

FASCICULE MATHÉMATIQUES 1S1

*Préparé par Amadou Diop Dieng élève-ingénieur à l'Ecole Polytechnique
de Thiès (EPT)*

Contact: 77 216 08 21 / 77 800 10 70 / 70 783 92 87 / 76 662 95 85.

diopdieng@gmail.com

[SOURCE : www.ilemaths.net](http://www.ilemaths.net)

Factorisations de polynômes

I. α est racine de P



Si P est de la forme $P(x) = c$, alors P est un polynôme de degré 0.

Si P est de la forme $P(x) = bx + c$, alors P est un polynôme de degré 1.

Si P est de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors P est un polynôme de degré 2.

Dans une fonction polynôme, il ne peut jamais y avoir de $\sqrt{x}$ ou $\frac{1}{x}$ ou $\frac{1}{x^2}$ ou $\frac{1}{x-3}$...



α est dit racine de P si $P(\alpha) = 0$

Exemple :

$$P(x) = 3 + x$$

-3 est racine de P car $P(-3) = 0$



Théorème :

Si α est racine de P, alors on peut factoriser P par $(x - \alpha)$.

Réciproquement si on peut factoriser P par $(x - \alpha)$, alors α est racine de P.

Exemple :

$$Q(x) = x^2 + 3x - 10$$

$$0 = Q(2) = 2^2 + 6 - 10$$

En soustrayant ces deux lignes, on obtient :

$$Q(x) = Q(x) - Q(2) = (x^2 - 2^2) + (3x - 6)$$

$$= (x + 2)(x - 2) + 3(x - 2)$$

$$= (x - 2)(x + 5)$$

II. Forme canonique

Rien de mieux que de comprendre à partir d'un exemple...

$$\text{On a : } 2x^2 + 4x - 1$$

On commence par factoriser par le nombre devant x^2

$$2 \left(x^2 + 2x - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left((x^2 + 2x) - \frac{1}{2} \right)$$

$x^2 + 2x$ est le début d'une identité remarquable de type $(a + b)^2$

$$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$$

$$(x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 - 1 = x^2 + 2x$$

$$\text{Donc : } 2 \left((x^2 + 2x) - \frac{1}{2} \right) = 2 \left((x + 1)^2 - 1 - \frac{1}{2} \right) = 2 \left((x + 1)^2 - \frac{3}{2} \right)$$

Maintenant $a^2 - b^2$

$$\text{D'où : } 2x^2 + 4x - 1 = 2 \left(x + 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \left(x + 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

Fonctions Polynômes : Cours

I. Fonctions polynômes

1. Définitions

- Une fonction polynôme est une fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par une expression du type :
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
- Les nombres $a_0, \dots, a_n$ sont appelés les coefficients de P .
- Si $a_n \neq 0$, n est appelé le degré de P .

2. Opérations sur les degrés

Soit P et Q deux fonctions polynômes non nulles. Alors :

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

$$\text{et } \deg(P + Q) \leq \sup(\deg P, \deg Q)$$

Remarque : l'inégalité stricte est possible, les termes de plus haut degré pouvant s'annuler.

3. Egalité de deux fonctions polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes



Théorème 1

$P = Q$ signifie que :

- $\deg P = \deg Q$ et
- les coefficients des termes de même degré de P et Q sont égaux

Cas particulier : $P = 0$ signifie que tous les coefficients de P sont nuls.

4. Racine d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme de degré n , $n \geq 1$.

Définition :

- Une racine (ou zéro) de P est un nombre a tel que $P(a) = 0$.
- Déterminer les racines de P , c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$.



Théorème 2

a est une racine de P si et seulement s'il existe une fonction polynôme Q telle que pour tout réel x ,
$$P(x) = (x - a) Q(x).$$

Remarques :

- on a alors $\deg Q = n - 1$;
- ce théorème permet de réduire le degré d'une équation.

5. Une formule utile

Quels que soient les réels x et a , $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^k x^{n-k-1} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.

II. Trinôme du second degré

1. Définitions

- Un trinôme du second degré est un polynôme de la forme :
$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0.$$
- Résoudre l'équation du second degré $P(x) = 0$, c'est chercher l'ensemble S des racines de P .

2. Méthode générale

Définition :

On appelle discriminant de P le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.



Théorème 3

- Si $\Delta < 0$, $S = \emptyset$
- Si $\Delta = 0$, $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$
- Si $\Delta > 0$, $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

3. Somme et produit des racines



Théorème 4

Si le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, admet deux racines x_1 et x_2 alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque : ces formules restent valables si les racines sont confondues.



Théorème 5

Les solutions du système $\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$ sont les couples (u, v) tels que u et v soient les solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$.

Remarque : quand on connaît une solution (u, v) du système on a entièrement résolu celui-ci, car l'autre solution est (v, u) .

4. Factorisation du trinôme



Théorème 6

Si le trinôme $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement confondues), alors pour tout réel x , $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

5. Signe du trinôme



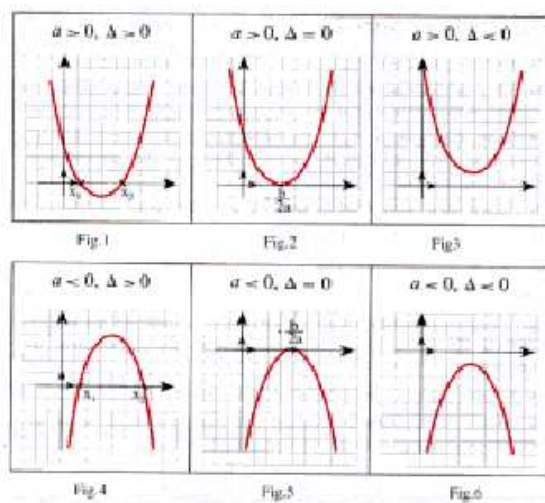
Théorème 7

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ a le signe de a pour tout x .
- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ a le signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $P(x)$ a le signe de a à l'extérieur des racines et le signe de $(-a)$ entre les racines.

Remarque : un élève de première S doit connaître parfaitement ce résultat, mais peut, au début, faire rapidement un tableau de signes.

6. Second degré et paraboles

De nombreux résultats de ce chapitre se traduisent graphiquement à l'aide de la parabole P d'équation : $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.



Les Fonctions Polynômes : Fiche Méthode

I. Fonction polynôme

- Ne pas oublier qu'une fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$ et que les puissances de x sont des entiers naturels.

II. Equation de degré supérieur ou égal à 3

Chercher une ou plusieurs racines :

- en programmant une calculatrice,
- souvent parmi -2, -1, 0, 1, 2,
- dont 0 si le coefficient constant est nul, puis utiliser le théorème suivant :



a est une racine de P si et seulement s'il existe une fonction polynôme Q telle que pour tout réel x ,

$$P(x) = (x - a) Q(x).$$

une ou plusieurs fois pour factoriser et se ramener à une équation de degré 2.

III. Equation de degré 2

- Vérifier d'abord s'il s'agit ou non d'une identité remarquable.
- S'il y a une racine simple (souvent parmi -2, -1, 0, 1, 2), utiliser le théorème suivant pour obtenir l'autre racine :



Si le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, admet deux racines x_1 et x_2 alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

- Sinon utiliser les formules du théorème suivant :



$$\begin{aligned} & - \text{ Si } \Delta < 0, S = \emptyset \\ & - \text{ Si } \Delta = 0, S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\} \\ & - \text{ Si } \Delta > 0, S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\} \end{aligned}$$

qui ne sont valables que pour une équation du second degré et qui doivent être connues par cœur !

- Retenir qu'un polynôme de degré 2 a au plus deux racines.
- Dans un problème concret, vérifier la cohérence des résultats.

IV. Inéquation

- Commencer par factoriser au maximum en utilisant les méthodes du II. et du III. , puis utiliser la règle des signes avec un tableau.
- Ne pas oublier le facteur a dans $a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Vérifier les résultats en prenant des valeurs particulières et en déterminant le signe du polynôme pour ces valeurs.

Factorisations de polynômes

Exercice 1

Factoriser $H(x) = x^2 - x - 2$

aide : calculer $H(2)$

Exercice 2

Factoriser $R(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

aide :

- calculer $R(2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Exercice 3

Factoriser $A(x) = 2x^2 + 10x - 3$



Correction

Exercice 1

$$H(x) = x^2 - x - 2$$

$$\text{Calculons } H(2) : H(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$$

$$\text{Donc : } H(x) = H(x) - H(2)$$

$$H(x) = x^2 - x - 2 - (2^2 - 2 - 2)$$

$$H(x) = (x^2 - 2^2) - (x - 2)$$

$$H(x) = (x - 2)(x + 2) - (x - 2)$$

$$H(x) = (x - 2)(x + 2 - 1)$$

$$H(x) = (x - 2)(x + 1)$$

Exercice 2

$$R(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$\text{Calculons } R(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2 - 6 = 0$$

$$\text{Donc : } R(x) = R(x) - R(2)$$

$$R(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2 - 6)$$

$$R(x) = (x^3 - 2^3) + 2(x^2 - 2^2) - 5(x - 2)$$

$$R(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 2(x - 2)(x + 2) - 5(x - 2)$$

$$R(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + 2x + 4 - 5)$$

$$R(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$$

Pour aller plus loin...[/b]

On prend :

$$Z(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$0 = Z(-1) = (-1)^2 + 4 \times (-1) + 3$$

$$Z(x) = Z(x) - Z(-1) = (x^2 - (-1)^2) + 4(x - (-1))$$

$$Z(x) = (x - 1)(x + 1) + 4(x + 1)$$

$$Z(x) = (x + 1)(x + 3)$$

Donc pour reprendre $R(x)$:

$$R(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$R(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$$

$$R(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$$

Exercice 3

On va utiliser la forme canonique ...

$$2x^2 + 10x - 3$$

$$= 2 \left(x^2 + 5x - \frac{3}{2} \right)$$

$$= 2 \left[\left(x + \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} - \frac{3}{2} \right]$$

$$= 2 \left[\left(x + \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{31}{4} \right]$$

$$= 2 \left(x + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2} \right) \left(x + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2} \right)$$

Fonctions Polynômes : Exercices

Exercice 1

Calculer $x_1^2 + x_2^2$ et $x_1^3 + x_2^3$
où x_1 et x_2 sont les deux racines de $ax^2 + bx + c$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
indication : on pourra poser $X = x^2$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x - 5\sqrt{x} - 36 = 0$
indication : on pourra poser $X = \sqrt{x}$

Exercice 4

Soit P une fonction polynôme de degré n , $n \geq 1$.

1. Montrer que si P a n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$, alors il existe une fonction polynôme Q telle que pour tout réel x , on ait : $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) Q(x)$.

2. En déduire que toute fonction polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.

3. La fonction $f : x \mapsto \sin x$ est-elle polynomiale ?

4. Existe-t-il une fonction polynôme P non nulle telle que pour tout $x \neq 0$, $x^5 P(\sqrt{x^2 + 1}) = P(x-1)$ et telle que 1 soit racine de P ?

Pour répondre à la question, on montrera que :

- si P existe, $\deg P \leq 5$;
- $\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\frac{1}{2}$ sont racines de P ;
- il existe six racines distinctes de P .

Exercice 5

Soient A, B, C trois villes telles que : $d(A, B) = d(B, C)$. Deux voitures se rendent de A à C en passant par B .

La première va à la vitesse v de A à B , puis deux fois plus vite ensuite.

La deuxième va de A à B à 48 km/h de moyenne, puis roule à la vitesse $(v + 20)$ entre B et C .

Les deux voitures mettent le même temps : calculer v .

Exercice 6

Le livre de mathématiques de première S a la forme d'un parallélépipède rectangle d'arêtes de longueurs a , b et c . Son volume vaut $V = 792 \text{ cm}^3$, la somme des aires de ses faces vaut $S = 954 \text{ cm}^2$ et la somme des longueurs de ses arêtes vaut $P = 170 \text{ cm}$.

Retrouver les dimensions du livre (on pourra développer le polynôme $Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ et trouver l'épaisseur du livre comme racine évidente de Q).

Exercice 7

Soit une fonction polynôme P et soit $\Delta(P)$ la fonction polynôme : $x \mapsto P(x + 1) - P(x)$.

1. Calculer $\Delta(P)$ lorsque P est un polynôme de degré 0, de degré 1, de degré 2.
Comparer $\deg \Delta(P)$ et $\deg P$ sur ces trois cas particuliers.
Formuler un résultat général reliant $\deg \Delta(P)$ et $\deg P$ si $\deg P \geq 1$ et démontrer ce résultat.
2. Montrer que $\Delta^2(P) = \Delta(\Delta(P))$ est la fonction polynôme :
 $x \mapsto P(x+2) - 2P(x+1) + P(x)$.
Donner une expression analogue pour $\Delta^3(P) = \Delta(\Delta(\Delta(P)))$.
3. Que peut-on dire de $\Delta^3(P)$ lorsque $\deg P = 2$, puis lorsque $\deg P = 3$?
4. Montrer que pour toute fonction polynôme P de degré 3, on a pour tout réel x :
 $P(x+4) + 6P(x+2) + P(x) = 4[P(x+3) + P(x+1)]$.
5. Application.
Existe-t-il une fonction polynôme P de degré 3 vérifiant :
 $P(-3) = P(-1) = P(1)$
 $P(-2) = P(0)$.

Exercice 8

On appelle polynôme symétrique un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre.

exemple : $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation (E) : $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. Montrer que si x_0 est solution de (E), alors $\frac{1}{x_0}$ est solution de (E).
3. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.
4. Calculer $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.
5. En posant $X = x + \frac{1}{x}$, montrer que l'équation (E') se ramène à une équation du second degré.
6. Résoudre l'équation du second degré, puis en déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 9

On appelle polynôme symétrique un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre.

Exemple : $f(x) = 3x^4 + x^3 - x^2 + x + 3$.

Nous allons voir des méthodes permettant de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1. Degré 2. Soit : $f : x \mapsto ax^2 + bx + a$, $a \neq 0$.
Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et dans le cas où f admet deux racines distinctes, les comparer.
2. Degré 3. Soit : $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + a$, $a \neq 0$.
 - a) Montrer que 0 n'est pas racine de f et que si x_1 est racine de f , alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f .
 - b) Trouver une racine évidente de f et en déduire une factorisation de $f(x)$. Discuter alors le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
 - c) **Application**
 $f : x \mapsto 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$.
Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et factoriser $f(x)$.
3. Degré 4. Soit : $f : x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$, $a \neq 0$.

a) Même question que B. a).

b) Soit $y = x + \left(\frac{1}{x}\right)$.

Calculer y^2 et en déduire l'expression de $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ en fonction de a, b, c, y et y^2 (ceci pour $x \neq 0$).

Montrer que résoudre $f(x) = 0$ revient à résoudre successivement deux équations du second degré.

Montrer que si $b^2 < 4a(c - 2a)$, $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

c) **Application**

Résoudre l'équation : $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0$.

Exercice 10

1. Trouver une fonction polynôme P , de degré ≤ 2 , telle que

$$P(-1) = 14, P(2) = 5, P(3) = 18.$$

P est-elle unique ? Si oui, pourquoi ? Sinon, trouver toutes les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant les mêmes conditions.

2. Reprendre la question 1. pour les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2 qui vérifient :

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \text{ et } P(-3) = -5.$$

3. Soient a, b, c, d quatre réels donnés.

Montrer que s'il existe une fonction polynôme P de degré 3 vérifiant $P(-2) = a, P\left(\frac{1}{2}\right) = b, P(\sqrt{2}) = c$ et $P(100) = d$, alors elle est unique.

4. Montrer qu'il existe quatre réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = \alpha \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - \sqrt{2}) (x - 100) + \beta (x + 2) (x - \sqrt{2}) (x - 100) + \gamma (x + 2) (x - \sqrt{2}) (x - 100) + \delta \left(x + 2\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - \sqrt{2})$$

soit la solution du problème.
Le polynôme obtenu s'appelle le **polynôme d'interpolation de Lagrange**.

5. Généraliser les questions 3. et 4. en remplaçant $-2, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 100$ par des valeurs quelconques x_1, x_2, x_3, x_4 deux à deux distinctes.

6. Généraliser à la recherche des fonctions polynômes P de degré $\leq n$ vérifiant $P(x_1) = a_1, P(x_2) = a_2, \dots, P(x_{n+1}) = a_{n+1}$ où $x_1, \dots, x_{n+1}$ sont des réels donnés deux à deux distincts et où $a_1, \dots, a_{n+1}$ sont des réels donnés quelconques.

Exercice 11

Dossier d'Interpol (utiliser l'exercice 10).

La société secrète du «troisième degré» se livre à de redoutables activités et ses membres se reconnaissent grâce à un code numérique qui change chaque mois suivant une formule connue d'eux seuls.

A Interpol, le commissaire Lagrange n'a pas beaucoup d'éléments pour son enquête : il sait seulement que les codes pour les 3^e, 5^e, 6^e et 8^e mois étaient respectivement 729, 1313, 901 et 1014.

Néanmoins, le nom de la société secrète lui donne une idée. Il va découvrir la formule, et connaissant le code pour le 10^e mois, il va s'infiltrer dans la société et arrêter peu à peu tous ses membres.

Quelle est la formule ? Quel est le code du 10^e mois ?

Exercice 12

Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 3 tel que :

$$P(1) = -\frac{3}{4}; P(2) = 1; P(3) = \frac{29}{4} \text{ et } P(4) = 21.$$



Correction

Exercice 2

Posons $X = x^2$, donc $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ équivaut à :

$$X^2 - 3X - 4 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

L'équation admet donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

Or $X = x^2$, donc :

$$x^2 = -1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 4$$

$x^2 = -1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$x^2 = 4$ équivaut à $x = 2$ ou $x = -2$

$$\text{D'où : } S = \{-2; 2\}$$

Exercice 3

Posons $X = \sqrt{x}$, $x - 5\sqrt{x} - 36 = 0$ équivaut à :

$$X^2 - 5X - 36 = 0$$

Calculons le discriminant : $\Delta = 25 + 4 \times 36 = 169 = 13^2$

L'équation admet donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{5-13}{2} = -4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5+13}{2} = 9$$

Or $X = \sqrt{x}$, donc :

$$\sqrt{x} = -4 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x} = 9$$

$\sqrt{x} = -4$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

$\sqrt{x} = 9$ équivaut à $x = 81$

$$\text{D'où : } S = \{81\}$$

Exercice 8

1. $0^4 - 5 \times 0^3 + 6 \times 0^2 - 5 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$

0 n'est donc pas solution de l'équation (E).

2. $\frac{1}{x_0^4} - \frac{5}{x_0^3} + \frac{6}{x_0^2} - \frac{5}{x_0} + 1 = \frac{1 - 5x_0 + 6x_0^2 - 5x_0^3 + x_0^4}{x_0^4}$

Or, x_0 est solution de l'équation (E), donc : $x_0^4 - 5x_0^3 + 6x_0^2 - 5x_0 + 1 = 0$.

Donc : $\frac{1}{x_0^4} - \frac{5}{x_0^3} + \frac{6}{x_0^2} - \frac{5}{x_0} + 1 = 0$

D'où : si x_0 est solution de (E), alors $\frac{1}{x_0}$ est solution de (E).

3. $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$
équivaut à $x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

4. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

5. Posons $X = x + \frac{1}{x}$, donc :

$$x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \text{ équivaut à}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$$X^2 - 2 - 5X + 6 = 0$$

$$X^2 - 5X + 4 = 0$$

6. Résolvons l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 = 3^2$$

L'équation admet donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

Or $X = x + \frac{1}{x}$, donc :

$$x + \frac{1}{x} = 1 \quad \text{ou} \quad x + \frac{1}{x} = 4$$

• $x + \frac{1}{x} = 1$ équivaut à $\frac{x^2 + 1 - x}{x} = 0$

soit : $x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$$

L'équation n'admet donc pas de solution dans $\mathbb{R}$.

• $x + \frac{1}{x} = 4$ équivaut à $\frac{x^2 + 1 - 4x}{x} = 0$

soit : $x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12$$

L'équation n'admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

D'où : $S = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$.

Les Fonctions Polynômes : Exercices

Exercice 1

Cocher la réponse exacte.

I. Comment s'écrivent ces expressions ?

	A	B	C
1. $(2x - 1)^2 - 4(x - 2)^2$	$2(x + 1)^2$	$3(4x - 5)$	$4(x - 1)(x - 2)$
2. $4(x - 1)^2 - (x - 3)^2$	$(x + 1)(3x - 5)$	$(x + 1)(x - 7)$	$3(x + 2)$

II. Quel ensemble de solutions admettent ces équations ?

	A	B	C
3. $5x^2 - 20x = 0$	3 ; 0	1 ; -2	0 ; 4
4. $3x^2 + 27 = 0$	1	-3 ; 3	$\emptyset$
5. $9(3x + 5)^2 - (x - 1)^2 = 0$	1 ; 3	$\{-2; -\frac{7}{5}\}$	-2 ; -1
6. $4x^2 + 4x + 1 = 0$	$\{-\frac{1}{5}\}$	1 ; 2	$\emptyset$

III. Quel ensemble de solutions admettent ces inéquations ?

	A	B	C
7. $5x^2 - 20x \leq 0$	$\emptyset$	$[0 ; 4]$	$] -\infty ; 2[$
8. $(2x - 1)^2 - 4(x - 2)^2 \geq 0$	$[1 ; 2]$	$] -\infty ; 3[$	$[\frac{5}{4} ; +\infty[$
9. $4(x - 1)^2 - (x - 3)^2 \geq 0$	$\emptyset$	$[-1 ; \frac{5}{3}]$	$[-\infty ; -1] \cup [\frac{5}{3} ; +\infty[$
10. $x^2 + 1 \geq 2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - 1$	$]1 ; +\infty[$

Exercice 2

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes ?

1. $f : x \mapsto 4x^2 + x + 1 ;$

2. $g : x \mapsto \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} ;$

3. $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x} .$

Exercice 3

Déterminer le degré et les coefficients des fonctions polynômes suivantes, après les avoir écrites sous forme réduite et ordonnée :

$f_1 : x \mapsto (x - 1)^2 - 4(2x - 3)(x + 2)^2 + 3(x - 4)(x + 2)$

$f_2 : x \mapsto (2x - 1)^3 - 2(2x + 3)(x - 4)^2 - 4(x - 1)^2(x + 3)$

$f_3 : x \mapsto (2x^3 + 2x - 1)(4x^4 + 5x^2 + 3).$

Exercice 4

On donne les fonctions polynômes :

$$\begin{cases} f : x \mapsto 2x^3 - 5x + 1 \\ g : x \mapsto 3x^4 - 2x^2 + 7x - 3 \end{cases}$$

Exprimer $f + g$, $f.g$, $2f - 3g$, $f^2 (= f.f)$.

Exercice 5

Un texte de devoir est mal écrit, et les coefficients en x^3 et en x d'une fonction polynôme ont été effacés. On ne voit que $p(x) = x^4 + \dots x^3 - 2x^2 + \dots x - 3$.

La première question du problème est : vérifier que -1 et 3 sont racines de la fonction polynôme p .

Comment retrouver les coefficients effacés ?

Exercice 6

Soit les fonctions polynômes :

$$\begin{cases} p(x) = x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 25x + 24 \\ q(x) = (ax^2 + bx + c)^2 + dx + e \end{cases}$$

Quels sont les réels a, b, c, d, e tels que p et q soient égales ?

Exercice 7

Discriminant réduit

Soit l'équation $ax^2 - 2b'x + c = 0$ et soit $\delta' = b'^2 - ac$.

En utilisant les résultats de cours, discuter suivant le signe de δ' le nombre de solutions, et, lorsqu'elles existent, exprimer celles-ci en fonction de δ' , a et b' .

Exercice 8

1. Soit $p : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 13x + 15$.

Chercher une racine évidente de p , puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $p(x) = 0$.

2. Soit $p : x \mapsto 4x^3 - 8x^2 - 47x + 105$. Calculer $p(3)$ et en déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $p(x)=0$.

3. Même travail avec $p : x \mapsto x^3 + 7x^2 + 12x + 10$ et $p(-5)$.

4. Soit $p : x \mapsto 9x^4 - 12x^3 - 83x^2 - 50x - 8$. Calculer $p(4)$ et en déduire une première factorisation de $p(x)$. Chercher une racine évidente de p , puis résoudre $p(x) = 0$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$7x^2 - 12x + 5 = 0 \quad \text{et} \quad 7x^2 + 12x + 5 = 0.$$

Comparer les solutions des deux équations.

Ne pouvait-on pas prévoir ce résultat ?

Exercice 10

Trouver trois entiers consécutifs dont la somme des carrés est 509.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;

2. $3x^4 - 11x^2 + 6 = 0$;

3. $2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$;

$$4. \frac{1}{x+4} - \frac{3}{3x-5} = \frac{7}{10-7x} + \frac{3}{3x+20}.$$

Exercice 12

Le nombre d'or est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$; on le note φ .

1. Déterminer la valeur exacte de φ .
2. Montrer que $\varphi^5 = 5\varphi + 3$ et que $\frac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$.

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x^2 + 7x - 4 \geq 0$;
2. $x^2 - 15x + 50 < 0$;
3. $3x^2 + 20x + 50 > 0$;
4. $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{x-2} \leq 0$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 56 \end{cases}$

En déduire les solutions du système : $\begin{cases} x - y = 15 \\ xy = -56 \end{cases}$

Exercice 15

La somme des âges de deux amis est 53 ans. Dans cinq ans, le produit de leurs âges sera 990. Quels sont leurs âges ?

Exercice 16

Quelles sont les dimensions d'une boîte parallélépipédique à base carrée dont le volume est $V = 1\,875 \text{ cm}^3$ et telle que la surface de carton employée est $S = 950 \text{ cm}^2$. (On se ramènera à une équation du troisième degré dont on cherchera une racine évidente.)

Polynômes

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $2x^2 + x - 15 = 0$
- b) $-x^2 + x + 2 = 0$
- c) $x^2 - \sqrt{20}x + 5 = 0$
- d) $5x^2 + 3x + 2 = 0$

Exercice 2

Factoriser, lorsque c'est possible, les trinômes suivants :

- a) $P(x) = 9x^2 + 4x - 5$
- b) $P(x) = x^2 + 2x - 3$
- c) $P(x) = x^2 + x + 1$
- d) $P(x) = 12x^2 + 7x$
- e) $P(x) = 3x^2 - 6x + 3$



Correction

Exercice 1

Pour résoudre de telles équations du second degré, je calcule les discriminants :

a) $2x^2 + x - 15 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 2 \times (-15) = 121 = 11^2$$

Le discriminant étant strictement positif, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 11}{2 \times 2} = -3 \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 11}{2 \times 2} = \frac{5}{2}$$

D'où : $S = \left\{ -3; \frac{5}{2} \right\}$

b) $-x^2 + x + 2 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 = 3^2$$

Le discriminant étant strictement positif, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-1 - 3}{-2} = 2 \quad x_2 = \frac{-1 + 3}{-2} = -1$$

D'où : $S = \{-1; 2\}$

c) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$

$$\Delta = (-2\sqrt{5})^2 - 4 \times 1 \times 5 = 0$$

Le discriminant étant nul, l'équation admet une solution :

$$x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

D'où : $S = \{\sqrt{5}\}$

d) $5x^2 + 3x + 2 = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 5 \times 2 = -31$$

Le discriminant étant négatif, l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

D'où : $S = \emptyset$

Exercice 2

Pour factoriser une expression, il faut commencer par trouver un facteur commun, s'il n'y en a pas, penser aux identités remarquables. En première, une nouvelle méthode apparaît pour factoriser les trinômes : on cherche les racines du trinôme.

a) $P(x) = 9x^2 + 4x - 5$

Dans ce cas, pas de facteur commun, on n'a pas d'identités remarquables. On cherche donc les racines du trinôme :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 9 \times (-5) = 196 = 14^2$$

$$x_1 = (-4 - 14)/18 = -1 \quad x_2 = (-4 + 14)/18 = 5/9$$

On peut donc factoriser le trinôme :

$$P(x) = 9(x + 1)(x - (5/9)) = (x + 1)(9x - 5)$$

b) $P(x) = x^2 + 2x - 3$

Dans ce cas, pas de facteur commun, on n'a pas d'identités remarquables. On cherche donc les racines du trinôme :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 = 4^2$$

$$x_1 = (-2 - 4)/2 = -3 \quad x_2 = (-2 + 4)/2 = 1$$

On peut donc factoriser le trinôme :

$$P(x) = (x + 3)(x - 1)$$

c) $P(x) = x^2 + x + 1$

Dans ce cas, pas de facteur commun, on n'a pas d'identités remarquables. On cherche donc les racines du trinôme :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$$

Δ étant négatif, on ne pourra pas factoriser le polynôme dans $\mathbb{R}$.

d) $P(x) = 12x^2 + 7x$

On a un facteur commun x , d'où : $P(x) = x(12x + 7)$

e) $P(x) = 3x^2 - 6x + 3$

On peut déjà factoriser par 3 et on voit apparaître une identité remarquable, d'où :

$$P(x) = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$$

Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^2 + x - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Factoriser chacun des polynômes $x^2 - 1$ et $x^2 + x - 2$.
3. a) Déterminer un dénominateur commun aux fractions rationnelles $\frac{2x^2}{x^2 - 1}$ et $\frac{3}{x^2 + x - 2}$ puis écrire $f(x)$ à l'aide d'une fraction rationnelle, notée $\frac{g(x)}{h(x)}$.
 - b) Déterminer une racine simple du polynôme $g(x)$.
 - c) Simplifier l'écriture de $f(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2

Quatre cubes ont respectivement pour arêtes, mesurées en centimètres, x , $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, où x est un nombre entier naturel.

Déterminer x pour que le contenu des trois cubes d'arêtes x , $x + 1$, $x + 2$ remplisse exactement le cube d'arête $x + 3$.



Correction

Exercice 1

1. f n'est pas définie si les dénominateurs s'annulent, c'est-à-dire : $x^2 - 1 = 0$ et $x^2 + x - 2 = 0$

• $x^2 - 1 = 0 \iff (x - 1)(x + 1) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1$

• $x^2 + x - 2 = 0$

Calculons le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-2) = 9$

Le polynôme admet donc deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$

Donc les deux valeurs interdites liées au polynôme $x^2 + x - 2$ sont -2 et 1.

D'où : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 1\}$

2. D'après la question précédente, nous pouvons en déduire :

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ et $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

3. a) Le dénominateur commun aux fractions rationnelles $\frac{2x^2}{x^2 - 1}$ et $\frac{3}{x^2 + x - 2}$ est donc : $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$, donc f s'écrit également :

$$f(x) = \frac{2x^2(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} - \frac{3(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}$$

$$f(x) = \frac{2x^2(x + 2) - 3(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}$$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}$$

Nous avons donc : $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 3$ et $h(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

3. b) Une racine évidente de g est 1, car $2 + 4 - 3 - 3 = 0$

$g(x)$ est donc factorisable par $(x - 1)$ et, comme l'écriture polynômiale est unique, g peut s'écrire : $g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

Déterminons a , b et c :

$$(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$

$$= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$$

Identifions les coefficients à l'aide des équations suivantes :

$$a = 2$$

$$b - a = 4 \iff b = 4 + a \iff b = 6$$

$$-c = -3 \iff c = 3$$

$$\text{Vérifions : } c - b = 3 - 6 = -3$$

D'où : Pour tout réel x , $g(x) = (x - 1)(2x^2 + 6x + 3)$

3. c) On peut donc en déduire que f s'écrit :

Pour tout réel x appartenant à D_f , $f(x) = \frac{(x - 1)(2x^2 + 6x + 3)}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}$, soit $f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 3}{(x + 1)(x + 2)}$

Réolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \iff \frac{2x^2 + 6x + 3}{(x + 1)(x + 2)} = 0$$

L'ensemble de définition de cette équation est $\mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$.

$$2x^2 + 6x + 3 = 0 \iff x^2 + 3x + \frac{3}{2} = 0$$

Utilisons la méthode du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times \frac{3}{2} = 9 - 6 = 3$

Les deux racines sont donc : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$.

Elles appartiennent toutes deux à l'ensemble de définition de l'équation.

D'où : les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont : $\left\{ \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} \right\}$

Exercice 2

Le volume d'un cube de coté x a pour valeur x^3 .

Additionnons les volumes des trois cubes ayant pour arêtes x , $x + 1$, $x + 2$ et appelons V ce volume :

$$V = x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3$$

$$V = x^3 + (x^2 + 2x + 1)(x + 1) + (x^2 + 4x + 4)(x + 2)$$

$$V = x^3 + x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 + x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8$$

$$V = 3x^3 + 9x^2 + 15x + 9$$

Calculons le volume V' du cube ayant pour arête $x + 3$:

$$V' = (x + 3)^3$$

$$V' = (x^2 + 6x + 9)(x + 3)$$

$$V' = x^3 + 3x^2 + 6x^2 + 18x + 9x + 27$$

$$V' = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

On recherche x tel que $V = V'$, soit :

$$3x^3 + 9x^2 + 15x + 9 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

$$2x^3 - 12x - 18 = 0$$

$$x^3 - 6x - 9 = 0(1)$$

3 est une racine évidente de $x^3 - 6x - 9$, donc $x^3 - 6x - 9$ s'écrit également $(x - 3)(ax^2 + bx + c)$ car l'écriture polynômiale est unique.

Développons $(x - 3)(ax^2 + bx + c)$:

$$(x - 3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c$$

Identifions les coefficients :

$$a = 1$$

$$b - 3a = 0 \iff b = 3$$

$$-3c = -9 \iff c = 3$$

$$c - 3b = 3 - 3 \times 3 = -6$$

$$\text{On en déduit : } x^3 - 6x - 9 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3)$$

Factorisons $x^2 + 3x + 3$ par la méthode du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times 3 = -3$$

Δ étant négatif, $x^2 + 3x + 3$ est toujours du signe de a : positif. Ce polynôme n'admet pas de racine réelle.

$$(1) \text{ peut s'écrire : } (x - 3)(x^2 + 3x + 3) = 0,$$

ce qui équivaut à $x = 3$.

Pour que le contenu des trois cubes d'arêtes x , $x + 1$, $x + 2$ remplisse exactement le cube d'arête $x + 3$, il faut que x **soit égal à 3**.

Polynômes du second degré

Exercice 1

On cherche à résoudre le système : $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

1. Déterminer une équation du second degré vérifiée par x .
2. Résoudre cette équation, et déterminer toutes les solutions du système.

Exercice 2

Un bateau descend une rivière d'une ville A à une ville B, les deux villes étant distantes de 75 km, puis revient à la ville A.

La vitesse propre du bateau, inconnue, est notée v ; la vitesse du courant est 5 km.h^{-1} . La durée totale du déplacement (aller de A à B et retour, temps d'arrêt éventuel en B non compris) est de 8 h. Pour calculer la vitesse propre du bateau, répondre aux questions suivantes :



1. Exprimer, en fonction de v , la vitesse du bateau par rapport à la rive à l'aller puis au retour.
2. Exprimer, en fonction de v , la durée du trajet à l'aller puis au retour.
3. Calculer la vitesse propre du bateau

Exercice 3

Un grossiste achète un certain nombre d'appareils photos pour un montant total de 21 600 €. S'il en prend 30 de plus, le vendeur lui aurait accordé une réduction de 20 € par appareil et il lui en aurait coûté 2 400 € de plus.

Combien d'appareils ont été achetés par le grossiste et quel est le prix d'un appareil ?





Correction

Exercice 1

$$1. \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 + (5 - x)^2 = 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 + 25 - 10x + x^2 = 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 5 - x \\ 2x^2 - 10x + 25 - 13 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 5 - x \\ 2x^2 - 10x + 12 = 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré cherchée est : $2x^2 - 10x + 12 = 0$

2. Résolvons cette équation $2x^2 - 10x + 12 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 100 - 96 = 4$$

Comme $\Delta > 0$, il existe donc deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \\ x_1 &= \frac{-(-10) - \sqrt{4}}{2 \times 2} & x_2 &= \frac{-(-10) + \sqrt{4}}{2 \times 2} \\ x_1 &= \frac{10 - 2}{4} & x_2 &= \frac{10 + 2}{4} \\ x_1 &= 2 & x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Cherchons à présent les solutions du système $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$:

Si $x_1 = 2$, alors $y_1 = 5 - x_1 = 5 - 2 = 3$,

et si $x_2 = 3$, alors $y_2 = 5 - x_2 = 5 - 3 = 2$

Les solutions du système sont donc les couples **(2 ; 3)** et **(3 ; 2)**.

Exercice 2

1. Vitesse à l'aller : $(v + 5)$

Vitesse au retour : $(v - 5)$

2. Durée du trajet à l'aller : $\frac{75}{v + 5}$

Durée du trajet au retour : $\frac{75}{v - 5}$

3. La durée totale étant de 8 h, on peut écrire : $\frac{75}{v + 5} + \frac{75}{v - 5} = 8$

$$\iff 75(v - 5) + 75(v + 5) = 8(v - 5)(v + 5)$$

$$\iff 75v - 375 + 75v + 375 = 8(v^2 - 25)$$

$$\iff 150v = 8v^2 - 200$$

$$\iff 8v^2 - 150v - 200 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-150)^2 - 4 \times 8 \times (-200) = 22\,500 + 6\,400 = 28\,900 = 170^2$$

L'équation admet deux solutions :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & v_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ v_1 &= \frac{150 - 170}{16} = -1,25 & v_2 &= \frac{150 + 170}{16} = 20 \end{aligned}$$

La vitesse ne pouvant être négative, la vitesse propre du bateau est de **20 km.h⁻¹**.

Exercice 3

Soit x le nombre d'appareils et y le prix d'un appareil.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} xy = 21\,600 \\ (x+30)(y-20) = 21\,600 + 2\,400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{21\,600}{x} \\ (x+30)\left(\frac{21\,600}{x} - 20\right) = 24\,000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{21\,600}{x} \\ \frac{21\,600x}{x} - 20x + \frac{21\,600 \times 30}{x} - 600 = 24\,000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{21\,600}{x} \\ 21\,600 - 20x + \frac{648\,000}{x} - 24\,600 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{21\,600}{x} \\ -20x^2 - 3\,000x + 648\,000 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-3\,000)^2 - 4 \times (-20) \times 648\,000 = 60\,840\,000 = 7\,800^2$$

L'équation admet deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 &= \frac{3\,000 - 7\,800}{-40} = 120 & x_2 &= \frac{3\,000 + 7\,800}{-40} = -270 \end{aligned}$$

Le nombre d'appareils est donc de 120 (puisque'il doit être positif).

$$\text{Le prix d'un appareil est : } y = \frac{21\,600}{x} = \frac{21\,600}{120} = 180$$

Conclusion : **120 appareils à 180 € pièce** ont été achetés par le grossiste.

Polynômes du second degré

Exercice 1

Un touriste se déplace dans un métro en utilisant un tapis roulant de 300 m de longueur, dont la vitesse de translation est 4 km.h^{-1} . Il envisage de réaliser la performance suivante : notant A et B les extrémités du tapis, il parcourt ce tapis de A à B dans le sens du déplacement du tapis puis revient en A sans s'arrêter en B, sa vitesse restant constante. Le retour a lieu 10 min 48 s après le départ en A.

Quelles sont les vitesses du touriste à l'aller et au retour.



Exercice 2

Déterminer un nombre N de deux chiffres tel que la somme des deux chiffres soit 12 et le produit de N par le nombre N' obtenu en inversant l'ordre des chiffres soit 4 275.

Exercice 3

Une entreprise cherche à doubler en deux ans la production d'un produit qu'elle vient de commercialiser.

Quel doit être le taux annuel d'augmentation de sa production pour réaliser cet objectif?



Exercice 4

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

1.
$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 > 0 \\ -4x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} -x^2 + x + 1 > 0 \\ -2x + 5 < 0 \end{cases}$$

3.
$$6 \leq 2x^2 - 3x - 3 \leq 17$$



Correction

Exercice 1

Soit v la vitesse de marche en km.h^{-1} du touriste.

Aller ($A \rightarrow B$) : $v_a = v + 4$

Le temps mis à l'aller est : $t_1 = \frac{0,3}{v+4}$

Retour ($B \rightarrow A$) : $v_b = v - 4$

Le temps mis au retour est : $t_2 = \frac{0,3}{v-4}$

Temps total ($A \rightarrow B \rightarrow A$) : $t = t_1 + t_2 = \frac{0,3}{v+4} + \frac{0,3}{v-4}$

Or, $t = 10 \text{ min } 48 \text{ s} \Leftrightarrow t = 0,18 \text{ heure}$, donc :

$$\frac{0,3}{v+4} + \frac{0,3}{v-4} = 0,18$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,3}{v-4} + \frac{0,3}{v+4} = 0,18(v-4)(v+4)$$

$$\Leftrightarrow 0,3v - 1,2 + 1,2 + 0,3v = 0,18v^2 - 2,88$$

$$\Leftrightarrow 0,18v^2 - 0,6v - 2,88 = 0$$

Or, $\Delta = b^2 - 4ac = (-0,6)^2 - 4 \times 0,18 \times (-2,88) = 2,4336 = 1,56^2$, donc :

$$v_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad v_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$v_1 = \frac{0,6 - 1,56}{0,36} \quad v_2 = \frac{0,6 + 1,56}{0,36}$$

$$v_1 = -\frac{8}{3} \quad v_2 = 6$$

La vitesse étant obligatoirement positive, le touriste marche à **6 km.h^{-1}**

Exercice 2

Soient x le chiffre des unités et y le chiffre des dizaines.

La somme des deux chiffres est égal à 12, donc $x + y = 12$

Le produit de N par N' est égal à 4 275 se traduit par : $(x + 10y)(y + 10x) = 4275$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ (x + 10y)(y + 10x) = 4275 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ (x + 10 \times (12 - x))((12 - x) + 10x) = 4275 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ (x + 120 - 10x)(12 - x + 10x) = 4275 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ (-9x + 120)(9x + 12) = 4275 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ -81x^2 - 108x + 1080x + 1440 - 4275 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ -81x^2 + 972x - 2835 = 0 \end{cases}$$

Réolvons $-81x^2 + 972x - 2835 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 972^2 - 4 \times (-81) \times (-2835) = 26244 = 162^2$$

Donc :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-972 - 162}{2 \times (-81)} \quad x_2 = \frac{-972 + 162}{2 \times (-81)}$$

$$x_1 = 7 \quad x_2 = 5$$

On en déduit alors : $y_1 = 12 - 7 = 5$ et $y_2 = 12 - 5 = 7$

Les nombres solutions sont **$N = 75$ et $N = 57$** .

Exercice 3

Soit P la production annuelle

A la fin de l'année 0, la production est de P .

A la fin de l'année 1, la production est de $\left(1 + \frac{t}{100}\right) P$

A la fin de l'année 2, la production est de $\left(1 + \frac{t}{100}\right) \left[\left(1 + \frac{t}{100}\right) P\right] = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 P$

A la fin de l'année 2, la production doit être $2P$.

L'équation qui en découle est donc :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 P = 2P$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2t}{100} + \left(\frac{t}{100}\right)^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{50} + \frac{t^2}{10\,000} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 200t + t^2 - 10\,000 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 200t - 10\,000 = 0$$

Or, $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 200^2 - 4 \times 1 \times (-10\,000) = 80\,000$, donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-200 - \sqrt{80\,000}}{2} & x_2 &= \frac{-200 + \sqrt{80\,000}}{2} \\ x_1 &\approx -241,42 & x_2 &\approx 41,42 \end{aligned}$$

L'augmentation annuelle doit être d'environ **41,42%**.

Exercice 4

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 > 0 \\ -4x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Cherchons les racines de $-x^2 + x + 2$:

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$, donc :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = -1. \text{ D'où :}$$

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 > 0 \\ -4x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x+1)(x-2) > 0 \\ -4x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
$(x+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-(x+1)(x-2)$	$-$	0	$+$	$+$	0
$(-4x+3)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

$$\text{D'où : } \mathcal{S} = \left[\frac{3}{4}; 2\right[$$

$$\begin{cases} -x^2 + x + 1 > 0 \\ -2x + 5 < 0 \end{cases}$$

Cherchons les racines de $-x^2 + x + 1$:

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$, donc :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \text{ D'où :}$$

$$\begin{cases} -x^2 + x + 1 > 0 \\ -2x + 5 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) > 0 \\ -2x+5 < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
$\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	-	0	+	+	+	
$\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	-		-	0	+	+
$-\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	-	0	+	0	-	-
$(-2x+5)$	+		+	+	0	-

D'où : $\mathcal{S} = \emptyset$

3.

$$6 \leq 2x^2 - 3x - 3 \leq 17$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 3 \geq 6 \\ 2x^2 - 3x - 3 \leq 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 3 - 6 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 3 - 17 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 9 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 20 \leq 0 \end{cases}$$

Factorisons $2x^2 - 3x - 9$:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-9) = 81 = 9^2, \text{ donc :}$$

$$x_1 = \frac{3-9}{4} = \frac{-3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3+9}{4} = 3$$

$$\text{D'où : } 2x^2 - 3x - 9 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-3)$$

Factorisons $2x^2 - 3x - 20$:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-20) = 169 = 13^2, \text{ donc :}$$

$$x_1 = \frac{3-13}{4} = -\frac{5}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3+13}{4} = 4$$

$$\text{D'où : } 2x^2 - 3x - 20 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-4)$$

D'où :

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 9 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 20 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-3) \geq 0 \\ 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-4) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{3}{2}\right)(x-3) \geq 0 \\ \left(x + \frac{5}{2}\right)(x-4) \leq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	3	4	$+\infty$
$\left(x + \frac{3}{2}\right)$	—	—	0	+	+	+
$(x - 3)$	—	—	—	0	+	+
$\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 3)$	+	+	0	—	0	+
$\left(x + \frac{5}{2}\right)$	—	0	+	+	+	+
$(x - 4)$	—	—	—	—	0	+
$\left(x + \frac{5}{2}\right)(x - 4)$	+	0	—	—	—	0

$$\text{D'où : } \mathcal{S} = \left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right] \cup [3; 4]$$

Polynômes du second degré

Exercice 1

Rappeler les formules qu'il faut connaître pour pouvoir résoudre des équations du second degré.

Exercice 2

Une somme de 12 000 € est à partager entre n personnes.

S'il y avait eu 4 personnes de moins, chaque personne aurait touché 1 500 € de plus.

Combien y a-t-il de personnes ?

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes :

- a) $x^2 + 3x - 1 \geq 0$
- b) $x^2 + x + 1 < 0$
- c) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$
- d) $-3x^2 + 1 \geq 0$
- e) $x^2 - x \geq 0$
- f) $-x^2 - 7x + 1 < 0$
- g) $x^2 - 16 \leq 0$
- h) $8 - x^2 < 0$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes :

- a) $(x^2 - x)(2x + 1) \geq 0$
- b) $\frac{x^2 + x - 2}{x - 9} \leq 0$
- c) $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x + 2) < 0$
- d) $(x + 1)(x + 2) \geq (2x + 1)(3x + 1)$

Exercice 5

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

- 1. $\begin{cases} -x^2 + x + 2 > 0 \\ -4x + 3 \leq 0 \end{cases}$
- 2. $\begin{cases} -x^2 + x + 1 > 0 \\ -2x + 5 < 0 \end{cases}$



Correction

Exercice 1

...

Exercice 2

n = 8

Exercice 3

a) $S =]-\infty; -\frac{3-\sqrt{13}}{2}] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right[$

b) $S = \emptyset$

c) $S = 5$

d) $S = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

e) $S =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

f) $S =]-\infty; -\frac{7+\sqrt{53}}{2}] \cup \left[\frac{-7+\sqrt{53}}{2}; +\infty\right[$

g) $S = [-4; 4]$

h) $S =]-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty[$

Exercice 4

a) Pour tout réel x , $(x^2 - x)(2x + 1) = x(x - 1)(2x + 1)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$2x + 1$	-	0	+	+	+
$(x^2 - x)(2x + 1)$	-	0	+	0	+

$S = \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup [1; +\infty[$

b)

$S =]-\infty; -2] \cup [1; 9[$

c)

$S =]-3; -2] \cup [1; 3[$

...

Exercice 5

$[3/4; 2[$

...

Le second degré

Exercice 1

Forme canonique

Donner la forme canonique des fonctions polynômes f du second degré définies par :

1. $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

2. $f(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$

3. $f(x) = \frac{5}{2}x^2 + 15x + 30$

Exercice 2

Équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-x^2 + 6x - 10 = 0$

2. $x^2 + 4x - 21 = 0$

3. $9x^2 + 6x + 1 = 0$

Exercice 3

Factorisation

Factoriser les expressions suivantes :

1. $x^2 + 4x - 21$

2. $8x^2 + 8x + 2$

3. $-3x^2 + 7x - 8$

Exercice 4

Signe

Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de :

1. $f_1(x) = 8x^2 + 8x + 2$

2. $f_2(x) = 2x^2 - 3x + 2$

3. $f_3(x) = -x^2 - 3x + 10$

Sans calculer $f_3(-7)$, $f_3(1/2)$, $f_3(148)$, indiquer les signes de ces nombres.

Exercice 5

Inéquations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 3x + 2 < 0$

2. $8x^2 + 8x + 2 \leq 0$

3. $-x^2 - 3x + 10 < 0$

Exercice 6

Somme et produit des racines

1. Résoudre mentalement les équations suivantes :

a) $3x^2 + 7x - 10 = 0$

b) $2x^2 + 9x + 7 = 0$

2. Vérifier que 2 est racine de l'équation : $x^2 + 11x - 26 = 0$.

Quelle est l'autre racine ?

3. Écrire une équation du second degré admettant les nombres 3 et -5 pour racines.

4. Existe-t-il deux nombres ayant pour somme 9 et pour produit -70 ? si oui, les calculer.

Exercice 7

Sens de variation et représentation graphique

1. Écrire la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 12x - 9$

Dresser son tableau de variations et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

2. La courbe représentative (P) d'une fonction polynôme f du second degré admet pour sommet le point $S(1; 2)$; Elle passe aussi par les points $A(-1; 0)$ et $B(3; 0)$.

- Dessiner (P).
- Dresser le tableau de variation de f .
- Expliciter $f(x)$ (donner l'écriture de $f(x)$)
- Résoudre graphiquement, après avoir tracé (P) de façon précise :
 - l'équation $f(x) = 3/2$
 - l'inéquation $f(x) \geq 0$



Correction

0 donc $x^2 + 4x - 21 = 0$ admet deux racines réelles $x_1 = \left(-b - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ et $x_2 = \left(-b + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$$S = \{-7; 3\}$$

3. $\Delta = 0$ donc $9x^2 + 6x + 1 = 0$ admet une racine double $x = \frac{-b}{2a}$

$$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

Exercice 3

1. $\Delta > 0$ donc $x^2 + 4x - 21$ se factorise en : $(x + 7)(x - 3)$.

2. $\Delta = 0$ donc $8x^2 + 8x + 2$ se factorise en : $8\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

3. $\Delta < 0$ donc $-3x^2 + 7x - 8$ ne se factorise pas

Exercice 4

1. $\Delta = 0$ donc $8x^2 + 8x + 2$ est du signe de a donc $8x^2 + 8x + 2$ est positif ou nul

2. $\Delta < 0$ donc $2x^2 - 3x + 2$ est strictement du signe de a donc $2x^2 - 3x + 2$ est positif.

3. $\Delta > 0$ donc $-x^2 - 3x + 10$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.
Or $-x^2 - 3x + 10$ admet comme racines 2 et -5

Donc $-x^2 - 3x + 10 > 0$ lorsque x appartient à $] -5; 2[$

$-x^2 - 3x + 10 < 0$ lorsque x appartient à $] -\infty; -5[\cup]2; +\infty[$

$-x^2 - 3x + 10 = 0$ lorsque $x = -5$ ou $x = 2$

$f_3(-7) < 0$, $f_3(1/2) > 0$ et $f_3(148) < 0$

Exercice 5

1. $\Delta < 0$ donc $2x^2 - 3x + 2$ est strictement du signe de a donc $2x^2 - 3x + 2$ est positif. Donc $S = \emptyset$

2. $\Delta = 0$ donc $8x^2 + 8x + 2$ est du signe de a donc $8x^2 + 8x + 2$ est positif ou nul. Donc $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

3. $\Delta > 0$ donc $-x^2 - 3x + 10$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.
Or $-x^2 - 3x + 10$ admet comme racines 2 et -5. Donc $S =] -\infty; -5[\cup]2; +\infty[$

Exercice 6

1. Résoudre mentalement les équations suivantes :

a) $3x^2 + 7x - 10 = 0$

$$\boxed{x = 1}$$

b) $2x^2 + 9x + 7 = 0$

$$\boxed{x = -1}$$

2. Vérifier que 2 est racine de l'équation $x^2 + 11x - 26 = 0$

On remplace x par 2, si le polynôme s'annule 2 est bel et bien une racine de l'équation ci-dessus.

$$(2)^2 + 11 \times 2 - 26$$

$$= 4 + 22 - 26$$

$$= 0$$

Quelle est l'autre racine ?

Dans le cas d'un polynôme du second degré de type $ax^2 + bx + c$, le produit des deux racines et de a vaut

c , autrement dit : $\alpha_1 \times \alpha_2 \times a = c$.

Ici on a $\alpha_1 = 2, a = 1, c = -26$, par conséquent $\boxed{\alpha_2 = -13}$

3. Écrire une équation du second degrés admettant les nombres 3 et -5 pour racines.

Le polynôme recherché admet pour racines a et b , il est alors factorisable en $P(x) = (x - a)(x - b)g(x)$, avec $g(x)$ un autre polynôme de degrés $\text{Deg}(P)-2$. Ici comme le polynôme P est de degrés 2, on peut le mettre sous la forme : $k(x - 3)(x + 5)$, soit $kx^2 + 2kx - 15k = 0$. Par exemple avec $k = 1$, on a : $x^2 + 2x - 15 = 0$. Et 3 et -5 sont des racines évidentes de cette équation.

4. Existe-t-il deux nombres ayant pour somme 9 et pour produit -70 ? Si oui, les calculer.

On doit résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x \times y = -70 \end{cases}$$

On isole une des deux variables de la deuxième équation, puis on la remplace dans la première, ce qui aboutit à une équation du deuxième degrés que l'on pourra résoudre :

$$x \times y = -70$$

$$x = \frac{-70}{y} \text{ On remplace } x \text{ dans la première ligne du système :}$$

$$\frac{-70}{y} + y = 9$$

$$\frac{y^2 - 70}{y} = 9$$

$$y^2 - 70 = 9y$$

$$y^2 - 9y - 70 = 0$$

On remarque que ce polynôme aurait bien pu admettre comme variable x , après avoir effectuer le discriminant, on aura 2 racines qui correspondront à x et y (peu importe).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4(1 \times -70)$$

$$\Delta = 81 + 280$$

$$\Delta = 361$$

$$\alpha_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\alpha_1 = \frac{9 - 19}{2}$$

$$\boxed{\alpha_1 = -5}$$

$$\alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\alpha_2 = \frac{9 + 19}{2}$$

$$\boxed{\alpha_2 = 14}$$

On en conclut que le couple $(x; y)$ est associé au couple de solution $(-5; 14)$.

Fonctions composées et leurs ensembles de définition

I. Généralités



Lorsqu'on a deux fonctions f et g , la fonction $g \circ f$ (lire "g rond f") est la fonction définie par $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

Exemple :

On prend :

$$f(x) = x + 3$$

$$g(x) = 2x - 5$$

Donc :

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x + 3) = 2(x + 3) - 5 = 2x + 6 - 5 = 2x + 1$$

$$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(4) = 2(4) - 5 = 8 - 5 = 3$$

Attention : $f \circ g$ est très souvent différent de $g \circ f$

II. Ensembles de définition



Dans une fonction composée, une des "sous fonctions" peut être définie dans un ensemble différent de $\mathbb{R}$, dans ce cas, cela se répercute sur toute la fonction composée, il faut donc faire très attention...

Exemple :

$$f(x) = x^2 \longrightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 2x - 1 \longrightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$h(x) = 1/x \longrightarrow D_h = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

Pour $h \circ f \circ g(x)$:

Métaphore à l'aide d'un aéroport pour un voyage en deux escales...

Au départ du voyage (la composée), tous les voyageurs ($\mathbb{R}$) se présentent à l'aéroport g et tous sont acceptés (car $D_g = \mathbb{R}$), à l'aéroport f , tout le monde embarque, mais à l'aéroport h le voyageur 0 est refusé;

Seulement au début de la composée, donc à g , le 0 de l'aéroport h , n'était pas 0 au départ de la composée car entre temps il a été changé par les voyages précédents (par les autres fonctions), donc pour trouver la véritable valeur à exclure de l'ensemble de définition de la composée, il faut remonter la composée à partir de h avec la valeur 0.

Si il y a 0 à h , cela veut dire qu'il a été fabriqué à partir de la fonction f et d'une valeur de départ, pour la trouver, puis ensuite faire de même avec la fonction g :

$$f(x) = x^2 \longrightarrow x^2 = 0 \longrightarrow x = 0 \text{ donc au départ de } f, \text{ c'est la valeur } 0 \text{ qui a donné le } 0 \text{ de } h.$$

$$g(x) = 2x - 1 \longrightarrow 2x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1/2 \text{ donc au départ de la composée, c'est la valeur } 1/2 \text{ qu'il faut directement exclure pour ne pas tomber sur une valeur interdite pendant le "voyage".}$$

$$\text{Donc l'ensemble de définition de la composée est : } D_{hofog} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Activités numériques

Exercice 1

x désignant un nombre réel quelconque, on donne : $\phi(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Démontrer que, pour tout réel x , $-1 \leq \phi(x) \leq 1$.

Exercice 2

x est un réel de l'intervalle $[-2; +\infty[$, on donne : $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ et $g(x) = 1 + \frac{x}{2}$.

Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2; +\infty[$, $g(x) \leq f(x)$.

Exercice 3

n désignant un nombre entier naturel non nul, on donne : $f(n) = \frac{n^2-1}{n^2+2n}$ et $g(n) = \frac{n+1}{n+2}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $f(n) < g(n)$.

Exercice 4

x étant un nombre réel de l'intervalle $[3; 5]$. On donne : $\phi(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

Démontrer que, pour tout réel de l'intervalle $[3; 5]$, $\frac{1}{4} \leq \phi(x) \leq \frac{5}{6}$.

Comment comparer deux nombres ?



Première méthode

Pour comparer deux nombres a et b , une méthode consiste :

- à calculer la différence de ces deux nombres,
- puis à étudier le signe de cette différence.



Deuxième méthode

Pour comparer deux nombres a et b de même signe, avec, par exemple, des radicaux, une autre méthode consiste à comparer leurs carrés. (**attention** au signe de a et b)



Troisième méthode

Pour comparer deux nombres a et b strictement positifs, une troisième méthode consiste à calculer le quotient $\frac{a}{b}$, puis comparer ce quotient à 1.



Quatrième méthode

Pour comparer deux nombres a et b , une quatrième méthode consiste à utiliser le sens de variation d'une fonction usuelle f .



Correction

Exercice 1

Démontrons que, pour tout réel x , $-1 \leq \phi(x) \leq 1$:

Pour montrer que $-1 \leq \phi(x) \leq 1$, montrons que $1 - \phi(x) \geq 0$ et $\phi(x) + 1 \geq 0$.

Pour tout réel x , on a :

$$1 - \phi(x) = 1 - \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \frac{1 + x^2 - (1 - x^2)}{1 + x^2} = \frac{2x^2}{1 + x^2}$$

Or, pour tout réel x , $2x^2 \geq 0$ et $1 + x^2 > 0$

D'où $1 - \phi(x) \geq 0$,

D'où $1 \geq \phi(x)$.

Pour tout réel x , on a :

$$\phi(x) + 1 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + 1 = \frac{1 - x^2 + 1 + x^2}{1 + x^2} = \frac{2}{1 + x^2}$$

Or, pour tout réel x , $2 > 0$ et $1 + x^2 > 0$.

D'où $\phi(x) + 1 \geq 0$, d'où $\phi(x) \geq -1$.

On en déduit donc que $-1 \leq \phi(x) \leq 1$.

Exercice 2

Démontrons que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2; +\infty[$, $g(x) \leq f(x)$:

Pour comparer f et g , on va comparer leur carré.

Si $x \geq -2$, alors $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe et on a :

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1 + x + x^2 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + x^2 - \left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right) = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$$

Or $x^2 \geq 0$, donc $(f(x))^2 \geq (g(x))^2$

D'où pour tout réel x de l'intervalle $[-2; +\infty[$, $f(x) \geq g(x)$.

Exercice 3

Démontrons que pour tout entier naturel n non nul, $f(n) < g(n)$:

Pour comparer $f(n)$ et $g(n)$, on va étudier le signe de $g(n) - f(n)$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$g(n) - f(n) = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n^2-1}{n^2+2n} = \frac{n(n+1) - (n^2-1)}{n^2+2n} = \frac{n+1}{n(n+2)}$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, $n+1 > 0$, $n > 0$ et $n+2 > 0$

D'où : pour tout entier naturel n non nul, $g(n) > f(n)$.

On peut aussi étudier le rapport $\frac{g(n)}{f(n)}$ car $f(n)$ et $g(n)$ sont strictement positifs.

On a :

$$\frac{g(n)}{f(n)} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n^2-1}{n^2+2n}} = \frac{n^2+1}{n^2-1}$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, $n^2+1 > n^2-1$, donc $\frac{g(n)}{f(n)} > 1$

D'où : pour tout entier naturel n non nul, $g(n) > f(n)$.

Exercice 4

Démontrons que pour tout réel de l'intervalle $[3; 5]$, $\frac{1}{4} \leq \phi(x) \leq \frac{5}{6}$:

La fonction f est continue et dérivable sur $[3; 5]$.

Pour tout x de $[3; 5]$, on a :

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x^2+6x+1)}{(x^2-1)^2}$$

Or sur $[3; 5]$, $x^2 + 6x + 1 \geq 0$ et $(x^2 - 1)^2 > 0$

Donc $f'(x) \leq 0$

D'où f est décroissante sur $[3; 5]$.

Donc $f(5) \leq f(x) \leq f(3)$

D'où $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$

Or $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}$ et $\frac{3}{4} \leq \frac{5}{6}$, on a donc pour tout réel de l'intervalle $[3; 5]$: $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{5}{6}$.

La substitution

Exercice 1

Factorisation de polynômes.

On donne une fonction polynôme $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 6$.

a) Calculer $f(1)$.

b) On peut factoriser $f(x)$.

Sachant que $f(x) = (x - 1)g(x)$.

Avec g , polynôme du troisième degré : $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Calculer $g(x)$ par identification.

c) Calculer $g(3)$. Conclusion ?

d) Factoriser encore $f(x)$.

Exercice 2

Parabole passant par trois points.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ l'équation d'une parabole.

Cette parabole passe par A(1 ; 2), par B (2 ; -3) et par C(3 ; -12).

Le but de l'exercice est de trouver l'équation de la parabole.

a) Écrire un système vérifié par a, b et c.

b) Le résoudre.

Exercice 3

Système échelonné.

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 2 \\ x + 4y + 2z - t = 7 \\ x - 3y - z = -3 \\ y + 2z + t = 3 \end{cases}$$



Correction

Exercice 1

$$f(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 - x - 6) = (x-1)(x-3)(x^2 + x + 2)$$

Exercice 2

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

Exercice 3

$$M = (1, 1, 1, 0)$$

Fonctions bornées

Dans chacun des exercices 1 à 6, f désigne une fonction définie sur l'intervalle I .
Montrer que f est bornée sur I .

Exercice 1

$I = [-3; 2]$ et $f(x) = |x - 3|$

Exercice 2

$I = [-4; 1]$ et $f(x) = x^2$

Exercice 3

$I = [-2; 2]$ et $f(x) = x^2 - 1$

Exercice 4

$I = [-1; 2]$ et $f(x) = |2 - x^2|$

Exercice 5

$I = [-1; 3]$ et $f(x) = x^2 - 2x$

Exercice 6

$I = [0; 3]$ et $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Exercice 7

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$.

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x , $g(x) = 1 + \frac{x^2}{x^2 + 1}$
b) Montrer que pour tout nombre réel x , $g(x) = 2 - \frac{1}{x^2 + 1}$
c) En déduire que pour tout nombre réel x , $1 \leq g(x) \leq 2$.
2. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?
3. Démontrer que la fonction $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la fonction $f \circ g$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre réel x , $-2 \leq (f \circ g)(x) < 1$.



Correction

Exercice 1

$$f(x) = |x - 3|; I = [-3; 2]$$

Si $x \in I$, alors :

$$-3 \leq x \leq 2$$

$$\text{Donc : } -6 \leq x - 3 \leq -1$$

$$\text{Donc : } 1 \leq |x - 3| \leq 6.$$

D'où : f est bornée sur I .

Exercice 2

$$f(x) = x^2; I = [-4; 1]$$

Si $x \in I$, alors :

$$-4 \leq x \leq 1$$

$$\text{Donc : } 0 \leq x^2 \leq 16$$

D'où : f est bornée sur I .

Exercice 3

$$f(x) = x^2 - 1; I = [-2; 2]$$

si $x \in I$, alors :

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$\text{Donc : } 0 \leq x^2 \leq 4$$

$$\text{Donc : } -1 \leq x^2 - 1 \leq 3$$

Donc f est bornée sur I .

Exercice 4

$$f(x) = |2 - x^2|; I = [-1; 2]$$

Si $x \in I$, alors :

$$-1 \leq x \leq 2$$

$$\text{Donc : } 0 \leq x^2 \leq 4$$

$$\text{Donc : } -4 \leq -x^2 \leq 0$$

$$\text{Donc : } -2 \leq 2 - x^2 \leq 2$$

$$\text{Alors : } 0 \leq |2 - x^2| \leq 2$$

Donc f est bornée sur I .

Exercice 5

$$f(x) = x^2 - 2x; I = [-1; 3]$$

Si $x \in I$, alors :

$$-1 \leq x \leq 3$$

$$\text{Donc : } 0 \leq x^2 \leq 9 \quad \text{et} \quad -2 \leq 2x \leq 6 \quad \text{soit} \quad -6 \leq -2x \leq 2$$

$$\text{Donc : } -6 \leq x^2 - 2x \leq 11$$

D'où : f est bornée sur I .

Exercice 6

$$f(x) = \frac{1}{x+1}; I = [0; 3].$$

Si $x \in I$, alors :

$$0 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad 1 \leq x+1 \leq 4$$

$$\text{Alors : } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$$

D'où : f est bornée sur I .

Exercice 7

1. a) Pour tout réel x , on a :

$$1 + \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + x^2}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = g(x)$$

1. b) Pour tout réel x , on a :

$$2 - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = g(x)$$

1. c) Pour tout réel x , $g(x) = 1 + \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

Or, pour tout x réel, x^2 et $x^2 + 1$ sont positifs, donc $\frac{x^2}{x^2 + 1}$ est positif et par conséquent : $g(x) \geq 1$.

Pour tout réel x , $g(x) = 2 - \frac{1}{x^2 + 1}$.

Or, pour tout réel x , $-\frac{1}{x^2 + 1} < 0$, donc : $g(x) < 2$.

On a donc montré que g est bornée sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x , $1 \leq g(x) < 2$

2. f est une fonction linéaire, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

f ne peut donc pas être bornée sur $\mathbb{R}$.

3. Pour tout réel x ,

$$g \circ f(x) = g(3x - 5) = \frac{2(3x - 5)^2 + 1}{(3x - 5)^2 + 1}.$$

Comme g est bornée sur $\mathbb{R}$ et que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout réel x ,

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}\right)$$

$$= 3 \times \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} - 5$$

$$= \frac{6x^2 + 3 - 5x^2 - 5}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

Même raisonnement qu'au 1. :

$$\bullet \text{ Pour tout réel } x, f \circ g(x) = \frac{x^2 + 1 - 3}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Donc : pour tout réel x , $f \circ g(x) < 1$

$$\bullet f \circ g(x) = \frac{x^2 + 1 - 3}{x^2 + 1} = \frac{3x^2 - 2x^2 + 1 - 3}{x^2 + 1} = \frac{3x^2 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} = \frac{3x^2 - 2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = -2 + \frac{3x^2}{x^2 + 1}.$$

Donc : pour tout réel x , $f \circ g(x) \geq -2$

D'où : $f \circ g$ est bornée $\mathbb{R}$.

Hyperboles

Exercice 1

f est la fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

g est la fonction $x \mapsto -x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, C et D sont les courbes représentant f et g.

1. Tracer les courbes C et D.
2. Démontrer que le point d'abscisse 1 de D appartient à C.
Trouver le second point d'intersection de ces courbes.
indication : Vérifier que $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$
3. Vérifier les coordonnées de ces points d'intersection sur le graphique.
4. Construire l'ensemble des points M(x; y) tels que $x^2 y^2 = 4$.
5. Un rectangle a pour aire 2 m^2 et pour périmètre 6m.
En utilisant le graphique précédent, trouver sa longueur et sa largeur.

Exercice 2

Nous allons étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f?
2. Démontrer que f est paire.
Que peut-on en déduire pour l'étude de son sens de variations et pour sa représentation graphique?
3. Etudier le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$ à l'aide de vos connaissances sur les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.
4. Pour $x \geq 1$, comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ en justifiant la réponse.
En déduire l'étude de f pour les grandes valeurs de x?
Qu'en déduire graphiquement?
5. Pour $0 < x \leq 1$, comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ en justifiant la réponse.
En déduire l'étude de f pour les petites valeurs de x?
Qu'en déduire graphiquement?
6. Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe dans un repère orthonormal, en plaçant quelques points.



Correction

Exercice 1

1. cf courbe en fin d'exercice.

2. $g(1) = 2$ et $f(1) = 2$

D'où : le point de coordonnées $(1; 2)$ appartient à D et à C.

Soit $B(x; y)$ le deuxième point d'intersection de D et C. Ses coordonnées vérifient les équations de C et D, c'est-à-dire que ses coordonnées sont solution du système :

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x + 3 \\ -x + 3 = \frac{2}{x} \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x + 3 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

Il nous faut donc résoudre l'équation du second degré à une inconnue : $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Vérifions l'indication donnée : $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$.

Ainsi, les solutions de $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont $x = 1$ et $x = 2$.

On trouve alors les points d'intersection : $A(1; 2)$ et $B(2; 1)$.

3. cf graphique.

4. Soit $M(x; y)$ tel que $x^2 y^2 = 4$.

x et y sont non nuls, on peut alors écrire : $y^2 = \frac{4}{x^2}$ ou encore : $y^2 = \left(\frac{2}{x}\right)^2$.

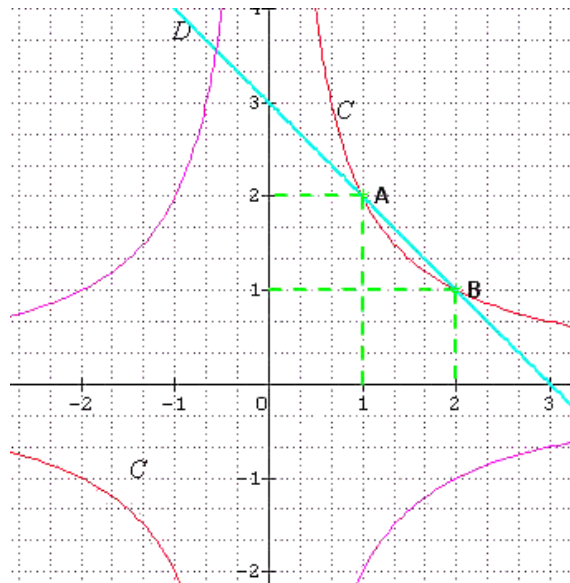
Alors $y = \frac{2}{x}$ ou $y = -\frac{2}{x}$.

Ainsi, cet ensemble de points est la réunion de la courbe C et de la courbe obtenue par symétrie d'axe (Oy) (cf graphique).

5. Soient l la longueur de ce rectangle et L sa largeur. On a :

$$\begin{cases} l \times L = 2 \\ 2(l + L) = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} L = \frac{2}{l} \\ L = 3 - l \end{cases}$$

Ainsi les points de coordonnées $(l; L)$ sont les points d'intersection de C et D, donc : $l = 1$ et $L = 2$ ou $l = 2$ et $L = 1$.



Légende : bleu turquoise : droite D ; rouge : courbe C ; rose + rouge : ensemble recherché au 4.

Exercice 2

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

La fonction f est définie pour toute valeur telle que le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi : $x^2 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$.

Donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

2. L'ensemble de définition D_f de la fonction f est symétrique par rapport à 0.

De plus, pour tout x appartenant à D_f : $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$

D'où : la fonction f est paire.

On en déduit que la représentation graphique de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Par conséquent, on peut restreindre l'étude des variations de f à l'intervalle $]0; +\infty[$ (on complètera ensuite par symétrie).

3. Ecrivons f comme la composée de deux fonctions.

Soit g la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ et h la fonction carrée, définie sur $\mathbb{R}$.

Alors, pour tout x non nul : $f(x) = g \circ h(x) = h \circ g(x)$

Sur $]0; +\infty[$, la fonction inverse est décroissante et la fonction carrée est croissante. La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante, donc f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

4. Si $x \geq 1$ alors $x \leq x^2$ et $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x^2}$.

On sait que pour les grandes valeurs de x , $1/x$ devient tout petit. Comme $1/x^2$ est encore plus petit, alors quand x devient grand, $1/x^2$ s'approche de 0.

Graphiquement, on en déduit que la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = 0$ (On dit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe).

5. Si $0 < x \leq 1$, alors $0 < x^2 \leq x$ et par conséquent : $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x}$.

Or pour les petites valeurs de x , $1/x$ devient très grand et $1/x^2$ encore plus grand. Donc quand x est proche de 0, $1/x^2$ est très très grand, tend vers l'infini.

Graphiquement, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe.

6.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations		$\nearrow \parallel \searrow$	



A' et B' sont obtenus comme image de A(1 ; 1) et B $\left(2; \frac{1}{4}\right)$ par la symétrie d'axe (Oy).

Fonctions

Exercice 1

P est un polynôme de degré supérieur ou égal à deux dont β est une racine double. Montrer que β est aussi une racine de P' .

Exercice 2

f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Elles sont toutes deux décroissantes sur $\mathbb{R}$. Quel est le sens de variations de $g \circ f$?



Correction

Exercice 1

P est un polynôme de degré supérieur ou égal à deux dont β est une racine double, donc il existe un polynôme Q de degré supérieur ou égal à 0 tel que : $P(x) = Q(x)(x - \beta)^2$.

Dérivons le polynôme P :

$$P'(x) = Q'(x)(x - \beta)^2 + 2Q(x)(x - \beta)$$

$$P'(x) = (x - \beta)(Q'(x)(x - \beta) + 2Q(x))$$

$$\text{Et on a bien : } P'(\beta) = (\beta - \beta)(Q'(\beta)(\beta - \beta) + 2Q(\beta)) = 0$$

On en conclut que β est aussi une racine de P'.

Exercice 2

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On a :

$$(g \circ f)(a) - (g \circ f)(b) = g(f(a)) - g(f(b))$$

Or, f est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tous réels a et b tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$.

La fonction g est aussi décroissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tous réels f(a) et f(b) tels que $f(a) > f(b)$, $(g \circ f)(a) - (g \circ f)(b) < 0$

D'où : $a < b$ entraîne $(g \circ f)(a) - (g \circ f)(b) < 0$: la fonction $(g \circ f)$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Compléments sur les fonctions

Exercice 1

Pour les fonctions suivantes :

Donner le domaine de définition

Écrire f comme composée de fonctions de référence.

Dresser le tableau de variations de f

Tracer la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthogonal

1. $f(x) = x^2 + 1$

2. $f(x) = x^2 + 2x$

3. $f(x) = \frac{-1}{x+1}$

4. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

5. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

Exercice 2

1. Soient u et v les fonctions définies sur $]2; +\infty[$ respectivement par :

$$u(x) = x^2 + x \text{ et } v(x) = \frac{x}{x-2}$$

a) Montrer que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $x^2 + x > 2$.

b) On pose $f = v \circ u$. Expliciter $f(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{3x^2 + 13x + 10}{3x^2 + 6x}$

Résoudre, dans $]2; +\infty[$, l'inéquation $g(x) \leq 1$.

3. a) Déterminer la fonction $f + g$.

b) Démontrer que, pour tout nombre réel x : $6x^3 + 13x^2 - 3x - 10 = (x+2)(6x^2 + x - 5)$.

c) Résoudre dans $]2; +\infty[$, l'équation $(f + g)(x) = 0$.



Correction

Exercice 1

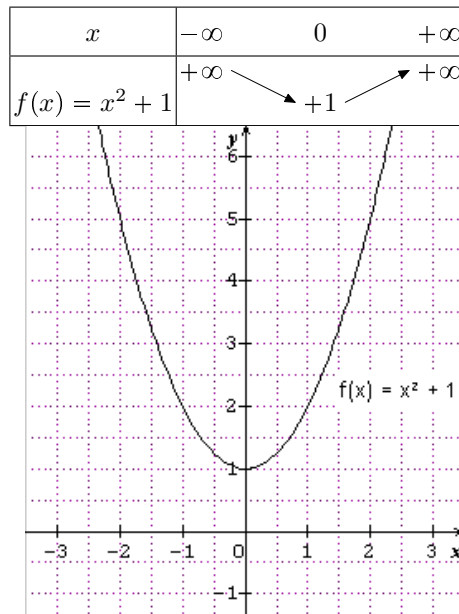
1. $f(x) = x^2 + 1$

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

En posant $g(x) = x^2$ et $h(x) = x + 1$ on a $f(x) = h \circ g(x)$

On sait que quand deux fonctions ont même sens de variation, leur composée est croissante, et quand elles sont de sens opposé, leur composée est décroissante.

La fonction h est toujours croissante. Sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ la fonction g est décroissante, donc $h \circ g$ est décroissante. Sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction g est croissante, donc la fonction $h \circ g$ est croissante.



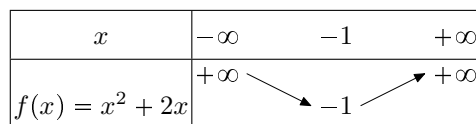
2. $f(x) = x^2 + 2x$

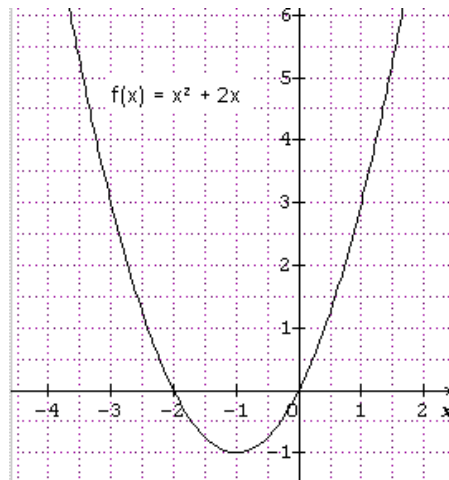
Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Je mets $x^2 + 2x$ sous forme canonique : $f(x) = (x + 1)^2 - 1$

En posant $g(x) = x^2$, $h(x) = x + 1$ et $j(x) = x - 1$, on a $f(x) = j \circ g \circ h(x)$

Les fonctions h et j sont toujours croissantes. Sur l'intervalle $]-\infty; -1[$ la fonction g est décroissante, donc $j \circ g \circ h$ est décroissante. Sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ la fonction g est croissante, donc la fonction $j \circ g \circ h$ est croissante.



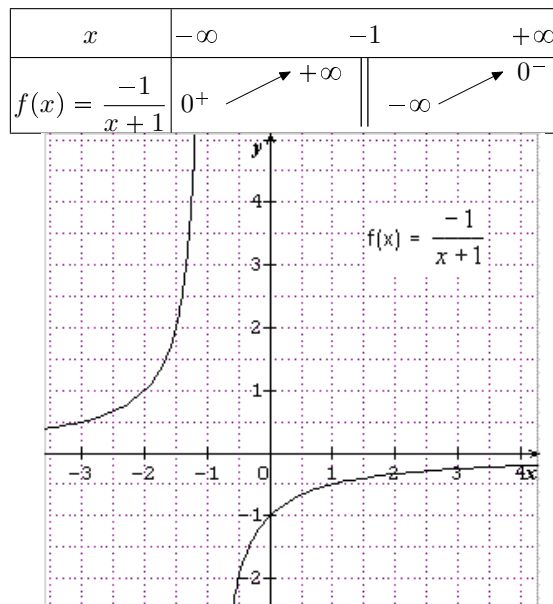


3. $f(x) = \frac{-1}{x+1}$

Domaine de définition : $\mathbb{R} - \{-1\}$

En posant $g(x) = -x - 1$ et $i(x) = \frac{1}{x}$ on a $f(x) = i \circ g(x)$

Les fonctions g et i sont toujours décroissantes. Donc sur l'intervalle $]-\infty; -1[$ la fonction $i \circ g$ est décroissante et sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ la fonction $i \circ g$ est également décroissante.

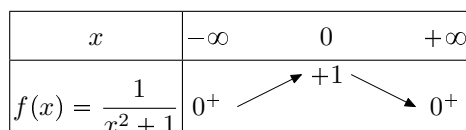


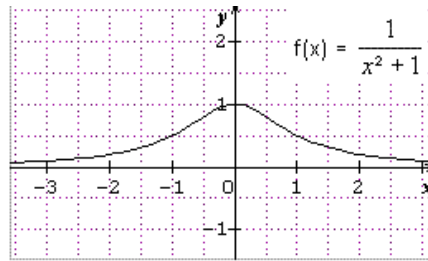
4. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

En posant $g(x) = x^2$, $h(x) = x + 1$ et $i(x) = \frac{1}{x}$ on a $f(x) = i \circ h \circ g(x)$

La fonction h est toujours croissante, et la fonction i est toujours décroissante. La fonction g est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ donc la fonction $i \circ h \circ g$ sera croissante sur cet intervalle. La fonction g est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ donc la fonction $i \circ h \circ g$ sera décroissante sur cet intervalle.



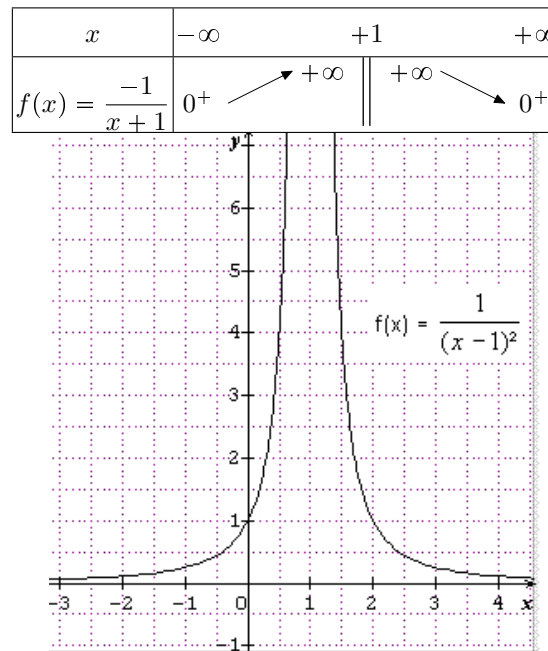


5. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

Domaine de définition : $\mathbb{R} - \{1\}$

En posant $h(x) = x - 1$, $g(x) = x^2$ et $i(x) = \frac{1}{x}$ on a $f(x) = i \circ g \circ h(x)$

La fonction h est toujours croissante, et la fonction i est toujours décroissante. La fonction g est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; +1[$ donc la fonction $i \circ h \circ g$ sera croissante sur cet intervalle. La fonction g est croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$ donc la fonction $i \circ h \circ g$ sera décroissante sur cet intervalle.



Exercice 2

1. a) Je montre que, pour tout x de $]2; +\infty[$, $x^2 + x > 2$.

$$x^2 + x > 2 \iff x^2 + x - 2 > 0$$

Je cherche les racines du polynôme $x^2 + x - 2$ par la méthode du discriminant.

$\Delta = 9$ il y a donc deux racines $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$

Le polynôme $x^2 + x - 2$ sera du signe de a c'est à dire > 0 à l'extérieur des racines.

Donc pour tout x de $]2; +\infty[$, $x^2 + x - 2 > 0$ et donc $x^2 + x > 2$.

1. b) On pose $f = v \circ u$

$$u(x) = x^2 + x \text{ et } v(x) = \frac{x}{x-2} \text{ donc } f(x) = v \circ u(x) = v(x^2 + x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}$$

2. Soit g la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{3x^2 + 13x + 10}{3x^2 + 6x}$

Je résous, dans $]2; +\infty[$, l'inéquation $g(x) \leq 1$

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 13x + 10}{3x^2 + 6x} &\leq 1 \iff \frac{3x^2 + 13x + 10}{3x^2 + 6x} - 1 \leq 0 \\ \frac{3x^2 + 13x + 10}{3x^2 + 6x} - \frac{3x^2 + 6x}{3x^2 + 6x} &\leq 0 \\ \frac{7x + 10}{3x^2 + 6x} &\leq 0 \iff \frac{7x + 10}{3x(x + 2)} \leq 0\end{aligned}$$

Je fais un tableau pour étudier le signe de $\frac{7x + 10}{3x(x + 2)}$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{10}{7}$	0	$+\infty$
$7x + 10$		$-$	$-$	0	$+$
x		$-$	$-$	$-$	0
$x + 2$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x) = \frac{7x + 10}{3x(x + 2)}$		$-$	$+$	0	$-$

Je constate que $\frac{7x + 10}{3x(x + 2)} \leq 0$ pour $x \in]-\infty; -2[\cup \left[-\frac{10}{7}; 0\right[$.

En conséquence donc dans $]2; +\infty[$, l'inéquation $g(x) \leq 1$ n'a pas de solution.

3. a) Je détermine la fonction $f + g$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} \text{ et } g(x) = \frac{3x^2 + 13x + 10}{3x^2 + 6x}$$

Avec les deux racines obtenues plus haut, je factorise $x^2 + x - 2$ en $(x - 1)(x + 2)$

$$(f + g)(x) = \frac{x^2 + x}{(x - 1)(x + 2)} + \frac{3x^2 + 13x + 10}{3x(x + 2)} = \frac{3x(x^2 + x) + (x - 1)(3x^2 + 13x + 10)}{3x(x + 2)(x - 1)} = \frac{6x^3 + 12x^2 - 3x - 10}{3x(x + 2)(x - 1)}$$

3. b) Je montre que pour tout réel $x : 6x^3 + 13x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(6x^2 + x - 5)$

Je développe l'expression $(x + 2)(6x^2 + x - 5) = 6x^3 + x^2 - 5x + 12x^2 + 2x - 10 = 6x^3 + 13x^2 - 3x - 10$

3. c) Je résous dans $]2; +\infty[$ l'équation $(f + g)(x) = 0$

J'utilise le résultat de **b)** pour factoriser $\frac{6x^3 + 12x^2 - 3x - 10}{3x(x + 2)(x - 1)} = \frac{(x + 2)(6x^2 + x - 5)}{3x(x + 2)(x - 1)}$

Je factorise $6x^2 + x - 5$ en cherchant les racines par la méthode du discriminant :

$$\Delta = 121 \text{ il y a deux racines } x_1 = \frac{5}{6} \text{ et } x_2 = -1$$

Je factorise $6x^2 + x - 5$ en $6\left(x - \frac{5}{6}\right)(x + 1)$

$$\text{donc } (f + g)(x) = \frac{6(x + 2)\left(x - \frac{5}{6}\right)(x + 1)}{3x(x + 2)(x - 1)} = \frac{2\left(x - \frac{5}{6}\right)(x + 1)}{x(x - 1)}$$

$(f + g)(x) = 0$ a pour solutions dans $\mathbb{R}$ $x = \left\{-1; \frac{5}{6}\right\}$ avec $x \neq 0$ et $x \neq 1$

Par contre, dans l'intervalle $]2; +\infty[$ l'équation $(f + g)(x) = 0$ n'a pas de solution.

Comment étudier les limites de fonctions

Comment trouver la limite d'une fonction f en l'infini

- On **compare** la fonction f à des fonctions plus simples dont on connaît la limite à l'infini.
- On utilise les **théorèmes** relatifs à la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Astuce : Penser lors d'une forme indéterminée, à mettre en **facteur** le terme de plus haut degré.

Comment interpréter la limite d'une fonction

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$) alors la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), alors la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe représentative de f en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

Opérations sur les limites

Somme

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
f + g	l + l'	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Produit

f	l	$l \neq 0$	0	∞
g	l'	∞	∞	∞
f $\times$ g	l l'	∞ règle des signes	forme indéterminée	∞ règle des signes

Quotient

f	l	l	0	l	∞	∞
g	l' $\neq 0$	0	0	∞	l	∞
f / g	l / l'	$+\infty$ $-\infty$ à gauche/à droite	forme indéterminée	0 / ∞ règle des signes	forme indéterminée	forme indéterminée

Limites de fonctions

Exercice 1

Calculer la limite de toutes les fonctions en $+\infty$.

$$f_1(x) = x^2 + 3x + 5$$

$$f_2(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$$

$$f_3(x) = x^2 - 5x + 4$$

$$f_4(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x + 1$$

Exercice 2

Etudier la **limite** en $+\infty$ des fonctions f, g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 7$$

$$g(x) = 7x^2 - 11x + 3$$

$$h(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

Exercice 3

On donne une droite (D) munie d'un repère $(O, \vec{i})$. Un point M se déplace sur cette droite et sa position, en fonction du temps t (en secondes), est définie par son abscisse $x(t)$ (en mètre).

La fonction $t \mapsto x(t)$ est la "**loi horaire**" du mouvement. On appelle "**diagramme des espaces**" la représentation graphique de cette fonction dans un plan muni d'un repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Dessiner le diagramme des espaces lorsque t varie entre 0 et 3, sachant que $x(t) = t^2 + t + 1$.
(on représentera une seconde par 1 cm, et un mètre par 1 cm.)

2. Calculer la loi horaire du point M entre les dates 1 et 3.

3. Soit h un nombre réel de l'intervalle $]0; 1[$. Calculer la vitesse moyenne du point M entre les dates 2 et $2+h$.

4. Quelle est la vitesse instantanée du point M à la date 2 ?

On rappelle que la **vitesse instantanée** du point M à la date t_0 est la limite en zéro de la fonction

$$h \mapsto \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}.$$

Exercice 4

Calculs de limites en utilisant des fonctions de références

1. $f : x \mapsto x^2 - 3x + 3$

a) Montrer que pour $x \geq 3$, $f(x) \geq x$

En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

b) Démontrer que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

2. $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$

Montrer que pour tout réel x , $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{x^2}$

En déduire les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice 5

Calculs de limites en utilisant les théorèmes relatifs aux opérations sur les fonctions

Calculer les limites de $f : x \mapsto 3x^2 + 2x - 5$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en -1 .

Calculer les limites de $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x-1}$ en $+\infty$, en $-\infty$, en 1 .

Calculer les limites de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x} - 3x$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Calculer les limites de $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x} - x$ en $-\infty$ et en $+\infty$.



Correction

Exercice 2

$+\infty$, $+\infty$ et 2 (asymptote)

Exercice 3

Arc de parabole

$$V(1,3) = 5 \text{ m/s}$$

$$V(2, 2+h) = 5 + h$$

$$V = 5 \text{ m/s}$$

Dérivation : Cours

I. Nombre dérivé en x_0

1. Définition



Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 . On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est appelée **nombre dérivé** en x_0 et notée $f'(x_0)$.

Remarque : Il ne faut pas écrire « $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ » si l'existence de cette limite n'a pas encore été justifiée.

2. Meilleure approximation affine



Théorème 1

f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel l tel que $f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon = 0$.
Alors $l = f'(x_0)$.

Remarque : on parle d'approximation affine car on remplace la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ par la fonction affine $h \mapsto f(x_0) + f'(x_0)h$.
L'erreur commise en effectuant ce remplacement est $h\epsilon(h)$. Cette erreur n'est petite que lorsque h est très petit.

Exemples importants :

$$(1 + h)^2 = 1 + 2h + h\epsilon(h)$$

$$\frac{1}{1 + h} = 1 - h + h\epsilon(h)$$

$$(1 + h)^3 = 1 + 3h + h\epsilon(h)$$

$$\sqrt{1 + h} = 1 + \frac{1}{2}h + h\epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon = 0$.

3. Lien avec la notion de limite



Propriété 1

Si f est dérivable en x_0 , alors f admet une limite finie en x_0 .

Remarque : la réciproque est fausse !

4. Nombre dérivé à droite. Nombre dérivé à gauche



Définition

Si $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie, on dit que f est **dérivable à droite** en x_0 et on note $f'_d(x_0)$ cette limite, appelée « **nombre dérivé à droite** » en x_0 .

On définit de façon similaire le nombre dérivé à gauche $f'_g(x_0)$.

Dans le cas où l'expression de $f(x)$ n'est pas la même avant et après x_0 et si f admet une limite finie en x_0 (qui est alors $f(x_0)$), alors :



Théorème 2

f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont égaux.

5. Interprétation graphique et mécanique



Propriété 2

S'il existe, le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

Remarque : Si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent mais sont différents, la courbe admet deux demi-tangentes en M_0 et fait un « angle » en ce point.



Propriété 3

Si $x(t)$ désigne l'abscisse, à l'instant t , d'un point mobile se déplaçant sur un axe et si $t \mapsto x(t)$ est dérivable en t_0 , alors $x'(t_0)$ est la vitesse instantanée du point mobile à l'instant t_0 .

Remarque : Il ne faut pas confondre avec la vitesse moyenne entre t_0 et t_1 qui est $\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$.

II. Fonction dérivée

1. Définition

La fonction dérivée est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

Remarque : il ne faut pas confondre le nombre dérivé $f'(x)$ et la fonction dérivée f' (comme il ne faut pas confondre $f(x)$ et f).

2. Propriétés

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur le même ensemble D , alors les fonctions suivantes sont dérivables et :

$(au + bv)' = au' + bv'$ pour a, b réels quelconques
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, aux points x tels que $v(x) \neq 0$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$, aux points x tels que $v(x) \neq 0$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
Si $F(x) = u(ax + b)$, $F'(x) = au'(ax + b)$ a, b réels quelconques



Propriété 4

Une fonction paire a une dérivée impaire.

Une fonction impaire a une dérivée paire.

Remarque : utiliser cette propriété comme vérification lorsqu'on dérive une fonction paire ou une fonction

impaire.

3. Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
a	0	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c$	$2ax + b$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{1}{2\sqrt{ax+b}}$	$x \in \mathbb{R} / ax+b > 0$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$

III. Utilisation des dérivées

1. Sens de variation d'une fonction



Théorème 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

f est croissante sur I ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

f est décroissante sur I ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.

f est constante sur I ssi pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Remarque : ce théorème n'est valable que sur un intervalle. Par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

2. Lien avec la notion de bijection



Théorème 4

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$.

- Si, pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) > 0$, alors f réalise une bijection strictement croissante de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

- Si, pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) < 0$, alors f réalise une bijection strictement décroissante de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

Remarque :

- On peut remplacer $f(a)$ par $\lim_a f$ et $[a, b]$ par $]a, b]$, $[f(a), f(b)]$ par $] \lim_a f, f(b)]$, lorsque f n'est pas définie en a mais admet en a une limite (finie ou infinie).
- si f^{-1} est la bijection réciproque, alors f^{-1} a le même sens de variation que f .

3. Extrema d'une fonction



Théorème 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

Si f' s'annule en changeant de signe en x_0 , alors f admet un extremum en x_0 .

Remarque : dans ce cas, C_f admet une tangente horizontale en $M_0(x_0, f(x_0))$.

4. Plan d'étude d'une fonction

- Ensemble de définition D_f .
- Éventuelle parité ou périodicité (pour réduire l'ensemble d'étude).
- Limites ou valeurs de f aux bornes des intervalles constituant D_f et éventuelles asymptotes.
- Existence et détermination de f' (en utilisant les opérations ou la définition) puis signe de $f'(x)$.
- Tableau de variation récapitulant les résultats précédents.
- Recherche éventuelle d'un centre ou d'un axe de symétrie.
- Tracé de la courbe après avoir placé :
 - les axes du repère avec la bonne unité ;
 - les points particuliers (tangente horizontale ou verticale, intersection avec les axes, ...) ;
 - les éventuelles asymptotes.

Dérivation : Fiche Méthode

I. Recherche du nombre dérivé

- Si f est dérivable sur I , et si $x_0 \in I$, on calcule f' (à l'aide des formules du cours à savoir par cœur), puis $f'(x_0)$.

- Si les opérations sur les fonctions ne donnent pas l'existence de $f'(x_0)$, on cherche la limite éventuelle de :

$$p(h) = \frac{f(x_0) + h - f(x_0)}{h}, \text{ en simplifiant au maximum } p(h) \text{ (à l'aide de factorisations).}$$

II. Tangente

- Retenir que $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point M_0 d'abscisse x_0 .
- Si $f'(x_0) = \frac{a}{b}$, pour tracer la tangente en M_0 on porte a unités en hauteur et b unités horizontalement (dans le sens correspondant au signe de chacun) ; si M est le point obtenu, la tangente est la droite (M_0M) .
Si $\lim_{h \rightarrow 0} p(h) = +\infty$ (ou $-\infty$), f n'est pas dérivable en x_0 , mais C_f admet une demi-tangente verticale en M_0 .
- Placer les tangentes horizontales ($f'(x_0) = 0$), et les tangentes ou demi-tangentes particulières avant de tracer la courbe.

III. Utilisation de la dérivée

- Justifier son existence (opérations sur les fonctions dérivables)
- Exprimer $f'(x)$ en factorisant au maximum pour :
 - connaître le signe de f' , et ainsi le sens de variation de f ;
 - trouver les valeurs où f' s'annule en changeant de signe, pour obtenir ainsi les extremums de f .
- Rassembler tous ces résultats dans un tableau de variation.
- Celui-ci permet de déterminer si un extremum est un maximum ou un minimum.
- Vérifier la cohérence entre :
 - les limites obtenues et le sens de variation ;
 - les résultats trouvés sur la copie et le graphe donné par une calculatrice graphique.

Formules sur les dérivées

Fonctions usuelles :

f définie par	D_f	$D_{f'}$ (f dérivable sur)	f' définie par
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$ (n entier ≥ 2)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$

Opérations sur les fonctions :

$f = ku$	$f' = ku'$
$f = u + v$	$f' = u' + v'$
$f = uv$	$f' = u'v + uv'$
$f = \frac{1}{u}$	$f' = -\frac{u'}{u^2}$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$f = \sqrt{u}$	$f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f(x) = (g \circ h)(x)$	$f'(x) = g'[h(x)]h'(x)$

Etude de la position relative de deux courbes

I. Intersection de deux courbes



Théorème 1

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

On appelle C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

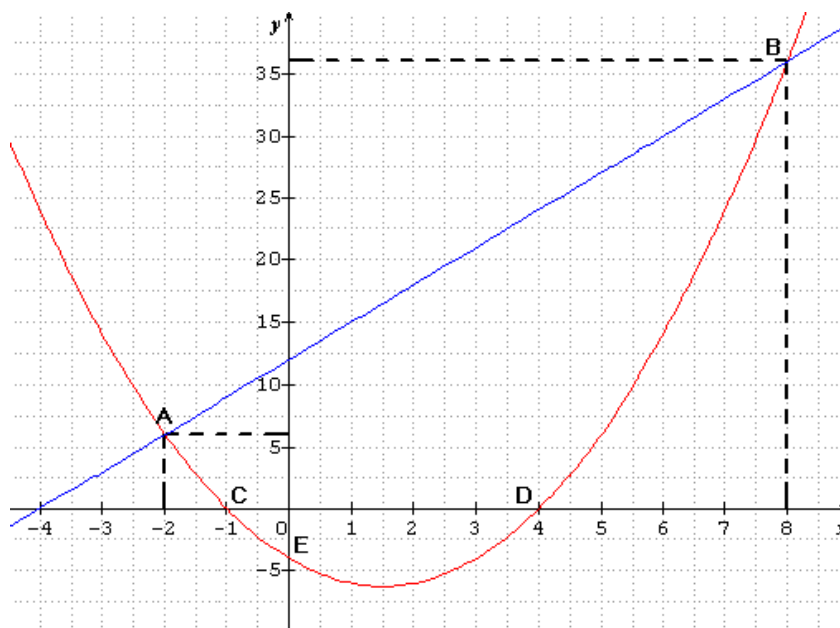
Les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exemple :

Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x - 4 \qquad g(x) = 3x + 12$$

Les courbes représentatives C_f (en rouge) et C_g (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous.



Recherche des points d'intersection des courbes C_f et C_g :

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 3x + 12$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 8$$

Les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g sont donc -2 et 8.

Les ordonnées sont données par $g(-2) = 6$ et $g(8) = 36$.

Les points d'intersection A et B ont donc pour coordonnées : **A(-2 ; 6)** **B(8 ; 36)**.

II. Position relative de deux courbes

Théorème 2

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

On appelle C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

Si, pour tout x de I :

- $f(x) > g(x)$, alors la courbe C_f est au dessus de la courbe C_g ;
- $f(x) < g(x)$, alors la courbe C_f est en dessous de la courbe C_g .

En pratique, on utilise plutôt le théorème suivant qui est équivalent au théorème 2 :

Théorème 3

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

On appelle C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

On pose, pour tout x de I : $h(x) = f(x) - g(x)$.

Si, pour tout x de I :

- $h(x) > 0$, alors la courbe C_f est au dessus de la courbe C_g ;
- $h(x) < 0$, alors la courbe C_f est en dessous de la courbe C_g .

Exemple :

On reprend les fonctions f et g les deux fonctions définies dans la partie I.

On pose, pour tout x réel : $h(x) = f(x) - g(x)$.

$$h(x) = x^2 - 3x - 4 - (3x + 12) = x^2 - 6x - 16$$

On peut factoriser $h(x)$:

$$h(x) = (x + 2)(x - 8)$$

Étude du signe de $h(x)$:

x	$-\infty$	-2	8	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-8$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Conclusion :

Si $x \in]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$ alors $h(x) > 0$ donc $f(x) > g(x)$ donc la courbe C_f est au dessus de la courbe C_g ;

Si $x \in]-2; 8[$ alors $h(x) < 0$ donc $f(x) < g(x)$ donc la courbe C_f est en dessous de la courbe C_g .

III. Intersection d'une courbe avec les axes du repère

1. Intersection d'une courbe avec l'axe des ordonnées

On reprend l'exemple de la fonction f définie dans la partie I.

Le point d'intersection E de la courbe C_f avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle, et son ordonnée est donnée par $f(0) = -4$.

Donc E a pour coordonnées E(0; -4).

2. Intersection d'une courbe avec l'axe des abscisses

On reprend l'exemple de la fonction f définie dans la partie I.

Les points d'intersection C et D de la courbe C_f avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

$$\iff x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\iff x = -1 \text{ ou } x = 4$$

Donc les points C et D ont pour coordonnées C(-1; 0) et D(4; 0).

Les dérivées

Exercice 1

Donner la meilleure approximation affine de f en a :

1. $f : x \mapsto 3x + 1 ; a = 2.$

2. $f : x \mapsto x^2 + 4x - 1 ; a = 1.$

Exercice 2

Calculer le nombre dérivé de f en a :

1. $f : x \mapsto 2x - 3 ; a = 0$

2. $f : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1 ; a = 2$

3. $f : x \mapsto \frac{x-2}{x-3} ; a = 2$

4. $f : x \mapsto \sqrt{5-x} ; a = 4$

Exercice 3

Déterminer la fonction dérivée f' de f :

1. $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + x + 1$

2. $f : x \mapsto (2-x)^3$

3. $f : x \mapsto \frac{4}{x}$

4. $f : x \mapsto \frac{-2}{x-1}$

5. $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x+2}$

6. $f : x \mapsto 3x - 5 + \frac{3}{2x}$

7. $f : x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$

8. $f : x \mapsto \sqrt{5x-4}$

Exercice 4

Écrire une équation de la tangente à la courbe (C) représentative de f au point A d'abscisse a :

1. $f : x \mapsto -x^2 + 2x + 3 ; a = -1$

2. $f : x \mapsto \frac{x+3}{x-2} ; a = 3$

3. $f : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x+2} ; a = 1$

Exercice 5

Étudier le sens de variation et établir le tableau de dérivation des fonctions f considérées dans l'exercice 4 .



Correction

Exercice 1

1. $f : x \mapsto 3x + 1 ; a = 2$

Pour tout réel x , $f'(x) = 3$, donc $f'(2) = 3$.

2. $f : x \mapsto x^2 + 4x - 1 ; a = 1$.

Pour tout réel x , $f'(x) = 2x + 4$, donc $f'(1) = 6$.

La meilleure approximation affine de f en a est : $3 \times 2 + 1 = 7$

2. $f : x \mapsto x^2 + 4x - 1 ; a = 1$.

La meilleure approximation affine de f en a est : $1^2 + 4 \times 1 - 1 = 4$

Exercice 2

1. $f(x) = 2x - 3 ; a = 0$

Calculons la dérivée de f , on a :

$$f'(x) = 2 \times 1 - 0 = 2$$

Donc la dérivée de cette fonction est constante, et le nombre dérivé de f en $a=0$ est donc :

$f'(a) = 2$

2. $f(x) = 3x^2 + 2x - 1 ; a = 2$

Calculons la dérivée de f , on a :

$$f'(x) = 3 \times 2x + 2 - 0 = 6x + 2$$

Le nombre dérivé de f en $a=2$ est donc, $6 \times 2 + 2$

$f'(a) = 14$

3. $f(x) = \frac{x-2}{x-3} ; a = 2$

Calculons la dérivée de f , on a :

$$f'(x) = \frac{1 \times (x-3) - (x-2) \times 1}{(x-3)^2} = -\frac{1}{(x-3)^2}$$

Le nombre dérivé de f en $a=2$ est donc, $-\frac{1}{(2-3)^2} = -1$

$f'(a) = -1$

4. $f(x) = \sqrt{5-x} ; a = 4$

Calculons la dérivée de f , on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$$

Le nombre dérivé de f en $a=4$ est donc, $\frac{-1}{2\sqrt{5-4}} = -\frac{1}{2}$

$f'(a) = -\frac{1}{2}$

Exercice 3

1. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$

On a :

$$(2x^3)' = 2 \times 3x^2 = 6x^2 \text{ et } (5x^2)' = 5 \times 2x^1 = 10x, (x)' = 1 \text{ et } (1)' = 0.$$

On en déduit donc la dérivée de f qui est :

$f'(x) = 6x^2 - 10x + 1$

2. $f(x) = (2 - x)^3$

On se sert de $(u^n)' = nu^{n-1}.u'$

On a donc : $f'(x) = 3(2 - x)^2 \times (2 - x)'$

$$f'(x) = 3(2 - x)^2 \times (-1)$$

On en déduit donc la dérivée de f qui est :

$$f'(x) = -3(2 - x)^2$$

3. $f(x) = \frac{4}{x}$

Cette expression se décompose de cette manière :

$$4 \times \frac{1}{x}$$

De plus, $\frac{1}{x}$ est une fonction usuelle. On se sert donc de celle-ci, on a : $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$.

$$\text{Soit : } f'(x) = 4 \times \frac{-1}{x^2}.$$

On en déduit donc la dérivée de f qui est :

$$f'(x) = \frac{-4}{x^2}$$

4. $f(x) = \frac{-2}{x - 1}$

On va se servir de $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

On a donc : $f'(x) = -2 \times \frac{-(x - 1)'}{(x - 1)^2}$

$$f'(x) = -2 \times \frac{-1}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x - 1)^2}$$

On en déduit donc la dérivée de f qui est :

$$f'(x) = \frac{2}{(x - 1)^2}$$

5. $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$

On se sert donc de : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

On a donc : $f'(x) = \frac{(2x - 1)'(x + 2) - (2x - 1)(x + 2)'}{(x + 2)^2}$

Ce qui donne : $\frac{2(x + 2) - (2x - 1)}{(x + 2)^2}$

La dérivée de f est donc :

$$f'(x) = \frac{5}{(x + 2)^2}$$

6. $f(x) = 3x - 5 + \frac{3}{2x}$

On a : $(3x)' = 3$, $(5)' = 0$ et, en se servant de : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$, on a : $\left(\frac{3}{2x}\right)' = 3 \times \frac{-(2x)'}{4x^2}$.

On en déduit donc que la dérivée de f est :

$$f'(x) = 3 - \frac{6}{4x^2}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{2x^2}$$

7. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

8. $f(x) = \sqrt{5x - 4}$

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}$$

Exercice 4 et 5

1. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ et $a = -1$.

Calculons la dérivée de f , on a

$(-x^2)' = -2x$, $(2x)' = 2$ et $(3)' = 0$ Soit :

$$f'(x) = -2x + 2$$

L'équation de la tangente étant $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, calculons-la pour $a = -1$, on a :

$$y = -(-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 + (-2 \times (-1) + 2)(x + 1)$$

$$y = -1 - 2 + 3 + 4(x + 1)$$

On en déduit donc la tangente de f en -1 qui est :

$$y = 4x + 4$$

Étudions le signe de la dérivée qui est $-2x + 2$.

La dérivée est donc positive sur $] -\infty ; 1 [$ et négative sur $] 1 ; +\infty [$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f			

La fonction de départ, $f(x)$ est donc croissante sur $] -\infty ; 1 [$ et décroissante sur $] 1 ; +\infty [$.

$$2. f(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

Calculons sa dérivée à l'aide de $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$,

On a donc :

$$f'(x) = \frac{(x+3)'(x-2) - (x-2)'(x+3)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-2) - (x+3)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-2-x-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

En $a=3$ on a donc $f'(a) = \frac{-5}{(3-2)^2} = -5$

La tangente à la courbe (C) représentative de f au point A d'abscisse a est donc, l'équation de la tangente étant $y = f(a) + f'(a)(x - a)$,

$$y = \frac{3+3}{3-2} - 5(x-3) = 6 - 5x + 15$$

$$y = -5x + 21$$

La tangente de f en $a=3$ est donc :

$$y = -5x + 21$$

Étudions le signe de la dérivée qui est $= \frac{-5}{(x-2)^2}$.

-5 ne s'annule jamais et $(x-2)^2$ s'annule en 2

Tableau de signes :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\parallel$	$-$
f			

La dérivée est donc toujours négative, la fonction de départ est donc toujours décroissante.

$$3. f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} \text{ et } a = 1$$

Calculons sa dérivée à l'aide de $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$,

On a donc :

$$f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)'(x + 2) - (x + 2)'(x^2 + x + 1)}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x + 2) - (x^2 + x + 1)}{(x + 2)^2} \text{ soit } f'(x) = 1 - \frac{3}{(x + 2)^2}$$

L'équation de la tangente étant $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, calculons la pour $a=1$, on a :

$$f'(a) = 1 - \frac{3}{9}$$

$$y = 1 + \frac{2}{3}(x - 1) = 1 + \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

On en déduit donc la tangente de f en 1 qui est :

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Étudions le signe de la dérivée qui est $\frac{(x + 2)^2 - \sqrt{3}^2}{(x + 2)^2}$

ce qui revient à : $\frac{(x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})}{(x + 2)^2}$, on a donc

$$f'(x) = \frac{(x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})}{(x + 2)^2}$$

$x + 2 - \sqrt{3}$ s'annule en $-2 + \sqrt{3}$, $x + 2 + \sqrt{3}$ en $-2 - \sqrt{3}$ et $(x + 2)^2$ en -2 .

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$	-2	$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$		
$x+2-\sqrt{3}$	-	-	-	0	+		
$x+2+\sqrt{3}$	-	0	+	+	+		
$(x+2)^2$	+	+		+	+		
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+

La dérivée est donc positive sur $]-\infty; -2 - \sqrt{3}[\cup]-2 + \sqrt{3}; +\infty[$ et négative sur $]-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}[$.

La fonction de départ, $f(x)$ est donc croissante sur $]-\infty; -2 - \sqrt{3}[\cup]-2 + \sqrt{3}; +\infty[$ et décroissante sur $]-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}[$.

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$	-2	$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
f							

Les Dérivées

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1$ et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de f .
2. On appelle A le point de (C) dont l'abscisse est 2.
 - a) Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) en A . (Écrire cette équation sous la forme $y = t(x)$).
 - b) On pose $d(x) = f(x) - t(x)$. Vérifier que $d(x) = \frac{1}{4}x(x-2)^2$.
 - c) Préciser la position de la courbe (C) par rapport à la tangente (D) .
 - d) Dessiner (C) et (D) .

Exercice 2

Soient (C) et (C') les courbes d'équations respectives $y = x^3 - 2x + 3$ et $y = 2x^2 - 3x + 3$.

1. Déterminer les coordonnées des points communs à (C) et (C') .
2. Déterminer les équations des tangentes à (C) et (C') en chacun de leurs points communs.
3. Étudier les variations des fonctions : $x \mapsto x^3 - 2x + 3$ et $x \mapsto 2x^2 - 3x + 3$.
4. Dessiner (C) et (C') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal. Déterminez a , b , c pour que (C) ait les propriétés suivantes :

- (C) passe par le point $A(0; 5)$
- la tangente à (C) au point A est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente à (C) au point B d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.

Étudier les variations de la fonction f ainsi obtenue.

Tracer (C) .

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

1. a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x : $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 + 3}$.
b) Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
2. Soit f' la dérivée de f .
 - a) Montrer que $f'(x) = \frac{(1-x^2)(x^2+15)}{(x^2+3)^2}$.
 - b) Étudier les variations de f .
3. Préciser une équation de la tangente T à la courbe C à l'origine.

4. Soit D la droite d'équation $y = -x$.
a) Étudier la position de C relativement à la droite D.
b) Montrer que, pour tout x non nul : $f(x) + x = \frac{8}{x(1 + \frac{3}{x^2})}$.

En déduire la limite de $f(x) + x$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut-on en conclure pour la courbe C ?

5. Tracer D, T et C sur un même graphique. (On précisera les points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses).

Exercice 5

Etude d'une fonction définie sur $[-2; 2]$ par : $f(x) = x^3 + 2x$ et C sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 3 cm pour 1 sur $(O, \vec{i})$ et 0,5 cm pour 1 sur $(O, \vec{j})$).

1. f est-elle impaire ?
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
4. Déduire de l'étude du signe de l'expression $f(x) - 2x$, la position de la courbe C par rapport à la tangente T, lorsque x varie dans $[-2, 2]$.
5. Construire C et T après avoir déterminé les coordonnées d'une dizaine de points à l'aide d'une calculatrice programmable.



Correction

Exercice 1

1. Soit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x$$

On étudie le signe de f' puis on en déduit les variations de f :

$$\frac{3}{4}x^2 - 2x = 0 \iff x \left(\frac{3}{4}x - 2 \right) = 0$$

$$\text{Donc } S = \left\{ 0; \frac{8}{3} \right\}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$		
signe		$+$	0	$-$	0	$+$
variations		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		

Avec :

$$f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{37}{27}$$

2. Soit $A(2; y) \in (C)$.

2. a) f est dérivable en 2 donc (D) existe bien.

$$a = 2 \quad f(a) = -1 \quad f'(a) = -1$$

Ainsi, (D) a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = -1(x - 2) - 1$$

$$y = -x + 1$$

$$\text{Donc } t(x) = -x + 1$$

2. b) Posons $d(x) = f(x) - t(x)$

$$d(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1 + x - 1$$

$$d(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$$

$$d(x) = \frac{1}{4}x(x^2 - 4x + 4)$$

$$d(x) = \frac{1}{4}x(x - 2)^2$$

2. c) Position relative de (C) par rapport à (D).

Il faut étudier le signe de la différence des deux fonctions $t(x)$ et $f(x)$ soit, étudier le signe de $d(x)$.

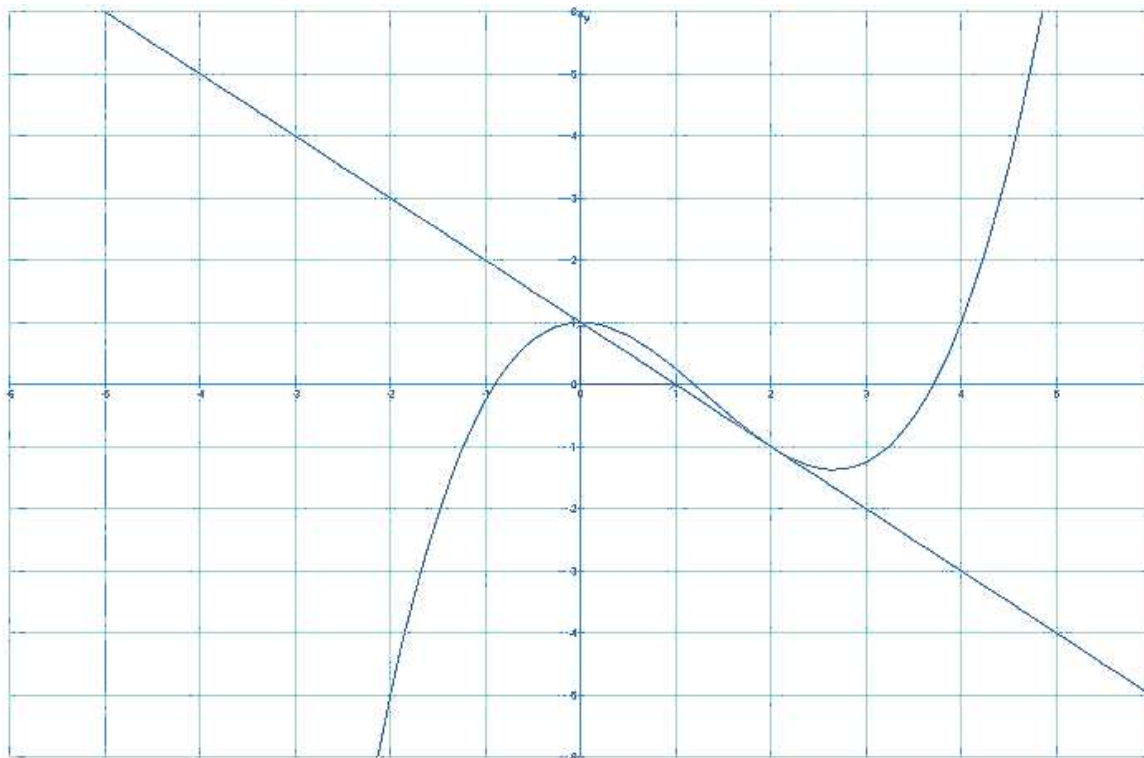
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
signe		-	0	+	0	+

Ainsi,

$$\text{sur }]-\infty; 0[: f(x) - t(x) < 0 \iff f(x) < t(x)$$

$$\text{sur }]0; 2[\cup]2; +\infty[: f(x) - t(x) > 0 \iff f(x) > t(x)$$

2. d)



Exercice 2

Soit (C) courbe d'équation $y = x^3 - 2x + 3$. Posons $f(x) = x^3 - 2x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) = 3x^2 - 2$.

Soit (C') courbe d'équation $y = 2x^2 - 3x + 3$. Posons $g(x) = 2x^2 - 3x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $g'(x) = 4x - 3$.

1. Déterminer les coordonnées des points communs à (C) et (C') revient à déterminer les solutions de l'équation :

$$x^3 - 2x + 3 = 2x^2 - 3x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1)^2 = 0$$

Ainsi, $S = \{0; 1\}$ et (C) et (C') ont deux points communs α et β d'abscisse respective 0 et 1

Calcul de leur ordonnée :

$$g(0) = 3$$

$$g(1) = 2$$

Les points communs à (C) et (C') sont donc $\alpha(0; 3)$ et $\beta(1; 2)$.

2. Tangente à (C) en α :

f est dérivable en 0 donc la tangente existe bien

$$a = 0; f(a) = 3; f'(a) = -2$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = -2x + 3.$$

Tangente à (C') en α :

g est dérivable en 0 donc la tangente existe bien.

$$a = 0; f(a) = 3; f'(a) = -3 \Rightarrow y = -3x + 3$$

Tangente à (C) en β :

f est dérivable en 1 donc la tangente existe bien.

$$a = 1; f(a) = 2; f'(a) = 1$$

$$y = x + 1$$

Tangente à (C') en β :

g est dérivable en 1 donc la tangente existe bien.

$$a = 1; f(a) = 2; f'(a) = 1$$

$$y = x + 1$$

3. Étude des variations de f :

Soit $f(x) = x^3 - 2x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

On cherche les solutions de l'équation $f'(x) = 0$:

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$	
signe	+	0	-	0	+
variation		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Étude des variations de g :

Soit $g(x) = 2x^2 - 3x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 4x - 3$$

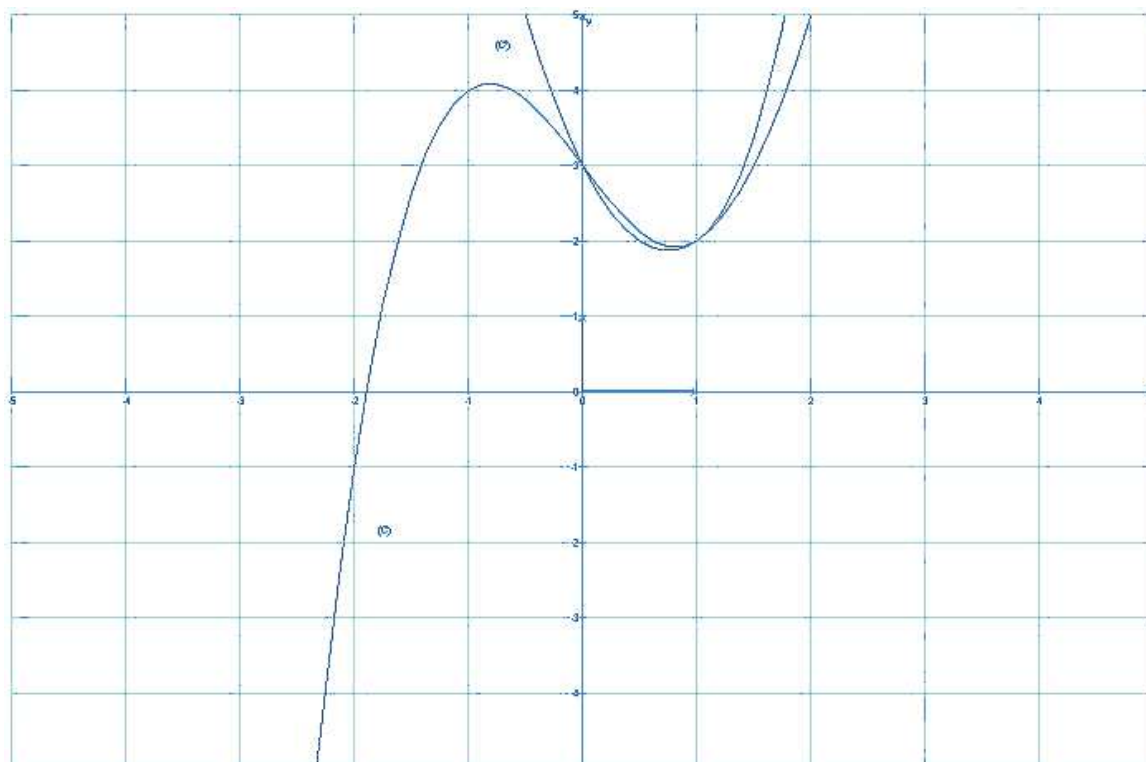
On cherche les solutions de l'équation $g'(x) = 0$:

$$\Leftrightarrow 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

x	$-\infty$	$3/4$	$+\infty$
signe	-	0	+
variation	$\searrow$		$\nearrow$



Exercice 3

Soit $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• C passe par le point A(0;5) :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(0) &= 5 \\ \Leftrightarrow \frac{a0^2 + b0 + c}{0 - 2} &= 5 \\ \Leftrightarrow \frac{c}{-2} &= 5 \\ c &= -10 \end{aligned}$$

• La tangente à (C) au point A(0;5) est parallèle à l'axe des abscisses :

Posons $u(x) = ax^2 + bx + c$ et $v(x) = x - 2$

$$u'(x) = 2ax + b \quad v'(x) = 1$$

$$D'_u = \mathbb{R} \quad D'_v = \mathbb{R}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x - 2) - ax^2 - bx - c}{(x - 2)^2} = \frac{2ax^2 - 4ax + bx - 2b - ax^2 - bx - c}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x - 2)^2}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a0^2 - 4a0 - 2b - c}{(0 - 2)^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2b - c}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2b}{4} - \frac{10}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= 5 \end{aligned}$$

• La tangente à (C) au point B(1;y) a pour coefficient directeur -3 :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f'(1) &= -3 \\ \Leftrightarrow \frac{a1^2 - 4a1 - 2(5) + 10}{(1 - 2)^2} &= -3 \\ \Leftrightarrow a &= 1 \end{aligned}$$

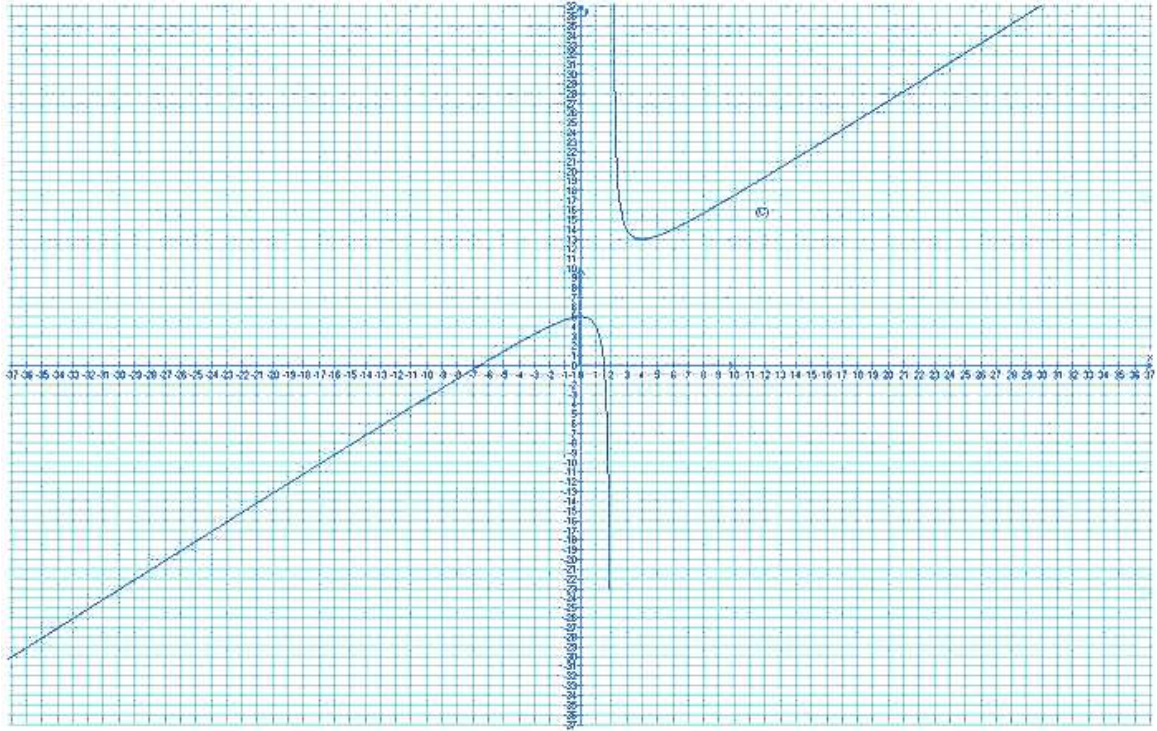
Ainsi, on a déterminé a , b et c pour que (C) réponde aux trois propriétés proposées. Il est possible de vérifier que l'on ne s'est pas trompé en affichant le graphique à sur la calculatrice et en vérifiant les 3 propriétés graphiquement.

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 10}{x - 2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

f est dérivable sur D_f

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2} = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}$$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$		
signe	+	0	-		-	0	+
variation		↗	↘		↘		↗



Exercice 4

1. a) Si $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 + 3}$

$$f(x) = \frac{ax(x^2 + 3) + bx}{x^2 + 3}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + 3ax + bx}{x^2 + 3}$$

Par identification :

$$a = -1$$

$$3a + b = 5 \iff -3 + b = 5 \iff b = 8$$

$$\text{Donc } f(x) = -x + \frac{8x}{x^2 + 3}$$

1. b) Soit $f(x) = -x + \frac{8x}{x^2 + 3}$ et $D_f = \mathbb{R}$

- D_f symétrique par rapport à 0

- $f(-x) = x - \frac{8x}{x^2 + 3} = -f(x)$

Donc f est impaire et sa courbe représentative C est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. a) Soit $f(x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$ et $D_f = \mathbb{R}$

Posons

$$u(x) = -x^3 + 5x \text{ et } v(x) = x^2 + 3$$

$$u'(x) = -3x^2 + 5 \quad v'(x) = 2x$$

$$D'_u = \mathbb{R} \quad D'_v = \mathbb{R}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(-3x^2 + 5)(x^2 + 3) - 2x(-x^3 + 5x)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^4 - 9x^2 + 5x^2 + 15 + 2x^4 - 10x^2}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^4 - 14x^2 + 15}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 - x^2)(x^2 + 15)}{(x^2 + 3)^2}$$

2. b) Soit $f'(x) = \frac{(1-x^2)(x^2+15)}{(x^2+3)^2}$

- $x^2 + 15 > 0$
- $(x^2 + 3)^2 > 0$
- $1 - x^2 = 0 \iff x = 1; x = -1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
signe	-	0	+	0	-
variation	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

3. $a = 0; f(a) = 0; f'(a) = \frac{5}{3}$

$y = f'(a)(x - a) - f(a)$

$y = \frac{5}{3}x$

4. a) Soit D la droite d'équation $y = -x$

$f(x) + x = \frac{8x}{x^2 + 3}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe	-		+

sur $] -\infty; 0[: f(x) - (-x) < 0 \iff f(x) < -x$

sur $] 0; +\infty[: f(x) - (-x) > 0 \iff f(x) > -x$

Il suffit de faire la différence entre C et D puis étudier le signe de l'expression ainsi obtenue.

C est en dessous de D sur $] -\infty; 0[$

C est au dessus de D sur $] 0; +\infty[$

4. b) $f(x) - (-x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3} + x$

$f(x) - (-x) = \frac{-x^3 + 5x + x^3 + 3x}{x^2 + 3}$

$f(x) - (-x) = \frac{8x}{x^2 + 3}$

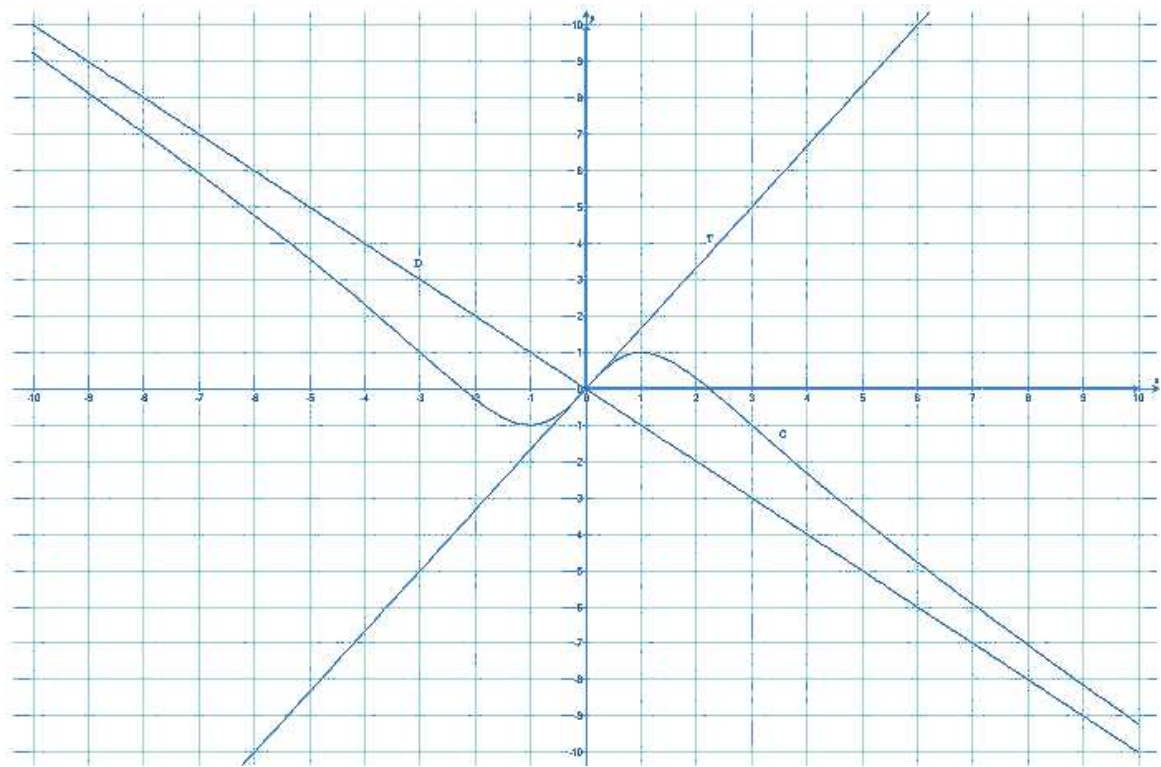
$f(x) - (-x) = \frac{8x}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}$

$f(x) - (-x) = \frac{8}{x \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}$

La limite de $f(x) - (-x)$ est nulle

D'où la droite d'équation $y = -x$ est une asymptote de C_f

5.



Exercice 5

Soit $f(x) = x^3 + 2x$ et $D_f = [-2; 2]$

1.

- D_f est symétrique par rapport à 0
- $f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

2. f est dérivable sur $[-2; 2]$

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

x	-2	2
signe	+	
variation	↗	

3. Équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

$$a = 0; f(a) = 0; f'(a) = 2$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = 2x$$

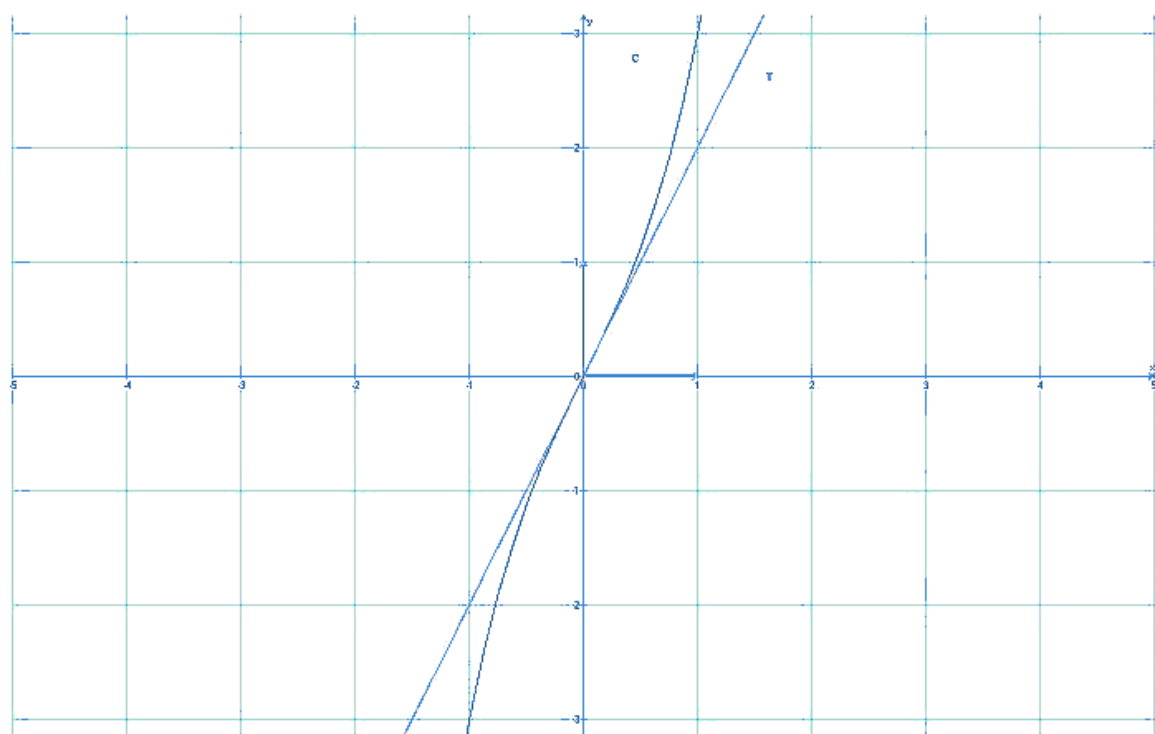
4. $f(x) - x = x^3$

x	-2	0	2
signe	-	0	+

$$\text{sur }]-2; 0[: f(x) - 2x < 0 \iff f(x) < 2x$$

$$\text{sur }]0; 2[: f(x) - 2x > 0 \iff f(x) > 2x$$

5.



Les Dérivées

Exercice 1

Trouver la (ou les) réponse(s) exacte(s) :

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; C_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans ce repère :

f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1$ et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Une équation de la droite passant par $A(1; 2)$ et de coefficient directeur -3 est :
 - a) $y = -3x + 5$
 - b) $6x + 2y - 10 = 0$
 - c) $y = 2x - 3$
2. Soit $f(x) = x^3 - x$, et A et B les points de C_f d'abscisses respectives 1 et 2. La pente de (AB) est :
 - a) 5
 - b) 1
 - c) 6
3. Le point M appartient à (AB)
 - a) $M(0; -6)$
 - b) $M(-2; -18)$
 - c) $M(-1; 8)$
4. Soit $g(x) = x^2 + 1$, C le point de C_g d'abscisses $x \neq 2$. La pente de (CM) est :
 - a) $x - 2$
 - b) $x + 2$
 - c) $\frac{1}{2}$
5. La limite de la pente de (CM) lorsque x tend vers 2 est :
 - a) 0
 - b) 4
 - c) 1
6. La droite passant par C et de coefficient directeur 3 a pour équation :
 - a) $y = 3x - 1$
 - b) $6x - 2y + 6 = 0$
 - c) $x - 3y + 2 = 0$
7. La droite d'équation $2x - y + 7 = 0$ a pour coefficient directeur :
 - a) 2
 - b) $\frac{1}{2}$
 - c) 7
8. La droite d'équation $x + 3y - 1 = 0$ a pour vecteur directeur :
 - a) $\vec{u}(3; 1)$
 - b) $\vec{u}(-3; 1)$
 - c) $\vec{u}(1; -\frac{1}{3})$
9. La droite d'équation $4x - 3y + 1 = 0$ passe par :
 - a) $A(3; 4)$
 - b) $B(-1; -1)$
 - c) $C(2; 3)$
10. La limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$ est :
 - a) 0
 - b) $+\infty$
 - c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant à chaque fois l'ensemble de définition de la fonction et de sa dérivée.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 2x^3 - 4x^2 + 7 \\
f_2(x) &= (x^7 + 2x)(x^3 - 4x + 1) \\
f_3(x) &= \frac{(x^2 - 2x + 3)^8}{2x^2 - 4x + 1} \\
f_4(x) &= \frac{x - 2}{\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 3}\right)^2} \\
f_5(x) &= \frac{1}{(x^2 + 2)^4} \\
f_6(x) &= \frac{2x\sqrt{5x - 2}}{(x^2 - 2x + 2)^2} \\
f_7(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\
f_8(x) &= (x - 3)(x^2 + 1)(\sqrt{2}x - 1)
\end{aligned}$$

Exercice 3

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes puis dresser leur tableau de variation :

1. $f(x) = \frac{6(x^2 - 1)}{x - 1}$
2. $f(x) = \frac{x - 2}{(x + 1)^2}$
3. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1}$
4. $f(x) = 4x^3 - 3x^4$

Exercice 4

Déterminer les extrema des fonctions suivantes sur l'intervalle I en précisant s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

1. $f(x) = -x^2 + 4x - 8$ sur $I = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}^{*+}$ et sur $I = \mathbb{R}^{*-}$;
3. $f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{2x - 4}$ sur $I =]2, +\infty[$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x - 2$.

1. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f. f possède-t-elle un maximum, un minimum ?
2. Déterminer le point A de la courbe représentative C_f de f (dans un repère orthonormal) en lequel la tangente à C_f a pour coefficient directeur -2.
3. Tracer C_f . On placera notamment les points d'intersection avec les axes et on tracera la tangente à C_f en A.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 2}$, et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, -2 (à droite et à gauche). Que peut-on en déduire pour C ?
2. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les réels x tels que $f'(x) = 1$.
4. Tracer et les tangentes à C en les points d'abscisse x tels que $f'(x) = 1$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x différent de 1, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$.
2. Utiliser cette écriture de f(x) pour calculer $f'(x)$ et pour déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, 1 (à droite et à gauche). Rassembler ces résultats dans un tableau de variation.
3. Que peut-on dire de la droite D d'équation $y = 2x + 1$ pour C ?
4. Tracer C et D.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

1. Calculer $f'(x)$. Quel est son signe ?
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Rassembler les résultats précédents dans un tableau.
3. Que représente la droite d'équation $y = 1$ pour la courbe représentative C de f dans un repère orthogonal ?
4. Montrer que C est symétrique par rapport à Oy , puis tracer C .
5. Soit $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x+2}$. Etudier les variations de g , tracer sa courbe représentative C' sur la même figure que pour C .
6. Résoudre graphiquement l'équation : $\frac{x^2}{x^2+1} = \sqrt{\frac{1}{2}x+2}$.

Exercice 9

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 1$. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., $f^{(p)}(x)$, où $f^{(p)}(x) = (f^{(p-1)})'(x)$.
A partir de quel rang a-t-on $f^{(p)}(x) = f^{(p+1)}(x)$? Quelle est la valeur commune ?
2. Généraliser le 1) à une fonction polynôme de f de degré n . (on pourra comparer les degrés de f et de f').

Exercice 10

D'après la théorie de la relativité, l'énergie totale d'une particule de masse m animée de la vitesse v est :

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ où } c \text{ est la vitesse de la lumière.}$$

Chercher la meilleure approximation affine de la fonction $v \mapsto E(v)$ lorsque v est très petite devant c . (On posera $x = \frac{v^2}{c^2}$ et on cherchera la meilleure approximation affine de la fonction $x \mapsto \frac{mc^2}{\sqrt{1-x}}$).
Les termes obtenus vous sont-ils familiers ?

Exercice 11

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I . Le but de cet exercice est d'étudier la dérivabilité sur I de la fonction g définie par :

$$g(x) = \sqrt{f(x)}.$$

1. Soit x_0 un élément de I . Montrer que pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{f(x_0+h)} + \sqrt{f(x_0)}}$$

2. Déterminer la limite de $\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$ quand h tend vers 0. Que peut-on en déduire pour la fonction g ?

3. Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle I , et déterminer dans chaque cas la fonction dérivée :

$$f_1(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ sur } I = \mathbf{R}.$$

$$f_2(x) = \sqrt{x^2+2x-3} \text{ sur } I =]1, +\infty[.$$

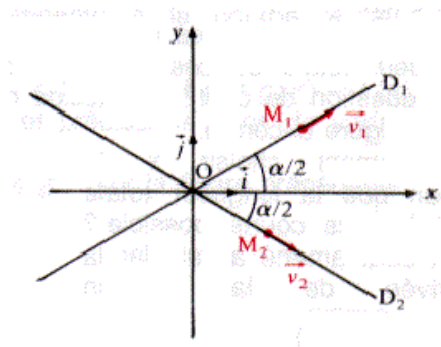
Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, D_1 et D_2 sont les droites sécantes formant un angle α , $0 < \alpha < \pi$, représentées sur la figure ci-dessous.

Deux mobiles M_1 et M_2 se déplacent respectivement sur D_1 et D_2 , animés chacun d'un mouvement rectiligne uniforme.

Les vecteurs vitesse de M_1 et M_2 sont notés $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

On suppose que M_1 et M_2 ont même vitesse, c'est-à-dire : $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = v$ et le sens des vecteurs vitesse est celui indiqué sur la figure. A l'instant $t = 0$, les coordonnées de M_1 sont $(0, 0)$ et celles de M_2 sont $(-a \cos \frac{\alpha}{2}, a \sin \frac{\alpha}{2})$.



1. Quelles sont les équations des mouvements de M_1 et M_2 ? (On exprimera les coordonnées de M_1 et M_2 en fonction du temps t).

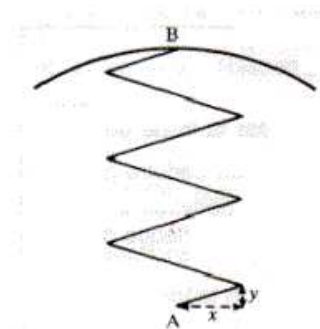
2. A quel instant la distance $d(M_1, M_2)$ est-elle minimale ?

Exercice 13

Un skieur de randonnée gravit une montagne dont la pente est supposée régulière. Il fait des virages réguliers pour aller du point de départ A au sommet B distant de 1 000 mètres à vol d'oiseau. L'inclinaison de ses

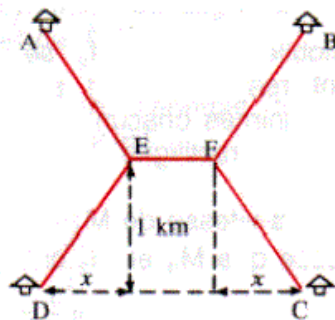
virages est $p = \frac{x}{y}$ où x et y sont les distances indiquées sur la figure. Une règle empirique fait apparaître que la vitesse du skieur est inversement proportionnelle à $(p + \frac{1}{8})$.

Quelle est la valeur de p qui permet de gravir la montagne en un temps minimal ?



Exercice 14

Quatre maisons sont aux sommets d'un carré de côté $c = 2$ km. On veut construire des chemins entre ces maisons de façon que la longueur totale de ces chemins soit la plus courte possible (pour une question de coût). On décide de construire les chemins comme sur la figure ci-dessous.



1. Comment choisir x de façon que la longueur totale soit la plus courte possible ? (On sera amené à calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$).

Quelle est alors cette longueur totale ?

2. Quelle est la mesure des angles $\widehat{DEF}$, $\widehat{AEF}$ et $\widehat{DEA}$?

Exercice 15

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. D est la droite d'équation $4x + 3y = 14$ et A le point de coordonnées $(-2, -1)$. On veut calculer la distance de A à la droite D.

1. Montrer qu'un point $M(x, y)$ appartient à D si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}t \\ y = t \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point de D correspondant.

2. Calculer la distance de A à D en étudiant la fonction $t \mapsto (d(A, M(t)))^2$.

Exercice 16

Résoudre graphiquement le système d'équations :

$$\begin{cases} y - \frac{1}{3}x^3 + 2x = 0 \\ y + \frac{5}{6}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

(On étudiera et représentera deux fonctions).

Exercice 17

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$.

1. Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative C . Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

2. Soit g la fonction définie de $] -2, 2[$ dans $\mathbf{R}$ par $g(x) = f(x)$. Montrer que g est une bijection et préciser le sens de variation de g^{-1} .

Tracer la courbe représentative de g^{-1} sur la figure précédente.

Exercice 1

1. réponses a et b :

La réponse c ne convient pas car le coefficient directeur y est 2 au lieu de -3.

La réponse a et la réponse b sont équivalentes : en effet, $y = -3x + 5$ s'écrit aussi $y + 3x - 5 = 0$, ce qui, multiplié par 2, donne $6x + 2y - 10 = 0$.

Reste à vérifier que la réponse a convient : le coefficient directeur est bien -3, et si on remplace x dans cette équation par x_A , on obtient $y = -3x_A + 5 = -3 + 5 = 2 = y_A$, donc l'équation proposée est celle d'une droite qui passe par A.

2. réponse c :

A d'abscisse 1 est sur C_f donc $y_A = f(x_A) = f(1) = 1^3 - 1 = 0$.

B d'abscisse 2 est sur C_f donc $y_B = f(x_B) = f(2) = 2^3 - 2 = 6$.

Le coefficient directeur de (AB) (= sa pente) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 0}{2 - 1} = \frac{6}{1} = 6$

3. En supposant que les points A et B sont toujours ceux de la question 2, réponses a et b :

on sait déjà que la pente est 6.

cas a) : la pente de (AM) est $\frac{-6-0}{0-1} = 6$: (AM) et (AB) sont de même direction et passent par A toutes les deux : elles sont confondues

cas b) : la pente de (AM) est $\frac{-18-0}{-2-1} = 6$: (AM) et (AB) sont de même direction et passent par A toutes les deux : elles sont confondues

cas c) : la pente de (AM) est $\frac{8-0}{-1-1} = -4 \neq 6$ donc (AM) et (AB) n'ont pas la même direction. M n'est pas un point de (AB).

4.

Problèmes sur les dérivées

exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(C_1) , (C_2) et (C_3) désignent respectivement les courbes représentatives des fonctions f , g et h définies par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1, \quad h(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

1. Etablir les tableaux de variations de f , g et h .
2. Montrer que le point $A(1; 2)$ est commun aux trois courbes (C_1) , (C_2) et (C_3) et que ces trois courbes admettent en A la même tangente (T) .
3. Ecrire une équation de (T) et étudier la position de chacune des courbes par rapport à (T) .
4. Tracer (T) , (C_1) , (C_2) et (C_3) .
5. Chacune des courbes (C_1) , (C_2) et (C_3) admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$? Si oui, préciser en quel point et écrire leur équation.

exercice 2

On se propose d'étudier la fonction numérique f dont on donne ci-dessous le tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+	+
$f(x)$							

1. Préciser les ensembles de définition de f et de f' .
2. Quelles sont les limites de f aux bornes des intervalles de son ensemble de définition ? Donner les équations des asymptotes à la courbe représentative (C) de f .
3. Ecrire les équations des tangentes à (C) que le tableau de variation permet de connaître.
4. Préciser les extrema de f .
5. Ebaucher la courbe (C) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
6. Indiquer le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 0$.
7. Trouver un réel m tel que l'équation : $f(x) = m$ n'admette qu'une seule solution.

exercice 3

1. Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression $P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

Déterminer les 3 réels a, b et c tels que, pour tout réel x , on ait :



3. Calculer la dérivée de la fonction f ; vérifier que l'on a : $f'(x) = \frac{-2x}{x^2+1}$
 En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par (D) la droite d'équation $y = x + 1$ et par (C) la courbe représentative de f . Etudier la position de (C) par rapport à (D).

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$ et interpréter graphiquement le résultat.

5. Construire (D) et (C)

Guides

GUIDE exercice 1

1. f, g, h sont des fonctions polynômes du second degré.
2. On vérifie que $f(1) = g(1) = h(1) = 2$ et que $f'(1) = g'(1) = h'(1)$.
3. La position relative de 2 courbes d'équations $y = k(x)$ et $y = l(x)$ se fait en étudiant le signe de $k(x) - l(x)$.
5. A quelle condition (portant sur les coefficients directeurs) deux droites sont elles parallèles ?
 Quel est le coefficient directeur de la tangente à une courbe en un point ?

GUIDE exercice 2

2. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ alors la droite d'équation $y = a$ est asymptote horizontale à (C).
 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à (C).
6. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ est le nombre de points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

Les Suites

I. Généralités sur les suites

Dans tout le cours, on considère des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ les entiers naturels.

1. Suites croissantes, suites décroissantes



Définitions

Une suite (u_n) est croissante si pour tout entier n , $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est décroissante si pour tout entier n , $u_n \geq u_{n+1}$.

Remarques :

- Une suite croissante, une suite décroissante sont dites monotones.
- Il existe des suites ni croissantes, ni décroissantes.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est une suite ni croissante, ni décroissante.

Méthode :

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) , on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Si tous les u_n sont strictement positifs, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Exemple 1 :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{2n+3}{n+2}$.

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n) , on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+2} - \frac{2n+3}{n+2} \\ &= \frac{2n+5}{n+3} - \frac{2n+3}{n+2} \\ &= \frac{(2n+5)(n+2) - (2n+3)(n+3)}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{2n^2 + 4n + 5n + 10 - 2n^2 - 6n - 3n - 9}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

Et, pour tout entier naturel n , $n+3 \geq 0$ et $n+2 \geq 0$.

Donc : pour tout entier naturel n , $\frac{1}{(n+3)(n+2)} \geq 0$

D'où : pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$, soit $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite (u_n) est croissante.

Exemple 2 :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \frac{3^n}{5^n}$

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs. Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n) , on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{3^n}{5^n}} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{3^n} = \frac{3}{5}$$

Or, $\frac{3}{5} < 1$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.



Théorème

Soit (u_n) une suite définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0; +\infty[$
 Si f est strictement croissante, alors (u_n) est strictement croissante.
 Si f est strictement décroissante, alors (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration :

- cas où f est strictement croissante :

Pour tout entier naturel n , la fonction f est strictement croissante, donc : $f(n+1) > f(n)$

D'où : pour tout entier naturel n , $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

- cas où f est strictement décroissante :

Pour tout entier naturel n , la fonction f est strictement décroissante, donc : $f(n+1) < f(n)$

D'où : pour tout entier naturel n , $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Ce théorème ne s'applique pas si la suite (u_n) est définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$). Les variations de la fonction f et de la suite (u_n) ne sont pas toujours les mêmes.

Exemple 3 :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{2n-3}{n+1}$.

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

La fonction f est définie en particulier sur $[0; +\infty[$ et est dérivable sur cet intervalle. On a, pour tout x de $[0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1) - (2x-3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{5}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Pour tout x de $[0; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

D'où : la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice :

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 4 \end{cases}$$

Étudier le sens de variation de la suite (v_n) .

On pose $D_n = v_{n+1} - v_n$

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} D_n &= v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}v_n + 4 - \left(\frac{1}{2}v_{n-1} + 4\right) \\ &= \frac{1}{2}(v_n - v_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}D_{n-1} \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2} > 0$, alors D_n est du signe de D_{n-1} , qui lui-même est du signe de D_{n-2} . Et ainsi de proche en proche, on a : D_n est du signe de D_0 .

Or, $D_0 = v_1 - v_0 = \frac{1}{2}v_0 + 4 - v_0 = \frac{7}{2} > 0$

D'où : pour tout entier naturel n , $D_n > 0$.

Donc, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} > v_n$

La suite (v_n) est strictement croissante.

Remarque : on dit qu'une suite est stationnaire si elle est constante.

2. Suites périodiques



Définition

Une suite (u_n) est périodique
si il existe un entier naturel k non nul tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+k} = u_n$

Remarque : la période appartient à $\mathbb{N}^*$;
si $u_n = \sin n$, 2π n'est pas une période pour (u_n) .

II. Suites Arithmétiques

1. Définition



Définition :

Une suite (u_n) est arithmétique si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.
 r est appelé **raison** de la suite.

2. Calcul de u_n



Théorème :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors pour tous les entiers naturels n et p , on a :
 $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_p + (n - p)r$.

Démonstration :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r . Donc, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = u_{n-1} + r$$

$$u_{n-1} = u_{n-2} + r$$

...

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_1 = u_0 + r$$

En additionnant ces n égalités membre à membre, on obtient :

$$u_n + u_{n-1} + \dots + u_2 + u_1 = u_{n-1} + r + u_{n-2} + r + \dots + u_1 + r + u_0 + r$$

$$\text{soit : } u_n = u_0 + nr$$

(u_n) est une suite arithmétique de raison r . Donc, pour tous entiers naturels n et p , on a :

$$u_n = u_0 + nr \text{ et } u_p = u_0 + pr$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient : $u_n - u_p = u_0 + nr - u_0 - pr$

$$\text{soit : } u_n = u_p + (n - p)r$$

Remarques :

- La première formule n'est qu'un cas particulier de la seconde.
- Si $u_n = an + b$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.

3. Somme des n premiers termes



Cas particulier :

La somme des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$

Démonstration :

Soit S la somme des n premiers entiers naturels non nuls, $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$.

Sur une première ligne, écrivons la somme dans l'ordre croissant, puis sur une deuxième ligne, la somme dans l'ordre décroissant :

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

En sommant ces deux égalités, on obtient :

$$2S = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \dots + (n-2+3) + (n-1+2) + (n+1)$$

$$\text{soit } 2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

$$\text{donc : } 2S = n(n+1)$$

$$\text{D'où : } S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



Théorème :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 ,

$$\text{alors pour tout entier } n : S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} = n \frac{2u_0 + r(n-1)}{2}$$

S est appelée la somme des n premiers termes de la suite (u_n) . Elle est égale au produit du nombre de termes par la demi-somme des termes extrêmes.

Démonstration :

Les n premiers termes de la suite arithmétique (u_n) sont u_0 ; $u_1 = u_0 + r$; $u_2 = u_0 + 2r$; ...; $u_{n-3} = u_0 + (n-3)r$; $u_{n-2} = u_0 + (n-2)r$ et $u_{n-1} = u_0 + (n-1)r$. Donc :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1}$$

$$S = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + (n-3)r) + (u_0 + (n-2)r) + (u_0 + (n-1)r)$$

$$S = nu_0 + r + 2r + \dots + (n-3)r + (n-2)r + (n-1)r$$

$$S = nu_0 + r[1 + 2 + \dots + (n-3) + (n-2) + (n-1)]$$

$$\text{Or, on a vu que } 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}. \text{ Donc :}$$

$$S = nu_0 + \frac{r(n-1)n}{2}$$

$$S = n \frac{2u_0 + r(n-1)}{2}$$

$$S = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

4. Sens de variation

III. Suites géométriques

1. Définition



Définition :

Une suite (u_n) est géométrique si il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = q u_n$.
 q est appelé **raison** de la suite.

2. Calcul de u_n

**Théorème :**

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors pour tous les entiers naturels n et p :

$$u_n = u_0 q^n \text{ et } u_n = u_p q^{n-p}$$
Démonstration :**Remarques :**

- la première formule n'est qu'un cas particulier de la seconde ;
- si $u_n = b a^n$, alors (u_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme $u_0 = b$.

3. Somme des n premiers termes

**Cas particulier :**

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) et de premier terme 1 est égale à $1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Démonstration :

Soit S la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$), $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1}$.

Donc : $qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$

Donc : $qS = S - 1 + q^n$

Donc : $(1 - q)S = 1 - q^n$

Or, $q \neq 1$, donc $1 - q \neq 0$.

Donc : $S = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

**Théorème :**

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) et de premier terme u_0 ,
alors pour tout entier n : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$
 S est appelée la somme des n premiers termes de la suite (u_n) .

Démonstration :

Les n premiers termes de la suite géométrique (u_n) sont u_0 ; $u_1 = qu_0$; $u_2 = q^2u_0$; ... ; $u_{n-3} = q^{n-3}u_0$; $u_{n-2} = q^{n-2}u_0$ et $u_{n-1} = q^{n-1}u_0$. Donc :

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1}$

$S = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \dots + q^{n-3}u_0 + q^{n-2}u_0 + q^{n-1}u_0$

$S = u_0(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1})$

Or, on a vu que $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Donc :

$S = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Remarque : Dans le cas où $q = 1$, la suite géométrique (u_n) est constante : elle est toujours égale à u_0 .

On a alors : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} = n u_0$

4. Sens de variation

IV. Comportement à l'infini

1. Convergence vers 1



Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, a^n avec $-1 < a < 1$, convergent vers 0 et on note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.



Théorème de comparaison 5 :

Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors (u_n) converge vers l et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.



Théorème 6 :

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l,$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l.$$

Remarques :

- Les deux inégalités sont indispensables pour conclure.
- Si (u_n) et (w_n) convergent vers des réels distincts, on ne peut rien dire pour (v_n) .

2. Divergence vers l'infini



- Les suites de terme général n , n^2 , n^3 , $\sqrt{n}$, a^n avec $a > 1$, divergent vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

- Une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si la suite $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$ et on note alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$



Théorème de comparaison 7 :

- Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Remarque :

- Il existe des suites qui divergent, sans avoir de limite infinie, par exemple :

$$u_n = (-1)^n.$$

3. Opérations

Les règles opératoires sur les limites de suites (somme, produit, quotient) sont les mêmes que pour les limites en $+\infty$ d'une fonction.

Les Suites : Fiche Méthode

I. Monotonie

- On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ après l'avoir exprimé en fonction de n .
- Si $u_n > 0$ pour tout n (et seulement dans ce cas), on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (méthode conseillée lorsque u_n s'écrit sous forme d'un produit ou d'un quotient).

II. Suites arithmétiques

- On montre que (u_n) est arithmétique en calculant $u_{n+1} - u_n$, et en vérifiant que cette quantité ne dépend pas de n .
- Pour exprimer u_n en fonction de n , il est préférable de retenir la formule $u_n = u_p + (n - p)r$, valable quel que soit le premier terme de la suite arithmétique.
- Retenir que la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par $S_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

(tester sur une ou deux valeurs de n en cas de doute).

III. Suites géométriques

- On montre que (u_n) est géométrique en calculant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (si $u_n \neq 0$) et en vérifiant que cette quantité ne dépend pas de n .
- Retenir que : $u_n = u_p q^{n-p}$
- Retenir que si $q \neq 1$, alors : $S_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

IV. Limites

- Si u_n s'écrit $f(n)$, se ramener aux théorèmes sur les limites de fonctions en $+\infty$.
- Comparer le plus souvent possible u_n à des suites connues, grâce aux théorèmes de comparaison suivants :

Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$,
alors (u_n) converge vers l et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

- Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

et du théorème suivant :

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l,$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l.$$

Les Suites : Exercices

Exercice 1

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

1. On donne : $u_5 = 7$, $r = 2$.

Calculer u_1 , u_{25} et u_{100} .

2. On donne : $u_3 = 12$, $u_8 = 0$.

Calculer r , u_0 et u_{18} .

3. On donne : $u_7 = \frac{7}{2}$, $u_{13} = \frac{13}{2}$.

Calculer u_0 .

Exercice 2

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q .

1. On donne : $u_1 = 3$ et $q = -2$.

Calculer u_4 , u_8 et u_{12} .

2. On donne $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$.

Calculer u_0 , u_{15} et u_{20} .

Exercice 3

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ et $u_6 = 20$.

Calculer son premier terme u_0 et sa raison r .

Exercice 4

Déterminer sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3 .

Exercice 5

Une suite arithmétique u de raison 5 est telle que $u_0 = 2$ et, n étant un nombre entier, $\sum_{i=3}^{i=n} u_i = 6456$

Calculer n .

Exercice 6

Déterminer quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et la somme de leurs carrés est 116.

Exercice 7

Une suite géométrique v est croissante et ses termes sont strictement négatifs.

1. Justifier que la raison b de la suite est telle que $0 < b < 1$.

2. On suppose que $v_1 v_3 = \frac{4}{9}$ et $v_1 + v_2 + v_3 = -\frac{19}{9}$.

Calculer v_1 , v_2 , v_3 et b .

Exercice 8

Calculer les sommes S et S' .

$$S = 2 + 6 + 18 + \dots + 118\,098$$

$$S' = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{59049}$$

Exercice 9

Au cours d'une bourse aux livres, un manuel scolaire perd chaque année 12% de sa valeur. Un livre a été acheté neuf en 1985, il coûtait alors 150F. Quel est son prix à la bourse aux livres de 1990 ? de 1995 ?



Correction

Exercice 1

Rappels :

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors pour tout entier naturel n ,
 $u_n = u_0 + nr$.

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n-p)r$

1. On a :

$$u_5 = u_1 + (5 - 1)r, \text{ donc } u_1 = u_5 - 4r = 7 - 4 \times 2 = 7 - 8 = -1$$

$$\text{Donc : } \mathbf{u_1 = -1}$$

$$u_{25} = u_5 + (25 - 5)r = 7 + 20 \times 2 = 7 + 40 = 47$$

$$\text{Donc : } \mathbf{u_{25} = 47}$$

$$u_{100} = u_5 + (100 - 5)r = 7 + 95 \times 2 = 7 + 190 = 197$$

$$\text{Donc : } \mathbf{u_{100} = 197}$$

2. On a :

$$u_8 = u_3 + (8 - 3)r = u_3 + 5r, \text{ donc : } 0 = 12 + 5r$$

$$\text{soit : } \mathbf{r = -\frac{12}{5}}$$

$$u_3 = u_0 + 3r, \text{ donc } u_0 = u_3 - 3r = 12 - 3 \times -\frac{12}{5} = \frac{60}{5} + \frac{36}{5} = \frac{96}{5}$$

$$\text{Donc : } \mathbf{u_0 = \frac{96}{5}}$$

$$u_{18} = u_0 + 18r = \frac{96}{5} + 18 \times \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{96}{5} - \frac{216}{5} = -\frac{120}{5} = -24$$

$$\text{Donc : } \mathbf{u_{18} = -24}$$

3. On a :

$$u_7 = u_0 + 7r, \text{ donc } r = \frac{u_7 - u_0}{7}$$

$$\text{De plus, } u_{13} = u_0 + 13r, \text{ donc } u_{13} = u_0 + 13 \times \frac{u_7 - u_0}{7}, \text{ donc :}$$

$$7u_{13} = 7u_0 + 13(u_7 - u_0)$$

$$7u_{13} = 7u_0 + 13u_7 - 13u_0$$

$$7u_{13} = -6u_0 + 13u_7$$

$$u_0 = \frac{7u_{13} - 13u_7}{-6} = \frac{7 \times \frac{13}{2} - 13 \times \frac{7}{2}}{-6}$$

$$\text{Donc : } \mathbf{u_0 = 0}$$

Exercice 2

Rappels :

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors pour tout entier naturel n ,
 $u_n = u_0 q^n$

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p q^{n-p}$

1. On a :

$$u_4 = u_1 q^{4-1} = u_1 q^3 = 3 \times (-2)^3 = 3 \times (-8) = -24$$

$$\text{Donc : } \mathbf{u_4 = -24}$$

$$u_8 = u_1 q^{8-1} = u_1 q^7 = 3 \times (-2)^7 = 3 \times (-128) = -384$$

Donc : $u_8 = -384$

$$u_{12} = u_1 q^{12-1} = u_1 q^{11} = 3 \times (-2)^{11} = 3 \times (-2048) = -6144$$

Donc : $u_{12} = -6144$

2. Déterminons q :

$$u_7 = u_3 q^4, \text{ donc } q^4 = \frac{u_7}{u_3} = \frac{18}{2} = 9.$$

Donc $q^2 = 3$. On a alors deux possibilités pour la raison q : $q = -\sqrt{3}$ ou $q = \sqrt{3}$.

• Si $q = -\sqrt{3}$, alors :

$$u_3 = u_0 q^3, \text{ donc } u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{2}{(-\sqrt{3})^3}$$

$$u_0 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$u_{15} = u_0 q^{15} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \times (-\sqrt{3})^{15} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times (-\sqrt{3})^{2 \times 7 + 1}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times 3^7 \times (-\sqrt{3})$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 3^7}{3^2}$$

$$= 2 \times 3^6 = 1458$$

$$u_{20} = u_0 q^{20} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \times (-\sqrt{3})^{20} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \times (-\sqrt{3})^{2 \times 10} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^{10}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3} \times 3^{10}}{3^2} = -2\sqrt{3} \times 3^8 = -13122\sqrt{3}$$

Donc : si $q = -\sqrt{3}$, alors $u_0 = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $u_{15} = 1458$ et $u_{20} = -13122\sqrt{3}$

• Si $q = \sqrt{3}$, alors :

$$u_3 = u_0 q^3, \text{ donc } u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{2}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$u_{15} = u_0 q^{15} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times (\sqrt{3})^{15} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times (\sqrt{3})^{2 \times 7 + 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times 3^7 \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 3^7}{3^2}$$

$$= 2 \times 3^6 = 1458$$

$$u_{20} = u_0 q^{20} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times (\sqrt{3})^{20} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times (\sqrt{3})^{2 \times 10} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^{10}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times 3^{10}}{3^2} = 2\sqrt{3} \times 3^8 = 13122\sqrt{3}$$

Donc : si $q = \sqrt{3}$, alors $u_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $u_{15} = 1458$ et $u_{20} = 13122\sqrt{3}$

Exercice 3

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , donc :

$$u_2 = u_0 + 2r, u_3 = u_0 + 3r, u_4 = u_0 + 4r \text{ et } u_6 = u_0 + 6r.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_6 = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} 3u_0 + 9r = 15 \\ u_0 + 6r = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 + 3r = 5 \\ u_0 + 6r = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = 5 - 3r \\ u_0 = 20 - 6r \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = 5 - 3r \\ 5 - 3r = 20 - 6r \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = 5 - 3r \\ r = 5 \end{cases}$$

D'où : $u_0 = -10$ et $r = 5$.

Pour tout entier naturel n , $u_n = -10 + 5n$.

Exercice 4

Déterminons sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3 :

La suite des impairs peut être notée : $u_n = 2n + 1$, pour tout entier n .

On cherche donc l'entier p (et u_p) tel que : $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \dots + u_{p+6} = 7^3 = 343$.

Or, $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{p+6} = (2p + 1) + (2p + 3) + \dots + (2p + 13) = 7 \times 2p + (1 + 3 + 5 + \dots + 13)$.

Or, $1 + 3 + 5 + \dots + 13 = 7 \left(1 + \frac{6 \times 2}{2}\right) = 49$, somme des 7 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

Ainsi : $14p + 49 = 7^3 = 343$, soit $p = 21$; puis $u_p = 43$.

D'où : les sept nombres recherchés sont : 43, 45, 47, 49, 51, 53 et 55.

Exercice 5

$$S_n = u_3 + \dots + u_n = (n - 2) \left[u_3 + \frac{(n - 3)r}{2} \right], \quad u_3 = 2 + 3 \times 5 = 17$$

On cherche donc n tel que : $(n - 2) \left(17 + \frac{5(n - 3)}{2} \right) = 6456$; soit encore : $(n - 2)(5n + 19) = 12\,912$. Il faut donc trouver les racines du polynôme $5n^2 + 9n - 12950 = 0$:

$$n_1 = \frac{-9 - 509}{10} = 51,8 \text{ qui n'est pas un entier! et } n_2 = \frac{-9 + 509}{10} = 50$$

Exercice 6

Soit (u_n) une telle suite de premier terme u_0 et de raison r .

Il existe k tel que : $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} = 12$ et $u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = 116$

Or : $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} = 4u_k + 6r$ et $u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = u_k^2 + (u_k + r)^2 + (u_k + 2r)^2 + (u_k + 3r)^2$

$$u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = 4u_k^2 + 12u_k r + 14r^2$$

$$u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = (2u_k + 3r)^2 + 5r^2$$

Or $4u_k + 6r = 12$ donc $2u_k + 3r = 6$

$$\text{Ainsi : } 6^2 + 5r^2 = 116$$

Soit : $r = \pm 4$

Puis $2u_k + 3r = 6$ donc $u_k = -3$ ou $u_k = 9$

Ainsi : -3, 1, 5, 9 conviennent ainsi que : 9, 5, 1, -3.

Exercice 7

Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison b , alors pour tout entier n : $v_n = v_0 b^n$.

1. Si (v_n) est croissante et ses termes sont strictement négatifs alors $0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, c'est-à-dire $0 < b < 1$.

2. $v_1 v_3 = v_1^2 b^2$ et $v_1 + v_2 + v_3 = v_1 \frac{1 - b^3}{1 - b}$; $1 - b^3 = (1 - b)(1 + b + b^2)$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} v_1^2 b^2 = \frac{4}{9} \\ v_1(1 + b + b^2) = -\frac{19}{9} \end{cases} \text{ soit encore : } \begin{cases} v_1 b = \pm \frac{2}{3} \\ \pm \frac{2(1 + b + b^2)}{3b} = -\frac{19}{9} \end{cases}$$

Soit $6b^2 + 25b + 6 = 0$ ou $6b^2 - 13b + 6 = 0$

La première équation a deux solutions négatives (cf première questions)

Donc $b = \frac{2}{3}$.

$$v_1 = -1; v_2 = -\frac{2}{3}; v_3 = -\frac{4}{9}.$$

Exercice 8

$$S = 2 + 6 + 18 + \dots + 118\,098$$

S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

$$u_0 = 2; u_1 = 2 \times 3; u_2 = 2 \times 3^2 \dots 118\,098 = 2 \times 59\,049 = 2 \times 3^{10}.$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = u_0 \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 177\,146.$$

$$S' = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{59049}$$

S' est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{3}$.

$$\text{De plus : } 59049 = 3^{10}. \text{ Donc } S' = 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{177\,146}{59\,049}.$$

Exercice 9

En 1985 le prix du livre est $u_0 = 150$. En 1986 il vaut : $u_1 = 150 \times 0,88, \dots$; en 1990 (donc 5 ans après), il vaut : $u_5 = 150 \times 0,88^5 = 79,2$ F.

Et en 1995, il ne vaut plus que : $u_{10} = 150 \times 0,88^{10} = 41,8$ F.

Suites : Exercices

exercice 1

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r .

1. On donne : $u_5 = 7$, $r = 2$.

Calculer u_1 , u_{25} et u_{100} .

2. On donne : $u_3 = 12$, $u_8 = 0$.

Calculer r , u_0 et u_{18} .

3. On donne : $u_{\frac{7}{2}} = 2$, $u_{\frac{13}{2}} = \frac{13}{2}$.

Calculer u_0 .

exercice 2

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q .

1. On donne : $u_1 = 3$ et $q = -2$.

Calculer u_4 , u_8 et u_{12} .

2. On donne $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$.

Calculer u_0 , u_{15} et u_{20} .

exercice 3

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ et $u_6 = 20$.

Calculer son premier terme u_0 et sa raison r .

exercice 4

Déterminer sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3 .

exercice 5

Existe-t-il une suite telle que les trois premiers termes u_0 , u_1 , u_2 soient à la fois en progression arithmétique et géométrique ?



exercice 6

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = -4$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.

1. On suppose que la suite (u_n) est arithmétique.

a) Calculer u_3, u_5, u_0 .

Plus généralement, exprimer u_n en fonction de u_p et de la raison r , pour n et p entiers quelconques.

b) Calculer S_5 et S_{10} .

c) Etudier la convergence de (u_n) .

2. Mêmes questions si (u_n) est supposée géométrique.

exercice 7

Une suite arithmétique u de raison 5 est telle que $u_n = 2$ et $\sum_{i=3}^{i=n} u_i = 6456$, n étant un nombre entier, Calculer n .

0

exercice 8

Déterminer quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et la somme de leurs carrés est 116.

exercice 9

Une suite géométrique v est croissante et ses termes sont strictement négatifs.

1. Justifier que la raison b de la suite est telle que $0 < b < 1$.

2. On suppose que $v_1 v_3 = \frac{4}{9}$ et $v_1 + v_2 + v_3 = -\frac{19}{9}$.
Calculer v_1, v_2, v_3 et b .

exercice 10

Calculer les sommes S et S' .

$$S = 2 + 6 + 18 + \dots + 118\,098$$



$$S' = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{59049}$$

exercice 11

Une horloge sonne toutes les heures.

Quel est le nombre de sons de cloche entendus en 24 heures ?

exercice 12

Cinq personnes se trouvent dans une pièce. L'une d'entre elles remarque que leurs âges sont en progression arithmétique. Sachant que la somme des carrés de leurs âges est égale à l'année où se passe cette histoire (à savoir 1980) et qu'à elles toutes, les personnes totalisent 90 années, quel est l'âge de chacune des personnes ?

exercice 13

La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 40 jours, il a recouvert tout l'étang. Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?

exercice 14

Au cours d'une bourse aux livres, un manuel scolaire perd chaque année 12% de sa valeur. Un livre a été acheté neuf en 1985, il coûtait alors 150F. Quel est son prix à la bourse aux livres de 1990 ? de 1995 ?

exercice 15

On cherche à calculer l'aire A de la surface comprise entre la portion de parabole d'équation $y = -x^2 + 1$ et les axes du repère (voir figure).

Pour cela, on divise $[0,1]$ en n parties égales et l'on remarque que A est comprise entre l'aire A_n de la région délimitée en noir et l'aire A'_n de la région délimitée en rouge.

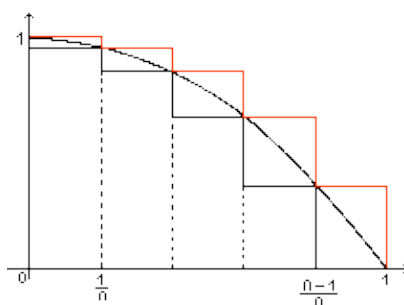
a) Calculer A_n et A'_n en fonction de n .

(On admettra la formule : $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

b) Calculer A_n et A'_n pour $n = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^{10}$ à l'aide d'une calculatrice. Quel résultat semble se dégager ?

c) Prouver ce résultat et en déduire la valeur de A .





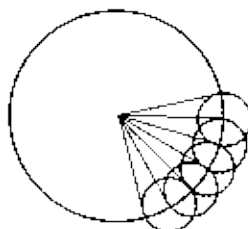
exercice 16 - Une rosace

On partage un cercle de rayon 1 en n parties égales et on dessine une rosace comme sur la figure ci-après . Soit l_n la somme des périmètres des petits cercles tracés et soit s_n la somme des aires des petits disques tracés. On se demande si :

- ▶ l_n va tendre vers 0 car les cercles sont de plus en plus petits ;
- ▶ l_n va tendre vers $+\infty$ car il y a de plus en plus de cercles ;
- ▶ l_n va tendre vers une valeur finie.

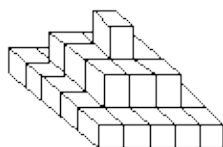
Trouver le bon résultat par le calcul et faire le même travail pour s_n .

(On admettra que pour $x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$).



exercice 17 - La pyramide de Saqqarah

On considère une pyramide à n étages et on appelle p_n le nombre de cubes qui la composent.



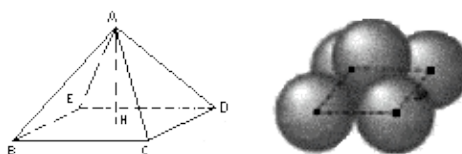
- a) Trouver une formule donnant p_n comme une somme de n carrés entiers. Soit $S_n = 0 + 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$.
- b) Exprimer p_n en fonction de S_{2n-1} et S_{n-1} .



- c) Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 . Trouver un polynôme P de degré 3, tel que $P(n) = S_n$ pour $n \leq 3$.
On admet que pour tout n , $P(n) = S_n$.
- d) En utilisant b, exprimer p_n sous forme de polynôme.
- e) Application numérique :
la pyramide de Saqqarah à 6 étages. Calculer p_n .

exercice 18 - Empilements de billes

- a) Soit ABCDE une pyramide à base carrée ayant toutes ses arêtes égales ($AD = a$). Calculer la hauteur AH de cette pyramide.



- b) On empile des billes de même rayon R de telle sorte que chaque bille repose sur quatre billes dont les centres définissent un carré de côté $2R$. Le niveau 1 contient une bille, le niveau 2 contient quatre billes. Quel est le nombre de billes du niveau 3, du niveau 4, du niveau n (n entier naturel) ?
- c) On note h_n la hauteur d'un empilement à n niveaux. Démontrez que (h_n) est une suite arithmétique et donnez le premier terme et la raison.

exercice 19

Montrer que chaque suite proposée a pour limite ℓ .

- a) $u_n = \frac{1}{n+3}, \ell = 0$ et $v_n = \frac{2}{n^2}, \ell = 0$
- b) $u_n = n^2 + 1, \ell = +\infty$ et $v_n = 2n^3, \ell = +\infty$
- c) $u_n = -\frac{\sqrt{n}}{2}, \ell = -\infty$ et $v_n = -n - 4, \ell = -\infty$
- d) $u_n = \frac{n^2 + 5}{2n^2 - 3n + 2}, \ell = 0$ et $v_n = n + \frac{1}{n}, \ell = +\infty$
- e) $u_n = \frac{1-n}{2n}, \ell = -\infty$ et $v_n = \frac{2}{n} + \frac{3}{n}, \ell = 0$
- f) $u_n = \frac{2n}{n+1}, \ell = 2$ et $v_n = -n - 4, \ell = -\infty$

exercice 20



Montrer que les suites proposées tendent vers une limite à préciser.

- a) $u_n = \frac{3}{2\sqrt{n+7}}$; $v_n = \frac{n-1}{n^2+1}$; $w_n = \frac{n^2-1}{2n^2+n}$
 b) $u_n = \frac{2\sqrt{n}}{3n^2+4}$; $v_n = -n^2 - n + 1$; $w_n = \frac{-2n+1}{4n+1}$
 c) $u_n = (2n+1)^2$; $v_n = -n - \frac{3}{n}$; $w_n = \frac{4n^2+1}{n(2n+1)}$

exercice 21

Etudier d'abord la limite de la suite géométrique (u_n) , puis celle de la suite (v_n) .

- a) $u_n = 2^n$; $v_n = 1 + \frac{1}{2^n}$
 b) $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; $v_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n$
 c) $u_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$; $v_n = 7 + \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
 d) $u_n = -5^n$; $v_n = 2 - 5^n$

exercice 22

Montrer que la suite (u_n) satisfait la relation (R), puis en déduire la limite de cette suite.

- a) $u_n = \frac{\cos n}{n+1}$; (R) : $|u_n| \leq \frac{1}{n+1}$
 b) $u_n = \sin(2n) + n$; (R) : $|u_n| \geq n-1$
 c) $u_n = \frac{n^2+1}{(-1)^n+n}$; (R) : $|u_n| \leq \frac{n+1}{n^2+1}$
 d) $u_n = \frac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$; (R) : $|u_n| \geq \frac{n-1}{3}$

exercice 23

- a) Vérifier que la suite $\left(\frac{4^n}{n^2}\right)$ est croissante.
 b) En déduire que $\left(\frac{4^n}{n}\right)$ tend vers $+\infty$.
 c) Déterminer la limite de $\left(\frac{4^n+n}{4^n+2n}\right)$.



exercice 24

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier le comportement à l'infini de la suite (u_n) , en utilisant des majorations ou des minoration.

a) $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$

b) $u_n = \frac{3^n - 4}{(-1)^n \sin n}$

c) $u_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 4}$

d) $u_n = \frac{n-1}{2n^2 - 3n + 2}$

e) $u_n = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + (-1)^n}$

f) $u_n = \frac{1}{2^n}$

exercice 25

En utilisant les opérations sur les limites, déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n) dans chacun des cas ci-dessous:

a) $u_n = \frac{4n-1}{n+4}$

b) $u_n = \frac{n+4}{n+3}$

c) $u_n = \frac{n^2+4}{n}$

d) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n+n} + \frac{n}{n+1}$

e) $u_n = \frac{1}{3^n(n+1)}$

exercice 26

Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 12}$.

a) Déterminer les cinq premiers termes de cette suite. Quel semble être la limite de (u_n) ?

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.

En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n) .

exercice 27

Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 .



b) Montrer par récurrence que si $0 \leq u_n \leq 2$, alors $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

c) Résoudre l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geq 0$.

Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n . Déduire de ce qui précède que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier n . Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

d) Montrer que pour tout n , $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - 2|$.

$$|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$$

En déduire que pour tout n ,

Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite (u_n) ?

exercice 28

Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 \geq -3 \\ u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n} \end{cases}$$

a) Prenons $u_0 = 0$. Constatons, à l'aide d'une calculatrice, que (u_n) semble converger vers une valeur l dont on donnera une valeur approchée)

Vérifier la même propriété en choisissant une autre valeur initiale u_0 .

b) Quelle valeur de u_0 faut-il prendre pour que la suite (u_n) soit stationnaire ?

c) Nous allons maintenant prouver que (u_n) converge bien vers l .

Montrer que $(u_{n+1} - l)(u_{n+1} + l) = u_n - l$ pour tout entier n .

En déduire que $|u_{n+1} - l| \leq \frac{|u_n - l|}{l}$ puis que $|u_n - l| \leq \frac{|u_0 - l|}{l^n}$ et conclure.



Correction

exercice 1

Rappels :

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n-p)r$

1. On a :

$$u_5 = u_1 + (5 - 1)r, \text{ donc } u_1 = u_5 - 4r = 7 - 4 \times 2 = 7 - 8 = -1$$

Donc : **$u_1 = -1$**

$$u_{25} = u_5 + (25 - 5)r = 7 + 20 \times 2 = 7 + 40 = 47$$

Donc : **$u_{25} = 47$**

$$u_{100} = u_5 + (100 - 5)r = 7 + 95 \times 2 = 7 + 190 = 197$$



Donc : $u_{100} = 197$

2. On a :

$$u_8 = u_3 + (8-3)r = u_3 + 5r, \text{ donc } 0 = 12 + 5r$$

$$\text{soit : } r = -\frac{12}{5}$$

$$u = u + 3r, \text{ donc } u = u - 3r = 12 - 3 \times -\frac{12}{5} = \frac{60}{5} + \frac{36}{5} = \frac{96}{5}$$

$$\text{Donc : } u = \frac{96}{5}$$

$$u = u + 18r = \frac{96}{5} + 18 \times \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{96}{5} - \frac{216}{5} = -\frac{120}{5} = -24$$

$$\text{Donc : } u_{18} = -24$$

3. On a :

$$u = u + 7r, \text{ donc } r = \frac{u_7 - u_0}{7}$$

$$\text{De plus, } u = u + 13r, \text{ donc } u = u + 13 \times \frac{u_7 - u_0}{7}, \text{ donc :}$$

$$7u_{13} = 7u_0 + 13(u_7 - u_0)$$

$$7u_{13} = 7u_0 + 13u_7 - 13u_0$$

$$7u_{13} = -6u_0 + 13u_7$$

$$u_0 = \frac{7u_{13} - 13u_7}{-6} = \frac{7 \times \frac{13}{2} - 13 \times \frac{7}{2}}{-6}$$

$$\text{Donc : } u_0 = 0$$

exercice 2

Rappels :

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 q^n$

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p q^{n-p}$

1. On a :

$$u_4 = u_1 q^{4-1} = u_1 q^3 = 3 \times (-2)^3 = 3 \times (-8) = -24$$

$$\text{Donc : } u_4 = -24$$

$$u_8 = u_1 q^{8-7} = u_1 q^7 = 3 \times (-2)^7 = 3 \times (-128) = -384$$

$$\text{Donc : } u_8 = -384$$

$$u_{12} = u_1 q^{12-1} = u_1 q^{11} = 3 \times (-2)^{11} = 3 \times (-2048) = -6144$$

$$\text{Donc : } u_{12} = -6144$$

2. Déterminons q :

$$q^4 = \frac{u_7}{u_3} = \frac{18}{2} = 9$$

$$\text{Donc } q^2 = 3. \text{ On a alors deux possibilités pour la raison } q : q = -\sqrt{3} \text{ ou } q = \sqrt{3}.$$



► Si $q = -\sqrt{3}$, alors :

$$u_3 = \frac{u_0}{q^3} = \frac{2}{(-\sqrt{3})^3}$$

$$u_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$u_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$u_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times (-\sqrt{3})^{15} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 3^7 \times (-\sqrt{3})^{2 \times 7 + 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 3^7 \times 3^7 \times (-\sqrt{3})$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 3^7}{3^2}$$

$$= 2 \times 3^6 = 1\,458$$

$$u_{15} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times (-\sqrt{3})^{20} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times (-\sqrt{3})^{2 \times 10} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 3^{10}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times 3^{10}}{3^2} = -2\sqrt{3} \times 3^8 = -13\,122\sqrt{3}$$

Donc : si $q = -\sqrt{3}$, alors $u_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $u_3 = 1\,458$ et $u_{15} = -13\,122\sqrt{3}$

► Si $q = \sqrt{3}$, alors :

$$u_3 = \frac{u_0}{q^3} = \frac{2}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$u_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times (\sqrt{3})^{15} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times (\sqrt{3})^{2 \times 7 + 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times 3^7 \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 3^7}{3^2}$$

$$= 2 \times 3^6 = 1\,458$$

$$u_{15} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times (\sqrt{3})^{20} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times (\sqrt{3})^{2 \times 10} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^{10}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times 3^{10}}{3^2} = 2\sqrt{3} \times 3^8 = 13\,122\sqrt{3}$$

Donc : si $q = \sqrt{3}$, alors $u_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $u_3 = 1\,458$ et $u_{15} = 13\,122\sqrt{3}$

15

exercice 3

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , donc :

$$u_2 = u_0 + 2r, u_3 = u_0 + 3r, u_4 = u_0 + 4r \text{ et } u_6 = u_0 + 6r.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_6 = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} 3u_0 + 9r = 15 \\ u_0 + 6r = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 + 3r = 5 \\ u_0 + 6r = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = 5 - 3r \\ u_0 = 20 - 6r \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_0 = 5 - 3r \\ 5 - 3r = 20 - 6r \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = 5 - 3r \\ r = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = -10 \\ r = 5 \end{cases}$$



D'où : $u_0 = -10$ et $r = 5$.

Pour tout entier naturel n , $u_n = -10 + 5n$.

exercice 4

Déterminons sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3 :

La suite des impairs peut être notée: $u_n = 2n + 1$, pour tout entier n .

On cherche donc l'entier p (et u_p) tel que : $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \dots + u_{p+6} = 7^3 = 343$.

Or, $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{p+6} = (2p+1) + (2p+3) + \dots + (2p+13) = 7 \times 2p + (1+3+5+\dots+13)$.

Or, $1+3+5+\dots+13 = 7 \left(1 + \frac{6 \times 2}{2}\right) = 49$, somme des 7 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

Ainsi : $14p + 49 = 7^3 = 343$, soit $p = 21$; puis $u_p = 43$.

D'où : les sept nombres recherchés sont : 43, 45, 47, 49, 51, 53 et 55.

exercice 5

Déterminons s'il existe une suite telle que les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 soient à la fois en progression arithmétique et géométrique :

Si ces trois termes sont en progression arithmétique, alors il existe un réel r tel que : $u_1 = u_0 + r$ et $u_2 = u_1 + r$.

De même, s'ils sont en progression géométrique, alors il existe un réel q non nul tel que : $u_1 = u_0 q$ et $u_2 = u_1 q^2$.

On obtient alors le système à deux équations et deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} u_0 \times q = u_0 + r \\ u_0 \times q^2 = u_0 + 2r \end{cases} \text{ ou encore: } \begin{cases} u_0(q-1) = r \\ \frac{u_0(q^2-1)}{2} = r \end{cases}$$

Réolvons l'équation $q-1 = \frac{q^2-1}{2}$:

$$2q-2 = q^2-1$$

$$q^2-2q+1=0$$

$$(q-1)^2=0$$

$$q=1$$

Cette équation admet une unique solution 1.

Donc : $u_0 = u_1 = u_2$

D'où : les seules suites dont les trois premiers termes sont en progression géométriques et arithmétiques sont les suites constantes.

exercice 6

1. a) $u = u + 3r$, la raison r vaut donc : $r = \frac{3}{2} = 1,5$
Donc : $u_3 = -5,5$; $u_5 = -2,5$; $u_0 = -10$.



$$u_n = u_p + \frac{3(n-p)}{2}$$

$$1. b) S_5 = u_0 + u_1 + \dots + u_5 = 6 \left[u_0 + \frac{5r}{2} \right] = -\frac{75}{2}$$

$$S_{10} = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = 11 \left[u_0 + \frac{10r}{2} \right] = -\frac{55}{2}$$

1. c) (u_n) est une suite arithmétique de raison positive, donc elle converge vers l'infini.

2. $u = u \cdot q$; soit $q^3 = \frac{u_7}{u_4} = -\frac{1}{8}$; on en déduit $q = -\frac{1}{2}$. Puis $u = 8$; $u = 2$; $u = -64$; $u_n = \frac{u_p}{(-2)^{n-p}}$.

$$S_5 = u_0 \times \frac{1-q^6}{1-q} = 42 \quad \text{et} \quad S_{10} = u_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = \frac{341}{8} = 42,625$$

(u_n) est une suite géométrique de raison $|q| < 1$, donc elle converge vers 0.

exercice 7

$$S_n = u_3 + \dots + u_n = (n-2) \left[u_3 + \frac{(n-3)r}{2} \right]$$

$$u = 2 + 3 \times 5 = 17$$

$$(n-2) \left(17 + \frac{5(n-3)}{2} \right) = 6456$$

On cherche donc n tel que : ; soit encore : $(n-2)(5n+19) = 12912$. Il faut donc trouver les racines du polynôme $5n^2 + 9n - 12950 = 0$:

$$n_1 = \frac{-9-509}{10} = 51,8 \quad \text{qui n'est pas un entier !} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-9+509}{10} = 50$$

exercice 8

Soit (u_n) une telle suite de premier terme u_0 et de raison r .

Il existe k tel que : $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} = 12$ et $u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = 116$

Or : $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} = 4u_k + 6r$ et

$$u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = u_k^2 + (u_k + r)^2 + (u_k + 2r)^2 + (u_k + 3r)^2$$

$$u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = 4u_k^2 + 12u_k r + 14r^2$$

$$u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = (2u_k + 3r)^2 + 5r^2$$

Or $4u_k + 6r = 12$ donc $2u_k + 3r = 6$

$$\text{Ainsi : } 6^2 + 5r^2 = 116$$

$$\text{Soit : } r = \pm 4$$

Puis $2u_k + 3r = 6$ donc $u_k = -3$ ou $u_k = 9$

Ainsi : -3, 1, 5, 9 conviennent ainsi que : 9, 5, 1, -3.



exercice 9

Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison b , alors pour tout entier n : $v_n = v_0 b^n$.

1. Si (v_n) est croissante et ses termes sont strictement négatifs alors $0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, c'est-à-dire $0 < b < 1$.

2. $v_1 + v_2 + v_3 = v_1 \frac{1 - b^3}{1 - b}$; $1 - b = (1 - b)(1 + b + b^2)$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} v_1^2 b^2 = \frac{4}{9} \\ v_1(1 + b + b^2) = -\frac{19}{9} \end{cases} \quad \text{soit encore :} \quad \begin{cases} v_1 b = \pm \frac{2}{3} \\ \pm \frac{2(1 + b + b^2)}{3b} = -\frac{19}{9} \end{cases}$$

Soit $6b^2 + 25b + 6 = 0$ ou $6b^2 - 13b + 6 = 0$

La première équation a deux solutions négatives (cf première questions)

Donc $b = \frac{2}{3}$.

$v_1 = -1$; $v_2 = -\frac{2}{3}$; $v_3 = -\frac{4}{9}$.

exercice 10

$S = 2 + 6 + 18 + \dots + 118\,098$

S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

$u_0 = 2$; $u_1 = 2 \times 3$; $u_2 = 2 \times 3^2 \dots 118\,098 = 2 \times 59\,049 = 2 \times 3^{10}$.

$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = u_0 \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 177\,146$.

$S' = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{59\,049}$

S' est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{3}$.

$$S' = 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{177\,146}{59\,049}$$

De plus : $59\,049 = 3^{10}$. Donc

exercice 11

$1 + 2 + 3 + \dots + 12 + 1 + 2 + \dots + 12 = 2(1 + 2 + \dots + 12)$.

Somme des 12 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1 :

$1 + 2 + \dots + 12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78$

Donc en 24 heures la pendule aura sonné (2×78) fois, soit **156 fois**.



exercice 12

Soit u_0 l'âge de la plus jeune personne. L'âge des autres personnes sont respectivement : u_1 , u_2 , u_3 et u_4 ; avec $u_1 = u_0 + r$, ...

On a donc :

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1980 \text{ et } u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 90$$

Pour la résolution, cf exercice 8 : 6 ans, 12 ans, 18 ans, 24 ans et 30 ans.

exercice 13

Soit u_0 la taille du nénuphar le jour 0. Au bout d'un jour il mesure $u_1 = 2u_0$, ... ; au bout de 40 jours il mesure $u_{40} = u_0 2^{40}$.

On cherche l'entier p tel que $u_p = u_0 \times 2^p = \frac{u_{40}}{2}$.
On obtient facilement $p = 39$.

exercice 14

En 1985 le prix du livre est $u_0 = 150$. En 1986 il vaut : $u_1 = 150 \times 0,88$, ... ; en 1990 (donc 5 ans après), il vaut : $u_5 = 150 \times 0,88^5 = 79,2$ F.

Et en 1995, il ne vaut plus que : $u_{10} = 150 \times 0,88^{10} = 41,8$ F.

exercice 15

a) An, l'aire inférieure, est délimitée par des rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ et de longueur $f\left(\frac{k}{n}\right)$. Donc :

$$A_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1) \right]$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1) = n - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^2}$$

$$\text{Ainsi } A_n = \frac{1}{n} \left[n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} \right] = 1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{4n^2 - 3n - 1}{6n^2}$$

$$A'_n = \frac{1}{n} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

$$A'_n = 1 - \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}$$

$$A'_n = \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n^2}$$



c) pour tout n , $A_n < A < A'_n$.

Et quand n tend vers l'infini, A_n et A'_n tendent vers $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; donc $A = \frac{2}{3}$.

exercice 16

Il y a n cercle de rayons r . Calculons ce rayon : l'angle au centre de chaque portion est $\frac{2\pi}{n}$ et le rayon du cercle initial est 1. On applique le théorème d'Al Kashi qui nous donne :

$$r_n^2 = 2 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right). \text{ D'où : } r_n = 2 \sin \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

$$l_n = n \times 4\pi \sin \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

Or, grâce à l'inégalité proposée on obtient : $\frac{\pi}{n} - \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^3}{6} \leq \sin \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{n}$

$$\text{Soit : } \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3} \leq \sin \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{n}$$

Donc : $4\pi^2 - \frac{2\pi^4}{3n^3} \leq l_n \leq 4\pi^2$ qui nous permet de conclure que l tend vers $4\pi^2$ quand n tend vers l'infini.

$a_n = n \times \pi \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) \right)^2$; avec l'inégalité on peut conclure que la somme des aires tend vers 0.

exercice 17

a) $p_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$

b) $p_n = S_{2n-1} - 4S_{n-1}$.

c) $p(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$

d) $p_n = P(2n-1) - 4P(n-1)$; $p_n = \frac{4n^3 - n}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

e) Pour $n = 6$, $p_6 = \frac{6 \times 11 \times 13}{3} = \boxed{286}$

Donc le nombre de cubes utilisés est de **286**.

exercice 18

a) AHD triangle rectangle en H. [HD] est une demi-diagonale de carré.

$$HD = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Puis } AH = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$



b) Niveau 3 : 9 billes ; Niveau 4: 16 billes ; Niveau n : n^2 billes.

c)
$$h_n = n \frac{R}{\sqrt{2}}$$

exercice 19

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+3) = +\infty$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
De même: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

b) $+\infty + 1 = +\infty$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 5) = +\infty$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = +\infty + 0 = +\infty$

e) Au numérateur on a déjà une forme indéterminée. Remarquons que

$$2n^2 - 3n + 2 = 1 - (1 - n)(2n - 1). \text{ Ainsi } u_n = \frac{1}{1 - n} - (2n - 1)$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - 1) = 0 - (+\infty) = -\infty$.
Pas de difficulté pour v_n .

f) Forme indéterminée: le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini; il va donc falloir factoriser par n

$$u_n = \frac{2n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n}}$$

le dénominateur:
Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

exercice 20

a) $u_n = \frac{3}{2\sqrt{n} + 7}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

v_n est une forme indéterminée, factorisons par n le numérateur et le dénominateur :

$$v_n = \frac{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n \left(n + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}$$

. Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers l'infini. Donc



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

Même méthode pour w : factoriser le numérateur et le dénominateur par n^2 . $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{1}{2}$.

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2.$$

exercice 21

a) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$, $q > 1$ donc la suite tend vers l'infini : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$;
puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

b) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$, $|q| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

c) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$, $|q| < 1$ donc la suite converge vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 7$.

d) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 5$, $q > 1$ donc la suite tend vers l'infini : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$;
puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

exercice 22

a) Pour tout n , $|\cos(n)| \leq 1$, donc $|u_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Donc : $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) Pour tout n , $\sin(2n) \geq -1$, donc $u_n \geq n - 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$ donc
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

c) $|u_n| = \frac{|n + (-1)^n|}{|n^2 + 1|} \leq \frac{n+1}{n^2+1}$. On en déduit : $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$, soit :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

d) $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $-1 + n \leq (-1)^n + n \leq 1 + n$ et $1 \leq (-1)^n + 2 \leq 3$, soit :
 $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{(-1)^n + 2} \leq 1$ et $\frac{n-1}{3} \leq u_n \leq n+1$.

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{3} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.



exercice 23

a) Posons $u_n = \frac{4^n}{n^2}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4^{n+1}}{n^2(n+1)^2} - \frac{4^n}{n^2} = \frac{4^n}{n^2(n+1)^2} (3n^2 - 2n - 1)$$

Pour étudier le signe de cette différence, il suffit donc d'étudier celui du facteur $(3n^2 - 2n - 1)$ (montrer qu'il est positif pour $n \geq 3$).

b) $\frac{4^n}{n^2} \geq \frac{4^n}{n^2}$ et la suite (u_n) définie précédemment est croissante et non majorée donc converge vers l'infini ; ainsi la suite $v_n = \frac{4^n}{n}$ tend vers l'infini.

c)
$$\frac{4^n + n}{4^n + 2n} = \frac{4^n \left(1 + \frac{n}{4^n}\right)}{4^n \left(1 + 2\frac{n}{4^n}\right)} = \frac{1 + \frac{n}{4^n}}{1 + 2\frac{n}{4^n}}$$
, et grâce à b), on peut conclure que cette limite est 1.

exercice 24

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ f) (u_n) n'admet pas de limite.

exercice 25

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 + 1 = 1$

e)
$$u_n = \frac{2^n \left(1 + \frac{n}{2^n}\right)}{3^n (1 + n)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1 + \frac{n}{2^n}}{1 + n}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $\frac{2}{3} < 1$) et le deuxième terme tend également vers 0 ; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.



exercice 26

a) Déterminons les cinq premiers termes de cette suite :

$$u_0 = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{u_0^2 + 12} = \frac{1}{2} \times \sqrt{0 + 12} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{u_1^2 + 12} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 12} = \frac{1}{2} \times \sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \times \sqrt{u_2^2 + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{4} + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

$$u_4 = \frac{1}{2} \times \sqrt{u_3^2 + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9 \times 7}{16} + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{255}{16}} = \frac{\sqrt{255}}{8}$$

La suite (u_n) semble converger vers 2.

b) Pour tout entier naturel n , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 12} \right)^2 - 4 = \frac{1}{4} (u_n^2 + 12) - 4$$

$$= \frac{1}{4} u_n^2 + 3 - 4$$

$$= \frac{1}{4} (u_n^2 - 4)$$

$$= \frac{1}{4} v_n$$

On en conclut que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

La raison $\frac{1}{4} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n^2 - 4$, donc $u_n = \sqrt{v_n + 4}$ (tous les termes de (u_n) sont positifs).

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$

exercice 27

a) $u_1 = 1,667$; $u_2 = 1,909$; $u_3 = 1,977$; $u_4 = 1,994$; $u_5 = 1,999$.

b) Hypothèse de récurrence : " $0 \leq u_n \leq 2$ ".

La proposition est vraie pour $n = 0, n = 1, \dots, n = 5$.

Supposons la vraie au rang p : $0 \leq u_p \leq 2$. Alors :

$2 \leq 3u_p + 2 \leq 8$ et $2 \leq u_p + 2 \leq 4$, donc $1 \leq u_{p+1} \leq 2$.

La proposition est alors vérifiée au rang $(p + 1)$.

On en conclut que la proposition est vraie pour tout entier n : u_n est bornée par 0 et 2.

c) L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geq 0$ est l'intervalle $\mathcal{S} = [-1 ; 2]$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2}$. Le numérateur est positif car pour tout n , $u_n \in \mathcal{S}$, et le dénominateur est positif car u_n est positif pour tout n . Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. On en conclut que la suite (u_n) est croissante.



d) $|u_{n+1} - 2| = \frac{|u_n - 2|}{|u_n + 2|}$; or pour tout $n : u_n + 2 \geq 2$, donc $\frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2}$ et $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - 2|$.

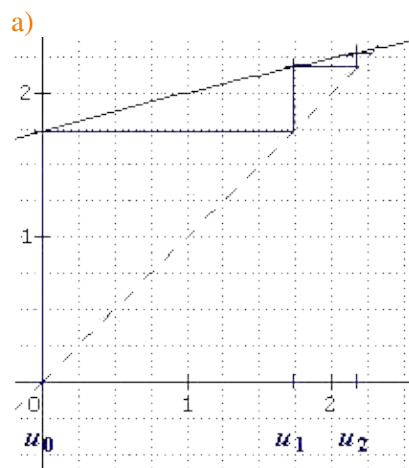
Alors $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.

Or $|u_0 - 2| = 1$, donc pour tout $n : |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison < 1)

On en déduit que $u_n - 2$ tend vers 0 puis u_n tend vers 2.

exercice 28



(u_n) semble converger vers 2,3.

De même en choisissant une valeur initiale $u_0 \geq -3$

b) (u_n) est une suite stationnaire si pour tout $n : u_{n+1} = u_n = u_0$, c'est-à-dire si : $u_0 = \sqrt{3 + u_0}$ ou encore $u_0^2 - u_0 - 3 = 0$. Ce polynôme a deux racines, dont une dans l'intervalle $[-3; +\infty[: u_0 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

c) $(u_{n+1} - \ell)(u_{n+1} + \ell) = u_{n+1}^2 - \ell^2 = 3 + u_n - \ell^2$.
Or $\ell^2 = 3 + \ell$ donc $3 - \ell^2 = -\ell$; ainsi : $(u_{n+1} - \ell)(u_{n+1} + \ell) = u_n - \ell$, pour tout entier n .

On en déduit que : $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{|u_n - \ell|}{|u_{n+1} + \ell|}$ et $|u_{n+1} + \ell| \geq \ell$ donc $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{|u_n - \ell|}{\ell}$ et par récurrence : $|u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{\ell^n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Ainsi : $|u_n - \ell|$ tend vers 0 et donc u_n tend vers ℓ .

Cours sur les barycentres

I. Barycentre de deux points pondérés

Théorème :

Soient A et B deux points et α et β deux réels.

Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Définition :

Soient A et B deux points et α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

L'unique point G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ est appelé barycentre des points A et B affectés des coefficients α et β .

remarques :

- On dit aussi que G est le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), ou encore que G est le barycentre du système (A, α) ; (B, β).
On note : $G = \text{bar} (A, \alpha) ; (B, \beta)$
- Si $\alpha = \beta$, on dit que G est l'isobarycentre des points A et B (A et B étant deux points distincts).

Théorème :

Soit G le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β), avec $\alpha + \beta \neq 0$.

Alors, pour tout point M du plan, on a : $(\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB}$

D'où l'on déduit : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MB}$

démonstration :

On sait que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Donc, à l'aide de la relation de Chasles : $\alpha(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + \beta(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$

Donc : $\alpha \overrightarrow{GM} + \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{GM} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Donc : $(\alpha + \beta) \overrightarrow{GM} = -(\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB})$

Donc : $(\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB}$

On en déduit que : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{MB}$

Propriétés :

- Si G est le barycentre du système (A, α) ; (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$ et A et B deux points distincts, alors G appartient à la droite (AB) (ce qui revient à dire que les points G, A et B sont alignés).
Position du barycentre G sur la droite (AB) : si $\alpha + \beta \neq 0$ et α et β deux réels tous deux positifs ou tous deux négatifs, alors G appartient au segment [AB].
- *homogénéité :* le barycentre de deux points pondérés ne change pas si l'on multiplie les coefficients par un nombre réel non nul.
Ce qui se traduit par : si G est le barycentre du système (A, α) ; (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$, alors G est aussi le barycentre du système (A, $k \times \alpha$) ; (B, $k \times \beta$) avec k réel non nul.

II. Barycentre de trois points pondérés

Théorème :

Soient A, B et C trois points et α, β et γ trois réels.

Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Définition :

Soient A, B et C trois points et α, β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

L'unique point G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ est appelé barycentre des points A, B et C affectés des coefficients α, β et γ .

remarques :

- On dit aussi que G est le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ).

ou encore que G est le barycentre du système (A, α); (B, β); (C, γ).

On note : $G = \text{bar} (A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$

- Si $\alpha = \beta = \gamma$, on dit que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

Si ABC est un triangle, l'isobarycentre G est le centre de gravité de ABC.

Théorème :

Soit G le barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ), avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

Alors, pour tout point M du plan, on a : $(\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$

D'où l'on déduit : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{MC}$

Propriétés :

- homogénéité* : le barycentre de trois points pondérés ne change pas si l'on multiplie les coefficients par un nombre réel non nul.

ce qui se traduit par : si G est le barycentre du système (A, α); (B, β); (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors G est aussi le barycentre du système (A, $k \times \alpha$); (B, $k \times \beta$); (C, $k \times \gamma$) avec k réel non nul.

- théorème du barycentre partiel* : G est le barycentre du système (A, α); (B, β); (C, γ).

Supposons que $\alpha + \beta \neq 0$ et notons H le barycentre de (A, α); (B, β).

Alors G est le barycentre de (H, $\alpha + \beta$); (C, γ)

III. Barycentre de n points pondérés

On généralise à n points les résultats établis pour deux ou trois points.

Théorème :

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n réels.

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$

Définition :

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$.

L'unique point G tel que $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ est appelé barycentre des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ affectés des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

remarques :

- On dit aussi que G est le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2), \dots$ et (A_n, α_n) , ou encore que G est le barycentre du système $(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)$.

On note : $G = \text{bar} (A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)$

• Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$, on dit que G est l'isobarycentre des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ (avec $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points distincts).

Théorème :

Soit G le barycentre des points pondérés $(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)$, avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$.

Alors, pour tout point M du plan, on a : $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$
D'où l'on déduit : $\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{MA_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{MA_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \overrightarrow{MA_n}$

Propriétés :

• *homogénéité* : le barycentre de n points pondérés ne change pas si l'on multiplie les coefficients par un nombre réel non nul.

Ce qui se traduit par : si G est le barycentre du système $(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2), \dots$ et (A_n, α_n) avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$,

alors G est aussi le barycentre du système $(A_1, k \times \alpha_1); (A_2, k \times \alpha_2); \dots; (A_n, k \times \alpha_n)$ avec k réel non nul.

• *théorème du barycentre partiel* : G est le barycentre du système $(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)$.
Supposons que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \neq 0$ ($p \leq n$) et notons H le barycentre du système $(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_p, \alpha_p)$
Alors G est le barycentre du système $(H, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p); (A_{p+1}, \alpha_{p+1}); \dots; (A_n, \alpha_n)$.

IV. Coordonnées du barycentre



Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si G est le barycentre de $(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); \dots; (A_n, \alpha_n)$, avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$,
alors les coordonnées du point G sont :

$$x_G = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

exemple :

A, B et C sont trois points tels que $A(-2; 3)$, $B(2; 4)$ et $C(1; -1)$.

Le barycentre G de $(A, 4); (B, 3); (C, -2)$ a pour coordonnées le couple $(x_G; y_G)$ tel que :

$$x_G = \frac{4 \times (-2) + 3 \times 2 - 2 \times 1}{4 + 3 - 2} = -\frac{4}{5} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{4 \times 3 + 3 \times 4 - 2 \times (-1)}{4 + 3 - 2} = \frac{26}{5}$$

Les Barycentres

Exercice 1

A et B sont deux points distincts. Construire, s'il existe, le barycentre :

1. G des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).
2. H des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2).
3. J des points pondérés (A ; -1) et (B ; 2).
4. K des points pondérés (A ; -2) et (B ; -6).
5. L des points pondérés (A ; -2) et (B ; 2).

Exercice 2

Dans un plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(1 ; 1) et B(5 ; 3).

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de (A ; 2) et (B ; 1).
2. Déterminer des réels a et b tels que H(-1 ; 0) soit le barycentre de (A ; a) et (B ; b).
3. Peut-on trouver a et b tels que O soit le barycentre de (A ; a) et (B ; b) ?

Exercice 3

Soit A et B deux points tels que $AB = 4$.

On considère le barycentre G de (A ; 1) et (B ; 3) et le barycentre K de (A ; 3) et (B ; 1).

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer sur un dessin les points A, B, G et K.
2. Montrer que les segments [AB] et [GK] ont le même milieu.

Exercice 4

Soit QUAD un quadrilatère.

Construire le barycentre G de (Q ; 1), (U ; 1), (A ; -2) et (D ; -1).

Exercice 5

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB] et G le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 1) et (C ; 1).

1. Montrer que G est le barycentre de (C ; 1) et (C' ; 2).
2. En déduire la position de G sur le segment [CC'].
3. Démontrer que G appartient à [BB'] et à [AA']. Que peut-on en déduire ?

Exercice 6

Soit TRUC un quadrilatère.

On désigne par K, L, M, N les milieux respectifs de [TR], [RU], [UC], [CT] et par G l'isobarycentre des quatre points T, R, U et C.

Prouver que G est le milieu de [KM] et de

Que peut-on dire du quadrilatère KLMN ?



Correction

Exercice 1

1. G barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).

Comme $1 + 3 \neq 0$, alors le barycentre de ce système existe.

Par définition du barycentre, on a : $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

2. H barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2).

Comme $2 + 2 \neq 0$, alors le barycentre de ce système existe.

Par définition du barycentre, on a : $2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{HA} = -2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

3. J barycentre des points pondérés (A ; -1) et (B ; 2).

Comme $-1 + 2 \neq 0$, alors le barycentre de ce système existe.

Par définition du barycentre, on a : $-\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$-\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{JA} = -2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB}$$

4. K barycentre des points pondérés (A ; -2) et (B ; -6).

Comme $-2 - 6 \neq 0$, alors le barycentre de ce système existe.

Par définition du barycentre, on a : $-2\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{KB} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$-2\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{KA} + 6\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$-8\overrightarrow{KA} = 6\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

5. L barycentre des points pondérés (A ; -2) et (B ; 2).

Comme $-2 + 2 = 0$, alors le barycentre n'est pas défini.

Exercice 2

1. Coordonnées du barycentre G de (A ; 2) et (B ; 1).

$$x_G = [(2 \times 1 + 1 \times 5)/3] = [7/3] \quad \text{et} \quad y_G = [(2 \times 1 + 1 \times 3)/3] = [5/3]$$

D'où : G a pour coordonnées (7/3 ; 5/3).

2. H est le barycentre de (A ; a) et (B ; b) si et seulement si

$$x_H = \frac{a \times 1 + b \times 5}{a + b} \quad \text{et} \quad y_H = \frac{a \times 1 + b \times 3}{a + b}$$

$$\text{Or H a pour coordonnées } (-1 ; 0), \text{ donc : } \begin{cases} \frac{a + 5b}{a + b} = -1 \\ \frac{a + 3b}{a + b} = 0 \end{cases}$$

$$\text{ce qui équivaut à : } \begin{cases} 2a + 6b = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont équivalentes à $a = -3b$.

Une solution du système est donc : $a = -3$ et $b = 1$.

H est donc barycentre de (A ; -3) et (B ; 1).

Remarque :

en fait, H est barycentre de (A ; -3b) et (B ; b) avec $-3b + b \neq 0$ c'est-à-dire $b \neq 0$.

3. O est le barycentre de (A ; a) et (B ; b) si et seulement si

$$x_O = \frac{a \times 1 + b \times 5}{a + b} \quad \text{et} \quad y_O = \frac{a \times 1 + b \times 3}{a + b}$$

Or O a pour coordonnées (0 ; 0), donc :

$$\begin{cases} \frac{a + 5b}{a + b} = 0 \\ \frac{a + 3b}{a + b} = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a + 5b = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$$

Ce système admet un unique couple solution (0 ; 0). Comme la somme des coefficients est nulle, alors O ne peut pas être barycentre de (A ; a) et (B ; b).

Exercice 3

1. G étant le barycentre de (A ; 1) et (B ; 3), par définition, on a :

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

donc :

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

De même, K étant le barycentre de (A ; 3) et (B ; 1), par définition du barycentre, on a :

$$3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$$

donc :

$$3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

2. Soit I le milieu du segment [AB]. On va montrer que I est aussi le milieu du segment [GK].

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} \\ &= 2\overrightarrow{IA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Or, I étant le milieu du segment [AB], $2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BA}$. On obtient donc :

$$\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

I est donc le milieu du segment [GK].

On a donc montré que les segments [AB] et [GK] ont le même milieu.

Exercice 4

G étant le barycentre de (Q ; 1), (U ; 1), (A ; -2) et (D ; -1), on a :

$$\overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GU} - 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QU} - 2\overrightarrow{GQ} - 2\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{DG} = -\overrightarrow{QU} + 2\overrightarrow{QA}$$

Exercice 5

1. C' est le milieu de [AB], donc C' est le barycentre de (A, 1) (B, 1).

G est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1).

Donc d'après le théorème d'associativité du barycentre, on a :

G est le barycentre de (C', 2), (C, 1).

2. On vient de montrer que G est le barycentre de (C', 2), (C, 1), donc :

$$2\overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{GC} &= -2\overrightarrow{CC'} \\ \overrightarrow{CG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'} \end{aligned}$$

3. A' est le milieu de [BC], donc A' est le barycentre de (B, 1) (C, 1).

G est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1).

Donc d'après le théorème d'associativité du barycentre, on a :

G est le barycentre de (A', 2), (A, 1).

On en déduit que G appartient à (A'A) [même au segment [A'A]].

B' est le milieu de [AC], donc B' est le barycentre de (A, 1)(C, 1).

G est le barycentre de (A,1), (B,1), (C,1).

Donc d'après le théorème d'associativité du barycentre, on a :

G est le barycentre de (B',2), (B, 1).

On en déduit que G appartient à (B'B) [même au segment [B'B]].

Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont donc concourantes en G.

fait, G est le centre de gravité du triangle ABC.]

Exercice 6

K milieu de [TR], donc K barycentre de (T,1)(R,1)

M milieu de [UC], donc M barycentre de (U,1)(C,1)

G barycentre des points (T,1)(R,1)(U,1)(C,1)

D'après le théorème d'associativité du barycentre, on en déduit que G est le barycentre de (K,2)(M,2).

G est donc le milieu du segment [KM].

De même :

L milieu de [RU], donc L barycentre de (R,1)(U,1)

N milieu de [TC], donc N barycentre de (T,1)(C,1)

G barycentre des points (T,1)(R,1)(U,1)(C,1)

D'après le théorème d'associativité du barycentre, on en déduit que G est le barycentre de (L,2)(N,2).

G est donc le milieu du segment

.

Le quadrilatère KLMN a ses diagonales qui se coupent en leur milieu. Ce quadrilatère est donc un parallélogramme.

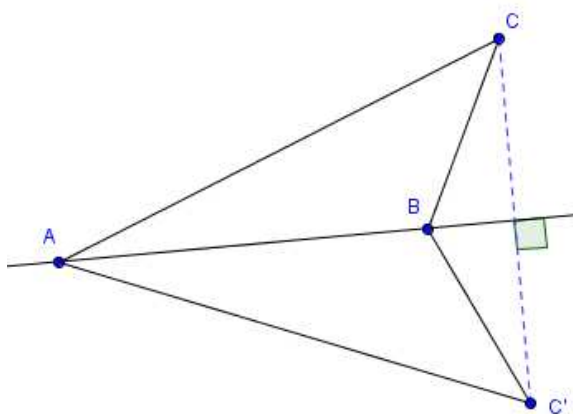
Réflexions et mesures d'angles de vecteurs

Complétons à l'aide des angles orientés de vecteurs, la relation déjà rencontrée entre les angles au centre et les angles inscrits interceptant le même arc dans un cercle.

Exercice 1

Soit (AB) une droite, C un point n'appartenant pas à (AB) , C' le symétrique de C par rapport à (AB) . Comparons les mesures des angles $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B})$.

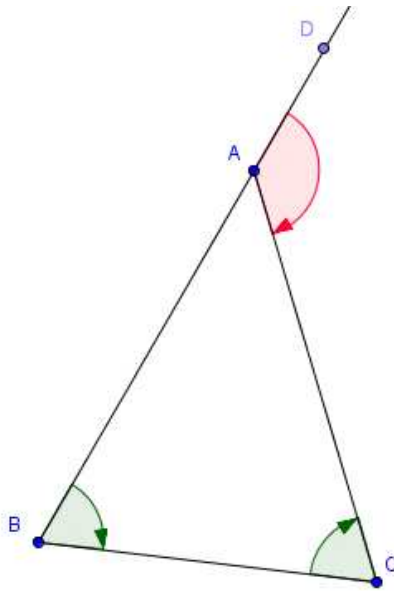
1. Exprimer $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ à l'aide des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
2. Comparer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'})$ d'une part et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'})$ d'autre part.
3. Comparer alors $(\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.



Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle, $AB = AC$.

1. Comparer $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.
2. Démontrer à l'aide de l'égalité : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \pi$
les égalités : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
la figure, $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$



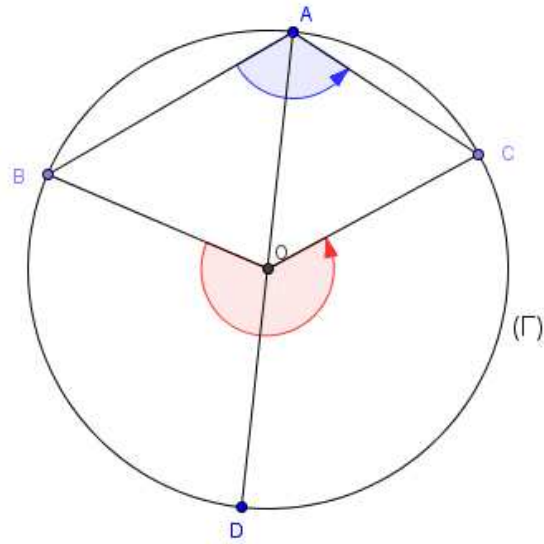
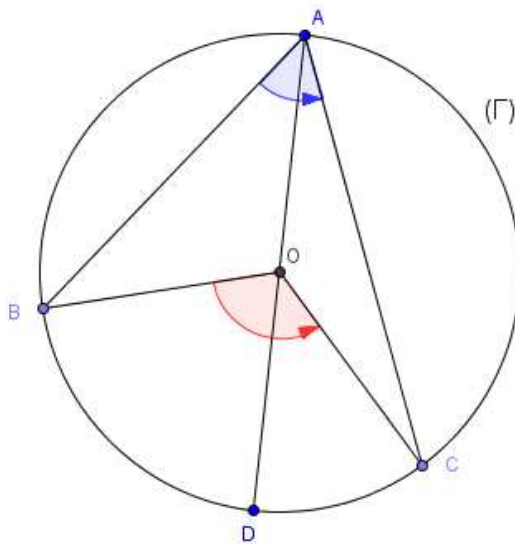
Exercice 3

Soit A,B,C trois points d'un cercle (Γ) de centre O et D le point diamétralement opposé à A sur (Γ) .

1. Démontrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Démontrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Cette dernière relation généralise une propriété utilisée au collège : l'angle au centre est double de l'angle inscrit interceptant le même arc de cercle.



Correction

Exercice 1

1. Dans le triangle ABC, la somme des angles est égale à π radians :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi$$

Donc :

$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$$

$$\boxed{(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})}$$

2. La droite (AB) est la médiatrice du segment [CC'] donc les triangles ACC' et BCC' sont isocèles respectivement en A et en B.

On en déduit que :

$$\boxed{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC'})} \text{ et } \boxed{(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = -(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC'})}$$

3. En substituant les résultats obtenus à la question 2 dans l'expression obtenue à la question 1, on obtient :

$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$$

$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC'}) - (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC'})$$

$$\text{Or, on a : } (\overrightarrow{-u}; \overrightarrow{-v}) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \text{ donc : } (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC'}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'B})$$

$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC'}) - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'B})$$

$$\text{Or, on a : } (\overrightarrow{-v}; \overrightarrow{u}) = \pi - (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \text{ donc : } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC'}) = \pi - (\overrightarrow{C'A}; \overrightarrow{AB})$$

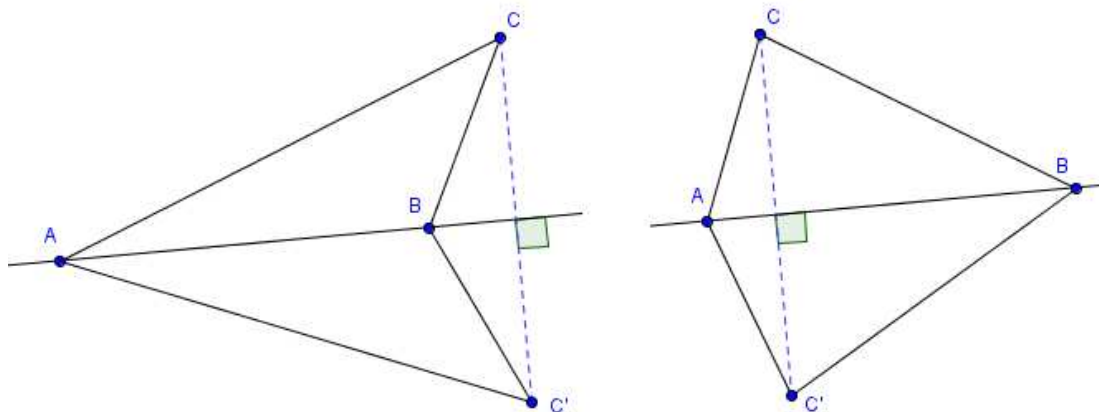
$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \pi + \pi(\overrightarrow{C'A}; \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'B})$$

$$(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = 2\pi - [(\overrightarrow{C'A}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'B})]$$

En supprimant le 2π (un tour complet), et en utilisant la relation de Chasles, on obtient finalement :

$$\boxed{(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = -(\overrightarrow{C'A}; \overrightarrow{C'B})}$$

Remarque : Les méthodes ci-dessus restent valables quel que soit la position du point C par rapport aux points A et B.



Exercice 2

1. Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux donc :

$$(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \text{ donc } \boxed{(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = -(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA})} \quad (1)$$

2. Dans le triangle ABC, la somme des angles étant égale à π radians, on a :

$$(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \pi$$

Donc :

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \pi - (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA})$$

Or, on a : $(\overrightarrow{-v}; \overrightarrow{u}) = \pi - (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ donc :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}) &= \pi - (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \\ (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}) &= \pi - \left[\pi - (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) \right] \\ \boxed{(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC})} &= \boxed{(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA})} \quad (2) \end{aligned}$$

D'après l'égalité (1) démontrée à la question précédente, on a :

$$(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = -(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$$

Et donc, en utilisant cette égalité dans la relation (2), on obtient bien :

$$\boxed{(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}) = 2 (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})}$$

Remarque :

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AD}$ ayant même direction et même sens, on a $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC})$ d'où le résultat proposé à la fin de l'exercice.

Exercice 3

1. • MÉTHODE 1

On a : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD}) = \pi$

En décomposant avec la relation de Chasles, on obtient :

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) = \pi$$

Donc : $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) = \pi - (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

Le triangle ABO étant isocèle en O, on a : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \pi - 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})$

En utilisant ce résultat avec la relation précédente, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) &= \pi - \left[\pi - 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) \right] \\ \boxed{(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD})} &= \boxed{2 (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})} \end{aligned}$$

• MÉTHODE 2

Le triangle ABD est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AD] donc ABD rectangle en B, on en tire :

$$(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$$

En décomposant avec la relation de Chasles, on obtient :

$$(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BO}) = \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA})$$

Or le triangle ABC est isocèle en O, donc $(\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB})$, ce qui donne :

$$(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BO}) = \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})$$

Le triangle BDO est isocèle en O, donc :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) &= \pi - 2(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BO}) \\ (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) &= \pi - 2 \left[\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) = 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO})}$$

2. On démontre de la même manière : $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AC})$.

Donc :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) &= (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OC}) \\ (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) &= 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) + 2(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AC}) \\ (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) &= 2 \left[(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AC}) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}$$

Formulaire de Trigonométrie

I. Relations de base

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cotan(-\theta) = -\cotan \theta$$

II. Formules en t

$$t = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\tan \theta = \frac{2t}{1 - t^2}$$

III. Formules d'addition

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

IV. Arcs remarquables

θ ($^{\circ}$)	0	30	45	60	90
θ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

V. Formules de transformation de produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$$

Trigonométrie

exercice 1

ABCD est un parallélogramme articulé tel que la mesure x en radians de $\widehat{ADC}$ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

La tige AD est fixe : $AD = 3$ et $AB = 2$.

1. Exprimer l'aire S du parallélogramme en fonction de x .
2. Comment choisir x pour avoir $S = 4$?

exercice 2

Sur un même graphique, représenter les fonctions cosinus et sinus.

exercice 3

1. f est la fonction $x \mapsto |\sin x|$.

Démontrer que cette fonction est paire et périodique de période π .

2. En utilisant les propriétés de la fonction sinus, démontrer que f est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et dresser le tableau de variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Tracer la courbe représentative de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; puis, en utilisant les propriétés montrées à la question 1., tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi; 2\pi]$.

exercice 4

1. f est la fonction $x \mapsto |\cos x|$.

Démontrer que cette fonction est paire et périodique de période π .

2. en utilisant les propriétés de la fonction cosinus, démontrer que f est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et dresser le tableau de variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Tracer la courbe représentative de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; puis, en utilisant les propriétés montrées à la question 1., tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi; \pi]$.

exercice 5

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre 0, A est un point de $\mathcal{C}$.

Un point matériel parcourt $\mathcal{C}$ d'un mouvement uniforme dans le sens direct.

L'origine des temps t est prise en A, c'est à dire que pour $t = 0$, le point mobile est en A.

Au temps $t = 1$ (seconde), le mobile est en un point M tel que : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{9}$

1. Au bout de combien de temps le mobile repassera-t-il en A, une première fois ? une deuxième fois ?
2. Sur un dessin, indiquer quelle sera la position du mobile au bout de 90 secondes ? de 3 minutes ?
3. On appelle B le point tel que : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$

Indiquer au bout de combien de temps le mobile passera en B pour la première fois. En quels autres instants t le mobile passera-t-il en B ?





Correction

exercice 1

$\frac{1}{2}$ rouge: $\cos(x)$ et bleu: $\sin(x)$

exercice 2

1. Pour déterminer l'aire du parallélogramme il faut calculer la hauteur de celui-ci. Soit H le projeté orthogonale de A sur (DC). Dans le triangle ADH, rectangle en H: $\sin(\widehat{DAH}) = \frac{AH}{AD}$. Soit: $AH = 3\sin x$.

Aire du parallélogramme = $a \cdot h$ où a est la base du parallélogramme et h sa hauteur: $a = AB = 2$ et $AH = 3\sin x$.

D'où: $A_{ABCD} = 6\sin(x)$.

2. Résoudre $A_{ABCD} = 4$ équivaut à résoudre $6\sin(x) = 4$ soit encore $\sin(x) = \frac{2}{3}$.

donc $x = 41,8^\circ$.

exercice 3

1. $f(x) = |\sin x|$

$f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)| = f(x)$. Donc f est une fonction paire. ($\sin(-x) = -\sin(x)$)

$f(x+\pi) = |\sin(x+\pi)| = |-\sin(x)| = |\sin(x)| = f(x)$. Donc f est π -périodique. ($\sin(x+\pi) = -\sin(x)$).



2. La fonction sinus est croissante sur $[0, \pi/2]$ et sur cet intervalle $\sin(x)$ est positif, donc $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, \pi/2]$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$variations$	0 ↗ 1	

3. Comme f est paire alors f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées; on trace donc f sur $[0, \pi/2]$ puis on trace l'image de cette courbe par la symétrie d'axe (Oy); on obtient donc f sur $[-\pi/2; \pi/2]$. Enfin, f est π -périodique donc on translate cette portion de courbe...

exercice 4

$$f(x) = |\cos x|$$

$$f(-x) = |\cos(-x)| = |\cos(x)| = f(x). \text{ Donc } \underline{f \text{ est une fonction paire.}} \quad (\cos(-x) = \cos(x))$$

$$f(x+\pi) = |\cos(x+\pi)| = |-\cos(x)| = |\cos(x)| = f(x). \text{ Donc } \underline{f \text{ est } \pi\text{-périodique.}} \quad (\cos(x+\pi) = -\cos(x)).$$

2. La fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi/2]$ et sur cet intervalle $\cos(x)$ est positif, donc $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, \pi/2]$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[0, \pi/2]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$variations$	1 ↘ 0	

3. Comme f est paire alors f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées; on trace donc f sur $[0, \pi/2]$ puis on trace l'image de cette courbe par la symétrie d'axe (Oy); on obtient donc f sur $[-\pi/2; \pi/2]$. Enfin, f est



π -périodique donc on translate cette portion de courbe...

exercice 5

1. Pour que le mobile repasse en A, il faut qu'il fasse un tour de cercle, cad $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = 2\pi$. Sachant qu'il parcourt un angle de $\pi/9$ en 1s, il lui faudra 18s pour parcourir un angle de 2π et donc repasser en A.

Pour repasser une deuxième fois en A, il lui faudra 18s supplémentaire, donc 36s en tout.

2. Au bout de 90s, le mobile M sera tel que: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{9} \times 90 = 10\pi = 5 \times 2\pi$; c'est à dire M sera en A.

A bout de 3min, c'est à dire 180s: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{9} \times 180 = 10 \times 2\pi$, M sera de nouveau en A.

3. $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$. Pour parvenir en B, le mobile doit donc parcourir 13,5 fois l'angle $\pi/9$; donc il mettra 13,5 secondes pour arriver une première fois. Puis ensuite, il faudra qu'il refasse un tour, cad 18s supplémentaires....

exercice 1

x est un réel tel que $\sin x = 1/3$

1. Pouvez-vous en déduire $\cos x$?

2. On sait de plus que $\pi/2 \leq x \leq \pi$

Trouvez $\cos x$ et $\tan x$.

exercice 2

1. Calculer $\cos 65\pi/4$

2. Calculer $\sin (-39\pi/4)$

exercice 3

Sur le même graphique, représenter les fonctions cosinus et sinus.



exercice 4

Sachant que $\cos \pi/8 = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, calculer le cosinus de $-\pi/8$; $3\pi/8$; $5\pi/8$; $9\pi/8$; $-325\pi/8$.

exercice 5

ABCD est un parallélogramme articulé tel que la mesure x en radians de $\angle ADC$ varie entre 0 et $\pi/2$.
La tige AD est fixe : $AD=3$, et $AB=2$.

1. Exprimer l'aire S du parallélogramme en fonction de x .
2. Comment choisir x pour avoir $S=4$?



Correction

exercice 1

$$\begin{aligned}\cos x &= \pm \sqrt{8/9} \\ \cos x &= - \text{ donc } \cos x = -2\sqrt{2}/3 \\ \tan x &= -\sqrt{2}/4\end{aligned}$$

exercice 2

$$\sqrt{2}/2 \text{ et } \sqrt{2}/2$$

exercice 3

exercice 4

exercice 5

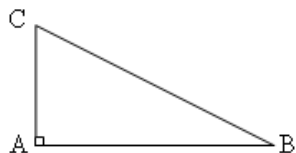
$$\begin{aligned}S &= AH \times AB \\ S &= 6 \sin x \\ S &= 4 \text{ lorsque } \sin x = 2/3 \\ x &\approx 0,73 \text{ soit } \approx 0,23\pi\end{aligned}$$



Produit Scalaire

I. Définition du produit scalaire

On connaît le célèbre théorème de Pythagore : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.



A l'aide de la figure ci-contre, on a :

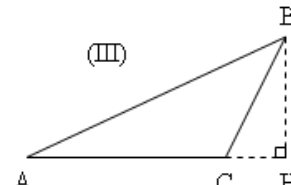
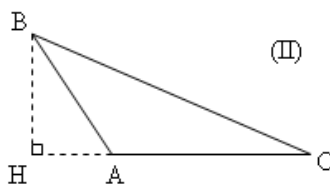
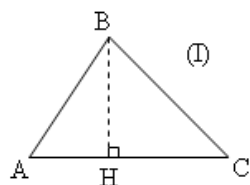
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \iff AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0 \iff \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 0$$

Que ce passe-t-il si le triangle est quelconque ? Qu'est le nombre $\Delta = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$? A-t-il une signification géométrique ? vectorielle ? analytique ? Le produit scalaire va apporter une réponse.

Soit ABC un triangle.

Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

Trois cas se présentent :



Dans les trois cas, on a d'après le théorème de Pythagore dans le triangle BHC rectangle en H :

$$BC^2 = HB^2 + HC^2$$

$$\text{Donc : } 2\Delta = AB^2 + AC^2 - (HB^2 + HC^2) = AB^2 - HB^2 + AC^2 - HC^2$$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, on a :

$$AB^2 = HB^2 + AH^2$$

$$\text{Donc : } 2\Delta = HB^2 + AH^2 - HB^2 + AC^2 - HC^2 = AH^2 + AC^2 - HC^2$$

Dans le cas (II) :

$$2\Delta = AH^2 + AC^2 - (AH + AC)^2$$

$$= AH^2 + AC^2 - (AH^2 + 2AH \times AC + AC^2)$$

$$= -2AH \times AC$$

$$\text{D'où : } \Delta = -AH \times AC$$

Dans les cas (I) et (III) :

$$2\Delta = AH^2 + AC^2 - (AC - AH)^2$$

$$= AH^2 + AC^2 - (AC^2 - 2AC \times AH + AH^2)$$

$$= 2AC \times AH$$

$$\text{D'où : } \Delta = AC \times AH$$

En résumé, $\Delta = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \begin{cases} AC \times AH & \text{lorsque H et C sont du même côté par rapport à A} \\ -AC \times AH & \text{lorsque H et C sont de part et d'autre de A} \end{cases}$

Le nombre Δ exprime le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il sera noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Remarques :

- On note $\vec{u}^2$ le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$
- Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on obtient $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

II. Expressions du produit scalaire

**Théorème :**

Dans un repère orthonormal, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y')$, alors le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration :

Dans ces conditions,

$$||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad ||\vec{v}||^2 = x'^2 + y'^2$$

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$, donc $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$. D'où :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} [||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2] \\ &= \frac{1}{2} [(x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] \\ &= \frac{1}{2} [x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2] \\ &= xx' + yy' \end{aligned}$$

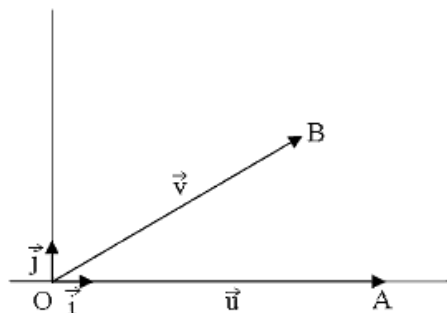
**Théorème :**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Démonstration :

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Choisissons un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}$ soient colinéaires et de même sens.



Si on désigne par $(x; y)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ on a :

$$x = OA = ||\vec{u}|| \quad \text{et} \quad y = 0$$

Si on désigne par $(x'; y')$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OB}$ on a :

$$x' = ||\vec{v}|| \cos(\vec{i}, \vec{v}) \quad \text{et} \quad y' = ||\vec{v}|| \sin(\vec{i}, \vec{v})$$

Or, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et de même sens, donc $(\vec{i}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$.

$$\text{Donc : } x' = ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad \text{et} \quad y' = ||\vec{v}|| \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

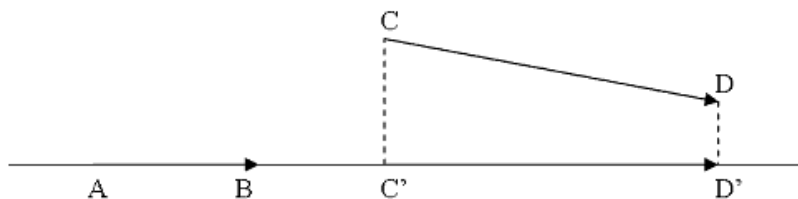
$$\text{Donc : } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

⚠ Théorème :

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs.

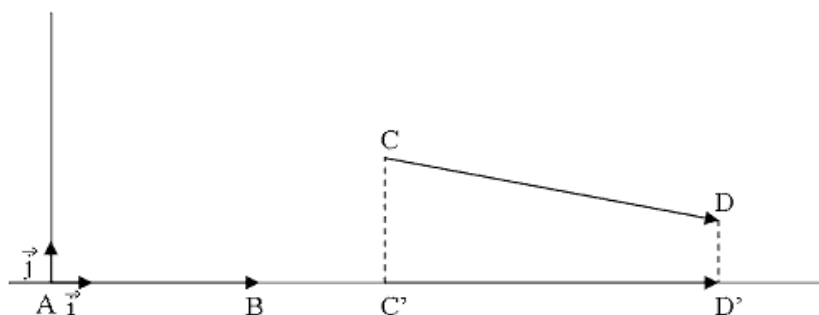
Soient C' et D' les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB) .

Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$



Démonstration :

Choisissons un repère orthonormal $(A; \vec{i}, \vec{j})$ tel que les vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.



On a : $\overrightarrow{AB}(x_B; 0)$ $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C)$ $\overrightarrow{C'D'}(x_D - x_C; 0)$

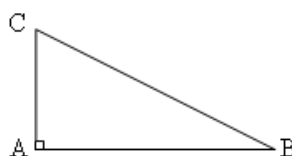
Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x_B(x_D - x_C)$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} = x_B(x_D - x_C)$

D'où : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$

Remarques :

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont de même sens, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times C'D'$
- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont de sens contraires, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times C'D'$

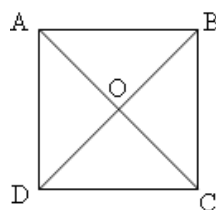
Exemple 1 :



Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors :

1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}^2 = BA^2$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{0} = 0$

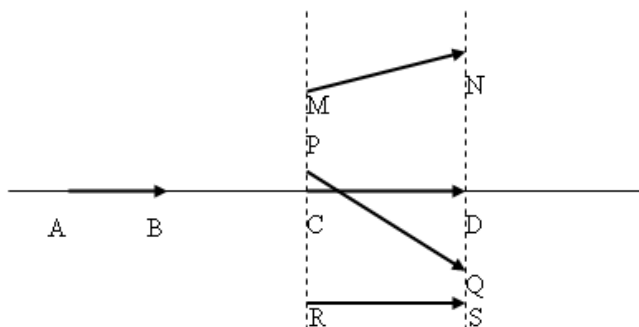
Exemple 2 :



Soit ABCD un carré de centre O tel que $AB = 4$.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -16$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = 16$
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DP} = 8$ où P est le milieu de [DC].

Exemple 3 :



Soient les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{CD}$ donnés par la figure ci-dessous.

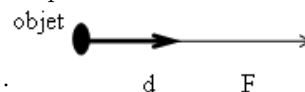
Alors, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire que le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par tout vecteur dont l'origine est sur la droite verticale passant par C et l'extrémité sur la droite verticale passant par D vaut $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Cela détermine donc une bande perpendiculaire à la droite (AB) avec laquelle tous les vecteurs ont le même produit scalaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

III. Analogie avec la physique

1. Cas de vecteurs colinéaires

En physique, lorsqu'une force de 10 N est appliquée sur un objet et que celui-ci se déplace de 2 m dans le sens



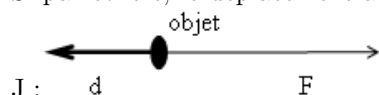
de la force, alors on a ce que les physiciens appellent un travail moteur de 20 J :

où F est l'intensité de la force (en newtons)

et d le déplacement (en mètres)

$$W = F \times d$$

Si par contre, le déplacement a lieu dans le sens opposé à celui de la force, on a un travail résistant de -20



où F est l'intensité de la force (en newtons)

et d le déplacement (en mètres)

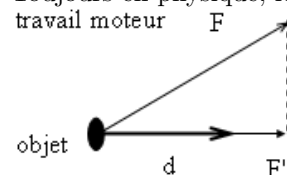
$$W = - F \times d$$

L'unité de mesure du travail est le newton-mètre (Nm) ou le joule (J).

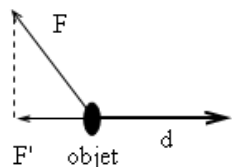
Dans les deux cas cités ci-dessus, le vecteur force et le vecteur déplacement sont dans la même direction : ils sont colinéaires.

2. Cas de vecteurs quelconques

Toujours en physique, lorsque les vecteurs sont quelconques, on a :



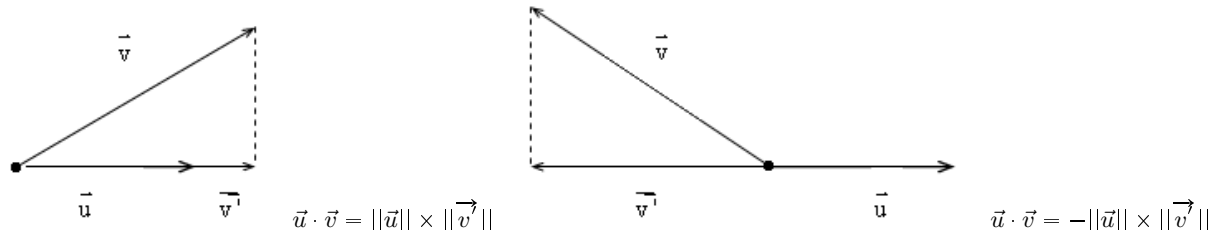
$W = F' \times d$ où F' est la projection orthogonale de F sur d.



$W = -F' \times d$ où F' est la projection orthogonale de F sur d .

En mathématiques, nous retrouvons la deuxième définition.

Ainsi, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques et $\vec{v}'$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et il suffit d'appliquer la définition précédente lorsque les vecteurs sont colinéaires. Donc,



IV. Règles de calcul



Théorème :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et le réel λ

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ [commutativité du produit scalaire]

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$ [linéarité du produit scalaire]

Démonstration :

Choisissons un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{u}(x; y) \quad \vec{v}(x'; y') \quad \vec{w}(x''; y'')$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\vec{v} \cdot \vec{u} = xx' + yy'$

D'où : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. $\vec{u} + \vec{w}(x' + x''; y' + y'')$ Donc :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'')$

$= (xx' + yy') + (xx'' + yy'')$

$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$\lambda \vec{v}(\lambda x'; \lambda y')$ Donc :

$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = x \times \lambda x' + y \times \lambda y'$

$= \lambda(xx' + yy')$

$= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Exemple 1 :

$7\vec{u} \cdot (4\vec{u} + 3\vec{v}) = (7\vec{u}) \cdot (4\vec{u}) + (7\vec{u}) \cdot (3\vec{v})$

$= 28\vec{u}^2 + 21\vec{u} \cdot \vec{v}$

Exemple 2 :

$(-\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u} + 5\vec{v}) = (-\vec{u}) \cdot (2\vec{u}) + (-\vec{u}) \cdot (5\vec{v}) + (3\vec{v}) \cdot (2\vec{u}) + (3\vec{v}) \cdot (5\vec{v})$

$= -2\vec{u}^2 - 5\vec{u} \cdot \vec{v} + 6\vec{v} \cdot \vec{u} + 15\vec{v}^2$

$= -2\vec{u}^2 - 5\vec{u} \cdot \vec{v} + 6\vec{u} \cdot \vec{v} + 15\vec{v}^2$

$= -2\vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + 15\vec{v}^2$

⚠ Quelques produits scalaires remarquables

$$\begin{array}{ll}(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 & \text{et} \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 & \text{et} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 & \text{et} \quad (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\end{array}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\(\vec{u} - \vec{v})^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 - \vec{v}^2\end{aligned}$$

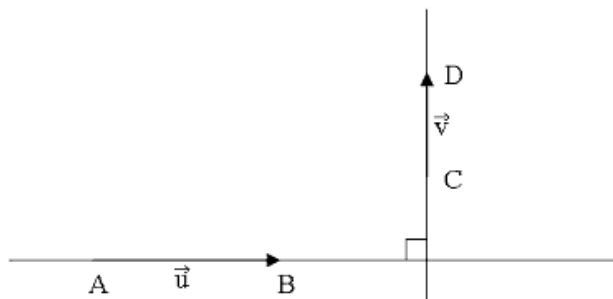
V. Produit scalaire et orthogonalité

Si le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$, alors sa projection orthogonale sur $\vec{u}$ est le vecteur nul.

⚠ Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.



Convention : Le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

⚠ Théorème :

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Démonstration :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

Le résultat est immédiat.

- Si les vecteurs sont non nuls :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ si et seulement si } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ car } \|\vec{u}\| \neq 0 \text{ et } \|\vec{v}\| \neq 0$$

$$\text{Donc : } (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

⚠ Théorème :

Dans un repère orthonormal, soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls de coordonnées respectives (x ; y) et (x' ; y').

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$

Démonstration :

C'est une conséquence du théorème précédent.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

$$\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\iff xx' + yy' = 0$$

Produit Scalaire : Rappels et Applications

I. Définition du produit scalaire

Définition

1) Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls est le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (ou $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$) défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

On appelle carré scalaire et on note $\vec{u}^2$ le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$

2) En notant $\vec{u} = \overrightarrow{IA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$ et H le projeté orthogonal de B sur (IA) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IH} = \begin{cases} IA \times IH & \text{si } \overrightarrow{IA} \text{ et } \overrightarrow{IH} \text{ ont le même sens} \\ -IA \times IH & \text{si } \overrightarrow{IA} \text{ et } \overrightarrow{IH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

II. Calcul

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et les réels α et β :

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $(\alpha\vec{u}) \cdot (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

d) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

e) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

III. Orthogonalité

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

IV. Vecteur normal

Un vecteur non nul est dit normal à une droite D s'il est orthogonal à un vecteur directeur de D.

V. Application à l'analyse

Soient un repère orthonormal, $\vec{u}(x_u y_u)$ et $\vec{v}(x_v y_v)$. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$$

VI. Coordonnée d'un vecteur normal

Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans un repère orthonormal.

Alors $\vec{n}(a, b)$ est normal à D

VII. Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle quelconque.

On a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \times \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

VIII. Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

On a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

IX. Aire d'un triangle

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin(\hat{A})$$

X. Applications

Dans chaque cas, déterminons l'ensemble des points M vérifiant l'égalité :

a) $MA - MB = 0$

$$\iff MA = MB$$

L'ensemble des points M forme la médiatrice de [AB]

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$$\iff \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM}$$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par A

c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ⁽¹⁾

En introduisant I milieu de [AB] :

$$_{(1)} \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 0$$

$$\iff MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$$

Comme I est le milieu de [AB] , $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 0$

De plus , comme A , I et B sont alignés dans cet ordre , $\cos(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = -1$

On en déduit :

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\|\overrightarrow{IA}\| \times \|\overrightarrow{IB}\|$$

soit :

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\frac{AB^2}{4}$$

Il advient :

$$_{(1)} \iff MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0$$

$$\iff MI^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$\iff MI = \frac{1}{2}AB$$

L'ensemble des points M est le **cercle de diamètre [AB]**

d) $MA^2 + MB^2 = a$ pour tout a positif ⁽²⁾

On introduit le milieu I du segment [AB] :

$$_{(2)} \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = a$$

$$\iff 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}) + IA^2 + IB^2 = a$$

$$\iff 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = a$$

$$\iff 2MI^2 = a - IA^2 - IB^2$$

• Si $a - IA^2 - IB^2 < 0$, l'équation n'aura pas de solution. L'ensemble des points M est l'ensemble vide.

• Si $a - IA^2 - IB^2 > 0$, $_{(2)} \iff MI = \sqrt{\frac{a - IA^2 - IB^2}{2}}$

L'ensemble des points M représente le **cercle de centre I et de diamètre** $\sqrt{\frac{a - IA^2 - IB^2}{2}}$

• Si $a - IA^2 - IB^2 = 0$, l'ensemble des points M est réduit au point I.

e) $MA^2 - MB^2 = a$ pour tout a réel. ⁽³⁾

Même technique que pour le d) , on introduit le point I milieu de [AB].

On obtient alors :

$$_{(3)} \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = a$$

En utilisant l'identité remarquable $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$:

$$\iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = a$$

$$\iff 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = a$$

$$\iff \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = \frac{a}{2}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).

$$(3) \iff \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HI} = \frac{a}{2}$$

L'ensemble des points M est **la droite perpendiculaire à (AB) telle que $HI = \frac{|a|}{2BA}$** .

Pourcentages : Q.C.M.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte, laquelle ?

1. Augmenter une valeur de 3% revient à multiplier par :
a) 1,3 b) 0,7 c) 1,03 d) 0,3
2. Diminuer une valeur de 1% revient à multiplier par :
a) 0,9 b) 0,99 c) 0,999 d) 1,1
3. Doubler une valeur revient à l'augmenter de :
a) 50 % b) 100% c) 200% d) 150%
4. On augmente un prix (non nul) de 10%, puis on le diminue de 10%. Le prix final est :
a) égal au prix initial b) inférieur au prix initial c) supérieur au prix initial
5. Albert a augmenté son poids de 25% pendant les fêtes. Combien doit-il perdre pour revenir à son poids initial ?
a) 30% b) 25% c) 20% d) 15%
6. A la suite d'une gastro-entérite, Arsinoé a perdu $\frac{2}{7}$ de son poids. Combien doit-elle gagner pour revenir à son poids initial ?
a) 7% b) 14% c) 40% d) 32%
7. Augmenter une valeur de 3% puis la diminuer de 5% revient au même que la diminuer de 5% puis l'augmenter de 3% :
a) vrai b) faux
8. Le prix d'un article baisse de 50% puis de 60%. Le prix a baissé en tout de :
a) 110% b) 30% c) 80% d) 70%
9. Un article vaut 126 euros après une baisse de 10%. Quel était son prix initial ?
a) 136 euros b) 140 euros c) 138,6 euros d) 116 euros
10. Dans une classe de 25 élèves, il y a 60% de filles. Parmi elles, 20% sont latinistes. Quel est le pourcentage de filles latinistes dans la classe ?
a) 80% b) 40% c) 3% d) 12%
11. Dans un lycée, les filles représentent 60% des élèves. Parmi les filles, 20% sont latinistes et parmi les garçons, 10% sont latinistes. Le pourcentage d'élèves latinistes de ce lycée s'élève à :
a) 16% b) 15% c) 30% d) 5%

Dans les questions 12 à 20, on étudie la situation suivante :

Un contrat de location stipule que le loyer sera augmenté à la fin de la première année de 10%, puis les années suivantes, la valeur du taux d'augmentation diminuera de 2% chaque année.

12. Si le loyer de la première année est de 1000 euros, celui de la deuxième année est de :
a) 1010 euros b) 1100 euros c) 990 euros d) 998 euros
13. Si le loyer de la première année est de 1000 euros, celui de la troisième année est de :
a) 1098 euros b) 1207,8 euros c) 1210 euros d) 1078 euros
14. A la fin de la deuxième année, le loyer sera augmenté de :
a) 10% b) 8% c) 9,8% d) 9,604%
15. A la fin de la troisième année, le loyer sera augmenté de :

- a) 10% b) 8% c) 9,8% d) 9,604%
16. Au bout de 5 ans, le loyer n'augmente plus :
a) vrai b) faux
17. L'augmentation appliquée à la fin de la sixième année vaut :
a) $0,98^6 \times 10\%$ b) $0,98^5 \times 10\%$ c) $0,02^5 \times 10\%$ d) $0,02^6 \times 10\%$
18. Le loyer dû pendant la cinquième année (soit après l'augmentation à la fin de la quatrième année, mais avant l'augmentation de la fin de la cinquième année) est obtenu en multipliant le loyer initial par :
a) $0,98^3 \times 1,1$ b) $1 + 0,98^3 \times 0,1$ c) autre chose (à préciser...)
19. La suite des augmentations est une suite croissante :
a) vrai b) faux
20. La suite des loyers est une suite croissante :
a) vrai b) faux



Correction

1. Réponse c : 1,03

Justification :

Le coefficient multiplicateur k correspondant à une augmentation de $t\%$ est donné par :

$$k = 1 + \frac{t}{100} = 1 + \frac{3}{100} = 1 + 0,03 = 1,03$$

2. Réponse b : 0,99

Justification :

Le coefficient multiplicateur k correspondant à une baisse de $t\%$ est donné par :

$$k = 1 - \frac{t}{100} = 1 - \frac{1}{100} = 1 - 0,01 = 0,99$$

3. Réponse b : 100%

Justification :

Doubler revient à multiplier par un coefficient multiplicateur k égal à 2 :

$$1 + \frac{t}{100} = 2 \text{ d'où } t=100.$$

4. Réponse b : inférieur au prix initial

Justification :

$$\text{Augmentation de } 10\% : k_1 = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$$

$$\text{Diminution de } 10\% : k_2 = 1 - \frac{10}{100} = 0,9$$

Coefficient pour l'évolution successive : $k = k_1 k_2 = 1,1 \times 0,9 = 0,99$ ce qui correspond à une baisse de 1%.

5. Réponse c : 20%

Justification :

$$\text{Augmentation de } 25\% : k = 1 + \frac{25}{100} = 1,25$$

Le coefficient multiplicateur k' correspondant à l'évolution réciproque est tel que :

$$k \times k' = 1 \text{ d'où } k' = \frac{1}{1,25} = 0,8 \text{ ce qui correspond à une baisse de } 20\%.$$

6. Réponse c : 40%

Justification :

$$\text{Diminution de } 2/7 : k = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} (\approx 0,714)$$

Le coefficient multiplicateur k' correspondant à l'évolution réciproque est tel que :

$$k \times k' = 1 \text{ d'où } k' = \frac{7}{5} = 1,4 \text{ ce qui correspond à une hausse de } 40\%.$$

7. Réponse a : vrai

Justification :

Appelons k_1 et k_2 les coefficients multiplicateurs correspondants aux deux évolutions successives, que ce soient des augmentations ou des baisses.

Le coefficient multiplicateur global est alors donné par : $k = k_1 k_2$.

Et comme on peut bien entendu modifier l'ordre des facteurs dans ce produit, cela signifie que l'ordre d'application des évolutions n'a pas d'importance.

8. Réponse c : 80%

Justification :

$$\text{Baisse de } 50\% : k_1 = 1 - \frac{50}{100} = 0,5$$

$$\text{Baisse de } 60\% : k_2 = 1 - \frac{60}{100} = 0,4$$

Coefficient pour l'évolution successive : $k = k_1 k_2 = 0,5 \times 0,4 = 0,2$ ce qui correspond à une baisse de 80%.

9. Réponse b : 140 euros

Justification :

$$\text{Baisse de } 10\% : k = 1 - \frac{10}{100} = 0,9$$

Si on appelle x le prix initial en euros, on a :

$$x \times 0,9 = 126 \text{ d'où } x = \frac{126}{0,9} = 140$$

10. Réponse d : 12%

Justification :

Le nombre d'élèves de la classe n'est pas nécessaire pour répondre à ce problème de pourcentage de pourcentage.

Pour prendre 60%, on multiplie par 0,6. Puis pour prendre 20% de ces 60%, on multiplie à nouveau par 0,2.

Cela correspond à multiplier par $0,6 \times 0,2 = 0,12$ ce qui correspond à prendre 12%

11. Réponse a : 16%

Justification :

Même si on peut se passer des effectifs pour résoudre ce problème, considérons qu'il y a 100 élèves dans le lycée.

Comme il y a 60% de filles, il y a donc 60 filles et 40 garçons.

Il y a 20% de filles latinistes : $60 \times 0,2 = 12$ filles latinistes.

Il y a 10% de garçons latinistes : $40 \times 0,1 = 4$ garçons latinistes.

Donc au total 16 latinistes par rapport aux 100 élèves, cela fait 16% de latinistes.

12. Réponse a : 1100 euros

Justification :

Augmentation de 10% : $k = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$

Loyer de la 2ème année : $1000 \times 1,1 = 1100$.

13. Réponse b : 1207,8 euros

Justification :

La valeur du taux d'augmentation baisse de 2% : $10 \times 0,98 = 9,8$.

Donc le taux d'augmentation à la fin de la 2ème année est de 9,8%.

Augmentation de 9,8% : $k = 1 + \frac{9,8}{100} = 1,098$

Loyer de la 3ème année : $1100 \times 1,098 = 1207,8$.

14. Réponse c : 9,8%

Justification :

Voir le début de la justification de la question 13.

15. Réponse d : 9,604%

Justification :

En utilisant le principe donné dans la question 13, le taux d'augmentation de 9,8% est une fois de plus diminué de 2% : $9,8 \times 0,98 = 9,604$.

16. Réponse b : faux

Justification :

Tous les ans, la valeur du taux d'augmentation est égale à celle de l'année précédente qu'il faut multiplier par 0,98 (baisse de 2%).

Le taux d'augmentation ne pourra donc jamais être égal à 0.

L'erreur consistait à penser que c'est la valeur du taux d'augmentation qui diminuait de 2 tous les ans : 10%, puis 8%, puis 6%, etc ... alors qu'elle diminue de 2% de sa valeur !

17. Réponse b : $0,98^5 \times 10\%$

Justification :

A la fin de la 2ème année, le taux d'augmentation est égal à $10 \times 0,98$.

A la fin de la 3ème année, le taux d'augmentation est égal à $10 \times 0,98 \times 0,98 = 10 \times 0,98^2$.

Ainsi de suite, donc :

A la fin de la 6ème année, le taux d'augmentation est égal à $10 \times 0,98^5$.

18. Réponse c : autre chose

Justification :

Au début de la 2ème année, l'augmentation est de 10%, il faut multiplier le loyer par $k_1 = 1 + 0,1 = 1,1$.
 Au début de la 3ème année, l'augmentation, qui baisse de 2%, est de $10 \times 0,98$, donc il faut multiplier par $k_2 = 1 + 0,1 \times 0,98$.
 Au début de la 4ème année, l'augmentation, qui baisse de 2%, est de $10 \times 0,98^2$, donc il faut multiplier par $k_3 = 1 + 0,1 \times 0,98^2$.
 Au début de la 5ème année, l'augmentation, qui baisse de 2%, est de $10 \times 0,98^3$, donc il faut multiplier par $k_4 = 1 + 0,1 \times 0,98^3$.
 Donc, il faut multiplier le loyer initial par : $k = k_1 k_2 k_3 k_4 = 1,1(1 + 0,1 \times 0,98)(1 + 0,1 \times 0,98^2)(1 + 0,1 \times 0,98^3)$

19. Réponse b : faux

Justification :

Tous les ans, la valeur du taux d'augmentation diminue de 2%, c'est donc une suite décroissante.

20. Réponse a : vrai

Justification :

Tous les ans, même si le taux d'augmentation diminue, il reste positif et donc le loyer continue d'augmenter.

Les Probabilités

I. Événements

On considère une expérience (par exemple le jet d'un dé). L'ensemble de tous les résultats possibles est supposé fini et noté U .

(dans l'exemple, $U = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

1. Événement



Définition

C'est l'ensemble de tous les résultats caractérisés par une même propriété lors d'une expérience. C'est une partie A de U .

Exemple : le numéro sorti lors d'un jet d'un dé est pair : $A = 2, 4, 6$.

2. Événement élémentaire



Définition

C'est l'événement constitué d'un seul résultat. C'est un singleton.

Exemple : Les événements élémentaires du jet d'un dé sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3. Intersection de deux événements A et B



Définition

C'est l'événement constitué des résultats communs aux événements A et B . C'est la partie $A \cap B$.

Exemple : Si A correspond à l'obtention d'un nombre pair et B à l'obtention d'un multiple de 3, alors : $A \cap B = 6$.

Remarque : repérer les « et » dans le texte. Ils caractérisent l'intersection.

4. Événements incompatibles (ou disjoints)



Définition

Deux événements sont incompatibles si ils n'ont aucun résultat en commun, ce qui correspond à $A \cap B = \emptyset$.

Exemple : Si A correspond à l'obtention d'un nombre impair et B à l'obtention d'un multiple de 4, alors A et B sont incompatibles.

5. Réunion de deux événements



Définition

C'est l'événement constitué des résultats de l'événement A ou de l'événement B . C'est la partie $A \cup B$.

Exemple : Si A correspond à l'obtention d'un numéro pair et B à l'obtention d'un numéro supérieur ou égal à 3, alors : $A \cup B = 2, 3, 4, 5, 6$.

Remarques :

- Ne pas confondre $A \cup B$, caractérisé par « ou », et $A \cap B$, caractérisé par « et ».
- $A \cup B$ contient $A \cap B$.

6. Événement contraire de A



Définition

C'est l'événement constitué des résultats n'appartenant pas à A.

Exemple : Si A correspond à l'obtention d'un numéro pair, alors l'événement contraire de A est : 1, 3, 5 (obtention d'un numéro impair).

II. Probabilités

Lors d'une expérience, on cherche à mesurer par un réel la chance d'obtenir telle ou telle propriété caractérisant un événement. Lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois, ce réel peut être la fréquence de l'événement.

1. Définition



La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires composant A.

On note $p(A)$ cette probabilité.

Exemple : Si A correspond à l'obtention d'un nombre impair et si tous les numéros ont la même chance d'apparaître, alors :

$$p(A) = p(1) + p(3) + p(5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2.$$

2. Propriétés



Propriété 1

$p(\emptyset) = 0$, $p(U) = 1$ et pour tout événement, $0 \leq p(A) \leq 1$.

Remarque : Ne jamais écrire une probabilité plus grande que 1.



Propriété 2

Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Remarques :

- Cette propriété entraîne que si $A \in C$, alors $p(A) \leq p(C)$.
- Si A et B sont incompatibles lorsque l'appartenance à $A \cup B$ se traduit par l'appartenance à A « ou bien » à B.



Propriété 3

Si A et B sont quelconques, alors : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.



Propriété 4

$p(\text{événement contraire de A}) = 1 - p(A)$.

3. Équiprobabilité



Définition

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Remarque :

Cela correspond à une expérience où n'intervient que le hasard (dé non pipé, boules indiscernables,...).



Propriété :

Dans le cas d'équiprobabilité $p(A) = (\text{nombre de résultats dans } A) / (\text{nombre total de résultats})$.

Remarque :

Avant d'appliquer cette formule, ne pas oublier de signaler l'équiprobabilité et l'expression du texte qui la justifie.

Les Probabilités : Fiche Méthode

I. Face à un exercice de probabilités

- Commencer par bien lire l'énoncé.
- Certaines expressions permettent de traduire tout de suite l'hypothèse d'équiprobabilité («au hasard» «dé non pipé», «boules indiscernables», ...).
- La formulation du problème conduit souvent à un schéma (arbre, tableau, ...) qui traduit la situation et aide à résoudre l'exercice.
- Certains énoncés utilisent des données statistiques qui peuvent être traduites en termes probabilistes (par exemple, 25 % correspond à une probabilité de $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$).

II. Méthodes classiques

- Un événement complexe peut se traduire comme la réunion de plusieurs événements incompatibles plus simples : on est alors amené à calculer la probabilité de chacun de ces événements, et à utiliser la propriété suivante :

Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

- Utiliser la propriété suivante :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

lorsque le calcul de $p(\bar{A})$ est plus simple (c'est-à-dire conduit à moins de cas) que celui de $p(A)$;
par exemple, lorsque A se traduit par «au moins un...», $\bar{A}$ se traduit par «aucun».

III. Règles à ne pas oublier

- Toute probabilité est comprise entre 0 et 1.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 (n'est jamais mentionné dans l'énoncé, mais doit toujours être présent à l'esprit).
- Vérifier la cohérence des résultats vis-à-vis des données de l'exercice et ne pas négliger l'intuition ; par exemple, une population peu représentée conduira en général à une probabilité faible.

Les probabilités

Exercice 1

Relever la (ou les) réponse(s) exacte(s).

I.

On lance 200 fois un dé pipé. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'apparitions de chaque numéro. On admet la stabilité des résultats si on procède à d'autres jets.

1	2	3	4	5	6
30	40	36	28	35	31

1. Le pourcentage d'apparition d'un numéro pair est :
 - a) 50 %
 - b) 49,5 %
 - c) 50,5 %
2. Le pourcentage d'apparition d'un numéro impair est :
 - a) 50 %
 - b) 49,5 %
 - c) 50,5 %
3. Le pourcentage d'apparition d'un numéro supérieur ou égal à 4 est :
 - a) 41 %
 - b) 50 %
 - c) 47 %
4. Le numéro qui apparaît le plus souvent est :
 - a) pair
 - b) 6
 - c) 2

II.

Dans une population de lycéens, 30 % font du sport hors du lycée. Parmi les sportifs, 15 % font du volley, 20 % de la natation, et 5 % font à la fois du volley et de la natation. Alors, le pourcentage de lycéens faisant :

5. du volley hors du lycée est :
 - a) 4,5 %
 - b) 50 %
 - c) 15 %
6. aucun sport hors du lycée est :
 - a) 70 %
 - b) 65 %
 - c) 30 %
7. un sport mais ni volley, ni natation est :
 - a) 65 %
 - b) 21 %
 - c) 19,5 %
8. du volley, mais pas de natation est :
 - a) 3 %
 - b) 10 %
 - c) 4,5 %

III.

On s'intéresse aux variations de prix d'un produit donné.

9. Deux augmentations successives de 10 % donnent une augmentation de :

- a) 20 %
- b) 12,1 %
- c) 21 %

10. Une augmentation de 10 % puis une baisse de 10 % donnent :

- a) un prix inchangé
- b) une augmentation de 1 %
- c) une baisse de 1 %

Exercice 2

La COVECO est une coopérative de vente par correspondance. Chaque sociétaire est muni d'un indicatif. De plus, pour commander par le réseau Minitel, il doit posséder un code secret personnel.

1. L'indicatif de sociétaire est formé d'un numéro de six chiffres suivi d'une lettre, répondant aux conditions suivantes :

- il peut y avoir répétition des chiffres,
- le premier chiffre à gauche ne peut être zéro,
- la lettre ne peut être O.

Il y a autant d'indicatifs que de sociétaires. Combien peut-il y avoir de sociétaires ?

2. Le code secret est composé de quatre lettres prises parmi les vingt-six de l'alphabet (donc O est, cette fois, utilisable), avec répétition possible.

Est-ce que tout sociétaire peut posséder un code secret ? (Justifier la réponse).

Exercice 3

On utilise un dé pipé, à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Lorsqu'on le lance :

- les faces portant un chiffre pair ont la même probabilité d'apparition,
- les faces portant un chiffre impair ont la même probabilité d'apparition,
- la probabilité d'apparition d'un chiffre impair est le double de la probabilité d'apparition d'un chiffre pair.

1. Calculer la probabilité de voir apparaître chaque face ;

2. Calculer la probabilité de voir apparaître un chiffre pair, un chiffre impair.

Exercice 4

Le sang humain est classé en 4 groupes distincts : A, B, AB et O. Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (Rh+), sinon il est dit de Rhésus négatif (Rh-).

Sur une population P les groupes sanguins se répartissent d'après le tableau suivant :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe, la population d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit d'après le tableau suivant :

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang de groupe O et Rhésus négatif est appelé un donneur universel.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang du groupe O ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang de Rhésus négatif ?

Exercice 5

Dans un sac, il y a des grosses boules et des petites ; ces boules sont blanches ou noires. On sait qu'il y a 5 grosses et 4 petites parmi lesquelles 6 sont blanches et 3 noires.

1. Sachant qu'il y a trois boules à la fois blanches et grosses, déterminer le nombre de boules " petites et noires ", " grosses et noires ", " petites et blanches ". (On pourra utiliser un tableau à double entrée).
2. On tire une boule au hasard, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée ; quelles sont les probabilités pour qu'elle soit :
 - blanche et petite ?
 - blanche ?
 - petite ?
 - blanche ou petite ?

Exercice 6

Deux grossistes produisent des bulbes de tulipes :

- le premier, des bulbes à fleurs rouges dont 90 % donnent une fleur,
- le second, des bulbes à fleurs jaunes dont 80 % donnent une fleur.

Un horticulteur achète 70 % des bulbes qu'il cultive au premier grossiste et le reste au second. Un bulbe donne au plus une fleur. L'horticulteur plante un bulbe au hasard. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir une fleur rouge ?
2. d'obtenir une fleur jaune ?
3. de ne pas obtenir de fleur ?

Exercice 7

Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B.

Dans un lot de 1 000 appareils prélevés, on a constaté que 100 appareils présentaient le défaut A (et peut-être aussi le défaut B), 80 appareils présentaient le défaut B (et peut-être aussi le défaut A) et 40 présentaient simultanément les défauts A et B.

Un client achète un des appareils produites. Calculer :

1. la probabilité pour qu'il ne présente aucun défaut.
2. la probabilité pour qu'il présente le défaut A seulement.

- la probabilité pour qu'il présente le défaut B seulement.

Exercice 8

Une enquête est faite auprès de la population étudiante d'un campus universitaire. On note F la population féminine, I l'ensemble des étudiants, garçons et filles, sachant jouer d'un instrument de musique.

L'enquête révèle que :

- F représente 48 % de la population étudiante ;
- I représente 40 % de la population étudiante ;
- chez les étudiants du groupe I, 45 % sont des filles.

On interroge un étudiant au hasard. Quelle est la probabilité pour que ce soit :

- un garçon ?
- un étudiant du groupe I ?
- une fille sachant jouer d'un instrument de musique ?
- un garçon sachant jouer d'un instrument de musique ?

Exercice 9

Un institut de sondage réalise une enquête sur les goûts des Français en matière de sport. Dix sports différents ont été retenus, quatre sports d'équipe (football, rugby, volley-ball, basket-ball), six sports individuels (tennis, golf, natation, escrime, patinage, équitation).

Lors de l'enquête, on demande à la personne interrogée de choisir cinq sports parmi les dix cités et de les classer par ordre de préférence, sans ex-aequo.

On suppose que toutes les réponses possibles sont équiprobables.

- Dénombrer toutes les réponses possibles.
- Quelle est la probabilité pour que le tennis soit cité en premier ?
- Quelle est la probabilité pour que la réponse ne mentionne que des sports individuels ?
- Quelle est la probabilité pour que les trois premiers sports cités soient des sports d'équipe, les deux derniers étant des sports individuels ?

Exercice 10

Dans un club sportif, quinze garçons, dont Eric et Paul, jouent au football ; l'entraînement est fait de telle sorte que chaque garçon est capable d'occuper n'importe quel poste.

Pour former une équipe, on tire au sort onze joueurs parmi les quinze joueurs du club et on leur attribue au hasard un numéro de 1 à 11, chaque numéro correspondant à un poste.

Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

- Eric occupe le poste de gardien de but ?
- Paul est dans l'équipe ?
- On sélectionne Eric et Paul ?
- On sélectionne Eric ou Paul ?

Exercice 11

Une représentation simplifiée des conditions météorologiques consiste à classer le temps en trois catégories : beau, variable et mauvais. Le tableau suivant fournit la probabilité pour avoir un temps donné le lendemain en fonction du temps du jour même.

1 ^{er} jour 2 ^{ème} jour	beau	variable	mauvais
beau	0,6	0,3	0,1
variable	0,3	0,4	0,3
mauvais	0,1	0,3	0,6

Nous sommes vendredi et il fait beau.

Quelle est la probabilité pour qu'il fasse beau :

1. samedi et dimanche ?
2. dimanche ?
3. samedi ou dimanche ?

Exercice 12

Dans un jeu de dominos, on rappelle que les dominos sont numérotés de 0 à 6. On tire un domino au hasard, les tirages étant équiprobables.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On additionne les nombres de points inscrits sur les dominos. Soit S le résultat obtenu. Quelles sont les différentes valeurs prises par S ? Pour chacune de ces valeurs n , calculer la probabilité p_n pour que S soit égal à n .
3. Calculer $p_0 + p_1 + \dots + p_{12}$.



Correction

Exercice 1

I.

1. réponse b) 49,5%
 $= 99/200$

2. réponse c) 50,5%
 $= 100\% - 49,5\%$ ou $101/200$

3. réponse c) 47%
 $= 94/200$

4. réponses a) et c) pair et 2
car 2, qui apparaît 40 fois, est un chiffre pair

II.

5. réponse a) 4,5%
 $30\% \times 15\% = 4,5\%$

6. réponse a) 70%
 $100\% - 30\% = 70\%$

7. réponse b) 21%

Celui-ci est assez difficile. On aurait facilement tendance à répondre 19,5%. Ceux qui ont répondu 19,5% se sont trompés en comptant le pourcentage de sportifs ne faisant ni du volley, ni de la natation : ils ont trouvé 65% au lieu des 70% qui étaient à trouver en utilisant la formule suivante :

$$p(V \cup N) = p(V) + p(N) - p(V \cap N)$$

$$p(V \cup N) = 15\% + 20\% - 5\%$$

$$p(V \cup N) = 30\%$$

On trouve les 70% en faisant $100\% - 30\%$. Ensuite, il ne reste plus qu'à faire $70\% \times 30\% = 21\%$

Ce qu'il ne fallait surtout pas faire était : $p(V \cup N) = p(V) + p(N) = 15\% + 20\% = 35\%$

8. réponse a) 3%

$$[30\% \times (15 - 5)\% = 30\% \times 10\% = 3\%.$$

Le $(15 - 5)\%$ s'explique par le fait que l'on veut le pourcentage de sportifs faisant du volley mais ne faisant pas de natation. Or il y a 15% de sportifs qui font du volley, mais parmi ces 15%, il y en a 5% qui font aussi de la natation et qu'il faut donc soustraire.

III.

9. réponse c) 21%

La première hausse de 10% amène le prix à 110% de ce qu'il était initialement. Ensuite, on fait la seconde hausse de 10%. Ce ne sont plus 10% du prix initial qui sont ajoutés, mais 10% du prix obtenu, soit 110% de l'initial.

Or : $10\% \times 110\% = 11\%$. Ceci porte donc le prix à $110\% + 11\% = 121\%$ de ce qu'il était initialement.

On voit donc bien que deux hausses successives de 10% équivalent à une seule de 21%.

10. réponse c) une baisse de 1%

La première hausse de 10% amène le prix à 110% de ce qu'il était initialement.

Mais 10% de 110% équivalent à 11%, donc lorsqu'on applique une baisse de 10% sur le nouveau prix, on obtient : $110\% - 11\% = 99\%$ du prix initial.

Ainsi, une hausse de 10% suivie d'une baisse de 10% correspond à une seule baisse de 1%.

Exercice 2

1. Le premier chiffre est différent de 0, ce qui nous donne 9 possibilités (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9), les 5 chiffres suivants ont chacun 10 possibilités,

et enfin, pour la dernière lettre, celle-ci devant être différente de O, on a 25 possibilités. Ce qui nous donne :

$$9 \times 10^5 \times 25 = 225 \times 10^5 = 22\,500\,000 \text{ sociétaires.}$$

2. Le code est composé de 4 lettres prises parmi les 26 de l'alphabet. Ceci nous donne un total de nombres secrets différents égal à :

$$26^4 = 456\,976 \text{ codes}$$

Conclusion : Comme $456\,976 < 22\,500\,000$, alors tous les sociétaires ne peuvent pas posséder un code secret unique.

Exercice 3

Soit p la probabilité d'apparition d'un chiffre pair donné et q la probabilité d'apparition d'un nombre impair donné.

Récapitulons les hypothèses de l'énoncé sous forme algébrique :

- Selon l'énoncé, les faces portant un chiffre pair ont la même probabilité d'apparition, donc :

$$p(2) = p(4) = p(6) = p$$

- De même pour les faces portant un chiffre impair, on a :

$$p(1) = p(3) = p(5) = q$$

- On nous dit enfin que la probabilité d'apparition d'un chiffre impair est le double de la probabilité d'apparition d'un chiffre pair, donc :

$$q = 2p$$

1. Calculons la probabilité de voir apparaître chaque face. On sait que la somme des probabilités est égale à 1, donc :

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$$

$$\text{soit : } 3p + 3q = 1$$

$$\text{Or, } q = 2p, \text{ donc : } 3p + 6p = 1$$

$$p = 1/9$$

$$\text{Conclusion : } p(2) = p(4) = p(6) = 1/9 \quad \text{et} \quad p(1) = p(3) = p(5) = 2 \times 1/9 = 2/9.$$

$$2. \bullet \text{ Probabilité de voir apparaître un chiffre pair : } p(2) + p(4) + p(6) = 3 \times 1/9 = 1/3$$

$$\bullet \text{ Probabilité de voir apparaître un chiffre impair : } p(1) + p(3) + p(5) = 3 \times 2/9 = 2/3$$

Exercice 4

On note :

N l'événement : " l'individu est de rhésus négatif "

O l'événement : " l'individu est du groupe sanguin O "

A l'événement : " l'individu est du groupe sanguin A "

B l'événement : " l'individu est du groupe sanguin B "

C l'événement : " l'individu est du groupe sanguin AB "

1. Cette probabilité est donnée par le premier tableau : $p(O) = 45\% = 45/100 = 9/20 = 0,45$

2. Calculons la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P soit "donneur universel", c'est-à-dire qu'il sera de groupe sanguin O et de rhésus négatif.

On vient de voir qu'un individu pris au hasard avait 45% de chance d'être d groupe sanguin O.

De plus le second tableau nous indique qu'un individu de groupe sanguin O a 20% de chance d'être de rhésus négatif. On a donc :

$$p(O \cap N) = 45\% \times 20\% = 9/20 \times 1/5 = 9/100 = 0,09$$

Conclusion : Un individu pris au hasard dans la population P a 9% de chance d'être un "donneur universel".

3. Calculons la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang de rhésus

négatif.

Un individu pris au hasard dans la population P a 40% de chance d'être de groupe sanguin A, et si c'est le cas, il a alors 18% de chances d'être de rhésus négatif.

En raisonnant de même avec les groupes sanguins B, AB et O, on obtient :

$$p(N) = p(A \cap N) + p(B \cap N) + p(C \cap N) + p(O \cap N)$$

$$p(N) = 40\% \times 18\% + 10\% \times 19\% + 5\% \times 17\% + 9\%$$

$$p(N) = 18/250 + 19/1000 + 17/2000 + 9/100$$

$$p(N) = 379/2000$$

$$p(N) = 0,1895$$

Conclusion : Un individu pris au hasard dans la population P a une probabilité de 379/2000 d'être de rhésus négatif.

Exercice 5

1. On nous dit qu'il y a 3 boules "blanches et grosses". Or, sachant par hypothèse qu'il y a en tout 6 boules blanches, on déduit facilement que les 3 boules blanches restantes sont petites.

Sachant également par hypothèse qu'il y a 5 boules grosses, on en déduit que les 2 boules grosses restantes sont noires, et, de même, sachant qu'il n'y a que 4 boules petites, on en déduit que la dernière d'entre elles est également noire.

Le tableau à double entrée à remplir était le suivant (en rouge, l'hypothèse donnée dans la questions : " il y a trois boules à la fois blanches et grosses ") :

	grosses	petites
blanches	3	3
noires	2	1

Conclusion : Il y a 1 boule "petite et noire", 2 boules "grosses et noires" et 3 boules "petites et blanches" (ainsi, évidemment, que 3 boules "grosses et blanches").

2. On note ainsi les événements suivants :

B : "on obtient une boule blanche"

N : "on obtient une boule noire"

P : "on obtient une boule petite"

G : "on obtient une boule grosse"

Ici, on tire une boule au hasard, chacune de ces boules ayant la même probabilité d'être tirée. On se retrouve donc en situation d'équiprobabilité. On nous demande de calculer :

- la probabilité que la boule tirée soit petite et blanche : il y a 9 boules parmi lesquelles 3 sont " petites et blanches ", on a donc :

$$p(B \cap P) = 3/9 = 1/3$$

- la probabilité que la boule tirée soit blanche : il y a 9 boules parmi lesquelles 6 sont " blanches ", on a donc :

$$p(B) = 6/9 = 2/3$$

- la probabilité que la boule tirée soit petite : il y a 9 boules parmi lesquelles 4 sont " petites ", on a donc :

$$p(P) = 4/9$$

- la probabilité que la boule tirée soit blanche ou petite : ici, il va falloir utiliser la formule suivante :

$$p(B \cup P) = p(B) + p(P) - p(B \cap P)$$

$$p(B \cup P) = 2/3 + 4/9 - 1/3$$

$$p(B \cup P) = 7/9$$

remarque : Les seules données du tableau permettaient de répondre à ces questions beaucoup plus rapidement.

Exercice 6

Considérons les événements suivants :

J : "le bulbe à fleur jaune donne bien une fleur"

$\bar{J}$: "le bulbe à fleur jaune ne donne pas de fleur"

R : "le bulbe à fleur rouge donne bien une fleur"

$\bar{R}$: "le bulbe à fleur rouge ne donne pas de fleur"

On a par hypothèse :

$$p(J) = 8/10 = 4/5 \quad \text{et} \quad p(R) = 9/10$$

$$\text{On en déduit que : } p(\bar{J}) = 1/5 \quad \text{et} \quad p(\bar{R}) = 1/10$$

Considérons ensuite les événements suivants :

A : "le bulbe choisi provient du premier grossiste"

B : "le bulbe choisi provient du second grossiste"

$$\text{On a par hypothèse : } p(A) = 70\% = 7/10 \quad \text{et} \quad p(B) = 30\% = 3/10$$

L'horticulteur plante un bulbe au hasard : nous sommes en situation d'équiprobabilité.

1. Calculons la probabilité d'obtenir une fleur rouge. Pour cela, il faut tout d'abord que l'horticulteur ait choisi un bulbe du premier grossiste et ensuite, il faut que ce bulbe rouge donne une fleur :

$$p(A \cap R) = p(A) \times p(R) = 7/10 \times 9/10 = 63/100 = 0,63$$

2. Calculons la probabilité d'obtenir une fleur jaune. Pour cela, il faut tout d'abord que l'horticulteur ait choisi un bulbe du second grossiste et ensuite, il faut que ce bulbe jaune donne une fleur :

$$p(B \cap J) = p(B) \times p(J) = 3/10 \times 4/5 = 12/50 = 6/25 = 0,24$$

3. Calculons la probabilité de l'événement T : "ne pas obtenir de fleur".

Pour que T soit réalisé, il faut que le bulbe choisi soit du premier grossiste et que ce bulbe rouge ne donne pas fleur, ou que ce bulbe soit issu du second grossiste et que ce bulbe jaune ne donne pas fleur. Ceci nous donne :

$$p(T) = p(A \cap \bar{R}) + p(B \cap \bar{J})$$

$$p(T) = p(A) \times p(\bar{R}) + p(B) \times p(\bar{J})$$

$$p(T) = 7/10 \times 1/10 + 3/10 \times 1/5$$

$$p(T) = 7/100 + 3/50$$

$$p(T) = 13/100$$

$$p(T) = 0,13$$

Remarque : On aurait pu aussi calculer $p(T)$ en utilisant l'événement contraire, ce qui aurait été beaucoup plus simple puisque l'on aurait utilisé des probabilités déjà connues dans le calcul.

L'événement contraire de T : "pas de fleur" est $(A \cap R) \cup (B \cap J)$: "on obtient une fleur rouge ou une fleur jaune".

On en déduit :

$$p(T) = 1 - p((A \cap R) \cup (B \cap J))$$

Les événements $(A \cap R)$ et $(B \cap J)$ étant incompatibles (on ne peut pas obtenir une fleur qui soit à la fois rouge et jaune), on a :

$$p((A \cap R) \cup (B \cap J)) = p(A \cap R) + p(B \cap J)$$

Donc :

$$p(T) = 1 - p((A \cap R) \cup (B \cap J))$$

$$p(T) = 1 - [p(A \cap R) + p(B \cap J)]$$

$$p(T) = 1 - (63/100 + 6/25)$$

$$p(T) = 1 - (87/100)$$

$$p(T) = 13/100$$

$$p(T) = 0,13$$

Exercice 7

Considérons les événements suivants :

A : "l'appareil présente le défaut A"

B : "l'appareil présente le défaut B"

Par hypothèses, on a : $p(A) = 100/1000 = 1/10$, $p(B) = 80/1000 = 2/25$ et $p(A \cap B) = 40/1000 = 1/25$

1. Calculons la probabilité que l'appareil ne présente aucun défaut.

Pour cela, nous allons passer par l'événement contraire, c'est-à-dire "l'appareil présente le défaut A ou le défaut B" :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = 1/10 + 2/25 - 1/25$$

$$p(A \cup B) = 7/50$$

Les événements "l'appareil ne présente aucun défaut" et "l'appareil présente le défaut A ou le défaut B" sont contraires, donc on a :

$$p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cup B)$$

$$p(\overline{A \cap B}) = 1 - 7/50$$

$$p(\overline{A \cap B}) = 43/50$$

2. Calculons la probabilité pour que l'appareil présente le défaut A seulement.

Pour cela, il suffit que l'appareil fasse partie de ceux qui présentent le défaut A mais qui ne présentent pas simultanément les deux défauts. On a donc :

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap \overline{B}) = 1/10 - 1/25$$

$$p(A \cap \overline{B}) = 3/50$$

3. Calculons la probabilité pour que l'appareil présente le défaut B seulement.

Pour cela, il suffit que l'appareil fasse partie de ceux qui présentent le défaut B mais qui ne présentent pas simultanément les deux défauts. On a donc :

$$p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(B \cap \overline{A}) = 2/25 - 1/25$$

$$p(B \cap \overline{A}) = 1/25$$

Exercice 8

Considérons les événements suivants :

F : "il s'agit d'une fille"

G : "il s'agit d'un garçon"

I : "la personne sait jouer un instrument de musique"

On a par hypothèses, dans l'ensemble des étudiants :

$$p(F) = 48\% = 12/25$$

$$p(I) = 40\% = 2/5$$

D'après l'énoncé, on a aussi, pour l'ensemble des élèves du groupe I : $p_I(F) = 45\% = 9/20$

On interroge un étudiant au hasard. On est donc en situation d'équiprobabilité.

1. Calculons la probabilité que cet étudiant soit un garçon.

Pour cela, utilisons l'événement contraire "il s'agit d'une fille". On a :

$$p(G) = 1 - p(F)$$

$$p(G) = 1 - 12/25$$

$$p(G) = 13/25$$

2. Calculons la probabilité qu'il s'agisse d'un étudiant du groupe I.

Cette probabilité est donnée par l'énoncé :

$$p(I) = 40\% = 2/5$$

3. Calculons la probabilité qu'il s'agisse d'une fille jouant un instrument de musique.

Pour cela, il faut que la personne fasse partie du groupe I (la probabilité est de $2/5$) et, ensuite si c'est le cas, qu'il s'agisse d'une fille (la probabilité est alors de $9/20$) :

$$p(I \cap F) = p(I) \times p_I(F)$$

$$p(I \cap F) = 2/5 \times 9/20$$

$$p(I \cap F) = 18/100$$

$$p(I \cap F) = 9/50$$

4. Calculons la probabilité qu'il s'agisse d'un garçon jouant un instrument de musique.

Pour cela, il faut que la personne fasse partie du groupe I (la probabilité est de $2/5$) et, ensuite si c'est le cas, qu'il ne s'agisse pas d'une fille, mais d'un garçon (la probabilité est alors de $1 - 9/20$) :

$$p(I \cap G) = p(I) \times p_I(\bar{F})$$

$$p(I \cap G) = 2/5 \times (1 - 9/20)$$

$$p(I \cap G) = 2/5 \times 11/20$$

$$p(I \cap G) = 22/100$$

$$p(I \cap G) = 11/50$$

Exercice 9

1. Dénombrons le nombre de réponses possibles. Il y a 10 sports.

La personne interrogée a donc 10 possibilités pour choisir le sport préféré, mais une fois ce choix effectué elle n'aura plus que 9 possibilités pour le second sport préféré, puis 8 pour le troisième sport préféré, ensuite 7 pour le quatrième sport préféré, et enfin 6 pour le cinquième sport préféré. Ceci nous donne :

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$$

Conclusion : Il y a 30 240 réponses possibles équiprobables (d'après l'énoncé).

2. Calculons la probabilité que le tennis soit cité en premier.

Nous sommes en situation d'équiprobabilité, donc chacun des 10 sports à la même probabilité d'être cité en premier.

On en déduit que le tennis a une probabilité égale à $1/10$ d'être cité en premier.

3. Calculons la probabilité de l'événement I : "la réponse ne mentionne que des sports individuels.

Il y a 6 sports individuels, donc pour que la personne interrogée fournisse une réponse ne mentionnant que les sports individuels, elle a 6 possibilités pour le premier sport préféré, après, 5 pour le second sport préféré, puis 4 pour le troisième sport préféré, ensuite 3 pour le quatrième sport préféré et enfin 2 pour le cinquième sport préféré. Ceci nous donne :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \times 6 = 720$$

On a donc 720 réponses possibles ne mentionnant que des sports individuels sur un total de 30 240 réponses.

Comme nous sommes en situation d'équiprobabilité, on peut appliquer la formule :

$$p(A) = (\text{nombre de cas favorables à A}) / (\text{nombre de cas total}). \text{ On a donc :}$$

$$p(I) = 720 / 30\,240$$

$$p(I) = 1/42$$

4. Calculons la probabilité de l'événement M : "les trois premiers sports cités sont d'équipes et les 2 derniers sont individuels".

On a 4 sports d'équipe et 6 sports individuels.

Il faut que les trois premiers sports cités soient d'équipe. On a donc 4 possibilités pour le premier sport préféré, 3 pour le second sport préféré et 2 pour le troisième sport préféré.

Il faut aussi que les 2 derniers sports soient individuels. On a donc 6 possibilités pour le quatrième sport préféré et 5 pour le cinquième sport préféré.

Ceci nous donne :

$$4 \times 3 \times 2 \times 6 \times 5 = 720$$

On a donc 720 réponses possibles sur un total de 30 240.

D'où : $p(M) = 1/42$

Exercice 10

Pour former une équipe, on tire au sort onze joueurs parmi les quinze joueurs du club et on leur attribue au hasard un numéro de 1 à 11, chaque numéro correspondant à un poste.

On est en situation d'équiprobabilité.

1. Calculons la probabilité de l'événement A : "Éric occupe le poste de gardien de but".

Parmi les 15 joueurs, seul 1 occupera ce poste. Nous sommes en situation d'équiprobabilité, donc cette probabilité est la même pour chacun des 15 joueurs :

$$p(A) = 1/15$$

2. Calculons la probabilité de l'événement P : "Paul est dans l'équipe".

Parmi les 15 joueurs, 11 sont tirés au hasard pour être dans l'équipe. On a donc :

$$p(B) = 11/15$$

3. Calculons la probabilité de l'événement $P \cap E$: "Paul et Éric sont dans l'équipe".

Pour cela, il faut tout d'abord que l'un d'entre eux soit dans l'équipe (probabilité de 11/15), et ensuite que l'autre le soit aussi (probabilité qui devient alors de 10/14). On obtient :

$$p(P \cap E) = 11/15 \times 10/14$$

$$p(P \cap E) = 11/21$$

4. Calculons la probabilité de l'événement $P \cup E$.

Pour cela on va utiliser la formule suivante :

$$p(P \cup E) = p(P) + p(E) - p(P \cap E)$$

$$p(P \cup E) = 11/15 + 11/15 - 11/21$$

$$p(P \cup E) = 99/105$$

$$p(P \cup E) = 33/35$$

Exercice 11

Considérons les événements suivants :

B : "il fait beau"

V : "il fait variable"

M : "il fait mauvais"

Nous sommes vendredi et il fait beau.

1. Calculons la probabilité de l'événement $S \cap D$: "il fait beau Samedi et Dimanche".

Comme nous sommes Vendredi et qu'il fait beau, la probabilité qu'il fasse également beau Samedi est égale à 6/10. De même, s'il fait beau Samedi, la probabilité qu'il fasse beau Dimanche sera égale à 6/10. On a donc :

$$p(S \cap D) = 6/10 \times 6/10$$

$$p(S \cap D) = 3/5 \times 3/5$$

$$p(S \cap D) = 9/25$$

2. Calculons la probabilité de l'événement D : "il fait beau Dimanche".

Il y a trois possibilités pour que l'événement D se réalise. Soit il fait beau Samedi et Dimanche (probabilité calculée précédemment), soit il fait variable Samedi (probabilité de 3/10) et il fait beau Dimanche (probabilité qui est alors de 3/10), soit il fait mauvais Samedi (probabilité de 1/10) et il fait beau Dimanche (probabilité qui est alors de 1/10). On a donc :

$$p(D) = 9/25 + 3/10 \times 3/10 + 1/10 \times 1/10$$

$$p(D) = 9/25 + 9/100 + 1/100$$

$$p(D) = 23/50$$

3. Calculons la probabilité qu'il fasse beau Samedi ou Dimanche. Pour cela, utilisons la formule suivante :

$$p(S \cup D) = p(S) + p(D) - p(S \cap D)$$

$$p(S \cup D) = 6/10 + 23/50 - 9/25$$

$$p(S \cup D) = 7/10$$

Exercice 12

L'exercice parle d'un jeu de dominos. Il faut savoir qu'un jeu de domino est composé de 28 pièces et que :

- sur 7 de ces pièces, se trouve au moins une fois le chiffre 6 (sur 1 des 7, il y est en double)
- sur 7 de ces pièces, se trouve au moins une fois le chiffre 5 (sur 1 des 7, il y est en double)
- sur 7 de ces pièces, se trouve au moins une fois le chiffre 4 (sur 1 des 7, il y est en double)
- sur 7 de ces pièces, se trouve au moins une fois le chiffre 3 (sur 1 des 7, il y est en double)
- sur 7 de ces pièces, se trouve au moins une fois le chiffre 2 (sur 1 des 7, il y est en double)
- sur 7 de ces pièces, se trouve au moins une fois le chiffre 1 (sur 1 des 7, il y est en double)
- sur 7 de ces pièces, se trouve au moins une fois le chiffre 0 (sur 1 des 7, il y est en double)

Ceci peut paraître difficile à comprendre pour ceux qui ne sont pas très familiarisés avec les dominos. Il faut penser que sur chaque domino, il y a deux chiffres inscrits, ce qui nous donne $2 \times 28 = 56$ chiffres inscrits (8 fois chaque chiffre).

Les tirages sont équiprobables.

1. Calculons la probabilité de l'événement A : "on obtient un 6". Nous avons vu qu'il y a 7 pièces parmi les 28 qui portent au moins une fois le chiffre 6 (une le porte en double, mais on doit la compter car la question ne précise pas "on obtient un seul 6"). Les tirages étant équiprobables, on en déduit que :

$$p(A) = 7/28 = 1/4$$

2. Les différentes valeurs prises par S sont celles comprises entre 0 (= 0 + 0) et 12 (= 6 + 6), c'est-à-dire 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12.

Pour chacune de ces valeurs 'n', calculons la probabilité p_n pour que S soit égal à n. On a un total de 28 dominos.

Pour p_0 , on a 1 seul domino qui convient : 0-0 donc $p_0 = 1/28$

Pour p_1 , on a 1 seul domino qui convient : 1-0 donc $p_1 = 1/28$

Pour p_2 , on a 2 dominos qui conviennent : 2-0 et 1-1 donc $p_2 = 2/28 = 1/14$

Pour p_3 , on a 2 dominos qui conviennent : 3-0 et 2-1 donc $p_3 = 2/28 = 1/14$

Pour p_4 , on a 3 dominos qui conviennent : 4-0, 3-1 et 2-2 donc $p_4 = 3/28$

Pour p_5 , on a 3 dominos qui conviennent : 5-0, 4-1 et 3-2 donc $p_5 = 3/28$

Pour p_6 , on a 4 dominos qui conviennent : 6-0, 5-1, 4-2 et 3-3 donc $p_6 = 4/28 = 1/7$

Pour p_7 , on a 3 dominos qui conviennent : 6-1, 5-2 et 4-3 donc $p_7 = 3/28$

Pour p_8 , on a 3 dominos qui conviennent : 6-2, 5-3 et 4-4 donc $p_8 = 3/28$

Pour p_9 , on a 2 dominos qui conviennent : 6-3 et 5-4 donc $p_9 = 2/28 = 1/14$

Pour p_{10} , on a 2 dominos qui conviennent : 6-4 et 5-5 donc $p_{10} = 2/28 = 1/14$

Pour p_{11} , on a 1 seul domino qui convient : 6-5 donc $p_{11} = 1/28$

Pour p_{12} , on a 1 seul domino qui convient : 6-6 donc $p_{12} = 1/28$

3. On a :

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12} = 1$$

Ce résultat est cohérent (puisque nous savons que la somme des probabilités associées aux différentes éventualités d'une expérience aléatoire est toujours égale à 1), et on peut donc confirmer nos résultats de la question précédente.