BT1. 2018

EXERCICE 1 : ..... (05 pts)

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $3iZ + 2i\bar{Z} = 12 + 20i$.

2) On donne l'équation (E): $3Z^3 - 9Z^2 + 3iZ - 9i = 0$.

   a) Vérifie que 3 est une solution de l'équation (E).

   b) Factorise l'équation (E).

   c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

EXERCICE 2 : ..... (06 pts)

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

La fonction f a pour formule explicite $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a ; b et c sont des constantes réelles.

1) Détermine l'ensemble de définition de f.

2) Calcule $f'(x)$.

3) Détermine a ; b et c en utilisant les données du tableau de variation de f.

4) Donne une équation de la tangente (T_0) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.

5) Donne les extrema relatifs en précisant leurs natures.

PROBLEME .....(09 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{2x-4}$ et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1) Détermine les réels a ; b et c tels que pour tout $x \neq 2$, on ait : $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-4}$.

2) Etudie les variations de f.

3) Dresse le tableau de variation de f.

4) Précise les asymptotes à la courbe (Cf) puis construis la courbe (Cf) et ses asymptotes dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

Correction Math BT1-2018

Malick Ould-G

Exercice 1:

1- Resolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $3iz + 2i\bar{z} = 12 + 20i$

ouvant pre $z = a + ib$ donc et $\bar{z} = a - ib$

$3i(a+ib) + 2i(a-ib) = 12 + 20i$

$3ia - 3b + 2ia + 2b = 12 + 20i$

$5ia - b = 12 + 20i$

d'où $\begin{cases} 5a = 20 \\ -b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 4 \\ b = -12 \end{matrix} \Rightarrow z = 4 - 12i$

$\boxed{S = z = 4 - 12i}$

2°/ On donne l'equation (E): $3z^3 - 9z^2 + 3iz - 9i = 0$ d

a) Verifions pre 3 est solution de (E)

$3(3)^3 - 9(3)^2 + 3i(3) - 9i = 0$ donc

3 est solution de (E)

b) Factorisons (E): on sait pre 3 est solution de (E) donc $(E): (z-3)(az^2 + bz + c) \Rightarrow$

$(E): az^3 + bz^2 + 2c - 3az^2 - 3bz - 3c = 0$

donc $(E) = (E)$

$az^3 + z^2(b - 3a) + z(c - 3b) - 3c = 3z^3 - 9z^2 + 3iz - 9i$

donc $\begin{cases} b - 3a = -9 \\ c - 3b = 3i \\ a = 3 \\ -3c = -9i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - 9 = -9 \Rightarrow b = 0 \\ a = 3 \\ c = 3i \end{cases}$

d'où $\boxed{(E) : (z-3)(3z^2+3i)}$

c) Resolvons l'equation (E)

donc $3z^2+3i=0 \Rightarrow z^2+i=0 \Rightarrow z^2=-i$

$\Rightarrow z = \pm\sqrt{-i}$ ou $-\sqrt{-i}$

$\begin{cases} z=\sqrt{-1}\times\sqrt{i}=i\times\sqrt{i}=i\times i^{\frac{1}{2}} \text{ or } i=e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z=-\sqrt{-i}=-i\sqrt{i}=-i\times i^{\frac{1}{2}} \text{ or } i=e^{i\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

$\begin{cases} z=\pm\, i(e^{i\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} \\ \quad = ie^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$

$\begin{cases} z=\pm\, i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow z=\pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$

d'où $\boxed{S=\left\{3, -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$

Exercice 2 : forme de f : $f(x)=ax^3+bx^2+c$

1) Déterminer D_f selon le Tableau $\boxed{D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[}$

2) Calculer $f'(x) \Rightarrow \boxed{f'(x)=3ax^2+2bx}$

3) Déterminer a, b et c

$f'(-2)=0 \Rightarrow 3a(-2)^2+2b(-2)=0 \Rightarrow 12a-4b=0$

$f'(0)=0 \Rightarrow 3a(0)^2+2b(0)=0$

$f(0)=-5 \Rightarrow a(0)^3+b(0)+c=-5 \Rightarrow c=-5$

$f(-2)=-1 \Rightarrow a(-2)^3+b(-2)+c=1$

$-8a+4b-5=1$

$$\begin{cases} 12a - 4b = 0 \\ -8a + 4b - 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a = 4b \\ -8a + (12a) = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$12\left(\frac{3}{2}\right) = 4b \Rightarrow b = \frac{9}{2}$

donc $\boxed{a = \frac{3}{2},\ b = \frac{9}{2},\ c = -5}$

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5}$$

4) Equation de la tangente à $x_0 = 1$

$(T_0) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x) = \frac{9}{2}x^2 + 9x$; $f'(1) = \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{2}$

$f(1) = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} - 5 = 1$

$\boxed{(T_0) : y = \frac{27}{2}(x - 1) + 1}$

5) Extremas et Nature

f admet un extremum en $x = -2$ et un minimum en $x = 0$

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(2x-4)^2} \Rightarrow f'(x) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{(2x-4)^2} \Rightarrow (2x-4)^2 = 4$

$\Rightarrow 2x-4 = \sqrt{4}$ ou $2x-4 = -4$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x-4 = 2 \\ 2x-4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{3^2 + 3\times 3 + 6}{2\times 3 - 4} = \frac{24}{2} = 12$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1+3+6}{2-4} = -5$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'		$+$	ϕ	$-$	$\|\|$	$-$	ϕ	$+$	
f		↗	-5	↘	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↘	12	↗	$+\infty$

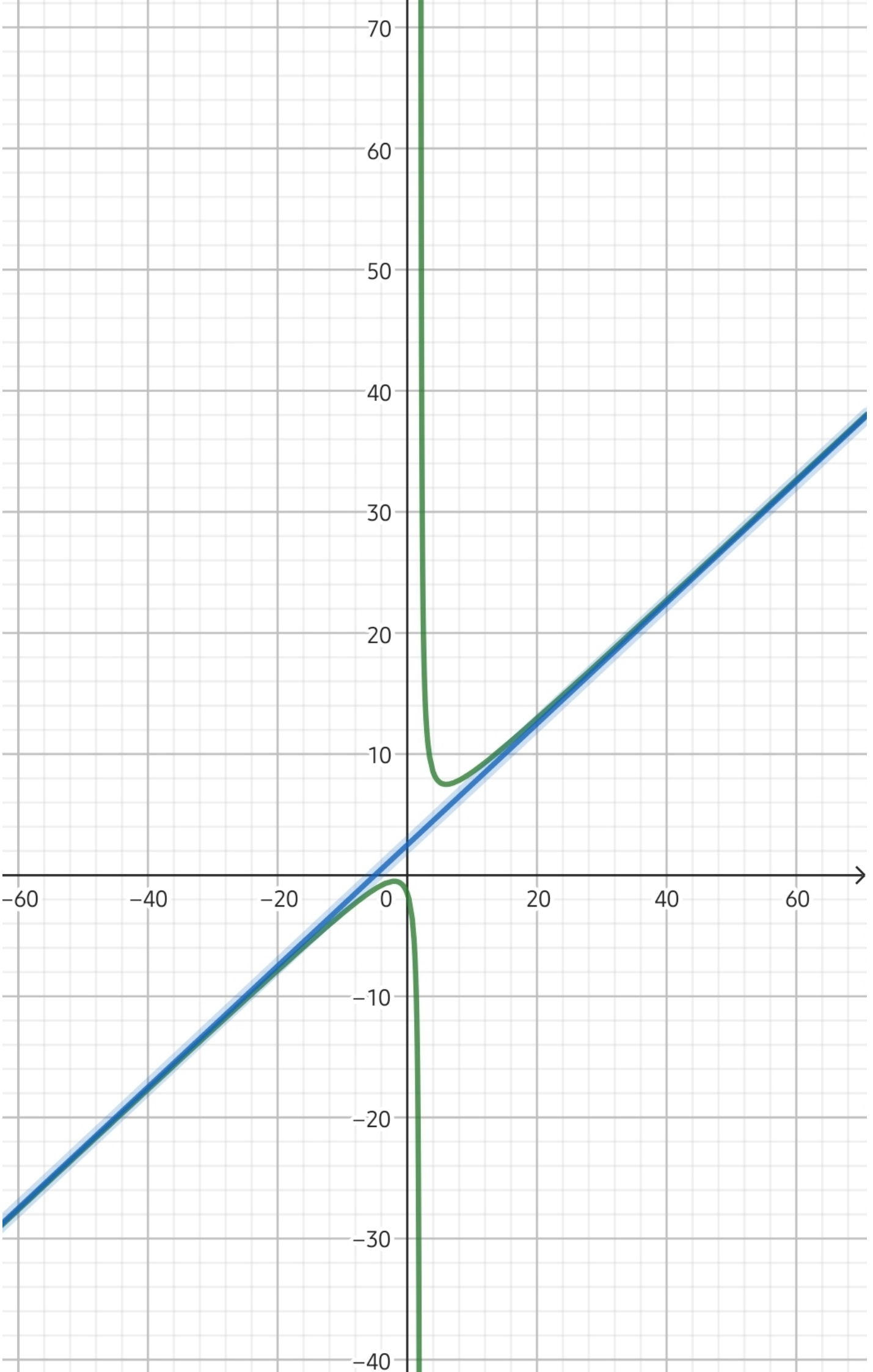
$\forall x \in]-\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$ f est croissante

$\forall x \in]1 ; 2[\cup]2 ; 3[$ $f(x)$ est décroissante

Asymptote et courbe

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ donc $a = \frac{1}{2}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}$

donc $b = \frac{5}{2}$ d'où $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ est Asymptote oblique à C_f


70
60
50
40
30
20
10
−60
−40
−20
0
20
40
60
−10
−20
−30
−40

Sujet 12 .BT1. 2019

EXERCICE 1 : ..... (05 pts)

Soit f la fonction numérique à variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes :

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f(1) = f(3) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 1$; $f'(0) = f'(2) = 0$.
- $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[, f'(x) > 0$ et $\forall x \in]0 ; 2[, f'(x) < 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x + 2] = 0^+$

1) Dresse le tableau de variation de f.

2) Précise les équations des asymptotes à la courbe (Cf) de f.

3) Précise le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

EXERCICE 2 : ..... (05 pts)

1) Résous dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $Z^3 = 8i$.

2) Dans le plan complexe, on désigne par A ; B et C, les points d'affixes respectives :

$Z_A = -2i$; $Z_B = -\sqrt{3} + i$ et $Z_C = \sqrt{3} + i$

a- Calcule le module et un argument de $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$.

b- En déduis la nature du triangle ABC.

PROBLEME ..... (10 pts)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 3}$ et soit (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$. Unité graphique 2 cm.

1) a- Détermine l'ensemble de définition Df de f.

b- Calcule les limites de f aux bornes de Df. En déduis l'équation de l'asymptote verticale.

c- Vérifie que $\forall x \in Df$, $f(x) = x - 1 - \frac{4}{x-3}$.

2) a- Montre que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (Cf)

b- Etudie la position de relative de Cf par rapport à (Δ)

3) a- Prouve que $\forall x \in Df$, $f'(x) = \frac{(x-3)^2 + 4}{(x-3)^2}$

b- Etudie les variations de f sur son ensemble de définition.

4) Dresse le tableau de variation de f.

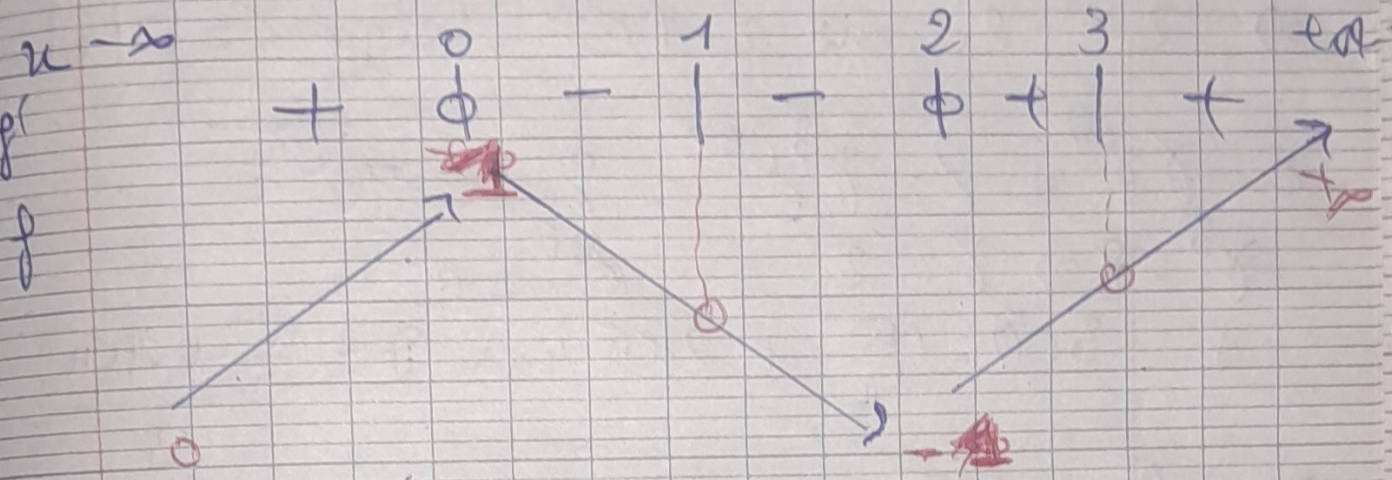
5) Trace Cf et (Δ) dans le même repère.

Correction Math BTS 2019

Malick Oulé

EXERCICE 2 :

1) Dresser le tableau de variation



2) Equation d'asymptote

Asymptote horizontale $y = 0$

Asymptote oblique $y = x - 2$

3) Signe de f

$\forall x \in]-\infty ; 1[\quad f(x) > 0$

si $x = 1 \Rightarrow f(x) = 0$

$\forall x \in]1 ; 3[\Rightarrow f(x) < 0$

si $x = 3 \Rightarrow f(x) = 0$

$\forall x \in]3 ; +\infty[\quad f(x) > 0$

Exercice 2 :

1/ Résolvons dans ℂ l'équation $z^3 = 8i$

$z^3 = 8i \Rightarrow z^3 = 2^3 i \Rightarrow z^3 = -2^3 i^3$

$\Rightarrow z^3 = -(2i)^3 \Rightarrow z^3 = (-2i)^3$

$\Rightarrow z = -2i$ ou $z = re^{i\theta}$ tel que $r = |z|$ et $\arg(z) = \theta$

$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^3 = r^3 e^{3i\theta} = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

$r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow e^{3i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow 3i\theta = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i \Rightarrow \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}$

$\theta_k = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\pi + 4k\pi}{6} = \frac{\pi(4k+1)}{6}$

$\theta_0 = \frac{\pi}{6}$; $\theta_1 = \frac{5\pi}{6}$; $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$

donc $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $z_3 = 2e^{3i\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{z_1 = \sqrt{3} + i}$; $\boxed{z_2 = -\sqrt{3} + i}$ $\boxed{z_3 = -2i}$

$\boxed{S = \{\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i ; -2i\}}$

2/ $z_A = -2i$; $z_B = -\sqrt{3} + i$; $z_C = \sqrt{3} + i$;

a/ Calculons un module et un argument de $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3}+i+2i}{\sqrt{3}+i+2i} = \frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)}{3+9} = \frac{-(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)^2}{12}$$

$$= \frac{-3}{12}(1-i)^2 = -\frac{(1-2i-1)}{12} = \frac{i}{6}$$

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \left|\frac{i}{6}\right| = \frac{1}{6}, \quad \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{i}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$$

b) ABC est un triangle rectangle en A

Problème :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 3}$

1- a) Déterminer D_f

$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 3\} = \boxed{D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[}$

b) (C_f) admet une asymptote verticale en 3 son équation $\boxed{x = 3}$

- Limite aux bornes

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$ AV

a) Vérifier que $\forall x \in D_f$, $f(x) = x - 1 - \frac{4}{x-3}$

$$\frac{(x-1)(x-3)-4}{x-3} = \frac{x^2-3x-x+3-4}{x-3} = f(x)$$

donc $f(x) = x - 1 - \frac{4}{x-3}$

2- a) Montrer que $(\Delta) : y = x - 1$ est asymptote à (C_f)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = \lim_{x \to +\infty} x - 1 - \frac{4}{x-3} - (x-1)$$

$$= \lim_{x \to} -\frac{4}{x} = 0$$

d'où $(\Delta) : y = x - 1$ est Asymptote oblique à (C_f)

b) Etude des positions

$f(x) - y \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq y$

$\Rightarrow \frac{4}{x-3} \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 0$ absurde

donc (C_f) et (Δ) ne se touche jamais

$f(x) - y \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq y$

$\Rightarrow \frac{4}{x-3} \geq 0 \Rightarrow x > 3$

$\forall x \in]3; +\infty[$ (C_f) est en dessus de (Δ)

$f(x) - y < 0 \Rightarrow x < 3$

$\forall x \in]-\infty; 3[$ (C_f) est en dessous de (Δ)

3/ a/ Prouvons que $f(x) = \frac{(x-3)^2+4}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \left(x - 2 - \frac{4}{x-3}\right)' = 1 - \left(\frac{-4}{(x-3)^2}\right)$

$f'(x) = \frac{(x-3)^2+4}{(x-3)^2}$ Vraie

b/ Variation de f

Posons $f'(x) \geq 0 \Rightarrow (x-3)^2+4 \geq 0$ et $x-3 \neq 0$

$(x-3)^2 = -4 < 0$ donc $f'(x) \geq 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

$(x-3)^2+4 > 0$ donc f est croissante

c/ Tableau de variation

Posons $f(x) \geq 0 \Rightarrow x^2-4x-1 \geq 0$ et $x-3 \neq 0$

$x^2-4x-1 \geq 0 \Rightarrow x^2-4x+4-1-4 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 \geq 5$

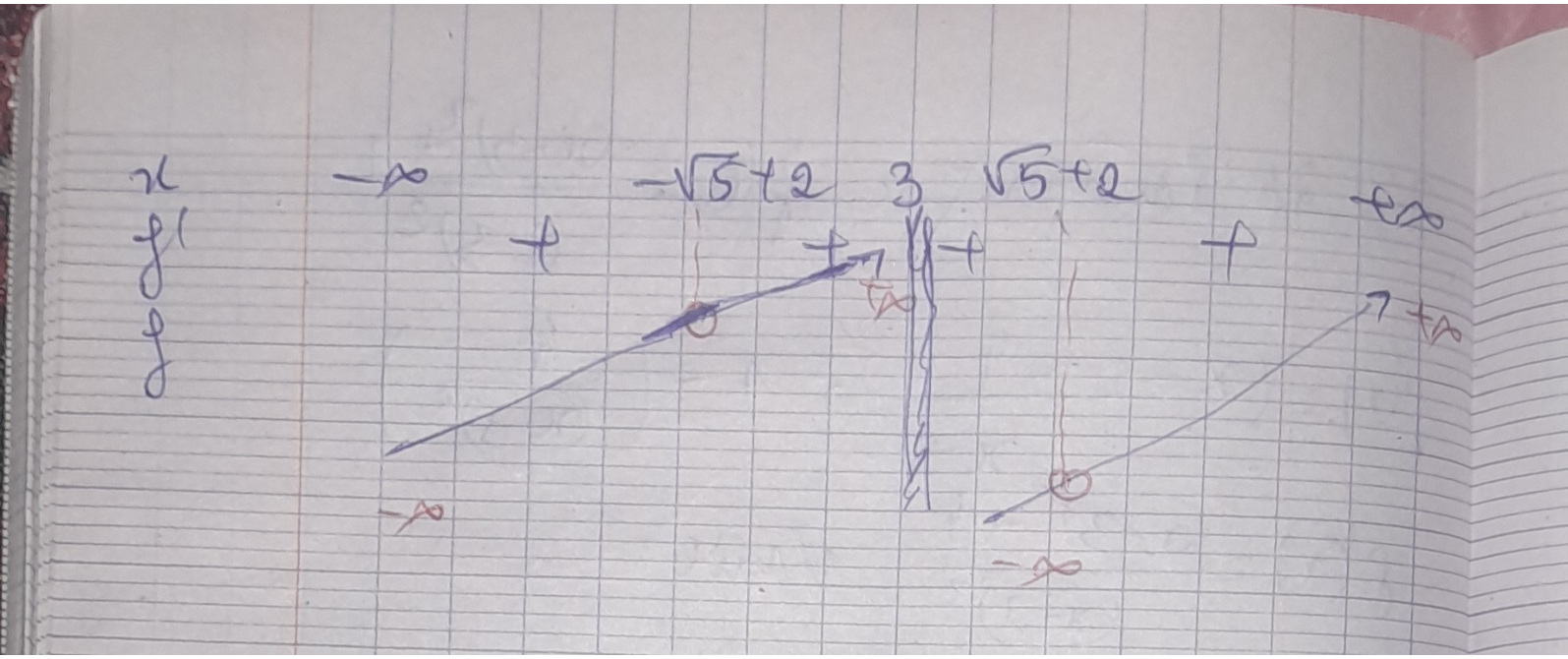
$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5}+2 \\ x = -\sqrt{5}+2 \end{cases} \Rightarrow S = \{\sqrt{5}+2, -\sqrt{5}+2\}$

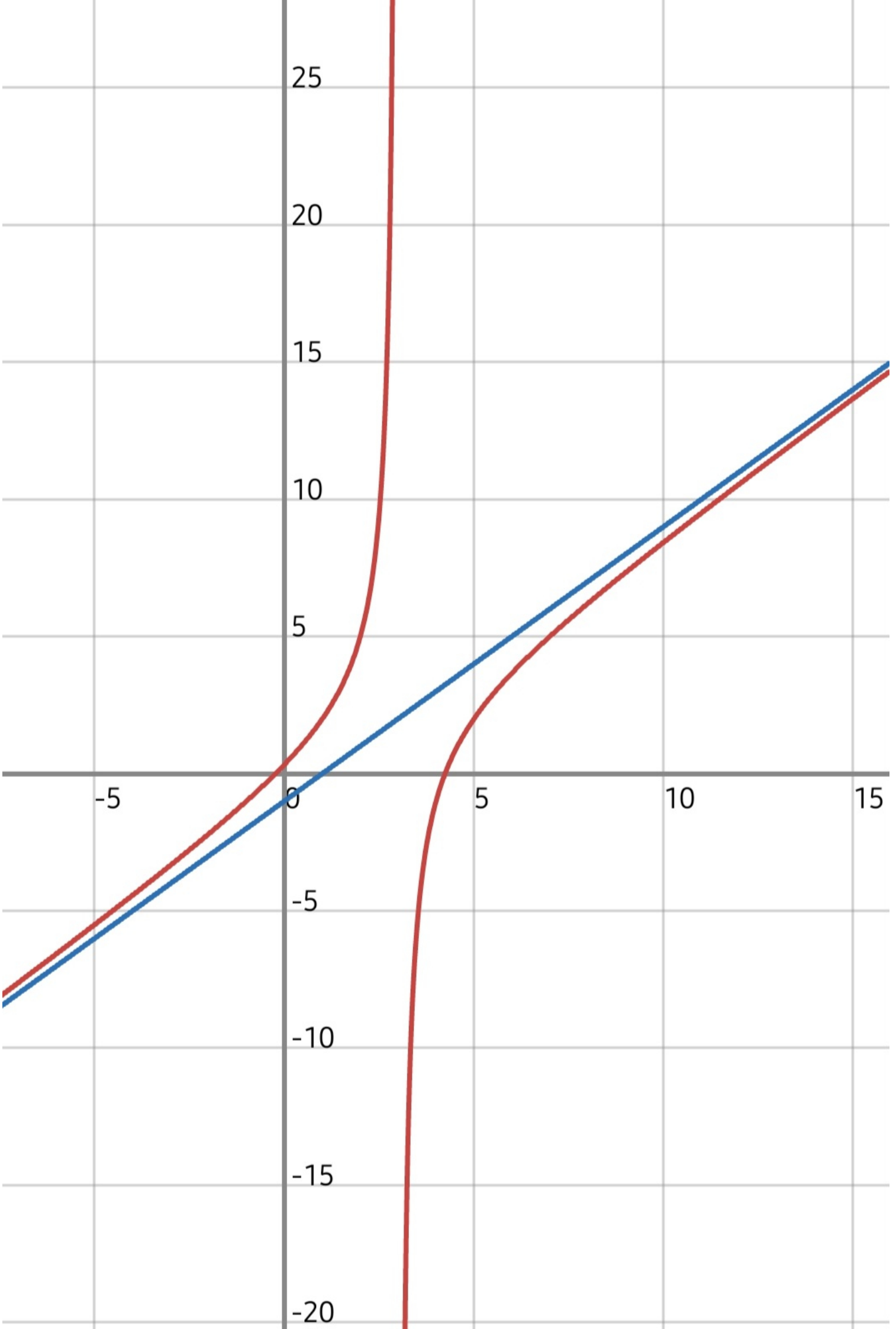
donc $\forall x \in]-\infty; -\sqrt{5}+2[$ $f(x) < 0$

$\forall x \in [-\sqrt{5}+2; 3[$ $f(x) \geq 0$

$\forall x \in]3; \sqrt{5}+2]$ $f(x) < 0$

$\forall x \in [\sqrt{5}+2; +\infty[$ $f(x) \geq 0$


x
f'
f
−∞
−√5+2
3
√5+2
+∞
+
+
+
+
+∞
−∞
−∞
+∞


25
20
15
10
5
-5
0
5
10
15
-5
-10
-15
-20