

FONCTIONS RATIONNELLES

I. Dérivées des fonctions rationnelles

1) Fonction inverse

Méthode : Dériver la fonction inverse

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = 5x^3 + \frac{1}{x}$$

$$g(x) = 3x^2 - \frac{1}{x}$$

$$h(x) = -6x^2 + 5x + \frac{4}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 3x^2 - \frac{1}{x^2} \\ &= 15x^2 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \times 2x + \frac{1}{x^2} \\ &= 6x + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Si $f(x) = \frac{1}{x}$
Alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= -6 \times 2x + 5 - \frac{4}{x^2} \\ &= -12x + 5 - \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

2) Fonctions rationnelles

Méthode : Dériver des fonctions rationnelles

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$

b) $g(x) = \frac{2x-5}{x}$

c) $h(x) = \frac{6x-5}{x^2-1}$

a) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $\begin{aligned} u(x) &= x+1 \rightarrow u'(x) = 1 \\ v(x) &= x-5 \rightarrow v'(x) = 1 \end{aligned}$

Donc :

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
Alors $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 \times (x-5) - (x+1) \times 1}{(x-5)^2} \\
 &= \frac{x-5-x-1}{(x-5)^2} \\
 &= \frac{-6}{(x-5)^2}
 \end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x - 5 \rightarrow u'(x) = 2$
 $v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1$

Donc :

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
 &= \frac{2 \times x - (2x - 5) \times 1}{x^2} \\
 &= \frac{2x - 2x + 5}{x^2} \\
 &= \frac{5}{x^2}
 \end{aligned}$$

c) $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$
 $v(x) = x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 2x$

Donc :

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
 &= \frac{6(x^2 - 1) - (6x - 5)2x}{(x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{6x^2 - 6 - 12x^2 + 10x}{(x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{-6x^2 + 10x - 6}{(x^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

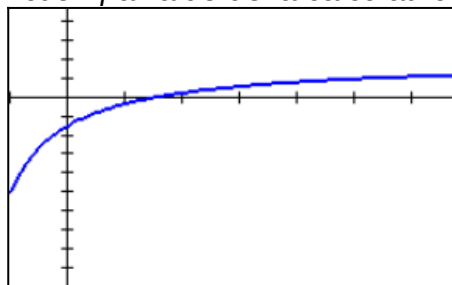
II. Variations des fonctions rationnelles

Méthode : Étudier les variations d'une fonction rationnelle

Soit la fonction f définie sur $[-1 ; 5]$ par $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 2}$.

- 1) Calculer la fonction dérivée de f .
- 2) Déterminer le signe de f' .
- 3) Dresser le tableau de variations de f .
- 4) a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 0$.
b) Tracer la courbe et la tangente.
- 5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$. Vérifier par calcul.

On trace la courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice :



1) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x - 3 \rightarrow u'(x) = 2$
 $v(x) = x + 2 \rightarrow v'(x) = 1$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2 \times (x+2) - (2x-3) \times 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x+4-2x+3}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

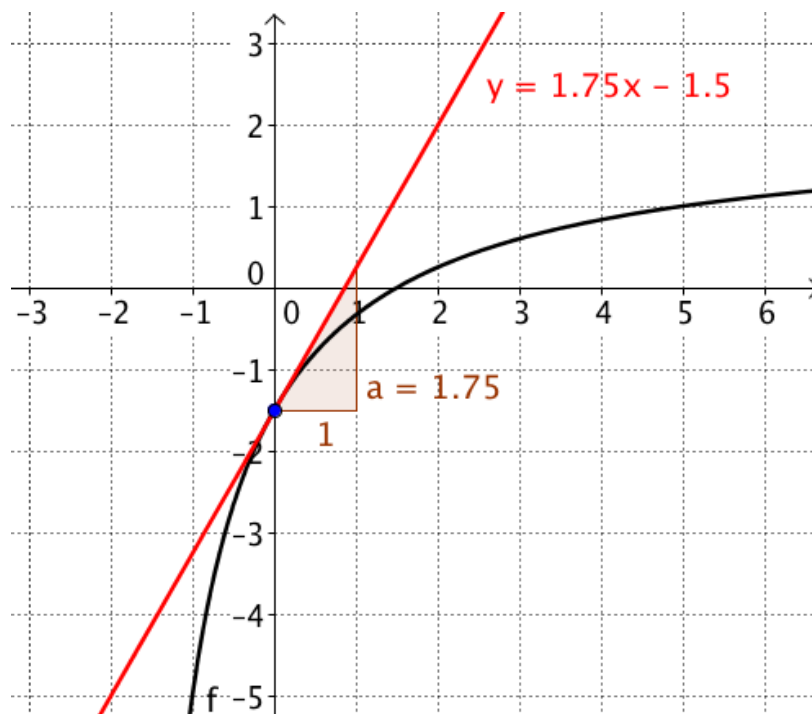
2) Or, un carré étant toujours positif, $(x+2)^2 \geq 0$ et donc $f'(x) > 0$.

3) On dresse alors le tableau de variations :

x	-1	5
f'	+	
f	-5	1

En effet : $f(-1) = \frac{2 \times (-1) - 3}{-1 + 2} = -5$ et $f(5) = \frac{2 \times 5 - 3}{5 + 2} = 1$

4) a) A l'aide de la calculatrice, on trouve : $y = 1,75x - 1,5$
b)



5) La solution de l'équation $f(x) = 0$ se lit graphiquement en regardant l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. On trouve : $x = 1,5$.

Vérifions par calcul :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{2x - 3}{x + 2} &= 0 \\ 2x - 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} = 1,5 \end{aligned}$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.