

EXERCICE I :.....(04 points)

1°) Simplifier l'expression suivante : $A = \frac{e^{x+\ln 4} \times e^{1-x}}{e^{\ln 3-2x}} \times e^{2\ln 5-x}$

2°) a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

b) En déduire la résolution de : (I) $\begin{cases} 2e^x - e^y = 7 \\ 3e^x + 4e^y = 5 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 7 \\ 3\ln x + 4\ln y = 5 \end{cases}$

EXERCICE II :.....(05 points)

Le nombre d'habitants d'une région ayant un fort taux de natalité est donné par la fonction $f : x \mapsto f(x) = 12e^{0,05x}$; où $f(x)$ est la population exprimée en millions d'habitants pour l'année 1990+x.

1°) a) Quelle est la population de cette région en 1990 ?

b) A partir de quelle année la population aurait-elle plus que triplée.(si cette croissance se maintient).

2°) Cette région ne peut pas nourrir plus que 20.000 000 de personnes.

Pendant combien d'années après 1990 la nourriture sera-t-elle suffisante.

Problème :.....(11 points)

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x + (1 - 2x) \ln x$. Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

Partie I :

Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x} - 2 \ln x$.

1°) montrer que la fonction g est strictement monotone sur $]0 ; +\infty[$.

2°) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

En donner une valeur décimale arrondie à 10^{-2} .

3°) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x dans $]0 ; +\infty[$.

Partie II :

1°) Calculer f' dérivée de f .

2°) En utilisant les résultats de la **partie I**, dresser le tableau de variations de f .

Montrer que $\ln \alpha = \frac{1}{2\alpha}$ et que la valeur exacte de l'extremum est : $\frac{4\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2\alpha}$.

3°) On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

Étudier la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4°) Construire la tangente (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.