

EXERCICE 1 : (4 points)

1°) Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx ; \quad \text{b) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} dx.$$

2°) Pour tout entier naturel non nul n , on considère l'intégrale $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

a) Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]1 ; e[$ et pour tout entier naturel on a $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$. En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .

b) Calculer I_1 .

c) Démontrer en utilisant la méthode d'intégration par parties que pour tout entier naturel non nul, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. En déduire I_2 ; I_3 et I_4 .

EXERCICE 2 : (4 points)

1°) Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$.

Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction g définie par :

$g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E).

2°) On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ et $V_n = \ln(U_n)$.

a) Calculer: u_0 ; u_1 ; u_2 ; v_0 ; v_1 ; v_2 .

b) Déterminer la nature et la raison de chacune des deux suites.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et en déduire la limite de v_n en $+\infty$.

PROBLÈME : (12 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} \ln x$.

1°) Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier que $f'(x)$ a même signe que

$g(x)$ définie par : $g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$.

2°) Etudier les variations de la fonction g et en déduire que l'équation $g(x) = 0$

admet une solution unique α dans l'intervalle $]\frac{3}{2} ; 2[$. Quel est le signe de $g(x)$?

3°) Vérifier l'égalité $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.

4°) Achever l'étude de la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

NB : Prendre $\alpha \approx 1,7$.