

Devoir de Mathématiques

Exercice 1

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel X :

$$-X^3 + 2X^2 + X - 2 = (X^2 - 1)(aX + b).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $-x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$

b) $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$

c) $-\ln^3 x + 2\ln^2 x + \ln x - 2 = 0$

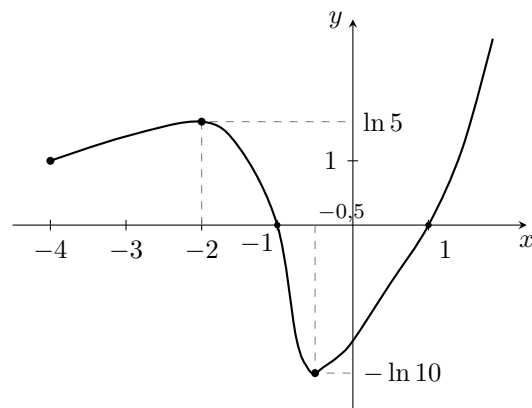
Exercice 2

- 1) Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \ln(4 + e^{-x})$ sur $\mathbb{R}$.
Exprimer cette dérivée à l'aide de e^x .

- 2) En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\ln 2} \frac{8}{4e^x + 1} dx$.

Problème

Soit f la fonction définie sur $[-4; +\infty[$ et dont la représentation graphique est ci-contre.



1. Dresser le tableau complet des variations de f .
2.
 - a) Déterminer les variations de la fonction $\exp \circ f$, définie par $(\exp \circ f)(x) = e^{f(x)}$ pour tout $x \in [-4; +\infty[$.
 - b) Donner les images par $\exp \circ f$ des nombres : -4 ; -2 ; -1 ; $-0,5$; 0 ; 1 .
 - c) Quelle est la limite de $\exp \circ f$ en $+\infty$?
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de $\exp \circ f$ dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, en tenant compte de tous les résultats précédents.

Proposition de correction

Ceci est une **proposition de correction**, non officielle. Pour le problème, certaines valeurs ($f(-4)$, $f(0)$) ne sont pas indiquées sur le graphique : elles sont lues approximativement et doivent être vérifiées.

Exercice 1

1. Pour tout réel X : $(X^2 - 1)(aX + b) = aX^3 + bX^2 - aX - b$.

Par identification avec $-X^3 + 2X^2 + X - 2$: $a = -1$, $b = 2$ (et on vérifie : $-a = 1$, $-b = -2$).

$$-X^3 + 2X^2 + X - 2 = (X^2 - 1)(-X + 2) = (X - 1)(X + 1)(2 - X)$$

2. a) $-x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0 \iff (x - 1)(x + 1)(2 - x) = 0 \iff x \in \{-1; 1; 2\}$. $S = \{-1; 1; 2\}$

b) On pose $X = e^x$ ($X > 0$). L'équation équivaut à $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0$, soit $-X^3 + 2X^2 + X - 2 = 0$. D'après a) : $X \in \{-1; 1; 2\}$. Comme $X > 0$: $e^x = 1$ ou $e^x = 2$, donc $x = 0$ ou $x = \ln 2$.

$$S = \{0; \ln 2\}$$

c) Domaine : $x > 0$. On pose $X = \ln x$: $-X^3 + 2X^2 + X - 2 = 0 \iff X \in \{-1; 1; 2\}$.

$\ln x = -1 \iff x = e^{-1}$; $\ln x = 1 \iff x = e$; $\ln x = 2 \iff x = e^2$. $S = \{\frac{1}{e}; e; e^2\}$

Exercice 2

1) $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 4 + e^{-x} > 0$ et $u'(x) = -e^{-x}$. Donc

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{4 + e^{-x}}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par e^x : $f'(x) = \frac{-1}{4e^x + 1}$

2) $\frac{8}{4e^x + 1} = -8f'(x)$, donc

$$\int_0^{\ln 2} \frac{8}{4e^x + 1} dx = -8[f(x)]_0^{\ln 2} = 8(f(0) - f(\ln 2)).$$

$f(0) = \ln(4 + 1) = \ln 5$; $f(\ln 2) = \ln(4 + e^{-\ln 2}) = \ln(4 + \frac{1}{2}) = \ln \frac{9}{2}$.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{8}{4e^x + 1} dx = 8 \ln \frac{5}{9/2} = 8 \ln \frac{10}{9} \approx 0,84$$

Problème

1. Tableau de variations de f (lecture graphique)

x	-4	-2	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	≈ 1	$\nearrow \ln 5$	$\searrow -\ln 10$	$\nearrow +\infty$

De plus : $f(-1) = 0$ et $f(1) = 0$; $f(0) \approx -1,8$ (lecture).

2. a) La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\exp \circ f$ a les mêmes variations que f : croissante sur $[-4; -2]$, décroissante sur $[-2; -\frac{1}{2}]$, croissante sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$.

x	-4	-2	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(\exp \circ f)(x)$	$\approx e$	5	$\frac{1}{10}$	$+\infty$

b) Images par $\exp \circ f$:

x	-4	-2	-1	-0,5	0	1
$f(x)$	≈ 1	$\ln 5$	0	$-\ln 10$	$\approx -1,8$	0
$e^{f(x)}$	$\approx e \approx 2,72$	5	1	$\frac{1}{10} = 0,1$	$\approx 0,17$	1

(car $e^{\ln 5} = 5$, $e^0 = 1$, $e^{-\ln 10} = \frac{1}{10}$.)

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\exp \circ f)(x) = +\infty$

3. Allure de la courbe de $\exp \circ f$ (repère orthonormal, unité 1 cm). La courbe est toujours au-dessus de l'axe des abscisses ($e^{f(x)} > 0$).

