

EXERCICE 1 : (4 points)

1- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a)
$$\begin{cases} x + y = 2 \ln 2 \\ x - y = 2 \ln \left(\frac{3}{2} \right) \end{cases}$$

On écrira les solutions sous la forme $x = \ln \alpha$ et $y = \ln \beta$ avec α et β des réels strictement positifs.

b)
$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{7}{3} \\ \ln(xy) = \frac{7}{2} \end{cases}$$

2- Déterminer les réels a ; b et c pour que la fonction F soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f : $F(x) = (ax^2 + bx + c) 2^x$; $f(x) = x^2 2^x$.

EXERCICE 2 : (4 points)

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue x : $3x^4 - 10x^2 + 3 = 0$.

2- Soient a ; b ; c ; d ; e ; cinq termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q non nulle.

a) Exprimer a , b , d , e , en fonction de c et de la raison q .

b) Déterminer a , b , c , d , e pour que :
$$\begin{cases} a + b + e = 13 \\ b \times c \times d = 18 \end{cases}$$

PROBLEME : (12 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 e^x, & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ x - 1 + 2e^{-x}, & \text{si } x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité : 2 cm.

1°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis calculer $f(0)$.

2°) Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$ que l'on précisera.

Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

3°) Calculer la dérivée f' de la fonction f dans $]-\infty; 0]$ puis dans $[0; +\infty[$ et dresser le tableau de variation complet de f . Déterminer le nombre dérivé à gauche et à droite de f en 0.

4°) Construire la courbe (C_f) et (Δ) .

5°) Déterminer sur le graphique, et calculer en cm^2 l'aire a du domaine plan limité par la courbe (C_f) ; l'axe des abscisses ; la droite (Δ) , et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 2$.

6°) Quels sont les extremums locaux de f ? Préciser leurs natures.

7°) a) Calculer $I_1 = \int_1^2 (f(x) - x + 1) dx$.

b) Plus généralement pour tout entier naturel n non nul on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} (f(x) - x + 1) dx.$$

Calculer I_n en fonction de n ; et montrer que (I_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.