

COMPOSITIONS DU 2^e TRIMESTRE 2013 – 2014

EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

SERIE : 12E STG

DUREE : 03H

COEF. : 3

EXERCICE1 : (4,5points)

1-/Un monument historique a été visité dans la ville de Tombouctou pendant l'année 1970 par 250.000 personnes. Dans les années suivantes on a enregistré tous les ans une diminution moyenne de 7% du nombre des visiteurs. On désigne par (u_n) le nombre de visiteurs au cours de l'année $(1970+n)$.

a) Trouver l'expression de (u_{n+1}) en fonction (u_n) .

b) Calculer (u_n) en fonction de n .

c) Quel a été le nombre de visiteurs en 1977 ? en 1979 ?

2-/A la suite de restaurations, 200.000 personnes sont venues visiter ce monument en 1980. On a enregistré, depuis, une croissance annuelle de 5% du nombre de visiteurs. En quelle année le nombre de visiteurs dépassera-t-il pour la première fois le nombre des visiteurs de l'année 1970.

EXERCICE2 : (4,5points)

1-/Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère le polynôme d'inconnue z :

$$P(z) = z^3 + (-2 - 3)z^2 + 3(1 + 2i)z - 9i$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

2-/Linéariser l'expression $\sin^4 x \cdot \cos 3x$.

PROBLEME : (11points)

PARTIEA : Résolution de l'équation différentielle $(E): y' - 2y = xe^x$

1-/Résoudre l'équation différentielle $(F): y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2-/Soient a et b deux réels et soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (ax + b)e^x$.

a) Déterminer a et b pour que φ soit solution de l'équation (E) .

b) Montrer que h est une solution de l'équation (F) si, et seulement si, $\varphi + h$ est solution de (E) .

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

3-/Déterminer la solution de l'équation (E) qui s'annule en 0.

PARTIEB : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1-/Déterminer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2-/Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.

3-/On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

a) Vérifier que 0 est l'une des solutions.

b) L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4-/Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .

PARTIEC : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1-/Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur)

2-/Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe. Etudier le sens de variation de f .

3-/Etablir le tableau de variation de f .

4-/Tracer la courbe (C_f) dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2cm).

PARTIED : Calcul d'aire

1-/Soit m un réel négatif.

Interpréter graphiquement l'intégrale $I(m) = \int_m^0 f(x)dx$. (On justifiera la réponse).

2-/a) Calculer $J(m) = \int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire $I(m)$.

3-/Calculer la limite de $I(m)$, lorsque m tend vers $-\infty$.

4-/Calculer la valeur moyenne de cette fonction sur $[-2; 0]$.