

EXERCICE I : (4 points)

On considère le polynôme P de la variable complexe z définie par :

$$P(Z) = Z^3 + i Z^2 - 3Z + 5i .$$

a°) Calculer $P(i)$ puis déterminer toutes les racines de $P(Z) = 0$

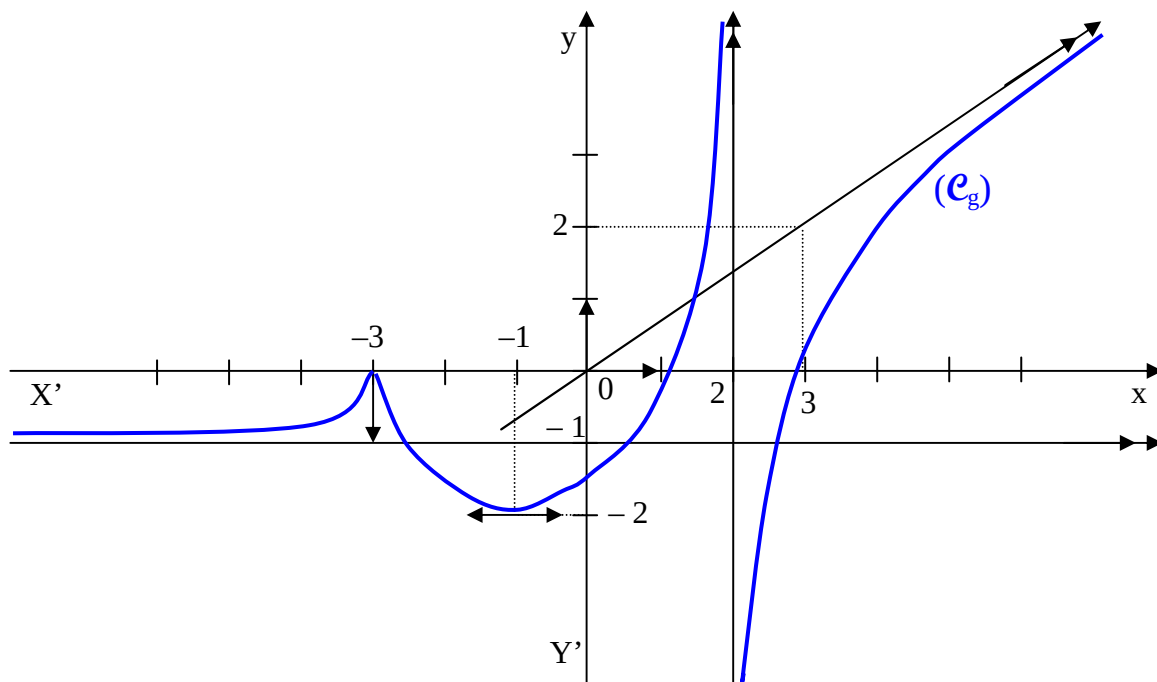
On notera Z_1 la racine dont la partie réelle est négative et Z_2 l'autre racine.

b°) Ecrire sous la forme trigonométrique le nombre complexe $T = \frac{Z_1 - i}{Z_2 - i}$

c°) Dans le plan complexe muni du repère $(o; \vec{u}; \vec{v})$ on désigne par A, B, C les images respectives de i, Z_1, Z_2 . Déduire de la question précédente la nature du triangle ABC.

EXERCICE II : (4 points)

La fonction g est donnée par sa représentation graphique $(\mathcal{C}_g)$ ci-dessous.



1°) Par lecture graphique donner :

a°) l'ensemble de définition de la fonction g et les limites aux bornes de cet ensemble.

b°) la nature et une équation de chacune des asymptotes à $(\mathcal{C}_g)$.

2°)

a°) La fonction g est-elle continue en $x_0 = -3$? est-elle dérivable en $x_0 = -3$?
Justifiez vos réponses.

b°) Donner une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_g)$ au point d'abscisse $x = -1$.

PROBLEME : (12 points)

A°) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-2}$; a, b, c sont des réels et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

Déterminer les réels a, b , et c pour que $(\mathcal{C})$ passe par les points $A(-2; 0)$; $B(3; 10)$ et admette au point E d'abscisse $x = 0$ une tangente parallèle à l'axe $(o; \vec{i})$.

B°) Dans la suite du problème on prendra $a = 1$; $b = 1$; $c = -2$.

1°) Déterminer trois réels α ; β ; γ tels que : $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-2}$.

En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ dont on déterminera une équation.

2°) Etudier les variations de la fonction f .

3°) Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.

4°) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 3$.

5°) Tracer $(\mathcal{C})$.

6°) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[4; +\infty[$

a°) Montrer que h réalise une bijection de $[4; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b°) Calculer $h(5)$; $(h^{-1})'(10)$ pour $x \in [4; +\infty[$.

c°) Tracer $(\mathcal{C}h^{-1})$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

7°) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation : $x^2 + (1-m)x + 2m-2 = 0$.

Sujet de Remplacement

Lycée Technique Bamako

Composition de la première période: 2006 - 2007

Epreuve de mathématiques

Série : M T E

Durée : 3 heures

EXERCICE I : (6 points)

On considère le polynôme f définie par $f(z) = z^3 - 4z^2 + 13z + 50$

1°) a°) Calculer $f(-2)$

b°) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que $f(z) = (z + 2)(z^2 + az + b)$

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.

3°) On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives -2 ; z_1 et z_2 (la solution de l'équation $f(z) = 0$ dont la partie imaginaire est négative est notée z_1 et z_2 l'autre racine)

Calculer AB ; AC ; BC . En déduire la nature du triangle ABC .

EXERCICE II : (4 points)

1°) Soit $f(x) = \frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$

a°) Déterminer l'ensemble de définition de f

b°) f est elle prolongeable par continuité en $x_0 = 3$?

Si oui définir son prolongement

2°) Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

a°) $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$; b°) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-2}$; c°) $f(x) = \cos^5 x$.

PROBLEME : (10 points)

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-2}{(x+1)^2}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans

un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1°) Etudier les variations de la fonction f .

On donnera la nature et une équation de chacune des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.

2°) Donner une équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 0$.

3°) Pour tout nombre réel x on pose $d(x) = f(x) - 1$.

Etudier le signe de $d(x)$. Déduisez la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptote horizontale

4°) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-2; -1[$.

a°) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à préciser vers $[-2; -1[$.

b°) Calculer $h(-\frac{3}{2})$; $(h^{-1})'(1)$

5°) Tracer $(\mathcal{C}_f)$; (T) ; $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$.