d(\Omega;(T))=\sqrt{5} \Leftrightarrow |3b-1|=\sqrt{5(1+b^2)} \Leftrightarrow (3b-1)^2=5(1+b^2) \Leftrightarrow 4b^2-6b-4=0 \Leftrightarrow 2b^2-3b-2=0$

L'équation $2b^2-3b-2=0$ admet deux solutions : $b=2$ ou $b=-\dfrac{1}{2}$

→ **Si $b=-\frac{1}{2}$ alors $(T):1x-\frac{1}{2}y+2\times\frac{-1}{2}-4\times 1=0 \Leftrightarrow (T):x-\frac{1}{2}y-5=0 \Leftrightarrow (T):2x+y-10=0$**

→ **Si $b=2$ alors $(T):1x+2y+2\times 2-4\times 1=0 \Leftrightarrow (T):x+2y=0$**

D'où finalement les équations cartésiennes des tangentes au cercle (C) issues de A est $\begin{cases}(T_1):2x-y-10=0\\(T_2):x+2y=0\end{cases}$

Méthode 2 :

→ **Les points de contact entre le cercle (C) et ces tangentes issues de A sont les points d'intersection entre le cercle (C) et le cercle (C') de diamètre $[\Omega A]$ ou Ω est le centre de (C)**

→ **Déterminons l'équation cartésienne de (C') le cercle de diamètre $[\Omega A]$**

On a l'équation cartésienne du cercle de diamètre $[\Omega A]$ est de la forme :

$(C'):(x-x_\Omega)(x-x_A)+(y-y_\Omega)(y-y_A)=0$ **et $\Omega(3;1)$ est le centre de (C)**

Donc $(C'):(x-3)(x-4)+(y-1)(y+2)=0$ ce qui donne $(C'):x^2+y^2-7x+y+10=0$

→ **Déterminons les points d'intersection entre les cercles (C) et (C') :**

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

On a $M(x;y)\in(C)\cap(C') \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=5\\ x^2+y^2-7x+y+10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=5\\ x^2+y^2-7x+y+15=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=5\\ x^2+y^2-7x+y+15=(x-3)^2+(y-1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=5\\ -x+3y+5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3y+5-3)^2+(y-1)^2=5\\ x=3y+5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}10y^2+10y=0\\ x=3y+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10y(y+1)=0\\ x=3y+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0 \ \ ou \ \ y=-1\\ x=3y+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=5\end{cases} \ ou \ \begin{cases}y=-1\\ x=2\end{cases}$

Ainsi les points d'intersection entre les cercles (C) **et** (C') **sont** $B(5;0)$ **et** $C(2;-1)$

→ **Les équations cartésiennes des tangentes au cercle** (C) **issues de** A **sont les équations cartésiennes des tangentes au cercle** (C) **aux points** B **et** C

→ **On sait que les équations cartésiennes des tangentes** (T_B) **et** (T_C) **au cercle** (C) **aux points** B **et** C **respectivement s'écrit :** $\begin{cases}(T_B):(a-x_B)(x-x_B)+(b-y_B)(y-y_B)=0\\ (T_C):(a-x_C)(x-x_C)+(b-y_C)(y-y_C)=0\end{cases}$ **c'est-à-dire**

$\begin{cases}(T_B):(3-5)(x-5)+(1-0)(y-0)=0\\ (T_C):(3-2)(x-2)+(1+1)(y+1)=0\end{cases}$

Ce qui donne $\begin{cases}(T_B):2x-y-10=0\\ (T_C):x+2y=0\end{cases}$



Exemple 14

On considère les points $A(4;-1)$, $B(1;-1)$ **et** $C(-2;2)$

1) Construire les points A, B, C **et la bissectrice de l'angle** $(A\hat{B}C)$

2) Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(A\hat{B}C)$

Solution

2) Rappel : un point du plan appartient à la bissectrice d'un angle si et seulement s'il est équidistant des côtés de cet angle.

→ **Soit** (D) **la bissectrice de l'angle** $(A\hat{B}C)$ **on a :** $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow d(M;(BA))=d(M;(BC))$

→ **Déterminons premièrement une équation cartésienne de chacun des droites** (AB) **et** (BC)

On a : $\overrightarrow{AB}(3;0)$ **est un vecteur directeur de** (AB) **donc :**

$M(x;y)\in(AB)\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-4 & 3\\ y+1 & 0\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -3(y+1)=0\Leftrightarrow y+1=0$

On a : $\overrightarrow{BC}(-3;3)$ **est un vecteur directeur de** (BC) **donc :**

$M(x;y)\in(BC)\Leftrightarrow det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC})=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-1 & -3\\ y+1 & 3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 3(x-1)+3(y+1)=0\Leftrightarrow x+y=0$

D'où $(AB):y+1=0$ **et** $(BC):x+y=0$

→ **Donc** $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \frac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}}$ **d'ou** $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \sqrt{2}|y+1|=|x+y|$

→ **On remarque que si** $M(x;y)$ **appartient à la bissectrice intérieure de l'angle** $(A\hat{B}C)$ **alors** $x\geq x_B=1$ **et** $y\geq y_B=-1$ **donc** $x+y\geq 0$ **et** $y+1\geq 0$

Par suite $M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \sqrt{2}(y+1)=(x+y)$ **et** $x\geq x_B=1$

D'où finalement une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(A\hat{B}C)$ **est de la forme :**

$(D):\begin{cases}x+(1-\sqrt{2})y-\sqrt{2}=0\\ x\geq 1\end{cases}$

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice 1

On considère les points : $A(5;7)$, $B(2;3)$ *et* $C(9;4)$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *et* $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2) En déduire la nature du triangle ABC

3) Calculer les distances AB, BC et CA

4) a) Calculer $cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ *et* $sin(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$

b) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$

5) Calculer l'aire du triangle ABC

Exercice 2

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) *dans les cas suivants :*

1) (D) *passe par le point* $A(1;2)$ *et de vecteur normal* $\vec{n}(2;\frac{1}{2})$

2) (D) *passe par le point* $A(2;3)$ *et parallèle à la droite* $(\Delta): x+2y-3=0$

3) (D) *passe par le point* $A(5;-2)$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}(1;2)$

4) (D) *passe par le point* $A(-2;1)$ *et orthogonal à la droite* $(\Delta):\begin{cases} x=4+2t \\ y=-1+3t \end{cases} / (t\in\mathbb{R})$

5) (D) *passe par les points* $A(1;-1)$ *et* $B(1;3)$

6) (D) *à une représentation paramétrique s'écrit :*

$(D):\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \end{cases} / t\in\mathbb{R}$

7) (D) *à une équation réduite s'écrit :* $(D): y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$

Exercice 3

Calculer la distance du point A *à la droite* (D) *dans les cas suivants :*

1) $A(2;-3)$ *et* $(D): x-y+3=0$

2) $A(1;-1)$ *et* $(D): 2x-4y+3=0$

3) $A(5;-4)$ *et* $(D):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \end{cases} / (t\in\mathbb{R})$

Exercice 4

Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) *dans les cas suivants :*

1) (C) *est de centre* $\Omega(-1;2)$ *et de rayon* $R=3$

2) (C) *est de centre* $\Omega(-4;3)$ *et passant par* $A(-1;0)$

3) (C) *est de diamètre* $[AB]$ *tels que :* $A(-1;3)$ *et* $B(0;3)$

4) (C) *est de centre* $\Omega(-1;1)$ *et la droite* (Δ) *d'équation* $(\Delta): 4x-5y+3=0$ *tangente à* (C)

5) (C) *est le cercle circonscrit au triangle ABC tels que* $A(1;2)$, $B(7;4)$ *et* $C(-1;0)$

6) (C) *passe par les points* $A(4;-3)$, $B(0;5)$ *et de centre* Ω *appartient à la droite (D) d'équation* $(D): x+y-1=0$

Exercice 5

Déterminer la nature de l'ensemble (Γ) *des points* $M(x;y)$ *du plan dans chacun des cas suivants :*

1) $x^2+y^2+x-4y+5=0$ *2)* $x^2+y^2-2x+4y-4=0$

3) $(x-1)^2+(y+2)^2=0$ *4)* $x^2+y^2=1$

Exercice 6

1) Déterminer la position du point A par rapport au cercle (C) *dans les cas suivants :*

a) $C(\Omega(-1;2);\sqrt{10})$ *et* $A(2;1)$

b) $(C): x^2+y^2+2x-4y-4=0$ *et* $A(-1;0)$

2) a) Déterminer la nature de l'ensemble (C) *des points* $M(x;y)$ *du plan tel que* $x^2+y^2+6x-2y+6=0$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2+y^2+6x-2y+6<0$

3) a) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x+2y-1<0$

b) En déduire les solutions graphiques du système :

$\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6<0 \\ x+2y-1<0 \end{cases}$

4) Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6<0 \\ x+2y-1<0 \\ 5x+2y+11>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6<0 \\ x^2+y^2+2x-4y-4<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6>0 \\ x^2+y^2+2x-4y-4<0 \end{cases}$



Exercice 7

1) Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C) *dans les cas suivants :*

a) (C) *est de centre* $\Omega(1;-4)$ *et de rayon* $R=\sqrt{3}$

b) $(C): (x-3)^2+(y+5)^2=9$

c) $(C): x^2+y^2+6x-8y+23=0$

2) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) *dans les cas suivants :*

a) $(C):\begin{cases} x=1+5cos(\theta) \\ y=-2+5sin(\theta) \end{cases} (\alpha\in\mathbb{R})$

b) $(C):\begin{cases} x=cos(t) \\ y=-3+sin(t) \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

Exercice 8

Etudier l'intersection de la droite (D) *et du cercle* (C) *dans les cas suivants :*

1) $(D): 3x+4y-3=0$; $(C): x^2+y^2-x-7y=0$

2) $(D): -4x+3y-20=0$; $(C): x^2+y^2-4x-2y-20=0$

3) $(D): y=x-6$; $(C): x^2+y^2=16$

Exercice 9

Vérifier que le point A *appartient au cercle* (C) *puis déterminer l'équation cartésienne de la tangente au cercle* (C) *au point* A *dans chacun des cas suivants :*

1) $(C): x^2+y^2-2x+6y-19=0$ *et* $A(-1;2)$

2) $(C): (x+2)^2+(y-3)^2=25$ *et* $A(-5;7)$

3) $(C): x^2+y^2=5$ *et* $A(-1;2)$

Exercice 10

Soit $(x;y;z;d)\in\mathbb{R}^4$ *tel que* $xy\neq 0$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Montrer que

$$(1+x^2)(1+y^2)\geq x+y$$

$$(x-z)^2+(b-d)^2\geq\frac{(xt-yz)^2}{x^2+y^2}$$

Exercice 11

Vérifier que le point $A(4;-2)$ *est à l'extérieur du cercle :* $(C): (x-3)^2+(y-1)^2=5$ *puis trouver les équations cartésiennes des tangentes au cercle* (C) *issues de* A.

Exercice 12

On considère les points :

$A(1;-1)$, $B(-1;1)$, $C(\sqrt{3};\sqrt{3})$ *et* $D(1;0)$

1) Calculer AB ; AC ; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

2) Calculer $\cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$ *et* $\sin(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

3) Déterminer la nature du triangle ABC

4) Montrer que l'équation $y=-x$ *est une équation cartésienne du droite* (AB)

5) Calculer $d(C;(AB))$ *la distance du point* C *à* (AB)

6) En déduire l'aire du triangle ABC *par deux méthodes.*

7) Soit (C) *le cercle passant par* C *et de centre* A

a) Vérifier que $x^2+y^2-2x+2y-6=0$ *est une équation cartésienne de* (C)

b) Montrer que $B\in(C)$ *puis déterminer l'équation cartésienne de la tangente au cercle* (C) *au point* B

c) Soit (Δ) *la droite passant par* D *et parallèle à* (AB)

Montrer que $x+y-1=0$ *est une équation de* (Δ)

d) Etudier l'intersection de la droite (Δ) *et du cercle* (C)

Exercice 13

On considère les points :

$A(2;-1)$, $B(-4;-3)$, $C(3;1)$ *et* $D(1;-3)$

1) Calculer AB ; AC ; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

2) Calculer $\cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$ *et* $\sin(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

3) En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

4) Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) *passant par* B *est perpendiculaire à* (AD)

5) Montrer que $2\sqrt{5}$ *est la distance du point* A *à* (D)

6) Montrer que l'équation cartésienne du cercle (C) *de centre* A *et la droite* (D) *tangente à* (C) *s'écrit :*

$x^2+y^2-4x+2y-15=0$

7) Déterminer une représentation paramétrique de (C)

8) Déterminer (Γ) *l'ensemble des points* $M(x;y)$ *du plan tel que* $x^2+y^2-4x+2y-15=0$

9) Etudier l'intersection de la droite (Δ) *d'équation :* $y=x-3$ *avec* (Γ)

10) Résoudre graphiquement : $\begin{cases} y>x-3 \\ x^2+y^2+2x+4y-5<0 \end{cases}$

Exercice 14

On considère les points : $A(-1;-1)$, $B(7;3)$ *et* $C(-2;6)$

1) Déterminer les cordonnées de I, J, K *les milieux des segments* $[AB]$, $[BC]$ *et* $[CA]$ *respectivement*

2) Déterminer les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CA}$

3) Soit (D_1) *la médiatrice du segment* $[AB]$

a) Donner un point de (D_1) *et un vecteur normal à* (D_1)

b) En déduire que les équations cartésiennes des médiatrices (D_1), (D_2) *et* (D_3) *des segments* $[AB]$, $[BC]$ *et* $[CA]$ *respectivement s'écrit sous la forme :*

$(D_1): 2x+y-7=0$; $(D_2): 3x-y-3=0$; $(D_3): x-7y+19=0$

c) Montrer que (D_1), (D_2) *et* (D_3) *sont sécants en un point* Ω *à préciser*

d) On suppose que $\Omega(2;3)$

Montrer que $\Omega A=\Omega B=\Omega C=5$ *puis expliquer ce résultat.*

Exercice 15

On considère les points : $A(-1;-1)$, $B(7;3)$ *et* $C(-2;6)$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CA}$

2) Soit (D_A) *la hauteur du triangle* ABC *issue de* A

a) Donner un point de (D_A) *et un vecteur normal à* (D_A)

b) En déduire que les équations cartésiennes des hauteurs (D_A), (D_B) *et* (D_C) *du triangle* ABC *issue de* A, B *et* C *respectivement s'écrit sous la forme :*

$(D_A): 3x-y+2=0$; $(D_B): x-7y+14=0$; $(D_C): 2x+y-2=0$

c) Montrer que (D_A), (D_B) *et* (D_C) *sont sécants en un point* H *à préciser.*

d) Que représente le point H *pour le triangle* ABC *?*

3) a) Montrer que l'équation cartésienne de (AB) *peut s'écrire sous la forme* $(AB): x-2y-1=0$

b) Déterminer les coordonnées du point E *l'intersection des droites* (D_C) *et* (AB)

c) On suppose que $H(0;2)$ *et* $E(1;0)$ *calculer l'aire du triangle* ABC *par deux méthodes.*

Exercice 16

Soit le cercle : $(C): x^2+y^2-4x+2y-4=0$

1) Déterminer le centre Ω *et le rayon* R *de* (C)

2) Déterminer A *et* B *les points d'intersection de* (C) *et l'axe des abscisses.*

3) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au cercle (C) *en* A *et en* B

4) Ecrire les équations cartésiennes des droites tangentes au cercle (C) *dirigés par le vecteur* $\vec{u}(2;1)$*, puis déterminer leurs points de contact avec le cercle* (C)

5) Ecrire les équations cartésiennes des tangentes au cercle (C) *passants par* $C(6;1)$

Exercice 17

1) Trouver les tangentes au cercle (Γ) *d'équation* $(\Gamma): (x+1)^2+y^2=4$ *qui sont parallèles à* $(D): 3x+4y-2=0$

2) Trouver les tangentes au cercle (C) *d'équation* $(C): x^2+y^2+10x-2y+6=0$ *qui sont parallèles à* $(D'): 2x+y-7=0$

3) Trouver les tangentes au cercle (E) *d'équation* $(E): x^2+y^2-2x+4y=0$ *qui sont perpendiculaire à* $(\Delta): x-2y-345=0$

Exercice 18

Soit (C_m) *l'ensemble des points* $M(x;y)$ *du plan vérifiant* $x^2+y^2+mx-my-2m-2=0$ *tel que* m *est un paramètre réel.*

1) Discuter selon les valeurs de m *la nature de l'ensemble* (C_m)

2) Construire dans le même repère les ensembles (C_0), (C_{-1}) *et* (C_{-2})

3) Déterminer l'ensemble des centres de (C_m)

4) Montrer que tous les cercle (C_m) *sont tangentes en un point à préciser*

Exercice 19

Soit A *et* B *deux points tels que* $AB=4$

Soit H *un point de* $[AB]$ *tel que* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=1$

Déterminer dans chacun des cas suivants, l'ensemble (Γ) *des points* M *du plan tel que :*

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=1$ *2)* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-2$

3) $MA^2-MB^2=3$ *4)* $MA^2-MB^2=-2$

5) $MA^2+MB^2=4$ *6)* $MA=9MB$

7) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ *8)* $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-3$

Exercice 20

1) Déterminer l'équation cartésienne d'un cercle tangent à Ox *et passant par* $A(-2;1)$ *et* $B(5;8)$

2) Déterminer les équations cartésiennes des cercles tangents à $x+y-10=0$ *et passant par* $A(7;1)$ *et* $B(-5;5)$

3) Déterminer les équations cartésiennes des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x+2y-9=0$ *et* $2x-y+2=0$

4) Déterminer les équations cartésiennes des cercles passant par $A(-1;5)$ *et qui sont tangents aux droites* $3x+4y-35=0$ *et* $4x-3y+14=0$

Exercice 21 : Droite d'Euler

On considère les points $A(-3;1)$, $B(1;5)$ *et* $C(3;-3)$

1) Déterminer les cordonnées de A', B' et C' les milieux des segments $[BC]$, $[CA]$ *et* $[AB]$ *respectivement.*

2) Déterminer une équation cartésienne de chacune des médiatrices des segments [AB], [AC] et [BC]

3) Montrer que ces médiatrices sont concourantes en un unique point Ω

4) Déterminer une équation cartésienne de chacune des hauteurs du triangle ABC

5) Montrer que ces hauteurs sont concourantes en un unique point H

6) Déterminer les coordonnées du point G le centre de gravité du triangle ABC (on pourra utiliser les coordonnées du barycentre)

7) Montrer que $\overrightarrow{\Omega H}=3\overrightarrow{\Omega G}$

8) Déterminer les coordonnées des points H_1, H_2 *et* H_3 *les symétries du point H par rapport à les milieux des segments [AB], [AC] et [BC] respectivement*

9) Déterminer l'équation cartésienne de (C) le cercle circonscrit au triangle A'B'C'

10) Vérifier que les points H_1, H_2 *et* H_3 *appartient au cercle (C) et que le centre de (C) est le milieu de* $[\Omega H]$.



بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL3

1BACSMF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Barycentre)

ABC un triangle et K le point du plan tel que $3\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que $B=bar\{(C;1);(K;3)\}$

2) On pose $J=bar\{(A;2);(C;1);(K;3)\}$

a) Montrer que $J=bar\{(A;2);(B;4)\}$

b) En déduire que $J=bar\{(A;1);(B;2)\}$ $\boxed{\alpha}$

3) On pose $I=bar\{(A;2);(C;1)\}$

a) Montrer que $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

b) Montrer que J est le milieu de $[KI]$

4) On pose $N=bar\{(C;1);(K;1)\}$

a) Vérifier que $3\overrightarrow{NC}+3\overrightarrow{NK}=\vec{0}$

b) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur B montrer que $3\overrightarrow{NK}=4\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}$

c) En déduire que $N=bar\{(C;1);(B;2)\}$ et $2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{CN}$ $\boxed{\beta}$

5) On pose $L=bar\{(C;1);(I;1)\}$

a) Vérifier que $\overrightarrow{IL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$

b) En déduire que $\overrightarrow{IL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

6) a) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur $\boxed{\alpha}$ montrer que $2\overrightarrow{NB}=3\overrightarrow{NJ}-\overrightarrow{NA}$ $\boxed{\delta}$

b) En déduire de $\boxed{\beta}$ et $\boxed{\delta}$ que $\overrightarrow{JN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

c) En déduire que le quadrilatère $ILNJ$ est un parallélogramme.

7) Soit O le centre du parallélogramme $ILNJ$

a) Vérifier que $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$

b) En appliquons la propriété caractéristique du barycentre sur I, L, N et J montrer que

$4\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OC}=6\overrightarrow{OI}$; $3\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OI}=6\overrightarrow{OL}$;
$2\overrightarrow{OC}+4\overrightarrow{OB}=6\overrightarrow{ON}$; $2\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}=6\overrightarrow{OJ}$

c) En déduire que O est le centre de gravité de ABC

Exercice 2 (Analytique du produit scalaire)

On considère les points :

$A(0;1)$, $B(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2})$, $C(1;0)$ et $D(1;-3)$

1) Montrer que :

$AC=\sqrt{2}$; $AB=\sqrt{2}$; $det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=-\sqrt{3}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=1$

2) Calculer $cos(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$ et $sin(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

3) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$

4) Déterminer la nature du triangle ABC

5) Calculer l'aire du triangle ABC

6) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par C est perpendiculaire à (DA)

7) Montrer que la droite $(D):y=-4x+11$ est perpendiculaire à la droite (Δ)

8) Montrer que $\sqrt{17}$ est la distance du point $E(22;1)$ à (Δ)

9) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C_1) de représentation paramétrique $(C_1):\begin{cases}x=3+cos(\theta)\\y=2+sin(\theta)\end{cases}/\theta\in\mathbb{R}$

10) Déterminer par deux méthodes l'équation cartésienne du cercle (C_2) du diamètre $[AC]$

11) Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C_2)

12) Déterminer (C_3) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $x^2+y^2-4x-12=0$

13) Résoudre graphiquement le système $\begin{cases}-x+4y+1\geq 0\\x^2+y^2-4x-12\leq 0\end{cases}$

14) Déterminer par deux méthodes l'équation cartésienne de (C_4) le cercle circonscrit au triangle ACD

Exercice 3 (Analytique du produit scalaire)

1) Etudier l'intersection de la droite $(\Delta):x+2y-1=0$ et du cercle $(C):x^2+y^2-2=0$

2) Soit (C_m) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant $x^2+y^2-2mx+4my-2m-2=0$ tel que m est un paramètre réel.
Montrer que (C_m) est un cercle et préciser son centre Ω_m et son rayon R_m

3) Déterminer (D) l'ensemble des centres de (C_m) si ont varié m dans $\mathbb{R}$

4) Montrer que tous les cercles (C_m) passent par deux points fixés I et J

5) Montrer que $(D)\perp(IJ)$

6) Soit $A(x_0;y_0)$ un point du plan, déterminer la position de $A(x_0;y_0)$ pour laquelle il appartient au moins à un cercle (C_m).

7) Vérifier que le point $B(6;2)$ est à l'extérieur du cercle (C_2) puis trouver les équations cartésiennes des tangentes au cercle (C_2) issues de B.

8) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire montrer que pour tout réel $a_1,a_2,...a_n,b_1,b_2,...b_n$ on a :

$$\left(\sum_{i=1}^{2}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{a_i^2}\right)\geq 4$$

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2}\leq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}$$

7

Suites numériques



1) Définition d'une suite numérique-suite majorée - minorée - bornée

Activité

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble I par $f(x)=8x+\frac{1}{2}$

1) On suppose que $I=[0;+\infty[$

Calculer si possible $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{4})$, $f(-1)$ et $f(\sqrt{2})$

2) On suppose que $I=\mathbb{N}$

Calculer si possible $f(0)$, $f(2)$, $f(\frac{1}{8})$ et $f(n)$ (avec $n\in\mathbb{N}$)

Définition 1

- On appelle suite numérique u toute fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.
- L'image d'un entier naturel n par la suite numérique u est notée u_n.
- La notation u_n se lit * u indice n *
- Le nombre u_n s'appelle le terme général de la suite numérique u.

Remarque 1

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ et u une suite numérique définie sur I

- La suite u est parfois notée $(u_n)_{n\in I}$
- Le nombre u_n s'appelle aussi le terme du rang n
- Il ne faut pas confondre entre u_{n+1} et u_n+1 car :

  u_{n+1} est le terme du rang n

  u_n+1 est la somme du terme du rang n avec 1.
- Si $I=\mathbb{N}$ la suite u est parfois notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ ou tout simplement (u_n)
- Si $I=\mathbb{N}^*$ la suite u est parfois notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geq 1}$

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_n=\frac{2n+3}{5n+1}$

1) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3

2) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\leq 3$

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=3-\frac{9}{4u_n}$

1) En remarquant que $u_1=u_{0+1}$ et $u_2=u_{1+1}$, calculer u_1 et u_2

2) Calculer u_3 et u_4

3) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\geq\frac{3}{2}$

Remarque 2

Une suite $(u_n)_{n\in I}$ peut être définie :

• À partir d'une fonction f de la variable n : $u_n=f(n)$.

• À partir d'une relation de récurrence : $(u_n)_{n\in I}$ est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Définition 2

• On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n\in I)\quad u_n\le M$

• On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n\in I)\quad u_n\ge m$

• On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

Exemple 3

1) La suite de l'exemple 1 est majorée par 3 car on a montré que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\le 3$

2) La suite de l'exemple 2 est minorée par $\frac{3}{2}$ car on a montré que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\ge\frac{3}{2}$

2) Monotonie d'une suite numérique

Définition 3

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique

- $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si $\forall n;m\in I\quad n>m\Rightarrow u_n\ge u_m$
- $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si $\forall n;m\in I\quad n>m\Rightarrow u_n\le u_m$
- $(u_n)_{n\in I}$ est constante si $\forall n;m\in I\quad n>m\Rightarrow u_n=u_m$

Remarque 3

- Si $(u_n)_{n\ge p}$ est une suite croissante alors $\forall n\ge p\quad u_n\ge u_p$ (C'est-à-dire est $(u_n)_{n\ge p}$ minorée par son premier terme)
- Si $(u_n)_{n\ge p}$ est une suite décroissante alors $\forall n\ge p\quad u_n\le u_p$ (C'est-à-dire est $(u_n)_{n\ge p}$ majorée par son premier terme)

Propriété 1

- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I)\quad u_{n+1}\ge u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite décroissante $\Leftrightarrow (\forall n\in I)\quad u_{n+1}\le u_n$
- $(u_n)_{n\in I}$ est une suite constante $\Leftrightarrow (\forall n\in I)\quad u_{n+1}=u_n$.



Exemple 4

1) Etudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_n=3n+2$

2) Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\ge 1}$ définie par $v_n=\frac{2n-3}{n}$

Exemple 5

Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0=\frac{1}{5} \\ v_{n+1}=v_n^2+\frac{3}{4}v_n \end{cases}$

1) Calculer v_1 et v_2

2) Montrer par récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<v_n<\frac{1}{4}$

3) Vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_{n+1}-v_n=v_n\left(v_n-\frac{1}{4}\right)$

4) En déduire la monotonie de la suite (v_n)

3) Suite arithmétique

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique définie sur I $(I\subset\mathbb{N})$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que $(\forall n\in I)$ $u_{n+1}-u_n=r$.

Le nombre r est appelé raison de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

Exemple 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=-5n+4$. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.

Le terme général d'une suite arithmétique

Propriété 2

Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n,p\in I$ on a $u_n=u_p+(n-p)r$

Cas particulier

- **Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n=u_0+nr$**
- **Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $u_n=u_1+(n-1)r$**

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété 3

Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique et $p\in I$ alors pour tout $n\geq p$ on a : $u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n=\dfrac{(n-p+1)}{2}\times(u_p+u_n)$

Cas particulier

- **Si (u_n) est une suite arithmétique alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a** $u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{(n+1)}{2}\times(u_0+u_n)$
- **Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a** $u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{n}{2}\times(u_1+u_n)$

Exemple 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=-5n+4$ (la suite numérique de l'exemple 6).

Calculer la somme $u_0+u_1+\ldots+u_8$

Exemple 8

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases}u_0=5\\ u_{n+1}=\frac{2u_n-1}{u_n}\end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2

2) On pose $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

b) Déterminer v_n en fonction de n

c) Déterminer u_n en fonction de v_n puis déduire u_n en fonction de n

d) Calculer en fonction de n la somme : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$



La propriété caractéristique d'une suite arithmétique

Propriété 4

$(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique $\Leftrightarrow(\forall\, n\in I)$ $u_{n+1}=\frac{u_n+u_{n+2}}{2}$.

Exemple 9

Soit (u_n) une suite arithmétique

1) Vérifier que $u_1+u_3=2u_2$; 2) On suppose que $u_1+u_2+u_3=15$ calculer u_2

4) Suite géométrique

Définition 5

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique définie sur I $(I\subset\mathbb{N})$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est géométrique s'il existe un nombre réel q tel que $(\forall n\in I)$ $u_{n+1}=qu_n$.

Le nombre q est appelé raison de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

Exemple 10

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=2^n$.

Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

Le terme général d'une suite géométrique

Propriété 5

Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n,p\in I$ on a $u_n=u_p\times q^{n-p}$

Cas particulier

- **Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n=u_0\times q^n$**
- **Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $u_n=u_1\times q^{n-1}$**

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété 6

Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison $q\neq 1$ et $p\in I$ alors pour tout $n\geq p$ on a :

$$u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n=u_p\times\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Cas particulier

- **Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q\neq 1$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$**
- **Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q\neq 1$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $u_1+u_2+\cdots+u_n=u_1\times\frac{1-q^n}{1-q}$**

Exemple 11

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=\frac{4}{5}u_n-1\end{cases}$ et $v_n=u_n+5$

1) Calculer u_1, u_2, v_0 et v_1

2) Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $v_{n+1}=\frac{4}{5}(u_n+5)$ puis déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{4}{5}$

3) Déterminer v_n en fonction de n

4) En déduire u_n en fonction de n

5) Montrer que $v_0+v_1+\cdots+v_{12}=30\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{13}\right)$

6) Montrer que $u_0+u_1+\cdots+u_{12}=-5\left(7+6\left(\frac{4}{5}\right)^{13}\right)$



La propriété caractéristique d'une suite géométrique

Propriété 7

$(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique $\Leftrightarrow(\forall n\in I)$ $u_{n+1}^2=u_n\times u_{n+2}$.

Exemple 12

Soient a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique tels que $a+b+c=7$ et $abc=8$

Déterminer a, b et c

Résumé 7 : Suites numériques

- **Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.**
- **Une suite numérique $(u_n)_{n\in I}$ peut être définie :**
  - **À partir d'une fonction f de la variable n : $u_n = f(n)$.**
  - **À partir d'une relation de récurrence : $(u_n)_{n\in I}$ est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.**

- **La suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée par M $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I)$ $u_n \le M$**
- **La suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée par m $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I)$ $u_n \ge m$**
- **La suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.**

- **$(u_n)_{n\in I}$ est une suite croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I)$ $u_{n+1}-u_n \ge 0$.**
- **$(u_n)_{n\in I}$ est une suite décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I)$ $u_{n+1}-u_n \le 0$.**
- **$(u_n)_{n\in I}$ est une suite constante $\Leftrightarrow$ $(\forall n\in I)$ $u_{n+1}=u_n$.**

	Arithmétique	**Géométrique**
Comment montrer qu'une suite numérique $(v_n)_{n\in I}$ est une suite :	$v_{n+1}-v_n = r$	$v_{n+1} = qv_n$
Comment déterminer v_n en fonction de n si $(v_n)_{n\in I}$ est une suite :	$v_n = v_p + (n-p)r$ ($p=0$ **ou** $p=1$ **ou.....**)	$v_n = v_p \times q^{n-p}$ ($p=0$ **ou** $p=1$ **ou.....**)
Comment calculer la somme des termes consécutifs de la suite $(v_n)_{n\in I}$ si $(v_n)_{n\in I}$ est une suite :	$v_p + v_{p+1} + \ldots + v_n = \frac{(n-p+1)}{2} \times (v_p + v_n)$	$v_p + v_{p+1} + \ldots + v_n = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
Si a, b et c sont des termes consécutifs d'une suite	**alors** $b = \frac{a+c}{2}$	**alors** $b^2 = a \times c$

5) Exercices de synthèse

Exercice de synthèse 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$.

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $u_n > 1$

2) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $u_{n+1}-u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+3}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

المديرية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

c) Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

d) En déduire la somme $T_n = \frac{3}{u_0+2} + \frac{3}{u_1+2} + ... + \frac{3}{u_{n-1}+2}$

Exercice de synthèse 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n}$.

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < 2$

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la somme $T_n = \frac{1}{u_1-2} + \frac{1}{u_2-2} + ... + \frac{1}{u_{10}-2}$

Exercice de synthèse 3

On considère les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par : $a_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $b_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

2) Montrer que la suite (b_n) est décroissante.

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n < b_n$.

4) En déduire que (a_n) est majorée et que (b_n) est minorée.

Exercice de synthèse 4

On considère les suites numériques $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ et $v_n = \frac{u_n}{n}$

1) Vérifier que $\forall k \in [\![1; n]\!] \quad n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

2) Vérifier que $\forall k \in [\![1; n]\!] \quad \frac{1}{(n+1)^2+k} - \frac{1}{n^2+k} < 0$ et déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Exercice de synthèse 5

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

1) Calculer u_3, u_4 et v_1

2) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_{n+1} = 6 - \frac{8}{v_n}$

3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

4) Soit $(t_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad t_n = \frac{v_n - 4}{v_n - 2}$

a) Montrer que $(t_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$

5) On pose $k_n = 2^{n-2}(1+2^{n-1})$. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad k_n = u_n$

ETYAB

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : 1BSMF

Série 7
Suites numériques

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 3}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

c) En déduire que (u_n) est majorée par 2.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Calculer v_0 et v_1 .

b) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

d) Montrer que : $v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_n = \frac{(n+8)(n+1)}{8}$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{u_n + 1}$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < u_n < 3$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n + 1}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Montrer que : $\sum_{k=2}^{n} v_k = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) Montrer que $u_1 = -\dfrac{1}{3}$ et $u_2 = -\dfrac{1}{2}$.

2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > -1$.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n+1)^2}{u_n+3}$.

b) En déduire la monotonie de la suite (u_n).

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

a) Calculer v_0 puis montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) Montrer que : $\sum_{k=4}^{n} v_k = \dfrac{(n+8)(n-3)}{4}$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite tel que : $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 0$

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

Exercice 5

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1) Supposons que $u_0 = -6$ et $r = 4$

Calculer u_6 et u_{12}

2) Supposons que $u_1 = 5$ et $u_{13} = 7$ Calculer r

3) Supposons que $u_{20} = 11$ et $r = 6$

Calculer u_0 puis exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 6

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.

1) Supposons que $v_0 = 32$ et $q = \frac{1}{2}$ Calculer v_4 et v_6

2) Supposons que $v_7 = \frac{1}{18}$ et $v_5 = 3$ Calculer q

3) Supposons que $v_2 = -\frac{1}{81}$ et $q = 3$

Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n.

Exercice 7

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique telle que $a + b + c = 7$ et $abc = 8$

Déterminer a, b et c

Exercice 8

Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r telle que :

$a + b + c = 21$ et $2a + b - c = 29$

Déterminer a, b, c et r

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ une suite arithmétique de raison $r=-2$ tel que $u_0=2$ et $u_p=-18$

1) Déterminer l'entier p

2) Calculer en fonction de n la somme $\sum_{k=2}^{n} u_k$

Exercice 10

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ tels que $u_2=23$ et $u_p=5$

Déterminer l'entier p puis calculer la somme $\sum_{k=10}^{20} u_k$

Exercice 11

Montrer sans utiliser la récurrence que

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ 1+5+5^2+\ldots..+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

Exercice 12

Calculer les sommes suivantes :

$S_1=15+21+27+....+603$

$S_2=\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+....+\frac{19}{3}+7$

Exercice 13

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq u_n\leq 1$

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

4) Trouver un entier n tel que pour tout $n>N$: $u_n>0,99$

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par :

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2n}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 1.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par $\frac{1}{2}$.

Exercice 15 (Complément de cours)

1) Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique.

Montrer que $(\forall\, n\in I)\quad u_{n+1}=\frac{u_n+u_{n+2}}{2}$.

2) Soit $(v_n)_{n\in I}$ une suite géométrique.

Montrer que $(\forall n\in I)\quad v_{n+1}^2=v_n\times v_{n+2}$.

Exercice 16 :Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci noté $(F_n)_{n\geq 1}$ débute de la manière suivante :

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610…..

" On place dans un enclos un couple (mâle et femelle) de lapereaux. Chaque couple âgé de deux mois donne naissance chaque mois à un nouveau couple (mâle et femelle). Si aucun Lapin ne meurt.

La suite de Fibonacci donne le nombre F_n de lapins vivant au bout de n mois.

Elle vérifie la relation $F_{n+1}+F_n=F_{n+2}$

1) Calculer F_{16} .

2) Montrer que l'équation : $x^2-x-1=0$ possède une unique solution positive que nous noterons φ . Le nombre φ est appelé le nombre d'or.

3) Montrer les égalités : $\varphi+1=\varphi^2$, $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$, $1-\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\varphi^2}$ et $\frac{\varphi}{1+\varphi^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

4) Soient α et β deux réels. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$V_n=\alpha\times\varphi^n+\beta\times\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n .$$

a) Vérifier que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ satisfait à la relation : $V_{n+1}+V_n=V_{n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Déterminer α et β de sorte que $v_1=v_2=1$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V_n=F_n$ désigne le nombre de lapins au bout de n mois.

c) Vérifier que $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{\varphi}$ et en déduire que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ F_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

d) A l'aide d'une calculatrice retrouver F_{16} .

5) On considère la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ définie par : $W_n=\frac{F_{n+1}}{F_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad W_n=\frac{(-1)^{n+1}\times\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n+1}-\varphi}{(-1)^n\times\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n}-1}$.

b) En déduire : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad W_n=\frac{(-1)^n\varphi+\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n+1}}{(-1)^n+\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n}}$.

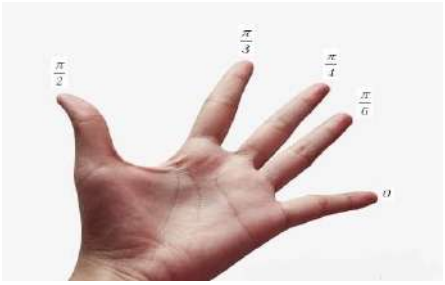
8

Trigonométrie



1) Rappel

- **Lignes trigonométriques usuelles :**



Soit $\alpha \in \left\{0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right\}$ ***On a :***

$$cos(\alpha)=\frac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ au\ dessus\ de\ \alpha}}{2}$$

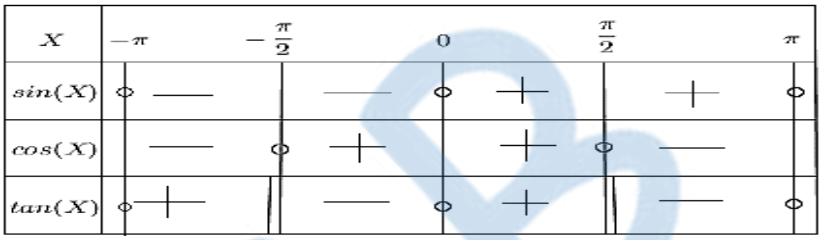
$$sin(\alpha)=\frac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ en\ dessous\ de\ \alpha}}{2}$$

$$tan(\alpha)=\frac{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ en\ dessous\ de\ \alpha}}{\sqrt{Nombre\ de\ doigts\ au\ dessus\ de\ \alpha}}$$

- **Parité des fonctions** $x\mapsto cos(x)$, $x\mapsto sin(x)$ **et** $x\mapsto tan(x)$ **:**

Fonction	Ensemble de définition	Parité	Relation mathématique
$x\mapsto cos(x)$	$D_{cos}=\mathbb{R}$	**Paire**	$cos(-x)=cos(x)$
$x\mapsto sin(x)$	$D_{sin}=\mathbb{R}$	**Impaire**	$sin(-x)=-sin(x)$
$x\mapsto tan(x)$	$D_{tan}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$	**Impaire**	$tan(-x)=-tan(x)$

- **Tableau de signe de** $cos(x)$, $sin(x)$ **et** $tan(x)$ **sur** $[-\pi;\pi]$ **:**



- **Propriétés trigonométriques**

$$cos^2(x)+sin^2(x)=1$$

$$tan(x)=\frac{sin(x)}{cos(x)}$$

$$1+tan^2(x)=\frac{1}{cos^2(x)}$$

- **Les relations entre les lignes trigonométriques :**

	$x+2k\pi$	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
sin	$sin(x)$	$-sin(x)$	$sin(x)$	$-sin(x)$	$cos(x)$	$cos(x)$
cos	$cos(x)$	$cos(x)$	$-cos(x)$	$-cos(x)$	$sin(x)$	$-sin(x)$
tan	$tan(x)$	$-tan(x)$	$tan(x)$	$tan(x)$	$\frac{1}{tan(x)}$	$-\frac{1}{tan(x)}$

Exercice de révision 1

1) Calculer : $cos(\frac{\pi}{6})$, $sin(\frac{\pi}{6})$, $cos(\frac{\pi}{4})$, $sin(\frac{\pi}{4})$, $tan(\frac{\pi}{6})$, $cos(\frac{\pi}{2})$, $sin(\frac{\pi}{2})$, $tan(\frac{\pi}{3})$

2) Calculer : $cos(\frac{2\pi}{3})$, $sin(\frac{4\pi}{3})$, $cos(-\frac{2\pi}{3})$, $sin(-\frac{4\pi}{3})$, $tan(\frac{7\pi}{6})$, $tan(-\frac{7\pi}{6})$

Exercice de révision 2

1) Déterminer l'abscisse curviligne principale des points suivants : $A\left(-\frac{123\pi}{12}\right)$ **et** $B\left(\frac{39\pi}{4}\right)$

2) Placer les points A **et** B **dans le même cercle trigonométrique.**

3) Déterminer la mesure principale des angles $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})$ **et** $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

Exercice de révision 3

1) Calculer $cos(x)$ **sachant que** $sin(x)=-\frac{1}{5}$ **et** $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right[$

2) Calculer $tan(y)$ **sachant que** $cos(y)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ **et** $y\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[$

3) Soit α **un réel tel que** $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ **et** $tan(\alpha)=\sqrt{2}$**. Calculer** $cos(\alpha)$ **et** $sin(\alpha)$



Exercice de révision 4

Ecrire, en fonction de $cos(x)$ et $sin(x)$, les expressions suivantes :

$$A=4sin(x+7\pi)-2sin(13\pi-x)+cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$$

$$B=sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)cos(51\pi-x)+cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)sin(29\pi-x)$$

$$C=cos^2(x+111\pi)+sin^2(9\pi-x)+cos^2\left(x-\frac{9\pi}{2}\right)$$

Exercice de révision 5

On pose :

$$A=cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)+cos^2\left(\frac{6\pi}{10}\right)+cos^2\left(\frac{9\pi}{10}\right)$$

$$B=sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+cos^2\left(\frac{9\pi}{12}\right)+cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

1) Montrer que $A=2$ (on pourra remarquer que $\frac{6\pi}{10}=\pi-\frac{4\pi}{10}$, $\frac{9\pi}{10}=\pi-\frac{\pi}{10}$ et $\frac{4\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}$)

2) Montrer que $B=3$

2) Transformation de $cos(a-b)$ et ses résultats

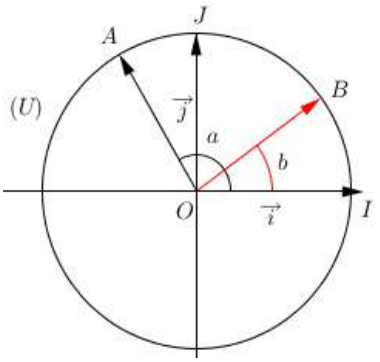
Activité 1

1) Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

$$(P_1)\quad (\forall x;y\in\mathbb{R})\quad cos(x+y)=cos(x)+cos(y)$$

$$(P_2)\quad (\forall x;y\in\mathbb{R})\quad sin(x+y)=sin(x)+sin(y)$$

2) On considère un repère orthonormé directe $(O;\vec{i};\vec{j})$ et (U) le cercle trigonométrique du centre *O*. Soient a et b deux nombres réels.



On considère les points *A* et *B* tels que : $(\vec{i};\overrightarrow{OA})\equiv a[2\pi]$ et $(\vec{i};\overrightarrow{OB})\equiv b[2\pi]$

a) Montrer que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv a-b[2\pi]$ et en déduire que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=cos(a-b)$

b) Vérifier que $\overrightarrow{OA}=cos(a)\vec{i}+sin(a)\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=cos(b)\vec{i}+sin(b)\vec{j}$

c) En déduire que $cos(a-b)=cosa\,cosb+sina\,sinb$

d) En déduire que $cos(a+b)=cosa\,cosb-sina\,sinb$ (en pourra remarquer que $a+b=a-(-b)$)

e) En déduire que $cos(2a)=cos^2a-sin^2a=2cos^2a-1=1-2sin^2a$ (en pourra remarquer que $2a=a+a$)

f) Sachant que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad sin(x)=cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et $(\forall x\in\mathbb{R})\quad sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cos(x)$

Vérifier que $sin(a-b)=cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)$ et déduire que $sin(a-b)=sina\,cosb-cosa\,sinb$

g) En déduire que $sin(a+b)=sina\,cosb+cosa\,sinb$

h) En déduire que $sin(2a)=2cosa\,sina$



A retenir 1

Soient a et b deux nombres réels. On a les formules suivantes :

1. $cos(a-b)=cosa\,cosb+sina\,sinb$
2. $cos(a+b)=cosa\,cosb-sina\,sinb$

3 $sin(a-b)=sina\,cosb-cosa\,sinb$

4 $sin(a+b)=sina\,cosb+cosa\,sinb$

5 $cos(2a)=cos^2a-sin^2a=2cos^2a-1=1-2sin^2a$

6 $sin(2a)=2cosa\,sina$

Exemple 1

1) a) Vérifier que $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

b) Calculer $cos(\frac{5\pi}{12})$; $sin(\frac{5\pi}{12})$; $cos(\frac{\pi}{12})$; $sin(\frac{\pi}{12})$

2) a) En remarquant que $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$, montrer que $cos(\frac{\pi}{4})=2cos^2(\frac{\pi}{8})-1$

b) En déduire que $cos(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Montrer par deux méthodes que $sin(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

d) Vérifier par deux méthodes que $sin(\frac{\pi}{4})=2cos(\frac{\pi}{8})sin(\frac{\pi}{8})$

3) Transformation de $tan(a-b)$ et ses résultats – transformation de $cos^2(a)$ et $sin^2(a)$

Activité 2

Soient a et b deux nombres réels.

1) Montrer que : $cos^2(a)=\frac{1+cos(2a)}{2}$ et $sin^2(a)=\frac{1-cos(2a)}{2}$

2) On suppose que $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$

a) Simplifier l'expression suivant : $\frac{\frac{cos(a)}{sin(a)}+\frac{cos(b)}{sin(b)}}{1-\frac{cos(a)}{sin(a)}\times\frac{cos(b)}{sin(b)}}$ et déduire que $tan(a+b)=\frac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$

b) En déduire que si $2a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ alors : $tan(2a)=\frac{2tan(a)}{1-tan^2(a)}$

c) Montrer que $tan(a-b)=\frac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}$



A retenir 2 : Soient a et b deux nombres réels. On a les formules suivantes :

7 $cos^2(a)=\frac{1+cos(2a)}{2}$; 8 $sin^2(a)=\frac{1-cos(2a)}{2}$

Si $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tous $k\in\mathbb{Z}$, alors :

9 $tan(a-b)=\frac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}$; 10 $tan(a+b)=\frac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$

Si $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $2a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tous $k\in\mathbb{Z}$, alors 11 $tan(2a)=\frac{2tan(a)}{1-tan^2(a)}$

Exemple 2

1) Sachant que $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\pi}{8}$ calculer $tan(\frac{5\pi}{12})$ et $tan(\frac{\pi}{8})$

2) a) Soit x un nombre réel, montrer que : $\boxed{7'}$ $cos^2(\frac{x}{2})=\frac{1+cos(x)}{2}$ **et** $\boxed{8'}$ $sin^2(\frac{x}{2})=\frac{1-cos(x)}{2}$

b) Soit x un nombre réel, montrer par deux méthodes que : $1+cos(x)+2sin^2(\frac{x}{2})=2$

4) Transformation des produits en sommes et inversement

Activité 3

Soient a et b deux nombres réels.



1) Vérifier que : $\frac{1}{2}[cos(a+b)+cos(a-b)]=cos(a)cos(b)$

2) Montrer que $sin(a)sin(b)=-\frac{1}{2}[cos(a+b)-cos(a-b)]$

3) Montrer que $sin(a)cos(b)=\frac{1}{2}[sin(a+b)+sin(a-b)]$

4) Montrer que $cos(a)sin(b)=\frac{1}{2}[sin(a+b)-sin(a-b)]$

5) On pose $p=a+b$ **et** $q=a-b$

a) Vérifier que $a=\frac{p+q}{2}$ **et** $b=\frac{p-q}{2}$

b) En déduire que :

$cos(p)+cos(q)=2cos(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2})$; $cos(p)-cos(q)=-2sin(\frac{p+q}{2})sin(\frac{p-q}{2})$

$sin(p)+sin(q)=2sin(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2})$; $sin(p)-sin(q)=2cos(\frac{p+q}{2})sin(\frac{p-q}{2})$

A retenir 3

Soient a et b deux nombres réels. On a les formules suivantes :

$\boxed{12}$
$$\begin{cases} cos(a)cos(b)=\frac{1}{2}[cos(a+b)+cos(a-b)] \\ sin(a)sin(b)=-\frac{1}{2}[cos(a+b)-cos(a-b)] \\ sin(a)cos(b)=\frac{1}{2}[sin(a+b)+sin(a-b)] \\ cos(a)sin(b)=\frac{1}{2}[sin(a+b)-sin(a-b)] \end{cases}$$

$\boxed{13}$
$$\begin{cases} cos(p)+cos(q)=2cos(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2}) \\ cos(p)-cos(q)=-2sin(\frac{p+q}{2})sin(\frac{p-q}{2}) \\ sin(p)+sin(q)=2sin(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2}) \\ sin(p)-sin(q)=2cos(\frac{p+q}{2})sin(\frac{p-q}{2}) \end{cases}$$

Exemple 3

1) Ecrire sous forme de somme les produits suivants :

$A(x)=cos(x)cos(5x)$, $B(x)=cos(3x)sin(4x)$, $C(x)=sin(x-\frac{\pi}{3})sin(2x+\frac{\pi}{4})$, $D(x)=sin(x+\frac{\pi}{6})cos(x-\frac{\pi}{6})$

2) Transformer en produits les expressions suivantes :

$A(x)=cos(x)-cos(3x)$, $B(x)=sin(x)+sin(2x)+sin(3x)$, $C(x)=1+cos(x)+cos(2x)+cos(3x)$,

3) Montrer que : $sin(\frac{\pi}{12})-sin(\frac{7\pi}{12})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5) Transformation de l'expression $a\times cos(x)+b\times sin(x)$

Activité 4

Soient a et b deux réels tels que : $(a;b)\neq(0;0)$

Pour tout réel x on pose : $A(x)=acos(x)+bsin(x)$

1) Vérifier que $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\times cos(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\times sin(x)\right)=A(x)$

2) Vérifier que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$

3) En déduire qu'il existe un nombre α **tel que** $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=cos(\alpha)$ **et** $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=sin(\alpha)$

4) En déduire que : $acos(x)+bsin(x)=\sqrt{a^2+b^2}\,cos(x-\alpha)$

A retenir 4

Soient a **et** b **deux réels tels que :** $(a;b)\neq(0;0)$**. Alors il existe un réel** α **tel que :**

$$\boxed{14}\begin{cases} acos(x)+bsin(x)=r\,cos(x-\alpha) \\ avec \quad r=\sqrt{a^2+b^2},\ cos(\alpha)=\frac{a}{r} \quad et \quad sin(\alpha)=\frac{b}{r}\end{cases}$$

Exemple 4

1) Ecrire sous la forme $rcos(x-\alpha)$ **les expressions suivantes :**

$A(x)=cos(x)+sin(x)$ **;** $B(x)=\sqrt{3}cos(x)-sin(x)$

2) Montrer que

a) $cos(x)-\sqrt{3}sin(x)=1\Leftrightarrow cos(x+\frac{\pi}{3})=cos(\frac{\pi}{3})$; **b)** $cos(2x-\frac{\pi}{3})-sin(2x-\frac{\pi}{3})=-1\Leftrightarrow cos(2x-\frac{\pi}{12})=cos(\frac{3\pi}{4})$

6) Equations et inéquations trigonométriques

A retenir 5

(Les équations de base) : $\boxed{15}$

$$\begin{cases} cos(x)=cos(\alpha)\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=-\alpha+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}\end{cases} \\ sin(x)=sin(\alpha)\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}\end{cases} \\ tan(x)=tan(\alpha)\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \quad / k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$



$\boxed{16}$ **Pour résoudre une inéquation de base dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation de base qui lui associé.**

Exemple 5

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ **les équations suivantes :** $(E_1):cos(x)=\frac{1}{2}$; $(E_2):sin(x)=\frac{1}{2}$; $(E_3):tan(x)=1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ **les équations suivantes :** $(E_4):cos(x)=-\frac{1}{2}$; $(E_5):sin(x)=-\frac{1}{2}$; $(E_6):tan(x)=-1$

Exemple 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ **puis dans l'intervalle** $]-\pi;\pi]$ **l'équation suivante :** $(E_7):sin(3x)=sin(x+\frac{\pi}{4})$

Exemple 7

Résoudre dans $I=]-\pi;\pi]$ les inéquations suivantes :

$(E_8):cos(x)>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $(E_9):sin(x)\leq-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $(E_{10}):tan(x)\geq-\sqrt{3}$

$(E_{11}):(2sin(x)+\sqrt{2})(2cos(x)+1)<0$; $(E_{12}):-1\le tan(x)\le 1$

Exemple 8

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$ l'équation suivante : $cos(x)-\sqrt{3}sin(x)=1$

2) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $cos(x)-\sqrt{3}sin(x)<1$

Résumé 8 : Trigonométrie

1 $cos(a-b)=cosa\,cosb+sina\,sinb$

2 $cos(a+b)=cosa\,cosb-sina\,sinb$

3 $sin(a-b)=sina\,cosb-cosa\,sinb$

4 $sin(a+b)=sina\,cosb+cosa\,sinb$

5 $cos(2a)=cos^2a-sin^2a=2cos^2a-1=1-2sin^2a$

6 $sin(2a)=2cosa\,sina$; 7 $cos^2(a)=\dfrac{1+cos(2a)}{2}$; 8 $sin^2(a)=\dfrac{1-cos(2a)}{2}$

9 $tan(a-b)=\dfrac{tan(a)-tan(b)}{1+tan(a)tan(b)}$; 10 $tan(a+b)=\dfrac{tan(a)+tan(b)}{1-tan(a)tan(b)}$; 11 $tan(2a)=\dfrac{2tan(a)}{1-tan^2(a)}$

12
$$\begin{cases} cos(a)cos(b)=\frac{1}{2}[cos(a+b)+cos(a-b)] \\ sin(a)sin(b)=-\frac{1}{2}[cos(a+b)-cos(a-b)] \\ sin(a)cos(b)=\frac{1}{2}[sin(a+b)+sin(a-b)] \\ cos(a)sin(b)=\frac{1}{2}[sin(a+b)-sin(a-b)] \end{cases}$$

13
$$\begin{cases} cos(p)+cos(q)=2cos(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2}) \\ cos(p)-cos(q)=-2sin(\frac{p+q}{2})sin(\frac{p-q}{2}) \\ sin(p)+sin(q)=2sin(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2}) \\ sin(p)-sin(q)=2cos(\frac{p+q}{2})sin(\frac{p-q}{2}) \end{cases}$$

14
$$\begin{cases} acos(x)+bsin(x)=r\,cos(x-\alpha) \\ avec \quad r=\sqrt{a^2+b^2},\ cos(\alpha)=\frac{a}{r} \quad et \quad sin(\alpha)=\frac{b}{r} \end{cases}$$

(Les équations de base) : 15
$$\begin{cases} cos(x)=cos(\alpha)\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=-\alpha+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z} \end{cases} \\ sin(x)=sin(\alpha)\Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \quad / k\in\mathbb{Z} \end{cases} \\ tan(x)=tan(\alpha)\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \quad / k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$



16 **Pour résoudre une inéquation de base dans un intervalle donné on place premièrement sur le cercle trigonométrique l'intervalle et les points dont les abscisses curvilignes sont les solutions de l'équation de base qui lui associé.**

Prof : Aissa HIYAB Niveau : 1BSMF	**Série 8** **Trigonométrie**	Lycée qualifiant : Almajd Matière : Mathématique

Exercice 1

1) Soit x un nombre réel, montrer que :

a) $cos(x)=cos(x+\frac{\pi}{3})+cos(\frac{\pi}{3}-x)$

b) $sin(x)=sin(x+\frac{\pi}{3})+sin(\frac{\pi}{3}-x)$

2) Soient a et b deux nombres réels tel que

$0<a<\frac{\pi}{2}$, $0<b<\frac{\pi}{2}$ et $sina=cosb=\frac{1}{3}$

a) Calculer $cosa$ et $sinb$

b) Calculer $sin(a+b)$ et en déduire la valeur de $a+b$

Exercice 2

1) Soit x un nombre réel tels que :

$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi$

1) Montrer que : $tan(\frac{\pi}{4}-x)\times tan(\frac{\pi}{4}+x)=1$

2) Soit x un nombre réel tels que : $x\neq k\pi$

Montrer que : $\frac{1-cos(x)}{sin(x)}=tan(\frac{x}{2})$

Exercice 3

1) Ecrire sous forme de somme les produits suivants :

$A(x)=cos(3x)sin(x)$, $B(x)=sin(2x)sin(x)$,

$C(x)=sin(x-\frac{\pi}{6})cos(2x)$,

$D(x)=cos(x+\frac{\pi}{3})cos(x-\frac{\pi}{3})$

2) Transformer en produits les expressions suivantes :

$A(x)=cos(7x)-cos(3x)$

$B(x)=cos(x)+cos(3x)+cos(5x)+cos(7x)$

3) Montrer que :

$sin(\frac{\pi}{12})+sin(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{6}}{2}$; $sin(\frac{\pi}{12})\times sin(\frac{7\pi}{12})=\frac{1}{4}$

Exercice 4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

(E_1) $2sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$; $I=[0;2\pi[$

(E_2) $cos(3x)+sin(3x)=-1$; $I=[-\pi;\pi[$

(E_3) $cos(x)+cos(2x)+cos(3x)+cos(4x)=0$; $I=\mathbb{R}$

(E_4) $tan^2(x)-\sqrt{2}tan(x)+\sqrt{2}-1=0$; $I=[-5\pi;-3\pi[$

2) Résoudre dans I les inéquations suivantes :

(E_1) $2sin(2x+\frac{\pi}{6})\geq\sqrt{3}$; $I=[0;2\pi[$

(E_2) $cos(3x)+sin(3x)\leq-1$; $I=[-\pi;\pi[$

(E_3) $cos(x)+cos(2x)+cos(3x)+cos(4x)>0$; $I=\mathbb{R}$

(E_4) $tan^2(x)-\sqrt{2}tan(x)+\sqrt{2}-1<0$; $I=[-5\pi;-3\pi[$

Exercice 5

On considère l'expression

$A(x)=sin^2(\frac{\pi}{8}+x)+cos^2(\frac{\pi}{8}-x)-1$

1) Calculer $A(\frac{\pi}{8})$ et $A(\frac{\pi}{4})$

2) Montrer que $2sin^2(\frac{\pi}{8}+x)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}(cos(2x)-sin(2x))$

Et $2cos^2(\frac{\pi}{8}+x)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}(cos(2x)+sin(2x))$

3) Déduire que $A(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}sin(2x)$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=\frac{1}{2}$

Exercice 6

Soit $x;y\in\mathbb{R}$ montrer que :

1) $cos(3x)=4cos^3(x)-3cos(x)$ et $sin(3x)=-4sin^3(x)+3sin(x)$

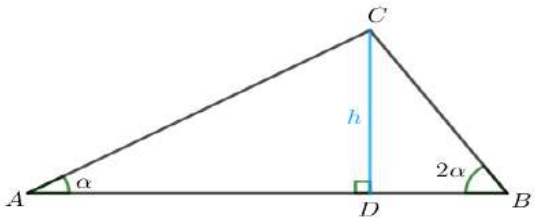
2) $\frac{sin(x+y)}{sin(x-y)}=\frac{tan(x)+tan(y)}{tan(x)-tan(y)}$

3) $tan(x)-tan(y)=\frac{2sin(x-y)}{cos(x+y)+cos(x-y)}$

4) $\frac{cos(x+y)cos(x-y)}{cos^2(x)cos^2(y)}=\frac{tan^2x-tan^2y}{tan(x+y)tan(x-y)}$

Exercice 7

On considère la figure suivante :



1-Montrer que $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ et déduire que $tan(\alpha)\notin\{0;1;\sqrt{3}\}$

2-Montrer que $\frac{1}{tan(2\alpha)}+\frac{1}{tan(\alpha)}=\frac{AB}{h}$

3-En déduire que : $h=2AB\times\frac{tan(\alpha)}{3-tan^2(\alpha)}$

Exercice 8

Soient A, B et C les mesures des angles d'un triangle ABC $(A+B+C=\pi)$

Montrer que :

1) $cos^2(A)+cos^2(B)+cos^2(C)=1-2cos(A)cos(B)cos(C)$

2) $sin(A)+sin(B)+sin(C)=4cos(\frac{A}{2})cos(\frac{B}{2})cos(\frac{C}{2})$

Exercice 9

1) Soit x un nombre réel, on pose
$A(x)=2sin(2x)+2sin(x)-\sqrt{3}\left(2cos(x)+1\right)$

2) Montrer que :
$A(x)=\left(2sin(x)-\sqrt{3}\right)\left(2cos(x)+1\right)$

3) Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique l'équation $A(x)=0$

4) Etudier le signe de $A(x)$ sur l'intervalle : $]-\pi;\pi[$

Exercice 10

1) Soit x un nombre réel, on pose
$A(x)=2cos^3(x)-cos(x)+2sin(x)-2sin^3(x)$

2) Montrer que :
$sin(x)-sin^3(x)=\frac{1}{2}sin(2x)cos(x)$
et $2cos^3(x)-cos(x)=cos(2x)cos(x)$

3) En déduire que $A(x)=\sqrt{2}cos(x)\times cos(2x-\frac{\pi}{4})$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=0$

5) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation $A(x)\geq 0$

Exercice 11

1) Montrer que :
$(\forall x\in\mathbb{R})\quad cos(2x)=2cos(x+\frac{\pi}{4})sin(x+\frac{\pi}{4})$

2) En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de l'équation
$4cos(x+\frac{\pi}{4})sin(x+\frac{\pi}{4})=1$

3) Soit x un nombre réel, on pose
$A(x)=4cos^3(x)+8cos^2(x)-3cos(x)-6$

a) Montrer que :
$(\forall x\in\mathbb{R})\quad A(x)=\left(2+cos(x)\right)\left(4cos^2(x)-3\right)$

b) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad 2+cos(x)>0$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=0$

Exercice 12

1) a) Vérifier que $8-4\sqrt{3}=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$2x^2+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)x+\sqrt{3}=0$

2) Soit x un nombre réel, on pose
$A(x)=2sin(2x)-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(cos(x)-sin(x)\right)-\left(2+\sqrt{3}\right)$

a) Simplifier l'expression $\left(cos(x)-sin(x)\right)^2$ et déduire $sin(2x)$ en fonction de $cos(x)-sin(x)$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=0$

3) a) Montrer que :
$A(x)=-16cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{24})cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{24})cos(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{24})cos(\frac{x}{2}+\frac{7\pi}{24})$

b) Etudier le signe de $A(x)$ sur l'intervalle $\left[0;\frac{7\pi}{12}\right[$

Exercice 13

Soit x un nombre réel

1) Calculer $cos(3x)$ en fonction de $cos(x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$(E):4\left(cos(x)\right)^3-2\left(cos(x)\right)^2-3cos(x)+1=0$

3) En déduire les solutions de l'équation (E) dans l'intervalle $[0;2\pi]$

4) On considère l'équation $(F):\ 4X^3-2X^2-3X+1=0$

a) Vérifier que 1 est une solution de (F) puis déterminer les autres solutions.

b) Montrer que $cos(\frac{2\pi}{5})$ est une solution de (F)

c) En déduire que $cos(\frac{2\pi}{5})=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Exercice 14

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $cos(4x)=sin(3x)$

2) Montrer que
$(\forall x\in\mathbb{R})\quad \begin{cases} sin(3x)=-4sin^3(x)+3sin(x) \\ cos(4x)=8sin^4(x)-8sin^2(x)+1 \end{cases}$

3) En déduire que les solutions de l'équation $8t^4+4t^3-8t^2-3t+1=0$ est :
$S=\left\{-1;-sin(\frac{3\pi}{14});sin(\frac{\pi}{14});sin(\frac{5\pi}{14})\right\}$

4) Factoriser le polynôme $P(t)=8t^4+4t^3-8t^2-3t+1$

5) En déduire que $sin(\frac{\pi}{14})-sin(\frac{3\pi}{14})+sin(\frac{5\pi}{14})=\frac{1}{2}$ et
$sin(\frac{\pi}{14})\times sin(\frac{3\pi}{14})\times sin(\frac{5\pi}{14})=\frac{1}{8}$

Exercice 15

Soit x un nombre réel tel que $x\neq 2k\pi$ pour tout $k\in\mathbb{R}$

Montrer que :

1) $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ \prod_{k=1}^{n}cos(kx)=\frac{sin(\frac{nx}{2})cos(\frac{(n+1)x}{2})}{sin(\frac{x}{2})}$

2) $(\forall n\in\mathbb{N}):\ \prod_{k=0}^{n}cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{sin(2n)}{2^{n+1}sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL4

1BACSMF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Suites numériques)

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 6}{u_n + 2}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n < 6$.

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

3) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n + 1}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

4) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - 6| = \dfrac{1}{2}|u_n - 6|$

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - 6| = 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

5) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{7}{u_k + 1}$. Déterminer S_n et T_n en fonction de n.

Exercice 2 (Suites numériques)

Exercice de synthèse 5 page 70

Exercice 3 (Trigonométrie)

1) a) En remarquant que $\dfrac{\pi}{6} = 2 \times \dfrac{\pi}{12}$, calculer $sin^2(\dfrac{\pi}{12})$ puis déduire la valeur de $sin(\dfrac{\pi}{12})$

b) Calculer par deux méthodes $cos(\dfrac{\pi}{12})$

c) Calculer par deux méthodes $tan(\dfrac{\pi}{12})$ puis calculer par deux méthodes $tan(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{4})$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, en remarquant que $3x = 2x + x$, montrer que :

$$cos(3x) = 4cos^3(x) - 3cos(x) \quad ; \quad sin(3x) = -4sin^3(x) + 3sin(x) \quad ; \quad tan(3x) = \frac{1 - 3tan^2(x)}{3tan(x) - tan^3(x)}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq (2k+1)\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $t = tan(\dfrac{x}{2})$:

Montrer que $cos(x) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $sin(x) = \dfrac{2t}{1 + t^2}$; $tan(x) = \dfrac{2t}{1 - t^2}$; $\dfrac{1 - cos(x)}{sin(x)} = t$

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi : \pi]$ les équations suivantes :

$2sin(x) - 1 = 0$; $\sqrt{2}cos(x) + 1 = 0$; $cos(x) + \sqrt{3}sin(x) = \sqrt{2}$

b) Placer les solutions des équations précédentes sur le cercle trigonométrique.

c) Résoudre dans $]-\pi : \pi]$ les inéquations suivantes $2sin(x) - 1 \geq 0$ et $\sqrt{2}cos(x) + 1 < 0$

5) Soient A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle ABC : $(A + B + C = \pi)$. Montrer que :

a) $cos^2(A) + cos^2(B) + cos^2(C) = 1 - 2cos(A)cos(B)cos(C)$

b) $sin(A) + sin(B) + sin(C) = 4cos(\dfrac{A}{2})cos(\dfrac{B}{2})cos(\dfrac{C}{2})$

c) $cos(A) + cos(B) + cos(C) = 1 + 4sin(\dfrac{A}{2})sin(\dfrac{B}{2})sin(\dfrac{C}{2})$

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب
ثانوية المجد التأهيلية

9

Limite d'une fonction



Activités et rappel

Activité 1

Recopier et compléter le tableau suivant :

x	1	2	5	10	10^2	10^3
x^2						
x^3						
$\sqrt{x}$						
$\frac{1}{x}$						

1) Lorsque x prend des valeurs plus en plus grandes, les réels x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ prennent des valeurs :

.....

On dit que la limite de x^2, x^3 et $\sqrt{x}$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à .....

On écrit .....

2) Lorsque x s'approche de plus en plus de $+\infty$, le réel $\frac{1}{x}$ s'approche de plus en plus de .....

On dit que la limite de $\frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ est ..... On écrit .....

Activité 2

Recopier et compléter le tableau suivant :

	x s'approche de plus en plus de 0 et $x<0$						x s'approche de plus en plus de 0 et $x>0$				
	-0.03	**-0.02**	**-0.01**	**-0.002**	$\rightarrow$	**0**	$\leftarrow$	**0.002**	**0.01**	**0.02**	**0.03**
$\frac{1}{x}$					.....		.....				

1) Lorsque x s'approche de plus en plus de 0 et $x>0$, le réel $\frac{1}{x}$ s'approche de plus en plus de .....

On dit que la limite à droite de $\frac{1}{x}$ quand x tend vers 0 est .... On écrit ..... ou bien .....

2) Lorsque x s'approche de plus en plus de 0 et $x<0$, le réel $\frac{1}{x}$ s'approche de plus en plus de .....

On dit que la limite à droite de $\frac{1}{x}$ quand x tend vers 0 est .... On écrit ..... ou bien .....

Rappel

Rappel 1 : Tableau de signe du binôme : $ax+b$: Voir l'exemple 3

Rappel 2 : Tableau de signe du trinôme : ax^2+bx+c : Voir l'exemple 3

Rappel 3 : Factorisation du trinôme : ax^2+bx+c : Voir l'exemple 4

Rappel 4 : Factorisation d'un polynôme : division euclidienne : Voir l'exemple 4

Rappel 5 : Factorisation de : a^3+b^3 et a^3-b^3 : Voir l'exemple 4

Rappel 6 : Le conjugué de $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, $a\pm\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}\pm b$: Voir l'exemple 5

Rappel 7 : Encadrement de cosinus et de sinus : Voir l'exemple 9



Résumé 9 : Limite d'une fonction

Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si\ n\ est\ pair \\ -\infty & si\ n\ est\ impair \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x}$: **N'existe pas** **(On dit que la fonction** $x \mapsto \sqrt{x}$ **n'admet pas de limite en** $-\infty$**)**	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$: **N'existe pas**	$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & si\ n\ est\ pair \\ -\infty & si\ n\ est\ impair \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{\sqrt{x}}$ **et** $\lim\limits_{x\to0^-} \sqrt{x}$: **N'existes pas** $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0$

Limite à droite -limite à gauche

*** Pour que** f **admet une limite** l **en** a**, il faut et il suffit qu'elle admette la limite** l **à droite et à gauche en** a**. Autrement dit :** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

En particulier si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ **alors** f **n'admet pas de limite en** a**.**



Opérations sur les limites

$"(+\infty)+(+\infty)" = +\infty$ $"(-\infty)+(-\infty)" = -\infty$ $"(+\infty)+(-\infty)" = F.I$ $"(+\infty)+3" = +\infty$ $"(+\infty)-3" = +\infty$ $"(-\infty)+3" = -\infty$ $"(-\infty)-3" = -\infty$ $"(+\infty)^n" = +\infty$ $"(-\infty)^n" = \begin{cases} +\infty & (n\ est\ pair) \\ -\infty & (n\ est\ impair) \end{cases}$	$"(+\infty)\times(+\infty)" = +\infty$ $"(+\infty)\times(-\infty)" = -\infty$ $"(-\infty)\times(-\infty)" = +\infty$ $"(+\infty)\times3" = +\infty$ $"(+\infty)\times(-3)" = -\infty$ $"(-\infty)\times3" = -\infty$ $'(-\infty)\times(-3)" = +\infty$ $"(\pm\infty)\times0" = F.I$ $"\sqrt{+\infty}" = +\infty$	$"\frac{1}{\pm\infty}" = 0$ $"\frac{3}{\pm\infty}" = 0$; $"\frac{-3}{\pm\infty}" = 0$ $"\frac{1}{0^+}" = +\infty$; $"\frac{1}{0^-}" = -\infty$ $"\frac{3}{0^+}" = +\infty$; $"\frac{-3}{0^+}" = -\infty$ $"\frac{3}{0^-}" = -\infty$; $"\frac{-3}{0^-}" = +\infty$	$"\frac{+\infty}{3}" = +\infty$; $"\frac{+\infty}{-3}" = -\infty$ $"\frac{-\infty}{3}" = -\infty$; $"\frac{-\infty}{-3}" = +\infty$ $"\frac{\pm\infty}{\pm\infty}" = F.I$ $"\frac{0}{0}" = F.I$ $"(0^+)^n" = 0^+$ $"(0^-)^n" = \begin{cases} 0^+ & (n\ est\ pair) \\ 0^- & (n\ est\ impair) \end{cases}$

Remarques 1

*** Il existe donc quatre formes indéterminées** $"(+\infty)+(-\infty)"$, $"(\pm\infty)\times0"$, $"\frac{\infty}{\infty}"$ **et** $"\frac{0}{0}"$ **où les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure.**

*** Il existe plusieurs méthodes pour lever l'indétermination (exemples : Les identités remarquables, factorisation, division euclidienne, multiplier par la conjuguée, multiplier et diviser par le même nombre, changement de variables, effectuer un encadrement, utilisation des propriétés 1, 2 et 3)**

Propriétés 1 : Limites des polynômes et de fonctions rationnelles

Soit $P(x)$ **et** $Q(x)$ **des polynômes tel que** $Q(a) \neq 0$, $degP(x) = n$ **et** $degQ(x) = m$

***** $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$ **et** $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

***** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n$ **et** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$ **(**a **et** b **sont les coefficients de** x^n **et** x^m **dans les polynômes** $P(x)$ **et** $Q(x)$ **respectivement)**

Propriétés 2 : Limites de fonctions trigonométriques

$$* \begin{cases} \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{sin(X)}{X} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{tan(X)}{X} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{1-cos(X)}{X^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad * \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(ax)}{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tan(ax)}{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(ax)}{(ax)^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



Remarques 2

* $(\forall X \in \mathbb{R}) \quad -1 \le cos(X) \le 1$ **et** $-1 \le sin(X) \le 1$

* **Les fonctions** $x \mapsto cos(x)$, $x \mapsto sin(x)$ **et** $x \mapsto tan(x)$ **n'admet pas de limite en** $\pm\infty$

Autrement dit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} cos(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} sin(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} tan(x)$ **n'existes pas.**

Propriétés 3 : Limites et ordre

$* \begin{cases} g(x) < f(x) < h(x) \\ \lim g(x) = l \\ \lim h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = l$	$* \begin{cases} \lvert f(x) - l \rvert < g(x) \\ \lim g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = l$
$* \begin{cases} f(x) > g(x) \\ \lim g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = +\infty$	$* \begin{cases} f(x) < g(x) \\ \lim g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim f(x) = -\infty$

Remarques 3

* f **admet une limite** l **en** $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

* **Si** f **admet la limite** l **en** a **alors** l **est unique.**

* **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ **et** $l \in \mathbb{R}$ **on dit que** f **admet une limite finie en** a

* **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ **on dit que** f **admet une limite infinie en** a

* $\lim f(x) = l \Leftrightarrow \lim\big(f(x) - l\big) = 0$

$$* \begin{cases} \lim f(x) = l \Rightarrow \lim \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l} & (l \neq 0) \\ \lim f(x) = l \Rightarrow \lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{l} & (l \ge 0) \\ \lim \alpha \times f(x) = \alpha \times \lim f(x) \\ \lim c = c \qquad (c \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

$$* \begin{cases} f \ est \ paire \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \\ f \ est \ impaire \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \end{cases}$$

Définition de la limite

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \quad \lvert x-a \rvert < \alpha \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \quad 0 < x-a < \alpha \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \quad -\alpha < x-a < 0 \Rightarrow \lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$	**Limite finie en un point**
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \quad \lvert x-a \rvert < \alpha \Rightarrow f(x) > A$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \quad 0 < x-a < \alpha \Rightarrow f(x) > A$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \quad -\alpha < x-a < 0 \Rightarrow f(x) > A$	**Limite infinie en un point**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)(\exists \alpha>0)(\forall x\in D_f)\ \ \lvert x-a\rvert<\alpha \Rightarrow f(x)<-A$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)(\exists \alpha>0)(\forall x\in D_f)\ \ 0<x-a<\alpha \Rightarrow f(x)<-A$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)(\exists \alpha>0)(\forall x\in D_f)\ \ -\alpha<x-a<0 \Rightarrow f(x)<-A$	**Limite infinie en un point**
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f)\ \ x>B \Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert<\varepsilon$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f)\ \ x<-B \Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert<\varepsilon$	**Limite finie en l'infini**
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f)\ \ x>B \Rightarrow f(x)>A$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f)\ \ x>B \Rightarrow f(x)<-A$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f)\ \ x<-B \Rightarrow f(x)>A$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow (\forall A>0)(\exists B>0)(\forall x\in D_f)\ \ x<-B \Rightarrow f(x)<-A$	**Limite infinie en l'infini**

Remarques 4 : Conditions nécessaires pour calculer une limite

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition.

* **Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de a. (Exemple $]a-0,1;a[\cup]a;a+0,1[\subset D_f$)**
* **Pour calculer $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de a à droite. (Exemple $]a;a+0.1[\subset D_f$)**
* **Pour calculer $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de a à gauche. (Exemple $]a-0,1;a[\subset D_f$)**
* **Pour calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de $+\infty$. (Exemple $]10^9;+\infty[\subset D_f$)**
* **Pour calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ il faut que f soit définie au voisinage de $-\infty$. (Exemple $]-\infty;-10^9[\subset D_f$)**



Exemple 1 : Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^5$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to0} x^5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^6}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5\times\frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$

Exemple 2 : Limite à gauche – Limite à droite

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-5 & si\ \ x>4\\ x-5+\frac{1}{x} & si\ \ x<4\end{cases}$$

1) Calculer $f(9)$, $f(1)$, $f(16)$, $f(3)$ et $f(2)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$

3) f admet-elle la limite en 4 ?

4) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et conclure.

5) Montrer que $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$

Exemple 3 : Opérations sur les limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+8$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+x-1$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{-5}{x}-\frac{1}{x^2}+2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2+x)^7(-4x^2+1)$; $\lim\limits_{x\to1} \frac{3x+5}{x^2-3}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{4-x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{-5}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{7}{-x+3}$

$\lim\limits_{x\to5^-} \frac{4}{5-x}$; $\lim\limits_{x\to(-4)^+} \frac{2}{x^2+6x+8}$; $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{3x+5}{x^2-1}$

Exemple 4 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to3} \frac{2x^2-11x+15}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to3} \frac{2x^2-x-15}{x^3+x^2-11x-3}$; $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^3-27}{x^3+x^2-11x-3}$

$\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-3x}{6-2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\sqrt{x}-2x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}$

Exemple 5 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{2x+5}}$

Exemple 6 : Polynômes et fonctions rationnelles

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x^4+8x-4$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^2-7x+6$

$\lim\limits_{x\to1} 9x^2+3x+1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^3+3x^2-4x+5}{x^2+x^5-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^7+8x^2+1}{x^3-2x+3}$

Exemple 7 : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{ax^2+bx+c}\pm(\alpha x+\beta)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}-x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+3}-3x+1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+x+1}+3x-2$

Exemple 8 : Fonctions trigonométriques

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} sin(x)$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{sin(3x)}{4x}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-cos(5x)}{x^2}$

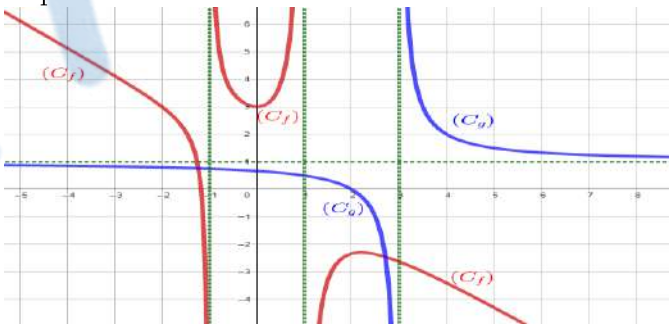
$\lim\limits_{x\to5} \frac{tan(x-5)}{x-5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{cos(x)}{x}$

Exemple 9 : Limites et ordre

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+cos(x)\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{sin(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0} \left(3x^2\times sin(\frac{1}{x^2})\right)$

Exemple 10 : Détermination des limites graphiquement

Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont les courbes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ et $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ respectivement.



1)Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$

2) Dresser le tableau de variations de f en ajoutant les limites précédentes. (On donne $f(2)=-\frac{7}{3}$)

3) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to3^+} g(x)$; $\lim\limits_{x\to3^-} g(x)$

4) Dresser le tableau de variations de g .

Exemple 11 : Définition de la limite

En utilisant la définition de la limite montrer que :

$\lim\limits_{x\to1} \frac{x+9}{2x+3}=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+9}{2x+3}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+9}{2x+3}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{1-x}=-\infty$

Prof : Aissa HIYAB
Niveau : 1BSMF

Série 9
Limite d'une fonction

Lycée qualifiant : Almajd
Matière : Mathématique

Exercice 1 : Opérations sur les limites

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 4} 7x^5+3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-x}{x^2+x-6}$;

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-5}{1-x}$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{-x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} (1-x)^5(-2x^2+5)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{1-4x}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{1-x^2}$

Exercice 2 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3}$; $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} 2x-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$;

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{2x}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-125}{x-5}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^3-8}{x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x-1}-3x^2+x+2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}+2x^4-x-1$;

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^3+(x-2)^2-3}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2+x-30}{x^3-7x^2-5x+75}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x^3+2x^2+x-2}{-x^2+5x-6}$

Exercice 3 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-3}}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+x}$;

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+9}-3}$; $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{4x-3}-x}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{2-7x}-3}$;

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}$

Exercice 4 : Formes indéterminées

$\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3x}+x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} -\sqrt{2x^2-9x-4}-8x+3$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2-7x+9}+8x-4$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} -\sqrt{x^2-6x-2}-x+12$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{3x^2-4x+7}-3x+8$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x-2}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{x-\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-x}+x}{\sqrt{x^2+x}-2x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x+2}$;

Exercice 5 : Polynômes et fonctions rationnelles

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^2-7x^5+x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} -3x^2+x+1$;

$\lim\limits_{x\to -1} x^2+3x^5-4$; $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2-5x^3-x^5-3$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+x-30}{x^3-7x^2-5x+75}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4+x^2+1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{27x^7-x^3}{11x^5-2x^2-15}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^4-4x}{8x^4+2x^3}$;

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x}{(2x+1)^3}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x}{(2x+1)^2}$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{4x^2+x+1}}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+3x}{(2x+1)^2}$

Exercice 6 : Fonctions trigonométriques

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(3x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(4x)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(x)}{tan^2(x)}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(x)}{sin(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin^3(2x)}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(2x)}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{tan(x-1)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(5x)}{tan(2x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-cos(x)}{x\times tan(x)}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x\times sin(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tan(x)(cos(x)-1)}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-cos(x)}}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+sin(2x)}{tan(x)}$; $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{1+2cos(x)}{sin(x)}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-3+sin(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{sin(x)}{x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{cos(x)+sin(x)-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3}cos(x)-sin(x)-\sqrt{3}}{x}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{tan(x)-\sqrt{3}}{6x-2\pi}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{sin(x)-1}{2x-\pi}$

Exercice 7 : Limite de la partie entière

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{E(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} E(x)+sin(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2E(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}E(\dfrac{1}{x})$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2E(x)+(x-E(x))^2}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{|x|-E(x)}}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{E(x^2)-x^2}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{E(x^2)-x^2}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-E(x)}$

Exercice 8 : Définition de la limite

En utilisant la définition de la limite montrer que :

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x-1}{x+10}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+10}=2$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-1}{x+10}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to (-10)^+} \dfrac{-2x+1}{x+10}=-\infty$

10

Rotation

HIYAB



Rappel

*/ La médiatrice d'un segment est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui lui est perpendiculaire.

*/ Si une droite est perpendiculaire à un segment en son milieu, alors c'est sa médiatrice.

*/ Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur sa médiatrice.

*/ Si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

*/ Si une droite passe par deux points équidistants d'un segment, alors c'est sa médiatrice.

*/ Un triangle est rectangle si et seulement si le milieu de son hypoténuse est équidistant de ses sommets.

*/ Si un triangle est isocèle dont l'un de ces angles égale à $60°$ alors il est équilatéral.

*/ $x \equiv y\,[2\pi]$ se lit « x est congru à y modulo $[2\pi]$ »

*/ $x \equiv y\,[2\pi] \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

*/ $\begin{cases} x \equiv y\,[2\pi] \\ y \equiv z\,[2\pi] \end{cases} \Rightarrow x \equiv z\,[2\pi]$

*/ $\begin{cases} x \equiv y\,[2\pi] \\ x \equiv z\,[2\pi] \end{cases} \Rightarrow y \equiv z\,[2\pi]$

*/ $x \equiv y\,[2\pi] \Leftrightarrow y \equiv x\,[2\pi]$

*/ $\left(\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$

*/ $\left(\overrightarrow{-u};\overrightarrow{v}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$

*/ $\left(\overrightarrow{-u};\overrightarrow{-v}\right) \equiv \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$

*/ $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{w}\right) + \left(\overrightarrow{w};\overrightarrow{v}\right) \equiv \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$ (Relation de Chasles)

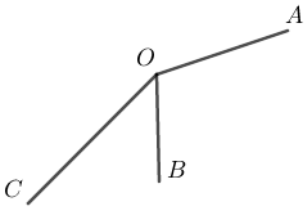
Activités

Activité 1 :

Soit O un point fixe du plan orienté P. On considère les points A, B et C distincts de O

1) a) Construire le cercle (C_A) de centre O et passant par A.

b) Construire sur le cercle (C_A) le point A' tel que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$



2) a) Construire le cercle (C_B) de centre O et passant par B.

b) Construire sur le cercle (C_B) le point B' tel que $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) Construire le point C' tel que $\begin{cases} OC = OC' \\ \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Activité 2 :



Soit OAB un triangle rectangle en O tel que $OA < OB$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $r(A) = A'$et $r(B) = B'$.

1) Construire une figure convenable.

2) a) Montrer que $\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

b) En déduire que $\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

3) a) Montrer que les triangles OAB et $OA'B'$ sont isométriques.

b) En déduire que $AB = A'B'$.

Activité 3 :

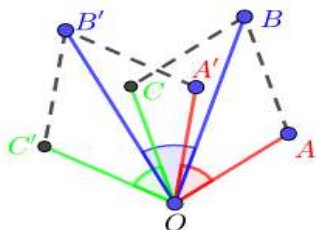
Soit O un point du plan P et αun réel.

Soient A et B deux points distinct de O.

On considère la rotation $r(O;\alpha)$.

On pose $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.

Soit C le point tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$.



On pose $r(C) = C'$.

1) a) Vérifier que $OC = AB$ et $OA = CB$.

b) En déduire que $OC' = A'B'$ et $OA' = C'B'$puis que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OC'}$.

c) En déduire que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \alpha[2\pi]$.

2) Soit D un point du plan distinct de C. On pose $D' = r(D)$.

a) En déduire que $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{C'D'}\right) \equiv \alpha[2\pi]$.

b) En utilisant la relation de Chasles montrer que :$\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$.

c) En déduire que $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)[2\pi]$.

Activité 4 :

Soit a et b deux réels tel que $a + b \neq 0$ on pose $G = Bar\{(A;a);(B;b)\}$.

On considère la rotation $r(O;\alpha)$.

On pose $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ et $r(G) = G'$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

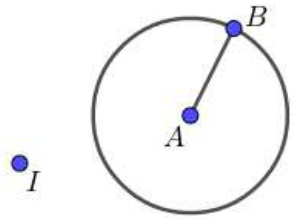
2) a) En déduire que $\overrightarrow{A'G'} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{A'B'}$.

b) En déduire que $G' = Bar\{(A';a);(B';b)\}$.

Activité 5 :

Soit (C) un cercle de centre A et de rayon R. B est un point de (C).

On considère la rotation $r(I;\frac{\pi}{3})$.



1) a) Construire A' et B' les images respectives des points A et B par la rotation r.

b) Montrer que $A'B' = R$.

2) Soit Mun point de (C) et M' son image par la rotation r.

On note (C') le cercle de centre A' et de rayon R.

a) Vérifier que $A'M' = R$ et déduire que $M' \in (C')$.

b) En déduire que l'image du cercle (C) par la rotation r est le cercle (C').

3) a) Montrer que l'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite $(A'B')$

b) Montrer que l'image du segment $[AB]$ par la rotation r est le segment $[A'B']$.

Définition d'une rotation – rotation réciproque

A retenir 1

Soit O un point fixe du plan orienté P et α un nombre réel.

→ La rotation de centre O et d'angle α est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M'défini par :

Si $M = O$ alors $M' = O$

Si $M \neq O$ alors $\begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$

On la note $r(O;\alpha)$ou r .Et on écrit $r(M) = M'$

Ainsi si $M \neq O$ alors : $r(M) = N \Leftrightarrow \begin{cases} OM = ON \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$ (1)

Remarques 1

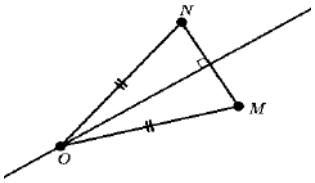
→ La rotation $r(O;-\alpha)$ de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée la rotation réciproque de la rotation $r(O;\alpha)$ de centre O et d'angle α

On la note r^{-1} et on a pour tout point N du plan : $\boxed{r^{-1}(N)=M \Leftrightarrow r(M)=N}$ $\boxed{2}$

→ Si $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$ alors :

a) Le centre O de la rotation $r(O;\alpha)$ est l'unique point invariant par cette rotation.

b) Le centre O de la rotation $r(O;\alpha)$ appartient à la médiatrice du segment $[MN]$ ou $r(M)=N$



→ On dit que la rotation r transforme le point M en N si $r(M)=N$

→ Si $\alpha \equiv \pi[2\pi]$ alors la rotation $r(O;\alpha)$ est la symétrie centrale de centre O



Exemple 1

ABC un triangle isocèle de sommet A tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) Construire une figure convenable.

2) On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) Vérifier que $r(C)=B$.

b) Construire le point B' l'image de B par la rotation r.

مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

L'image des figures usuelles par une rotation

A retenir 2

Soit $ABCD$ un quadrilatère dans le plan P.

Soit r une rotation. On pose $r(A)=A'$, $r(B)=B'$, $r(C)=C'$ et $r(D)=D'$.

Figure :	Droite (AB)	Demi-droite $[AB)$	Segment $[AB]$	Cercle de centre A et de rayon R	Triangle ABC	Quadrilatère $ABCD$
Son image par la rotation r	Est la droite $(A'B')$	Est la demi-droite $[A'B')$	Est le segment $[A'B']$	Est le cercle de centre A' et de même rayon R	Est le Triangle $A'B'C'$	Est le quadrilatère $A'B'C'D'$
Expression mathématique de l'image par la rotation r	$r((AB))=(A'B')$	$r([AB))=[A'B')$	$r([AB])=[A'B']$	$r(C(A;R))=C'(A';R)$		
Cas général $\boxed{3}$	$r((MN))=(r(M)r(N))$	$r([MN))=[r(M)r(N))$	$r([MN])=[r(M)r(N)]$	$r(C(M;R))=C'(r(M);R)$	L'image du triangle MNE par la rotation r est le triangle $r(M)r(N)r(E)$	L'image du quadrilatère MNEF par la rotation r est le quadrilatère $r(M)r(N)r(E)r(F)$
Conclusion	La rotation conserve la nature des figures géométrique. (C'est-à-dire une figure (ξ) et son image $r((\xi))$ ont la même nature)					

Les propriétés d'une rotation

A retenir 3

Soit $r(O;\alpha)$ **une rotation de centre** O **et d'angle** α

Soient (ξ) **et** (Γ) **deux figures du plan**

	La rotation conserve :	Signification mathématique
1	La distance	$MN = r(M)r(N)$ 4
2	La mesure d'un angle orienté	$\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{EF}\right) \equiv \theta[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{r(M)r(N)};\overrightarrow{r(E)r(F)}\right) \equiv \theta[2\pi]$ 5
3	L'alignement	M, N et E sont alignés $\Rightarrow$ $r(M), r(N)$ et $r(E)$ sont alignés 6
4	Le coefficient de colinéarité	$MN = k\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{r(M)r(N)} = k\overrightarrow{r(E)r(F)}$ 7
5	Le barycentre	$G = Bar\{(M;x);(N;y)\} \Rightarrow r(G) = Bar\{(r(M);x);(r(N);y)\}$ 8
6	Le milieu	I est le milieu du $[MN] \Rightarrow r(I)$ est le milieu du $[r(M)r(N)]$ 9
7	Le centre de gravité	G est le centre du gravité du triangle $MNE \Rightarrow$ $r(G)$ est le centre du gravité du triangle $r(M)r(N)r(E)$ 10
8	L'appartenance	$M \in (\xi) \Rightarrow r(M) \in r((\xi))$ 11
9	L'intersection.	$M = (\xi) \cap (\Gamma) \Rightarrow r(M) = r((\xi)) \cap r((\Gamma))$ 12
10	Le parallélisme.	$(D) \parallel (\Delta) \Rightarrow r((D)) \parallel r((\Delta))$ 13
11	L'orthogonalité.	$(D) \perp (\Delta) \Rightarrow r((D)) \perp r((\Delta))$ 14

Remarques 2

1) A, B, A' **et** B' **quatre points du plan.**

Si $A \neq B$ **et** $A' \neq B'$, **Alors il existe une rotation** r **tel que** $r(A) = A'$ **et** $r(B) = B'$

→ **Le centre de la rotation** r **est le point d'intersection des médiatrices des segments** $[AA']$ **et** $[BB']$

→ **L'angle** α **de la rotation** r **est de mesure :** $\alpha \equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]$

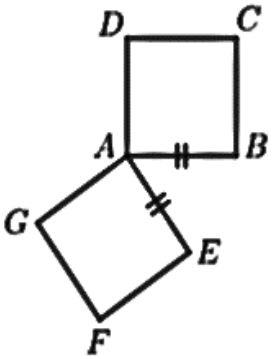
2) Si r **est une rotation d'angle** α, M **et** N **deux points distincts alors** $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{r(M)r(N)}\right) \equiv \alpha[2\pi]$ 15

3) Si r **est une rotation d'angle** $\pm\frac{\pi}{2}$, M **et** N **deux points distincts alors** $(MN) \perp (r(M)r(N))$

Exemple 2

Soient $ABCD$ **et** $AEFG$ **deux carrés tel que** $AB = AE$ **(Voir la figure ci-contre).**

Soit r **la rotation de centre** A **et d'angle** $-\frac{\pi}{2}$.



1) Vérifier que $r(D) = B$ **et** $r(E) = G$.

2) En déduire que $DE = BG$.

3) En déduire que $\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{BG}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ **et** $(DE) \perp (BG)$

4) Déterminer $r((DE))$ **et** $r([DE])$.

5) Soit I **et** J **les milieux respectifs des segments** $[DE]$ **et** $[BG]$.

Montrer que $r(I) = J$.

6) Soit (Δ) **une droite coupe** (DE) **en** H. **On pose** $r((\Delta)) = (\Delta')$.

Supposons que (Δ') **coupe** (BG) **en** K. **Montrer que** $r(H) = K$.

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Composition de deux rotations - Décomposition d'une rotation

16 Théorème 1 : Composition de deux rotations

Soit $r_1(O_1;\alpha_1)$ et $r_2(O_2;\alpha_2)$ deux rotations :

- Si $O_1 = O_2$ alors $r_1 o r_2$ est la rotation de centre O_1 et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$
- Si $O_1 \neq O_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 2k\pi$ alors $r_1 o r_2$ est une rotation d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$
- Si $O_1 \neq O_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi$ alors $r_1 o r_2$ est une translation.

Exemple 3

Soit ABC un triangle équilatéral de centre de gravité G tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Déterminer la nature de chacune des applications suivantes :

$r\left(G;\frac{\pi}{3}\right) o r\left(G;-\frac{\pi}{3}\right)$; $r\left(C;\frac{\pi}{3}\right) o r\left(B;-\frac{\pi}{3}\right)$; $r\left(C;\frac{\pi}{3}\right) o r\left(B;\frac{\pi}{3}\right)$; $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right) o r\left(G;\frac{2\pi}{3}\right)$



17 Théorème 2 : Composition de deux symétries axiales

Soient (Δ_1) et (Δ_2) deux droites du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement des vecteurs directeurs de (Δ_1) et (Δ_2)

On considère les symétries axiales $S_{(\Delta_1)}$ et $S_{(\Delta_2)}$

1) Si $(\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{\Omega\}$ alors $S_{(\Delta_1)} o S_{(\Delta_2)} = r\left(\Omega; 2\overline{(\vec{u};\vec{v})}\right)$

2) Si $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$ alors $S_{(\Delta_1)} o S_{(\Delta_2)} = t_{\overrightarrow{AA'}}$ Tel que A est un point du plan et $S_{(\Delta_1)} o S_{(\Delta_2)}(A) = A'$

18 Théorème 3 : Décomposition d'une rotation et d'une translation

1) Toute rotation peut s'exprimer comme composé de deux symétries axiales sécantes. On a :

$r(\Omega;\alpha) = S_{(\Delta_1)} o S_{(\Delta_2)} \Rightarrow \begin{cases} (\Delta_1) \cap (\Delta_2) = \{\Omega\} \\ \overline{(\vec{u};\vec{v})} \equiv \frac{\alpha}{2}[2\pi] \end{cases}$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement des vecteurs directeurs de (Δ_1) et (Δ_2)

2) Toute translation de vecteurs non nul peut s'exprimer comme composé de deux symétries axiales parallèles. On a :

Si (Δ_1) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ alors on a : $t_{\vec{u}} = S_{(\Delta_1)} o S_{(\Delta_2)} \Rightarrow \begin{cases} (\Delta_2) = t_{\pm\frac{1}{2}\vec{u}}((\Delta_1)) \\ (\Delta_2) \parallel (\Delta_1) \end{cases}$

Exemple 4

1) Soit $ABCD$ un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

a) Montrer que $r\left(A;\frac{\pi}{2}\right) = S_{(AD)} o S_{(AC)}$

b) Montrer que $r\left(A;\frac{\pi}{2}\right) = S_{(AC)} o S_{(AB)}$

c) Déterminer deux droites (Δ_1) et (Δ_2) tel que $r\left(B;\frac{\pi}{4}\right) = S_{(\Delta_1)} o S_{(\Delta_2)}$

2) Soit ABC un triangle équilatéral de centre de gravité O tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

a) Déterminer une droite (Δ) tel que $r\left(B;-\frac{\pi}{3}\right) = S_{(\Delta)} o S_{(OB)}$

b) Déterminer deux droites (Δ_1) et (Δ_2) tel que $r\left(O;\frac{2\pi}{3}\right) = S_{(\Delta_1)} o S_{(\Delta_2)}$

c) Déterminer la nature de l'application $f = S_{(OA)} o S_{(AB)}$

Résumé 10 : Rotation

Définition d'une rotation – rotation réciproque :

→ La rotation $r(O;\alpha)$ de centre **O** et d'angle α est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

Si $M \neq O$ alors : $\boxed{r(M)=N \Leftrightarrow \begin{cases} OM = ON \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right) \equiv \alpha\,[2\pi] \end{cases}}$ [1] et on a $r(O)=O$

→ La rotation $r(O;-\alpha)$ de centre **O** et d'angle $-\alpha$ est appelée la rotation réciproque de la rotation $r(O;\alpha)$ de centre **O** et d'angle α

On la note r^{-1} et on a pour tout point **N** du plan : $\boxed{r^{-1}(N)=M \Leftrightarrow r(M)=N}$ [2]

L'image des figures usuelles par une rotation :

Figure :	Droite (MN)	Demi-droite $[MN)$	Segment $[MN]$	Cercle de centre M et de rayon R	Triangle MNE	Quadrilatère $MNEF$
[3] Son image :	$r((MN))=(r(M)r(N))$	$r([MN))=[r(M)r(N))$	$r([MN])=[r(M)r(N)]$	$r(C(M;R))=C'(r(M);R)$	L'image du triangle MNE par la rotation r est le triangle $r(M)r(N)r(E)$	L'image du quadrilatère MNEF par la rotation r est le quadrilatère $r(M)r(N)r(E)r(F)$

Les propriétés d'une rotation :

Soit $r(O;\alpha)$ une rotation, (ξ) et (Γ) deux figures du plan

	La rotation conserve :	Signification mathématique
0	La nature des figures géométrique.	Une figure (ξ) et son image $r((\xi))$ ont la même nature
1	La distance	$MN=r(M)r(N)$ [4]
2	La mesure d'un angle orienté	$\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{EF}\right)\equiv\theta\,[2\pi] \Rightarrow \left(\overrightarrow{r(M)r(N)};\overrightarrow{r(E)r(F)}\right)\equiv\theta\,[2\pi]$ [5]
3	L'alignement	M, N et E sont alignés $\Rightarrow$ $r(M)$, $r(N)$ et $r(E)$ sont alignés [6]
4	Le coefficient de colinéarité	$MN=k\overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{r(M)r(N)}=k\overrightarrow{r(E)r(F)}$ [7]
5	Le barycentre	$G=Bar\{(M;x);(N;y)\} \Rightarrow r(G)=Bar\{(r(M);x);(r(N);y)\}$ [8]
6	Le milieu	I est le milieu du $[MN] \Rightarrow r(I)$ est le milieu du $[r(M)r(N)]$ [9]
7	Le centre de gravité	G est le centre du gravité du triangle $MNE \Rightarrow$ $r(G)$ est le centre du gravité du triangle $r(M)r(N)r(E)$ [10]
8	L'appartenance	$M\in(\xi)\Rightarrow r(M)\in r((\xi))$ [11]
9	L'intersection	$M=(\xi)\cap(\Gamma)\Rightarrow r(M)=r((\xi))\cap r((\Gamma))$ [12]
10	Le parallélisme	$(D)\parallel(\Delta)\Rightarrow r((D))\parallel r((\Delta))$ [13]
11	L'orthogonalité	$(D)\perp(\Delta)\Rightarrow r((D))\perp r((\Delta))$ [14]

[15] Détermination de l'angle d'une rotation :

Si r est une rotation d'angle α, **M** et **N** deux points distincts alors $\boxed{\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{r(M)r(N)}\right)\equiv\alpha\,[2\pi]}$

[16] Composition de deux rotations :

Soit $r_1(O_1;\alpha_1)$ et $r_2(O_2;\alpha_2)$ deux rotations :

- Si $O_1=O_2$ alors $r_1 o r_2$ est la rotation de centre O_1 et d'angle $\alpha_1+\alpha_2$
- Si $O_1\neq O_2$ et $\alpha_1+\alpha_2\neq 2k\pi$ alors $r_1 o r_2$ est une rotation d'angle $\alpha_1+\alpha_2$
- Si $O_1\neq O_2$ et $\alpha_1+\alpha_2=2k\pi$ alors $r_1 o r_2$ est une translation.

Composition de deux symétries axiales et décomposition d'une rotation :

Voir les règles [17] et [18]

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

Exercice 1

$ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer $r(A)$ et en déduire $r^{-1}(D)$

2) Déterminer $r^{-1}(C)$ et en déduire $r(D)$

Exercice 2

ABC un triangle. Soit $r(A;\frac{\pi}{2})$

1) Construire les points E et D tels que : $r(B)=E$ et $r(C)=D$

2) Montrer que $(DE)\perp(BC)$

Exercice 3

Soit A, B et C des points du plan tels que $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

O est le milieu du segment $[BC]$. On pose $r(O;\frac{\pi}{6})$

Soient $A'=r(A)$, $B'=r(B)$ et $C'=r(C)$

1) Montrer que $\overrightarrow{A'B'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A'C'}$

2) Montrer que O est le milieu du segment $[B'C']$

Exercice 4

ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) Déterminer l'angle de la rotation r de centre B et qui transforme A en C

2) Construire le point D l'image de C par la rotation r

3) En déduire que le quadrilatère $ABDC$ est un losange.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un carré de centre O, on note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$

En choisissant la rotation $r(O;\frac{\pi}{2})$ montrer que $(CI)\perp(DJ)$

Exercice 6

Soit ABC un triangle, on construit à son extérieur les points D et E tels que ABD et ACE soient des triangles rectangles et isocèles de sommet A

En utilisant une rotation convenable montrer que $CD=EB$

Exercice 10

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Déterminer le centre et l'angle de la rotation r tel que $r(C)=A$ et $r(A)=B$

Exercice 7

ABC un triangle tel que $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $CB=CA$

Soit I le milieu de segment $[AB]$ et E un point tel que C est le milieu de segment $[BE]$.

On considère la rotation $r(I;\frac{\pi}{2})$.

1) Construire une figure convenable et montrer que $r(A)=C$ et $r(C)=B$

2) Construire le point F tel que $F=r(E)$

3) Déterminer $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CA})$ et déduire que $(\overrightarrow{BF};\overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

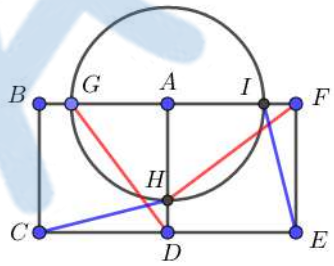
4) Montrer que $BF=CA$

5) Montrer que $AE=AB$ puis $CF=AB$

6) En déduire la nature du quadrilatère $ACFB$.

Exercice 8

$ABCD$ et $ADEF$ deux carrés (Voir la figure ci-contre)



Soit G un point sur le segment $[AB]$

Soit (Γ) le cercle de centre A et passant par G

Le cercle (Γ) coupe les segments $[AD]$ et $[AF]$ respectivement en H et I.

En utilisant une rotation convenable montrer que $DG=HF$ et $CH=EI$

Exercice 9

ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit r la rotation qui transforme A en B et B en C

1) Déterminer α l'angle de la rotation r (on rappelle que $(\overrightarrow{-u};\overrightarrow{v}) \equiv \pi+(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})[2\pi]$)

2) Déterminer O le centre de la rotation r

Exercice 11

Soit $ABCD$ un carré tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

I un point du segment $[BD]$ et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre I et de rayon IA.

Le cercle $(\mathcal{C})$ coupe la droite (AB) en J et (AD) en K.

1) Montrer que $C\in(\mathcal{C})$ et que $K\hat{I}C=2C\hat{A}K$

2) En déduire que $(CI)\perp(JK)$ et que $CK=CJ$

3) En utilisant une rotation convenable m.q $DK=BJ$

Exercice 12

On considère deux carrés $ABCD$ et $AEFG$ tels que : $AB = AE$; $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$;

$\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AG}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

1) Construire une figure convenable.

2) Déterminer l'angle de la rotation r de centre A et qui transforme B en E

3) a) Montrer que $r(C) = F$ et $r(D) = G$

b) Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{EF}\right)$

4) Soit $K = Bar\{(A;-1);(B;1);(C;1)\}$ on pose $K' = r(K)$

Montrer que les points K', F et G sont alignés.

Exercice 13

Soit OEF un triangle et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Construire les points C et D tel que :
$r(F) = C$ et $r(D) = E$

2) En déduire que $DF = EC$ et $(DF) \perp (EC)$

3) Soit A et I les points tel que :
$r(E) = A$ et $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$

On pose $J = r(I)$ et soit H le projeté orthogonal du point O sur la droite (DC)

a) Montrer que O est le milieu du segment $[AD]$

b) Montrer que $2\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{DC}$

c) En déduire que les points I, O et H sont alignés.

Exercice 14

Soit ABC un triangle isocèle en A

M un point variant du segment $[BC]$ différent de B et C

La droite passant par M et parallèle à (AB) coupe (AC) en E

La droite passant par M et parallèle à (AC) coupe (AB) en F

1) Montrer que $AE = BF$

2) Montrer qu'il existe une rotation r telle que $r(A) = B$ et $r(E) = F$

3) Soit α une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Déterminer en fonction de α l'angle de la rotation r

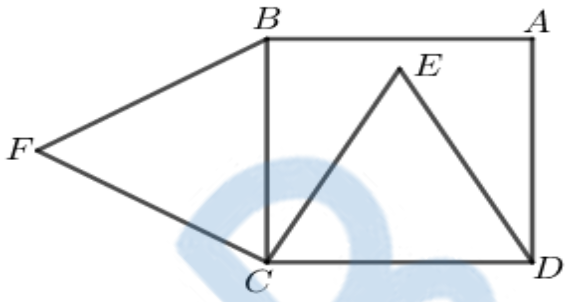
4) Montrer que $r(A) = C$

5) Déterminer O le centre de la rotation r

Exercice 15

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On considère les points E et F tel que CDE et ADF soient des triangles équilatéraux (Voir la figure ci-contre)



1) Montrer que $BD = EF$ et $(DE) \perp (BF)$

2) Montrer que les points A, E et F sont alignés.

Exercice 16

Soit ABC un triangle isocèle non rectangle de sommet A

R la rotation directe de centre A et d'angle $60°$

1) a) Construire E et F tel que $R(B) = E$ et $R(C) = F$

b) Montrer que $BC = EF$

2) Soit R' la rotation indirecte de centre A et d'angle $120°$

a) Construire $K = R'(B)$

b) Montrer que A est le milieu du $[EK]$

2) Montrer que le triangle EFK est rectangle en F

Exercice 17

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit I le milieu de $[BC]$ et J le point tel que B est le milieu de $[JC]$

Soit $R_A = r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$ et $R_B = r\left(B;-\frac{2\pi}{3}\right)$

1) Soit A' et B' les images respectives des points A et B par l'application $R_B o R_A^{-1}$

Montrer que I est le milieu de $[AA']$ et que B est le milieu de $[AB']$

2) Déterminer la nature de l'application $R_B o R_A^{-1}$

3) Soit M un point quelconque du plan.
On pose $R_A(M) = M_1$ et $R_B(M) = M_2$
Montrer que I est le milieu de $[M_1M_2]$

4) Montrer que $R_B o R_A$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL5

1BACSMF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Limite d'une fonction)

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+6x+4}{-x^3+x^2+5x+3}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{-2x^2+3x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2-5x^3-x^5-3$; $\lim\limits_{x\to-1}x^2+3x^5-4$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-x}{x^2+x-6}$

$\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{3x-2}-x}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}-2}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{3-\sqrt{2x+5}}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin(9x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{tan(2x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin(9x)}{tan(2x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos(x)}{sin^2(x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-cos(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-cos(\dfrac{2}{x})\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\times tan(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}tan(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-6x-2}+x+12$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2-7x+9}+8x-4$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-4x}-3x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+sin(x)}{x^2+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-2x}{\sqrt{x^2-x}+x}$

$\lim\limits_{x\to0^+}xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{E(x)+sin(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}E\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-tan(x))\left(2cos^2(x)-2\right)}{\left(2tan(x)-\sqrt{tan(x)}\right)\left(\sqrt{2}-2tan(x)\right)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-ax$

Exercice 2 (Limite d'une fonction)

En utilisant la définition de la limite montrer que : $\lim\limits_{x\to3}x^2-5x+4=-2$

Exercice 3 (Rotation)

$ABCD$ **un carré de centre** O **tel que :** $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

I **et** ***J*** **deux points tels que** $\overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{BJ}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Les droites (IC) **et** (JD) **coupent respectivement** (BD) **et** (AC) **en** M **et** N.

Soit r **la rotation de centre** O **et d'angle** $\dfrac{\pi}{2}$.

1) Construire une figure et déterminer $r(A)$, $r(B)$, $r(C)$ et $r(D)$.

2) a) Montrer que $I=bar\{(A;1);(B;-3)\}$ et $J=bar\{(B;1);(C;-3)\}$

b) En déduire que $r(I)=J$.

3) a) Déterminer l'image de chacune des droites (BD) et (IC) par la rotation r

b) En déduire que $r(M)=N$.

c) En déduire que $IM=JN$.

4) Montrer que $(CM)\perp(DN)$



Exercice 4 (Rotation)

Soit ABC **un triangle isocèle tel que** $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$

On considère les rotations $R_A=r(A;\dfrac{2\pi}{3})$, $R_C=r(C;\dfrac{5\pi}{6})$ **et on pose** $f=R_C\circ R_A$

1) Déterminer $f(B)$ puis montrer que f est une rotation dont on déterminera l'angle.

2) Soit ***I*** le point d'intersection des bissectrices du triangle ABC

a) Montrer que $R_A=S_{(CA)}\circ S_{(AI)}$ et $R_C=S_{(CI)}\circ S_{(CA)}$

b) En déduire que ***I*** est le centre de la rotation f

c) Soit $A'=f(A)$. Montrer que $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}\right)\equiv\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$

11

Dérivation

HIYAB



Définitions et propriétés

1) Dérivabilité en un point-nombre dérivé :

Soit f une fonction definie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- On dit que f est derivable en a, s'il existe un nombre reel l, tel que : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$.
- Le réel l est appelé le nombre dérivé de f en a ou dérivé de f en a. On le note par $f'(a)$.

2) Dérivabilité à droite – dérivabilité à gauche en un point :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a,b[$.

On dit que f est dérivable à droite en a, si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie.

Cette limite est appelée le nombre dérivé à droite en a .On le note par $f'_d(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b,a]$.

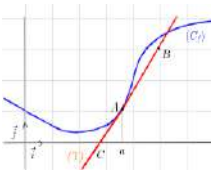
On dit que f est dérivable à gauche en a, si $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie.

Cette limite est appelée le nombre dérivé à gauche en a. On le note par $f'_g(a)$.

- f est dérivable en a si, et seulement si f est à la fois dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$

3) Intérprétation graphique – équation de la tangente à une courbe en un point

- Soit f une fonction dérivable en a et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

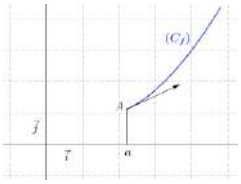


* $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a

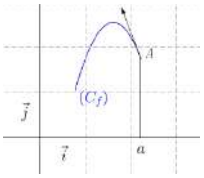
*Donc si $A(x_A;y_A)\in(T)$ et $B(x_B;y_B)\in(T)$, alors $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

*La droite :(T): $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ est appelée la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a.

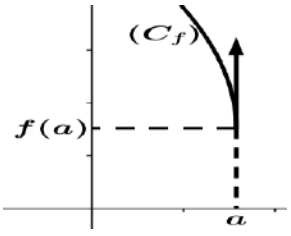
- Si la fonction f est dérivable à droite en a, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $A(a,f(a))$ une demi-tangente d'équation :$y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$; $x\geq a$.



- Si la fonction f est dérivable à gauche en a, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $A(a,f(a))$ une demi-tangente d'équation : $y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$; $x\leq a$

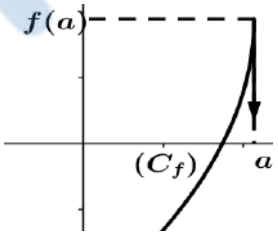


- Si la limite de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie lorsque x tend vers a^+ ou x tend vers a^- alors $(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse a un demi tangent d'équation : $x=a$ (parallèle à l'axe des ordonnées) :



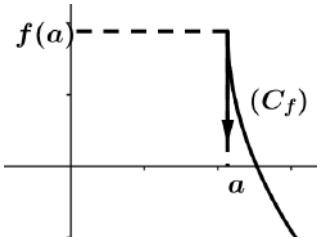
On a $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$

la demi-tangente est dirigée vers le haut.



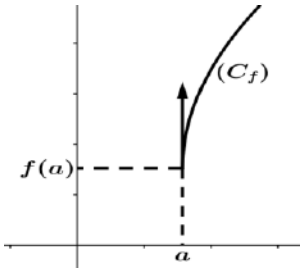
On a $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$

la demi-tangente est dirigée vers le bas.



On a $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$

la demi-tangente est dirigée vers le bas.

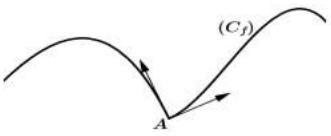


On a $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$

la demi-tangente est dirigée vers le haut.

المادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب

- Si $(\mathcal{C}_f)$ admet en un point A deux demi- tangentes de directions différentes, alors A est dit : point anguleux.



4) Approximation affine :

Soit f une fonction dérivable en a.

- La fonction g tel que $g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a.
- Pour tout réel h voisin de a on a : $f(h)\simeq g(h)$

5) Dérivabilité sur un intervalle :

Soit f une fonction numérique.

- On dit que f est dérivable sur un intervalle $]a,b[$ lorsque f est dérivable en tout réel de $]a,b[$.
- On dit que f est dérivable sur $[a,b[$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à droite en a.
- On dit que f est dérivable sur $]a,b]$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$ et f est dérivable à gauche en b.
- On dit que f est dérivable sur $[a,b]$ lorsque f est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b. (a et b peuvent être finis ou infinis).

6) Fonction dérivée :

- Si f est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction qui à chaque réel x de I associe $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f on la note par f'.
- Si f est dérivable sur un intervalle I, alors elle-est dérivable sur chaque intervalle inclus dans I.

7) Fonction dérivée des fonctions usuelles :

a, b et c des nombres réels et $n\in\mathbb{N}^*$.

$f(x)$	D_f	$D_{f'}$	$f'(x)$	Ecriture mathématique
c	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$(c)'=0$
$ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a	$(ax+b)'=a$
x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$(x^n)'=nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-sin(x)$	$(cos(x))'=-sin(x)$
$sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$cos(x)$	$(sin(x))'=cos(x)$
$tan(x)$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}\right\}$	Tout intervalle de type : $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ tel que $k\in\mathbb{Z}$	$1+tan^2\ (x)$	$(tan(x))'=1+tan^2(x)$
$cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-a\times sin(ax+b)$	$(cos(ax+b))'=-a\times sin(ax+b)$
$sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a\times cos(ax+b)$	$(sin(ax+b))'=a\times cos(ax+b)$

8) Opérations sur les fonctions dérivées :

➢ u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et soit α un réel fixé et $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonction	Fonction dérivée	Conditions	Ecriture mathématique :
$u+v$	$u'+v'$		$\big(u(x)+v(x)\big)' = u'(x)+v'(x)$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$		$\big(u(x)\times v(x)\big)' = u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$
$\alpha \times u$	$\alpha \times u'$		$\big(\alpha \times u(x)\big)' = \alpha \times u'(x)$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$(\forall x \in I) \quad u(x) \neq 0$	$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$(\forall x \in I) \quad v(x) \neq 0$	$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\forall x \in I) \quad u(x) > 0$	$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$		$\big(u^n(x)\big)' = n \times u'(x) \times u^{n-1}(x)$

➢ Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

➢ Toute fonction rationnelle (quotient de polynômes) est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

➢ Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle I, alors on écrit : $(\forall x \in I) \quad f'(x) = \big(f(x)\big)'$.

9) Dérivée et sens de variations :



➢ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

* f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I.

* f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I.

* f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout x de I.

➢ Si f est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I

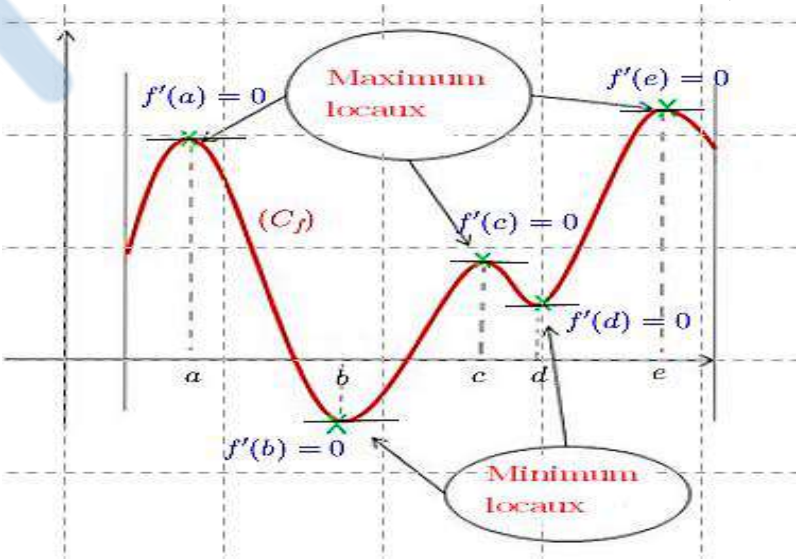
➢ Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I.

10) Dérivée et extremums :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

➢ Si f admet un extremum (minimum ou maximum) local en a, alors $f'(a) = 0$

➢ Si f admet un extremum local en a, alors la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A\big(a, f(a)\big)$ est horizontale.



- Si $f'(a)=0$ et f' change de signe au voisinage de a, alors $f(a)$ est un extremum local de f.
- $f(a)$ est la valeur maximale de f sur un intervalle $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \leq f(a)$
- $f(a)$ est la valeur minimale de f sur un intervalle $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \geq f(a)$

11) Dérivées successives – écriture différentielle :

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

* La dérivé f' de f est appelée la dérivée première de f.
* Si la fonction f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée $f^{(2)}$ ou f''
* Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ (avec $n \geq 3$)est dérivable sur I, sa fonction est appelée dérivée $n^{ème}$ de f et notée $f^{(n)}$.
* La dérivée $n^{ème}$ de f est appelée aussi dérivée d'ordre *n* de f.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si $y=f(x)$, alors on écrit $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ ou $dy=f'(x)dx$ .Cette écriture est appelée : écriture différentielle.

12) Equations différentielles de type : $y''+\omega^2 y=0$

- Une équation différentielle est une équation entre une fonction f et ses dérivées dont la fonction f est l'inconnue.

On note en général la fonction f par y et ses dérivées par y', y'', $y^{(3)}$....

- Soit ω un nombre réel non nul, les solutions de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ sont les fonctions y tel que $y(x)=a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x)$ avec a et b sont des constantes réelles.
- Soit ω un nombre réel non nul et $x_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$

L'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ admet un unique solution y tel que $y(x_0)=y_0$ et $y'(x_0)=y_1$



Exemples

Exemple 1 : Dérivabilité en un point-nombre dérivé

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2$ et $a=3$.
2) $f(x)=sin(2x)$ et $a=0$.
3) $f(x)=2x^2-7x+7$ et $a=2$.
4) $f(x)=cos(x)$ et $a=0$.
5) $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=0^+$.



Exemple 2 : Dérivabilité à droite- dérivabilité à gauche

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a dans les cas suivants :

1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & si\ \ x\geq 4\\ x^2+3 & si\ \ x<4\end{cases}$ et $a=4$.

2) $f(x)=|x-3|$ et $a=3$.

Exemple 3 : Approximation affine

On considère la fonction f tel que : $f(x)=(1+x)^2$.

1) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$

2) Déterminer la fonction g l'approximation affine de f au voisinage de zéro.

3) a) Vérifier que $(1,0001)^2=f(0,0001)$ et $(1,009)^2=f(0,009)$

b) En déduire une valeur approchée des nombres $(1,0001)^2$ et $(1,009)^2$

4) Montrer que pour tout réel h voisin de zéro on a : $(1+h)^2\simeq 1+2h$

Exemple 4 : Dérivabilité sur intervalle- Fonction dérivée

On considère la fonction f tel que : $f(x)=\sqrt{x}$.

1) Déterminer D_f et montrer que f est n'est pas dérivable à droite en 0 .

2) Soit $a\in]0;+\infty[$, montrer que f est dérivable en a et que $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Exemple 5 : Opérations sur les fonctions dérivées

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants

$f(x)=\sqrt{x}+x^5$	$f(x)=\dfrac{1}{tan(x)}$
$f(x)=x^6\times cos(x)$	$f(x)=\dfrac{3x+6}{4x+7}$
$f(x)=3\times sin(x)$	$f(x)=\sqrt{x^7\times sin(x)}$
$f(x)=(2x+3)^8$	
$f(x)=(2x^2+3x+1)^4$	

Exemple 6 : Lever l'indétermination par le nombre dérivé

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{20}-2^{20}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{20}-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{cos(x)-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2sin(x)-\sqrt{2}}{4x-\pi}$

Exemple 7 : Dérivée et sens de variations

On considère la fonction f tel que : $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

1) Déterminer D_f et $D_{f'}$

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f

3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_{f'}$

4) Dresser le tableau de variations de f .

5) Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2

Exemple 8 : Etude d'une fonction polynôme de degré 3

Mêmes questions de l'exemple 7 pour la fonction f tel que : $f(x)=-x^3+x^2+5x+1$.

Exemple 9 : Dérivée et extremums

On considère la fonction f tel que : $f(x)=x^2-2x+5$.

1) Etudier les variations de f .

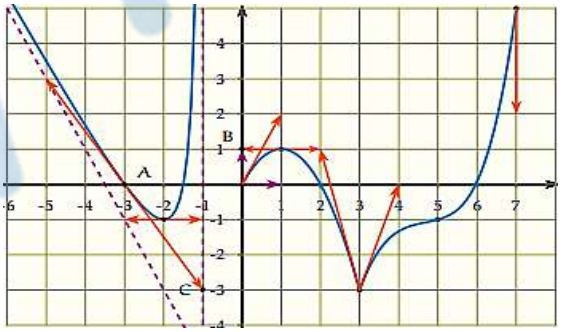
2) En déduire que f admet un extremum à préciser.

3) En déduire que $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)\geq 4$

Exemple 10 : Détermination graphique du nombre dérivé

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup[0;7]$ et dérivable sur $]-\infty;-1[\cup[0;7[$.

Soit $A(-3;0)$, $B(0;1)$ et $C(-1;-3)$.



1) Déterminer graphiquement :

$f'(-2)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$; $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$;

$\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$; $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)+3}{x-3}$; $\lim\limits_{h\to 7^-}\dfrac{f(x)-f(7)}{x-7}$

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)}{x^2-9}=\dfrac{1}{4}$.

3) La tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 5 est parallèle à la droite (AB). `

a) Déterminer graphiquement : $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)+1}{x-5}$

b) Montrer que la droite (T) passe par le point C .

Exemple 11 : L'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E_1) : $y''+4y=0$; (E_2) : $y''+9y=0$

(E_3) : $y''+5y=0$; (E_4) : $2y''+16y=0$

2) Déterminer la solution de l'équation différentielle (E_5) : $y''+16y=0$ telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=-1$

Résumé 11 : Dérivation

Dérivabilité en un point et interprétation graphique :

Limite	Dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable en a et $f'(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à droite en a et $f'_d(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$; $x\geq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à gauche en a et $f'_g(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$; $x\leq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$	f n'est pas dérivable en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est à la fois dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a)=f'_g(a)$

Fonction dérivée des fonctions usuelles - Opérations sur les fonctions dérivée :

$(c)'=0$ $(ax)'=a$ $(ax+b)'=a$ $(x)'=1$	$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(u^n)'=n\times u'\times u^{n-1}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u+v)'=u'+v'$ $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ $(\alpha\times u)'=\alpha\times u'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$(cos(x))'=-sin(x)$ $(cos(ax+b))'=-a\times sin(ax+b)$	$(sin(x))'=cos(x)$ $(sin(ax+b))'=a\times cos(ax+b)$	$(tan(x))'=1+tan^2(x)$			

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Les méthodes de calcul du nombre dérivé :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a\in I$

Il existe 3 méthodes pour calculer $f'(a)$

Méthode 1 : Si on a calculé $f'(x)$ pour tout $x\in I$, on remplace x par a dans l'expression de $f'(x)$

Méthode 2 : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Méthode 3 : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a :

Si $A(x_A;y_A)\in(T)$ et $B(x_B;y_B)\in(T)$, alors $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Dérivée et sens de variations :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- $(\forall x \in I)\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I.
- $(\forall x \in I)\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I.
- $(\forall x \in I)\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I.

Dérivée et extremums :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

- $f'(a) = 0$ et f' change de signe au voisinage de $a \Rightarrow f(a)$ est un extremum de f
- $f(a)$ est un extremum de $f \Rightarrow f'(a) = 0$
- $f(a)$ est un extremum de $f \Rightarrow$ la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a est horizontale.
- (T) est horizontale $\Leftrightarrow f'(a) = 0$
- $f(a)$ est la valeur maximale de f sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \leq f(a)$
- $f(a)$ est la valeur minimale de f sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \geq f(a)$

Approximation affine :

Soit f une fonction dérivable en a.

- La fonction g tel que $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a.
- Pour tout réel h voisin de a on a : $f(h) \simeq g(h)$

Equations différentielles de type : $y'' + \omega^2 y = 0$

Soit ω un nombre réel non nul, les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions y tel que $y(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ avec a et b sont des constantes réelles.



Exercice 1 :

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a et interpréter les résultats obtenus dans les cas suivants :

1) $f(x)=5x+2$ et $a=1$.

2) $f(x)=\sqrt{3x-2}$ et $a=2$.

3) $\begin{cases} f(x)=1-cos(x) & si \quad x\geq 0 \\ f(x)=sin(x) & si \quad x<0 \end{cases}$ et $a=0$.

4) $f(x)=x^3$ et $a=-1$.

Exercice 2 :

1) On considère la fonction f tel que : $f(x)=(1+x)^3$.

Donner l'approximation affine de f au voisinage de zéro et en déduire une valeur approchée de nombre $b=(1.0044)^3$

2) Montrer que pour tout réel h voisin de zéro on a :

$\frac{1}{1+h}\simeq 1-h$ et $\sqrt{1+h}\simeq 1+\frac{h}{2}$.

Exercice 3 :

Préciser l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$ lorsqu'il existe dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=x^3-5x^2+7x+3$ 2) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$

3) $f(x)=\sqrt{x+5}$ 4) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$

5) $f(x)=x^2\sqrt{x}-1$ 6) $f(x)=2+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^3}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x)=4\sqrt{x+1} & si \quad x\geq 3 \\ f(x)=x^2-5x+c & si \quad x<3 \end{cases}$

1) Déterminer le réel c pour que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$

2) Pour la valeur de c trouvée, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ est déterminer sa fonction dérivée.

Exercice 5 :

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-2)^{2024}-1}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x\sqrt{x+7}-6}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{\frac{1}{x+2}-1}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2cos(x)-1}{tan(x)-\sqrt{3}}$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que f possède deux extremums locaux dont on précisera la nature et l'intervalle.

Exercice 7 :

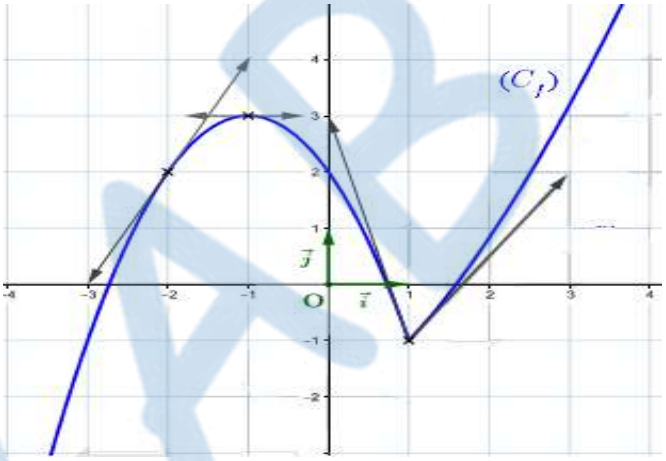
Dresser le tableau de variations de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x)=x-\frac{1}{x}$ 2) $f(x)=3x^4-2x^2+1$

3) $f(x)=\frac{4}{x^2-2x}$ 4) $f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x+1}$

Exercice 8

Dans la figure ci-après $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.



1) Déterminer $f(-2)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$

2) Déterminer graphiquement $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$

3) En déduire que f n'est pas dérivable en 1.

4) Dresser le tableau de variations de f sur $[-3;3]$ (on donne $f(3)=\frac{25}{8}$)

5) En déduire le tableau de signe de f' sur $[-3;3]$

Exercice 9 :

b et c deux nombres réels strictement positifs.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x)=x^3+b^3+c^3-3xbc$.

1) Vérifier que : $f(\sqrt{bc})=(\sqrt{b^3}-\sqrt{c^3})^2$

2) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[) \quad f(x)=3(x+\sqrt{bc})(x-\sqrt{bc})$

3) Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f

4) En déduire que f admet une valeur minimale positive sur $\mathbb{R}_+^*$

5) Déduire que : $(\forall a;b;c\in]0;+\infty[) \quad a^3+b^3+c^3\geq 3abc$.

Exercice 10 :

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes : Sur chaque page le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm2, les marges doivent mesurer 1,5 cm sur les bords horizontaux et de 2 cm sur les bords verticaux.

Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?

Exercice 11 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=x+5+\frac{4}{x-1}$$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Déterminer les points de $(\mathcal{C}_f)$ ou la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & si\ \ x<0 \\ x^3-2x+1 & si\ \ 0\le x<2 \\ \sqrt{x^2-4}+x+3 & si\ \ x\ge 2 \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de h en 0 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Etudier la dérivabilité de h en 2 et interpréter graphiquement les résultats.

b) Montrer que la fonction h est dérivable sur $]2;+\infty[$ et calculer $h'(x)$ pour $x\in]2;+\infty[$

c) Ecrire une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_h)$ au point d'abscisse $2\sqrt{2}$

Exercice 12 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x)=x^3+x^2+6$$

1) Etudier les variations de g.

2) On suppose que l'équation $g(x)=0$ possède une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-3<\alpha<-2$.

Etudier la signe de g sur $]-\infty;\alpha[$ et sur $]\alpha;+\infty[$

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=x-1+\frac{x^2-3x+2}{x^3}.$$

a) Montrer que $f'(x)=\frac{(x-1)}{x^4}g(x)$

b) En déduire les variations de f

c) Ecrire une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{4-2x}$.

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

3) Existe-t-il une tangente à $(\mathcal{C}_f)$ de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$?

4) Existe-t-il une tangente à $(\mathcal{C}_f)$ qui passe par le point $A(2;3)$?

Exercice 14 :

On pose $I=[0;+\infty[$

1) Montrer les inégalités suivantes :

a) $(\forall x\in I)\ \ x-cos(x)\ge -1\ \ et\ \ x+cos(x)\ge 1$.

b) $(\forall x\in I)\ \ \frac{1}{2}x^2-sin(x)+x\ge 0$ et

$(\forall x\in I)\ \ \frac{1}{2}x^2+sin(x)-x\ge 0$

c) $(\forall x\in I)\ \ \frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+cos(x)\ge 1$ et

$(\forall x\in I)\ \ \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-cos(x)\ge -1$

2) a) Montrer que :

$$(\forall x\in I)\ \ \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4\le x-sin(x)\le \frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}x^3\ .$$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-sin(x)}{x^3}$.

3) On pose $x=-t$

a) En déduire que :

$$(\forall t\in]-\infty;0[)\ \ \frac{1}{6}t^3-\frac{1}{24}t^4\le t-sin(t)\le \frac{1}{24}t^4+\frac{1}{6}t^3\ .$$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-sin(x)}{x^3}=\frac{1}{6}$.

Exercice 15 :

1) l'aire d'un rectangle est $49m^2$

Déterminer les dimensions de ce rectangle pour que son périmètre soit minimale.

2) x et y deux réels tels que : $xy=16$.

Déterminer x et y pour que la somme x^3+3y soit minimale.

Exercice 16 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=sin(x)$

1) Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.

2) Montrer par récurrence (sur n) que :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ f^{(n)}(x)=sin(x+n\frac{\pi}{2})$$

Exercice 17 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant un réel a tel que $f'(a)=-2$.

1) Calculer $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$; $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a+h)}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a+2h)}{h}$

2) On suppose de plus que $f(a)=1$

Calculer : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^2(a+3h)-f^2(a-2h)}{h}$

12

Etude de fonctions



Dans tout ce chapitre f est une fonction numérique, D_f son ensemble de définition et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Branches infinies d'une courbe

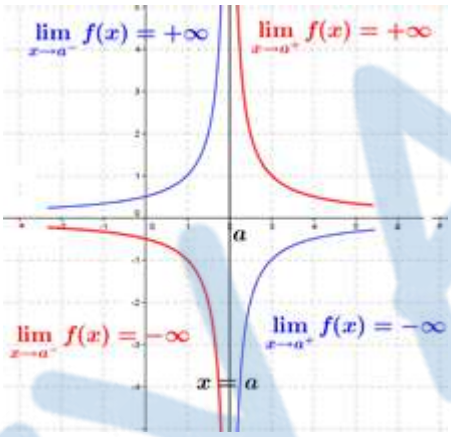
Définition 1 : Branches infinies

- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de $(\mathcal{C}_f)$ tend vers l'infini. (C'est à dire $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$, ou $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$)
- Généralement, les branches infinies décrivent le comportement de f aux bornes de D_f, c'est pour cette raison qu'on s'intéresse au calcul des limites aux bornes de D_f.
- Les branches infinies sont constituées de droites asymptotes et de branches paraboliques.

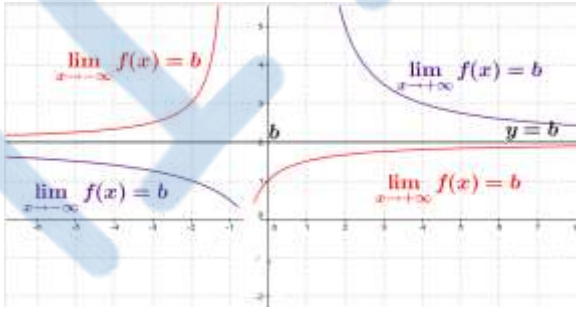
1-1 Asymptote horizontale - Asymptote verticale

Définitions 2 :

- Lorsque $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=a$



- Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$), on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. $-\infty$).



Exemple 1 :

1) Soit f une fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$;

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$ au voisinage de $+\infty$.

2) Soit g une fonction définie par $g(x)=\dfrac{-2}{x-1}$;

On a $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=-\infty$ alors $(\mathcal{C}_g)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

Application 1 :

1) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=3+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

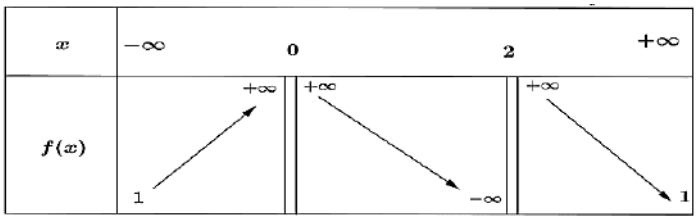
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ puis interpréter les résultats graphiquement.



2) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $g(x)=\dfrac{x+5}{(x+2)^2}$

Calculer $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ puis interpréter le résultat graphiquement.

3) Soit f une fonction numérique définie par le tableau de variations suivant :



a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

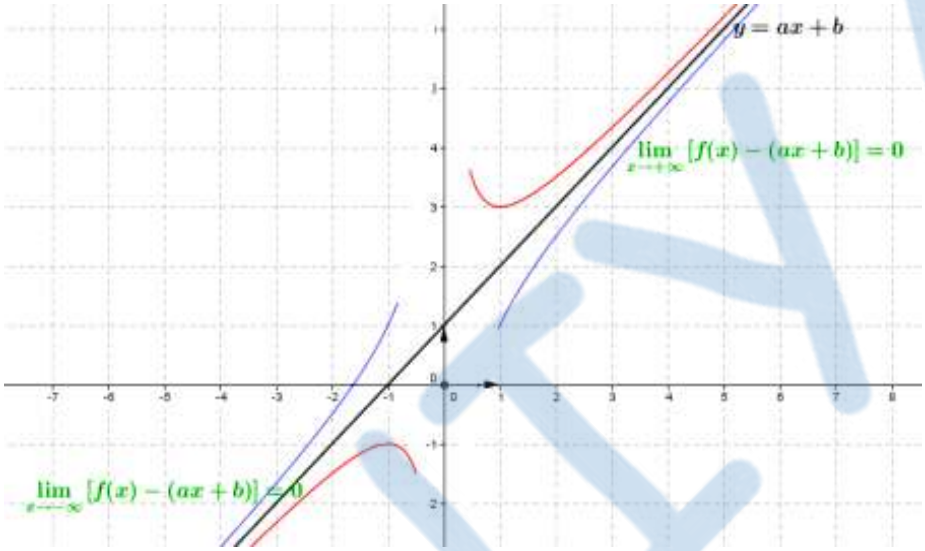
b) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter les résultats graphiquement.

1-2 Asymptote oblique

Définition 3 :

Soit f une fonction avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$) .

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$), on dit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).





Exemple 2 :

Soit f une fonction définie par $f(x)=2x-3+\dfrac{3}{x^2}$.

Montrons que la droite d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(2x-3)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(2x-3+\dfrac{3}{x^2}\right)-(2x-3)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$

Donc la droite d'équation $y=2x-3$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

Propriété 1 :

Soit f une fonction avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$) .

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-ax=b$), alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).

Remarque 1 :

Cette propriété est utilisée lorsqu'on ne donne pas l'équation de l'asymptote oblique dans l'exercice.

Application 2

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$, en déterminant son équation.

2) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$.

Remarque 2 :

Les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite $(D): y=ax+b$ se déduit par l'étude de signe de $f(x)-(ax+b)$:

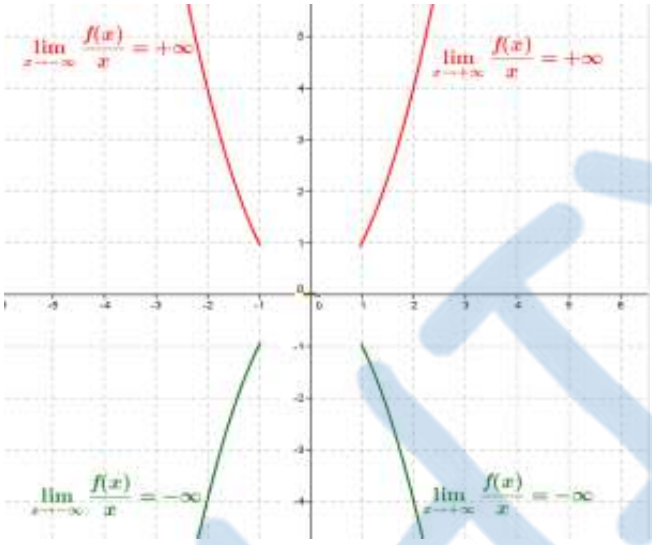
- Si $f(x)-(ax+b)>0$ pour tout $x\in I$, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur I.
- Si $f(x)-(ax+b)<0$ pour tout $x\in I$, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (D) sur I.
- Si $f(x)-(ax+b)=0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sont confondues aux points d'abscisses x .

1-3 Branches paraboliques

Définition 4 :

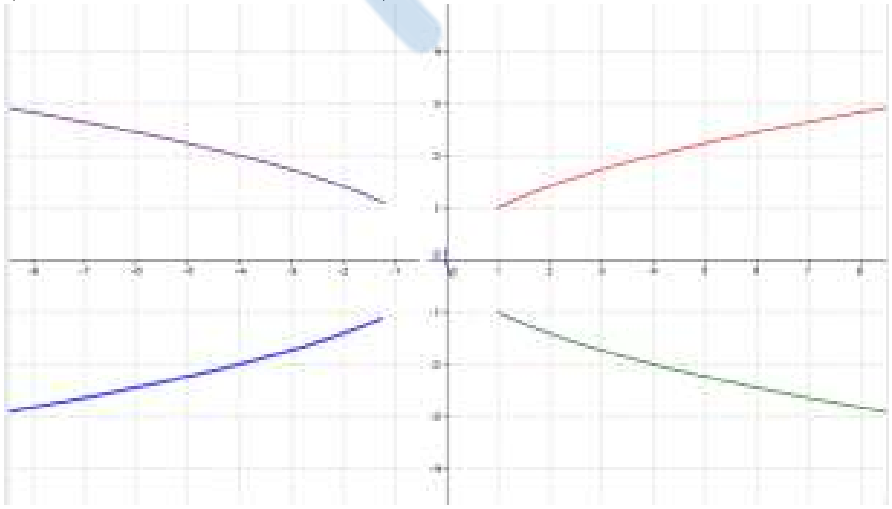
Soit f une fonction telle que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (ou bien on dit que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).

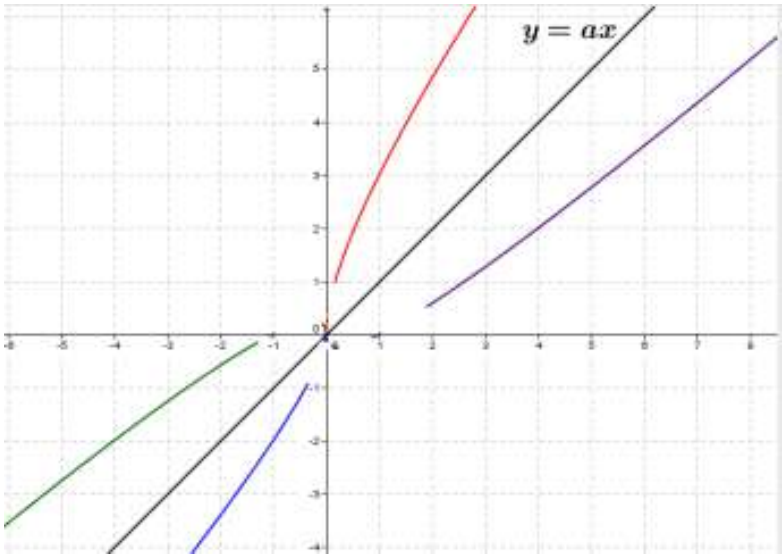




Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (ou bien on dit que l'axe des abscisses est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).



Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$ (Resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$) alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ (ou bien on dit que la droite d'équation $y=ax$ est une direction asymptotique à $(\mathcal{C}_f)$) au voisinage de $+\infty$ (Resp. au voisinage de $-\infty$).





Application 3

Etudier les branches paraboliques de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=2x^3-x$ **2)** $f(x)=2x+3\sqrt{x}$ **3)** $f(x)=\sqrt{3x+2}$

Remarques 3 :

- Quand on demande d'interpréter graphiquement les limites aux bornes du domaine de définition d'une fonction, ça veut dire donner les branches infinies (Asymptotes et branches paraboliques) éventuelles de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les équations des asymptotes et des directions asymptotiques et leurs voisinages.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ n'est pas suffisante pour affirmer qu'on a une branche parabolique mais il faut s'assurer d'abord qu'on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.

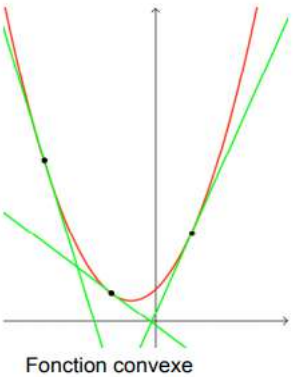
  Par exemple : La fonction $f(x)=\dfrac{sin(x)}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{sin(x)}{x^2}=0$, mais la fonction f n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ car elle le coupe indéfiniment aux points d'abscisses $x_0=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}^*$.

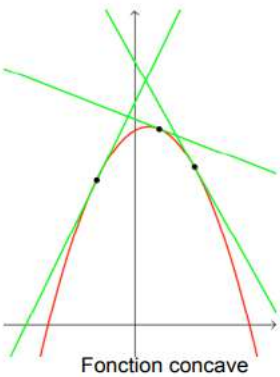
2) Concavité d'une courbe

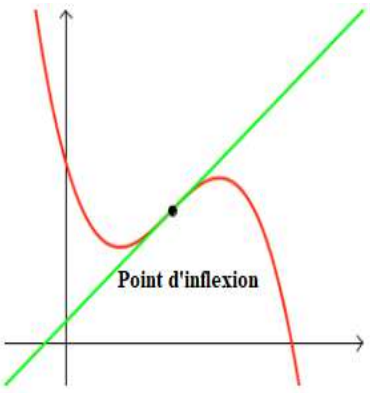
Définition 5 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur I, si $(\mathcal{C}_f)$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur I, si $(\mathcal{C}_f)$ est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- On appelle point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$, tout point où elle change de concavité.


Fonction convexe


Fonction concave



Propriété 2 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

- $(\mathcal{C}_f)$ est convexe sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f''(x) \geq 0$
- $(\mathcal{C}_f)$ est concave sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f''(x) \leq 0$
- $f''(a) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de a $\Rightarrow$ le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$

Exemple 3

Etudions la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$

On a $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ donc $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

On a $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x-1		−	0	+	
$f''(x)$		−	0	+	
(Cf)		concave		convexe	

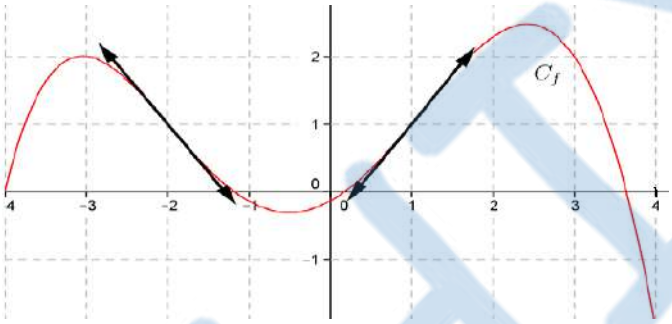
$f''(1) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de 1 donc le point $A(1; f(1) = 3)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

Application 4 :

Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les points d'inflexion s'ils existent dans les cas suivants :

1) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^3 + 3x + 5$ 2) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

Application 5 : Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[-4; 4]$



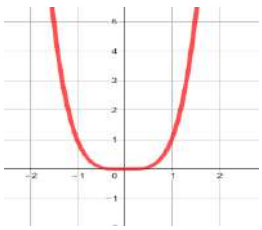


Remarques 4 :

- $f''(a) = 0$ ne suffit pas pour affirmer que le point d'abscisse a est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ mais il faut vérifier de plus si f'' change de signe au voisinage de a.

Par exemple : La fonction définie par $f(x) = x^4$,

On a $f''(0) = 0$ mais la courbe $(\mathcal{C}_f)$ n'admet pas de point d'inflexion en $a = 0$ comme l'indique le graphe ci-contre.



- Une fonction peut admettre plusieurs points d'inflexion.

Par exemple : La fonction f définie par $f(x) = x^4 - 2x^3$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$ donc on obtient le tableau de variations ci-dessous (facile à trouver) :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{27}{16}$	↗	$+\infty$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = (4x^3 - 6x^2)' = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$ donc on obtient le tableau de signe de f'' suivant (facile à trouver):

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On constate donc que (C_f) admet deux points d'inflexion en $a=0$ et en $a=1$ et non pas un seul.

3) Eléments de symétrie d'une courbe

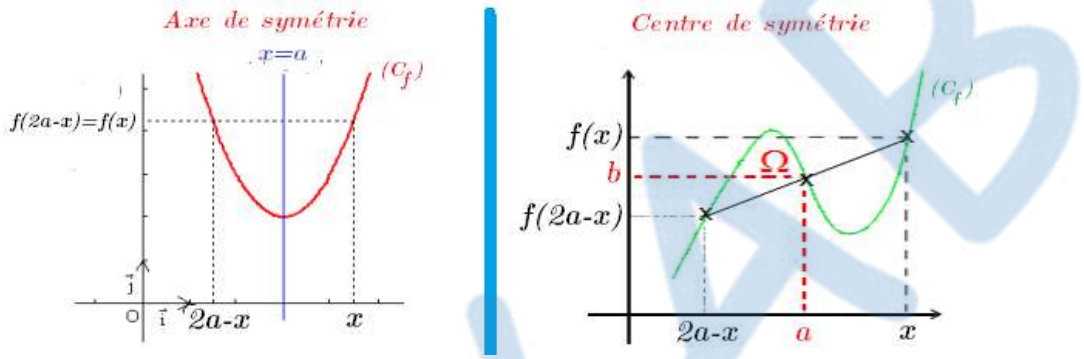
Propriété 3 :

- Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de (C_f), si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, on a :

  $2a-x \in D_f$ et $f(2a-x) = 2b - f(x)$

- La droite (Δ) d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de (C_f), si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, on a :

  $2a-x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$



Exemple 4 :

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Montrons que le point $\Omega(-1;1)$ est un centre de symétrie de (C_f) :

* On a $a=-1$, $b=1$ et $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

* Soit $x \in D_f$, montrons que $-2-x \in D_f$

On a $x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2-x \neq -2+1 \Leftrightarrow -2-x \neq -1$. Donc $-2-x \in D_f$

* Soit $x \in D_f$, montrons que $f(2a-x) = 2b - f(x)$

On a $f(2a-x) = f(-2-x) = \dfrac{(-2-x)}{(-2-x)+1} = \dfrac{2+x}{x+1}$

Et $2b - f(x) = 2\times 1 - f(x) = 2 - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2(x+1)-x}{x+1} = \dfrac{x+2}{x+1}$

D'où $f(2a-x) = 2b - f(x)$ C.Q.F.D



Exemple 5

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

Montrons que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{3}$ est un axe de symétrie de (C_f) :

* On a $a = \dfrac{1}{3}$ et $D_f = \mathbb{R}$

* Donc pour tout $x \in D_f$ on a $(2a-x) = \dfrac{2}{3} - x \in D_f$

* Pour tout $x \in D_f$ on a $f(2a-x) = f(\dfrac{2}{3}-x) = 3\left(\dfrac{2}{3}-x\right)^2 - 2\left(\dfrac{2}{3}-x\right) + 5 = \ldots = 3x^2 - 2x + 5 = f(x)$

D'où $f(2a-x) = f(x)$ C.Q.F.D

Application 6

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x+3}$

Montrer que le point $A(-3;-1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Application 7

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{-3}{x^2-4x+7}$

Montrer que la droite d'équation $x=2$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

Cas particuliers :

- Si f est une fonction impaire alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet comme centre de symétrie le point de coordonnées $(0;0)$ (C'est à dire l'origine du repère).
- Une hyperbole, qui est la courbe d'une fonction homographique $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, (avec $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$) admet comme centre de symétrie le point $\Omega\left(\frac{-d}{c};\frac{a}{c}\right)$.
- Si f est une fonction paire alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet comme axe de symétrie l'axe d'équation $x=0$ (C'est à dire l'axe des ordonnées).
- Une parabole, qui est la courbe d'une fonction polynômiale de degré 2 : $x \mapsto ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$, admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x=-\frac{b}{2a}$.

Remarques 6

- Un centre de symétrie n'est pas forcément un point de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (Par exemples : les hyperboles)
- Les éléments de symétries permettent de réduire l'ensemble sur lequel on étudie une fonction et donc de réduire le coût du travail.

4) Construction d'une courbe

Démarche de la construction d'une courbe

- **Placer le repère orthogonal ou orthonormé :**
  - Placer les deux axes du repère, en respectant l'unité de mesure,
  - Placer l'élément de symétrie (axiale ou centrale), s'il y a une symétrie,
  - Noter le domaine de définition.
- **Comportement local :**
  - Placer les points remarquables (extrémums, intersection avec les axes (ox) et (oy)),
  - Placer les points d'inflexion, s'il existe,
  - Placer les tangentes et les demi-tangentes.
- **Comportement asymptotique :**
  - Placer les asymptotes de la courbe, en respectant les positions relatives,
  - Esquisser les branches paraboliques.
- **Finaliser la construction de la courbe :**
  - Relier, à main levée, tous les éléments présentés ci-dessus, en respectant le tableau de variations de la fonction.



Exemples 6

https://m.facebook.com/story.php?story_fbid=pfbid02G3ULvQg8FWJgTTmAoWFHviabfkNwUL97LdnSgw8SroTZKWRyy7ntSNGT8SVyNoaul&id=100095283541033&mibextid=Nif5oz

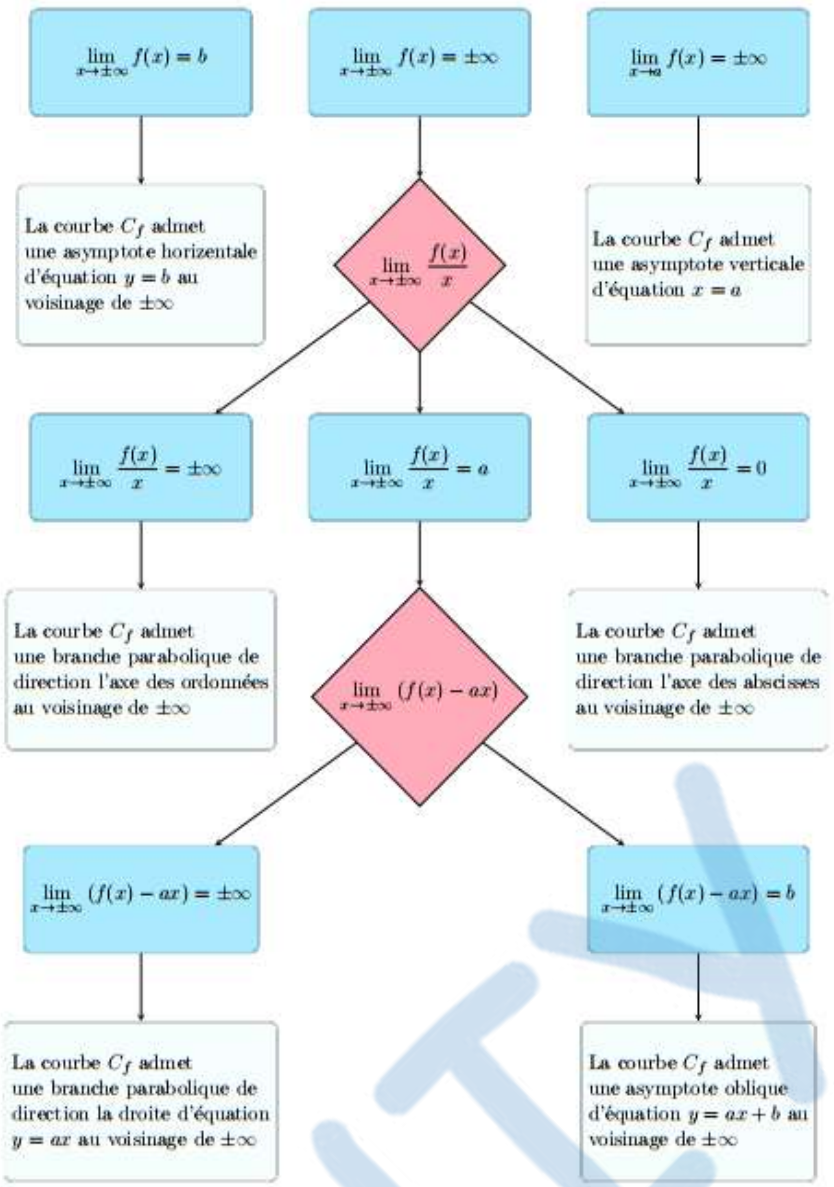
Application 8 : Exercice 6 de la série 12

Remarque 7 : compléments de cours

1) Résolution graphique des équations et des inéquations : voir résumé 2 (page 19)
2) Intersection de la courbe avec les axes du repère : voir résumé 2 (page 19)
3) Tangentes et demi-tangentes (interprétation graphique de la dérivabilité en un point) : voir résumé 11 (page 106)

Résumé 12 : Etude de fonctions

Branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$ si $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

Concavité de $(\mathcal{C}_f)$

La concavité de $(\mathcal{C}_f)$ se déduit par **l'étude de signe de** $f''(x)$:

- $(\mathcal{C}_f)$ est **convexe** sur I $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in I)\ f''(x) \geq 0$
- $(\mathcal{C}_f)$ est **concave** sur I $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in I)\ f''(x) \leq 0$
- Si $f''(a) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de a alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

Positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et $y = ax + b$

Les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) : $y = ax + b$ se déduit par **l'étude de signe de** $f(x) - (ax + b)$:

- Si $(\forall x \in I)\ f(x) - (ax + b) > 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur I.
- Si $(\forall x \in I)\ f(x) - (ax + b) < 0$ alors $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de (D) sur I.
- Si $f(x) - (ax + b) = 0$, alors $(\mathcal{C}_f)$ et (D) sont confondues aux points d'abscisses x .

Eléments de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

$\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$
$x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$

Méthode de construction de $(\mathcal{C}_f)$:

- Construire **les asymptotes** et **les branches paraboliques** ;
- Construire **les tangentes** et **les demi-tangentes** ;
- Construire **les points remarquables de** $(\mathcal{C}_f)$ s'ils existent : **(Points d'inflexion, points d'intersection avec les axes du repère, les extremums et le centre de symétrie)**
- Construire $(\mathcal{C}_f)$ à **partir du tableau de variations de** f

N.B : N'oublier pas de respecter l'unité de mesure du repère, les positions relatives, la concavité et tenant compte le centre ou l'axe de symétrie (s'il existe).

Exercice 1 : Droites asymptotes

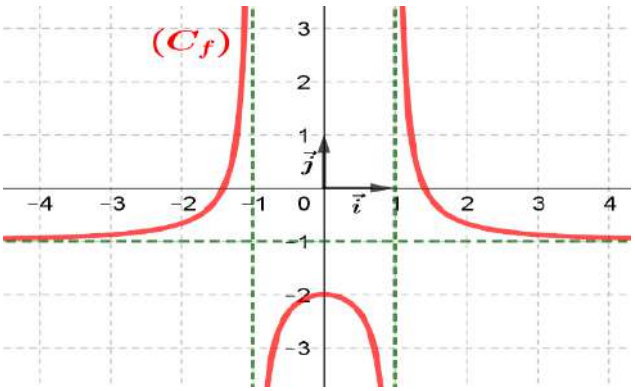
Déterminer D_f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter les résultats graphiquement dans les cas suivants :

$f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$; $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$; $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}}$

$f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+x-2}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+3}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous



1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

3) Interpréter graphiquement ces résultats.

Exercice 3 :

Montrer que (D) est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; $y=x$

2) $f(x)=2x+5-\dfrac{3}{x+1}$; $y=2x+5$

Exercice 4 :

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants

$f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$; $f(x)=\dfrac{3x^2}{2-x}$

$f(x)=\dfrac{8x^2-4x+1}{2x+1}$; $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

$f(x)=1+\dfrac{3x^2+5x+1}{x}$; $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

Exercice 5 : Branches paraboliques

Déterminer les branches paraboliques de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ dans les cas suivants :

$f(x)=-3x^2+x$; $f(x)=x^2+x-7$

$f(x)=2x+1+\dfrac{x\sqrt{x}}{x-1}$; $f(x)=x+\sqrt{x+1}$

$f(x)=5x+\sqrt{x}+\sqrt{x+2}$; $f(x)=-3x-2+\sqrt{3-x}$

$f(x)=3+\sqrt{2x+5}$; $f(x)=x\sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 6 : Etude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^2}{2x-1}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

b) En déduire l'équation de l'asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$

3) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x-2}$

b) Montrer par deux méthodes que (D) : $y=x+\dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$

c) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$

4) Montrer que $A(\dfrac{1}{2};1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

5) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f'(x)=\dfrac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

6) Déterminer l'équation de (T) la droite tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

7) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (T).

8) Soit $m\in\mathbb{R}$ déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$

Exercice 7 : Etude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{4(x-2)}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

b) Déduire l'équation de l'asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$

3) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{x-2}$

b) En déduire que (D) : $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $\pm\infty$

c) Etudier les positions relatives de (D) et $(\mathcal{C}_f)$

4) a) Montrer que $(\forall x\in D_f)$: $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{4(x-2)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

5) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$

6) Montrer que $A(2;\dfrac{5}{4})$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

7) Déterminer les points de contact entre $(\mathcal{C}_f)$ et les axes du repère.

8) Construire $(\mathcal{C}_f)$

9) Soit (Δ) la droite d'équation $y=\frac{1}{4}x$

a-Vérifier que (Δ) coupe $(\mathcal{C}_f)$ dans le point d'abscisse $\frac{2}{3}$

b-Résoudre graphiquement l'équation $x\in D_f$; $f(x)\le\frac{1}{4}x$

Exercice 8 : Etude d'une fonction polynomiale

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3-3x^2+1$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

3) Dresser le tableau de variations de f

4) Dresser le tableau de concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et déduire qu'elle admet un unique point d'inflexion Ω qu'on déterminer.

5) Vérifier que Ω est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

6) Donner l'équation de (T) la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en Ω

7) Construire $(\mathcal{C}_f)$ et (T)

Exercice 9 : Etude d'une fonction irrationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f

2) M. q. la droite $x=2$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

3) a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

b. Montrer que :
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x-2\right)=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+2\right)=0$

c. En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes obliques (D) au voisinage de $-\infty$ et (D') au voisinage de $+\infty$

4) a. Vérifier que $(\forall x\in D_f)\ f(x)=\sqrt{-(x-1)}\times\sqrt{-(x-3)}$

b. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et à droite en 3 et interpréter graphiquement ces résultats.

5) Montrer que :
$$(\forall x\in D_f\setminus\{1;\ 3\}):\ f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

c. Dresser le tableau de variations de f

6) Tracer (D), (D') et $(\mathcal{C}_f)$

Exercice 10 : Etude d'une fonction trigonométrique

f la fonction définie par $\begin{cases}f(x)=\dfrac{1-cos(x)}{sin(x)} & ;\ x\neq 2k\pi\\ f(2k\pi)=0 & ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

1) Montrer que $D_f=\mathbb{R}\setminus\{(1+2k)\pi/\ k\in\mathbb{Z}\}$

2) Montrer que f est impaire.

3) Montrer que f est périodique de période 2π

4) Déduire que le domaine d'étude de f est $D_E=[0;\pi[$

5) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

6) Calculer $\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement

7) a) Montrer que $(\forall x\in]0;\pi[)\qquad f'(x)=\dfrac{1}{1+cos(x)}$

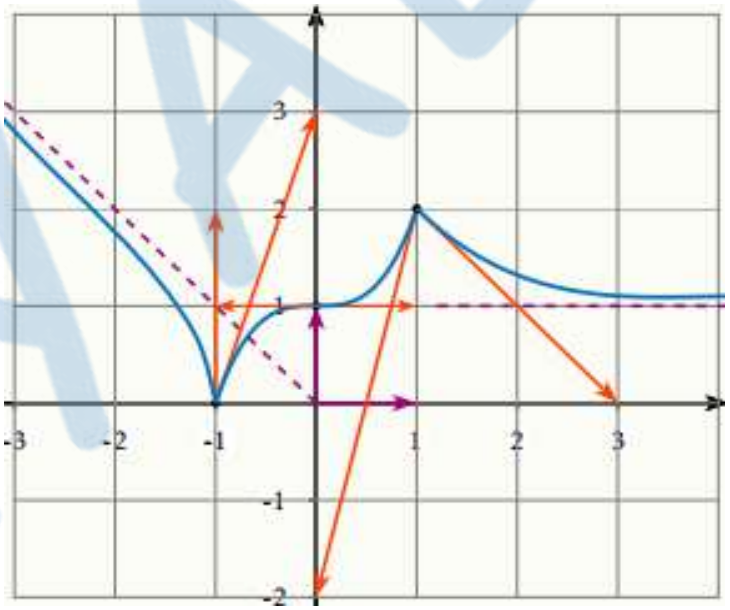
b) Dresser le tableau de variations de f sur D_E

8) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion I qu'on déterminer.

9) Construire $(\mathcal{C}_f)$ sur $[-\pi;3\pi]$

Exercice 11 : Lecture d'une courbe

Dans la figure ci-dessous, $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



1) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

2) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de ∞

3) a) f est-elle dérivable en 1 ? justifier

b) f est-elle dérivable à gauche en -1 ? justifier

c) Déterminer $\lim\limits_{h\to(-1)^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ et $f'_d(-1)$

d) Déterminer $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$

e) Déterminer $f'(0)$

4) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle un point d'inflexion ?

5) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

6) Dresser le tableau de variations de f

7) Dresser le tableau de signe de f'

8) Discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL6

1BACSMF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 1 (Dérivation)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+25}{x^2-25}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

3) Montrer que $(\forall x\in D_f)\qquad f'(x)=\dfrac{-100x}{(x^2-25)^2}$

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) En déduire que $(\forall x\in\left]-5;5\right[)\qquad f(x)\le -1$.

6) Montrer que $y=-\dfrac{\sqrt{5}}{4}x-\dfrac{1}{4}$ est l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $\sqrt{5}$.

Exercice 2 (Dérivation)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter le résultat graphiquement.

3) Déterminer $D_{f'}$ l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_{f'}$.

4) En déduire la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ sans la calculer.

5) Déterminer g l'approximation affine de f au voisinage de 8.

6) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{9,001}$ (on pourra remarquer que $\sqrt{9,001}=f(8,001)$)

7) Montrer que pour tout réel h voisin de zéro on a : $\sqrt{1+h}\simeq 1+\dfrac{h}{2}$.

Exercice 3 (Dérivation)

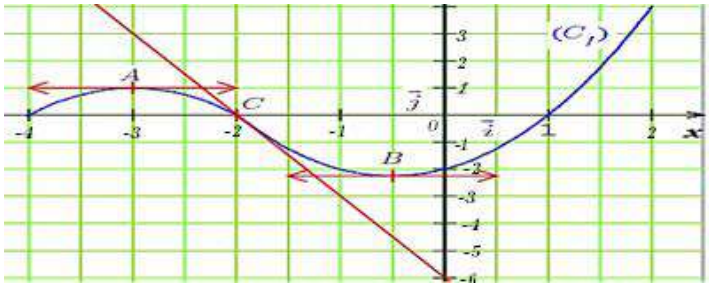
Calculer et simplifier $f'(x)$ dans les cas suivants :

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+5x+3$; $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; $f(x)=x^2\sqrt{x}$; $f(x)=\dfrac{sin(x)}{cos^2(x)}$;

$f(x)=\dfrac{2x^2-5x+1}{x-3}$; $f(x)=\dfrac{1}{3x+sin(x)}$; $f(x)=\sqrt{x^2+1}$; $f(x)=\left(x^2+8x+4\right)^3$

Exercice 4 (Dérivation)

Soit f la fonction représentée ci-contre :



1) Déterminer : $f'(-\dfrac{1}{2})$, $f'(-3)$ et $f'(-2)$

2) Dresser le tableau de variations de f sur $[-4;2]$
(on donne $f(-\frac{1}{2})=-\frac{9}{4}$)

3) En déduire le tableau de signe de f' sur $[-4;2]$

Exercice 5 (Dérivation)

1) Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)\ \ sin(x)\le x$ (On pourra considérer la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x-sin(x)$)

2) Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)\ \ 1-\dfrac{x^2}{2}\le cos(x)$

بسم الله الرحمن الرحيم

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول
ثانوية المجد التأهيلية

DL6

1BACSMF
Mathématique
Aissa HIYAB

Exercice 6 (Etude de fonctions)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}+2$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que $D_f=\mathbb{R}$ puis calculer les limites de f aux bornes de D_f

b) Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

2) Montrer que le point $I(0;2)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=-\dfrac{3(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f

4) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f''(x)=\dfrac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

b) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ en précisant ses points d'inflexions s'ils existent.

5) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point I.

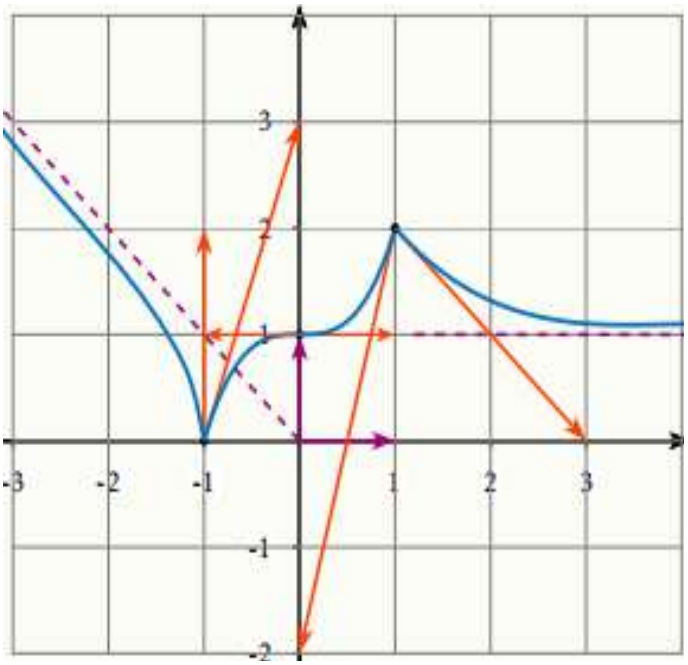
6) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

7) Soit $m\in\mathbb{R}$, déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$

8) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions g et h tel que $g(x)=f(|x|)$ et $h(x)=-f(x)$

Exercice 7 (Etude de fonctions)

Dans la figure ci-dessous, $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$



1) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

2) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de ∞

3) a) f est-elle dérivable en 1 ? justifier

b) f est-elle dérivable à gauche en -1 ? justifier

c) Déterminer $\lim\limits_{h\to(-1)^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ et $f'_d(-1)$

d) Déterminer $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$

e) Déterminer $f'(0)$

4) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle un point d'inflexion ?

5) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.

6) Dresser le tableau de variations de f

7) Dresser le tableau de signe de f'

8) Discuter, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة
مادة الرياضيات
الأستاذ
عيسى هياب
ثانوية المجد التأهيلية
المديرية الإقليمية انزكان أيت ملول

Mathématiques

Tronc commun sciences et tronc commun technologique

Programme Marocain-BIOF

15 cours bien détaillés

15 résumés bien précis

15 séries d'exercices corrigées

6 devoirs libre corrigés

Exercices et stratégies d'olympiades

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Mathématiques

Première année Bac sciences expérimentales

Programme Marocain-BIOF

12 cours bien détaillés

12 résumés bien précis

12 séries d'exercices corrigées

6 devoirs libre corrigés

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Mathématiques

Première année Bac sciences mathématiques

Tome 1

Programme Marocain-BIOF

12 Cours bien détaillés

12 Résumés bien précis

12 Séries d'exercices

6 Devoirs libre

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

Mathématiques

2BSM A&B

Tome 1

Programme Marocain-BIOF

Rappel des cours

Séries d'exercices et problèmes

Devoirs libre

Extraits du bac

Révision et examens blancs

Astuces pour les concours

2024/2025

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant