

COMPOSITION DU 1 ^{er} TRIMESTRE 2013 – 2014		
EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES		
SERIE : 12^{ème} STG	DUREE : 03H	COEF : 03

Exercice I: (5points)

1) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln \frac{5625}{128} + 3 \ln \sqrt[4]{30} - 3 \ln \frac{1}{\sqrt[3]{1600}}; \quad B = -\ln \frac{1}{\sqrt{2456}} + \ln 36 + \ln \frac{256}{81} + \ln \sqrt{108};$$

$$C = \ln(e\sqrt{e} + \ln 32 - \ln(0,1) + \ln 10 - \ln \sqrt{e^3} + \ln 19683)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^2$

$$a) \begin{cases} 2^{x+1} - 3 \log_2 y = 11 \\ 2^{x+2} + 7 \log_2 y = 43 \end{cases}; \quad b) 2 \ln(2x-1) - \ln(3x-2x^2) = \ln\left(\frac{4x-5}{x}\right)$$

Exercice II : (6points)

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x(x-1)|$.

- Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- Etudier la dérivabilité de f aux points d'abscisse 0 et 1.
- Etudier les variations de f .
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire la représentation graphique (C) de f et les demi tangents aux points d'abscisse 0 et 1.

2) On considère la fonction g définie sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par : $g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x+b)$ où a et b sont eux réels.

Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Problème : (9points)

Parti A :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = -\frac{25}{100}x^2 + 2x + 3 \ln(x+1) - \frac{175}{100} - 3 \ln 2$$

1) Calculer $f(0)$ et $f(10)$.

2) On admet que la fonction est dérivable sur $[0; 10]$; on note f' sa fonction dérivée sur cet intervalle. Démontre que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 10]$, $f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}$.

3) a) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 10]$.

- b) Déterminer les variations de la fonction f sur $[0; 10]$.
 - c) Calculer la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au dixième du maximum de la fonction f sur $[0; 10]$.
- 4) a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[5; 10]$ une solution unique α .
- b) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-1} de α .
- 5) a) Démontrer que la fonction F définie sur $[0; 10]$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{12}x^3 + x^2 - (4,75 + 3 \ln 2)x + 3(x+1) \ln(x+1) \text{ est une primitive de } f.$$

b) On appelle valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$, le nombre réel défini par : $\frac{1}{b-a}[F(b) - F(a)]$, où F est une primitive de f sur $[a; b]$.

Montrer que la valeur décimale arrondie au dixième de $\frac{1}{10}[F(10) - F(0)]$ est 2,8.

Partie B :

A l'approche de la fête de fin d'année, un supermarché souhaite commercialiser les guirlandes de Noël.

On x le nombre de guirlandes qu'il souhaite vendre (en milliers de guirlandes). On suppose que x est un réel compris entre 0 et 10.

Le bénéfice réalisé pour la vente de x milliers de guirlandes, exprimé en milliers 'euros, est donné par : $f(x) = -\frac{25}{100}x^2 + 2x + 3 \ln(x+1) - \frac{175}{100} - 3 \ln 2$

Déduire de la partie A les réponses aux questions suivantes (les réponses seront données la centaine de guirlandes vendues près). On explicitera la méthode utilisée.

- 1) Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice sur ce produit ?
- 2) Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice maximal ? (à 100euros près).
- 3) Quel bénéfice moyen peut espérer le supermarché en vendant entre 0 et 10000 guirlandes ?