

EXERCICE 1 : (4 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$.

1°) Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie : $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$.

2°) Calculer $I = \int_0^1 f(x) dx$.

EXERCICE 2 : (4 points)

Soit (U_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$

1°) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 .

2°) Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $V_n = a U_n + 3$; où a est un réel non nul. Calculer V_{n+1} en fonction de V_n et a . Déterminer a pour que (V_n) soit une suite géométrique. On précisera alors son premier terme V_0 et sa raison q .

3°) Exprimer U_n en fonction de n .

4°) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ puis $P_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

PROBLEME : (12 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$.

On appelle (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2cm).

A-/

1°) Calculer la dérivée de f et étudier son signe.

2°) Calculer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (Cf) et préciser les positions de (Cf) par rapport $\mathcal{D}$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3°) Dresser le tableau de variation de f . Tracer (Cf) et $\mathcal{D}$.

B-/

1°) Tracer la droite (Δ) d'équation $y = -x$. D'après le graphique, indiquer le nombre de points d'intersection de (Δ) et de (Cf) .

2°) a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + x$. Calculer sa dérivée et vérifier que g est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-1; \frac{-1}{2}\right]$.

b) Montrer que $g(-1)$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ sont des nombres réels non nuls de signes contraires.

En déduire que l'équation $f(x) = -x$ a une solution unique x_0 dans $\left[-1; \frac{-1}{2}\right]$.

C-/

1°) Calculer l'intégrale $I_0 = \int_0^1 \left(f(x) - x + \frac{1}{2} \right) dx$. Interpréter ce résultat sur le graphique.

2°) Calculer $I_1 = \int_1^2 \left(f(x) - x + \frac{1}{2} \right) dx$.

3°) Plus généralement, $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_n^{n+1} \left(f(x) - x + \frac{1}{2} \right) dx$.

Calculer I_n en fonction de n . Montrer que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

NB : les parties **B-/** et **C-/** du problème sont indépendantes.