

Classe : 12^{ème} STGDurée : 2heuresExercice1 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Une seule de ces 4 réponses est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse jugée correcte

A, B, C sont les points d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{7+3i}{5+2i}; z_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i; z_C = -1 + \sqrt{3}i \text{ et } \theta \text{ un nombre réel quelconque}$$

1. La forme algébrique de z_A est $P_1 = \frac{7}{5} - \frac{3}{2}i; P_2 = \frac{29}{21} + \frac{29}{21}i; P_3 = 1 + i; P_4 = \frac{10}{3}$
2. La forme exponentielle de z_C est $P_1 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}; P_2 = -e^{\sqrt{3}i}; P_3 = -2e^{\frac{\pi}{3}i}; P_4 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$
3. Une solution de l'équation $4Z^2 - 4Z + 2 = 0$ est $P_1 = 1 + i; P_2 = \bar{z}_B; P_3 = \frac{1+i}{4}; P_4 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
4. Le nombre complexe $(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2})^2 + (\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i})^2$ est égale: $P_1 = 0; P_2 = 1; P_3 = \cos^2 \theta; P_4 = -2e^{i\theta}$
5. La valeur de i^{2017} est : $P_1 = 0; P_2 = 1; P_3 = -1; P_4 = -2$

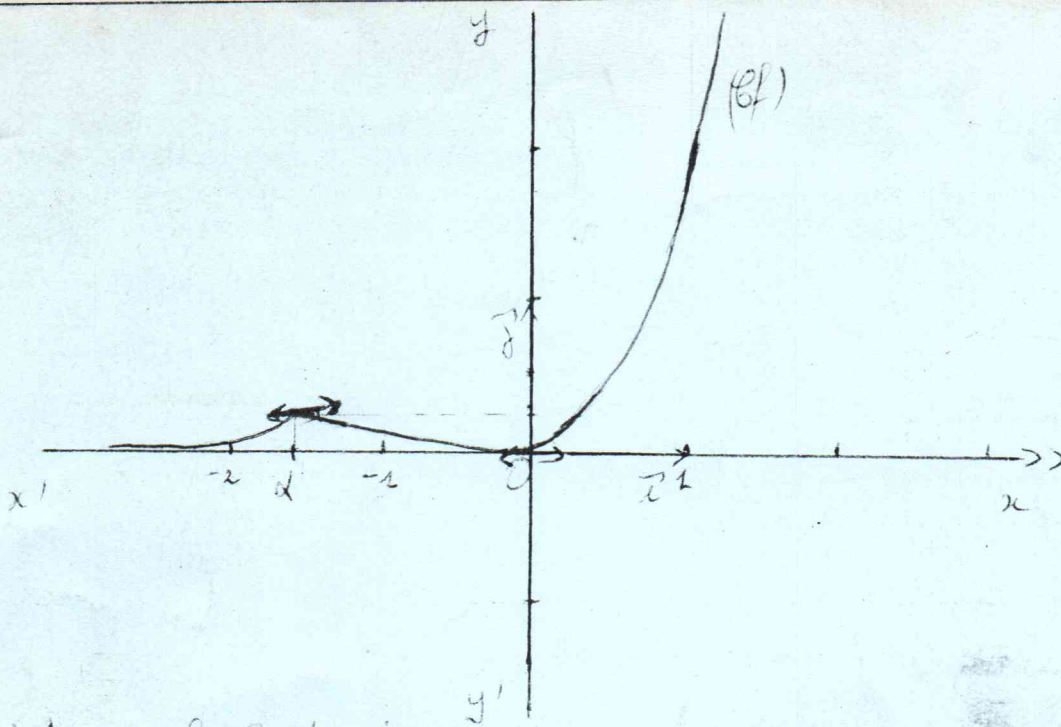
Exercice 2 :

- 1) Linéariser $\cos^3 x; \sin^2 x$
- 2) Calculer $A = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^{1987}$
- 3) Ecrire sous forme trigonométrique $T = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

Problème

Soit la fonction polynôme $P(z) = z^3 - (3 + 5i)z^2 + (10i - 6)z + 8$

- 1) Calculer $P(2i)$ et montrer que $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$ où a, b, c des nombres à déterminer
- 2) a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $U = 2i$
- b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. Soit $z_0 = 2i; z_1$ et z_2 les deux autres solutions de $P(z) = 0$ telles que $R_1(z_1) < R_2(z_2)$
- c) Ecrire $z_0; z_1$ et z_2 sous forme trigonométrique et exponentielle
- d) Vérifier que $z_1 \times z_2 = 2z_0$



Partie D : Calcul d'aire

1) $m < 0$

Interprétons graphiquement l'intégrale $I(m) = \int_m^0 f(x) dx$.

$$\forall x \in [m; 0] \quad f(x) \geq 0$$

d'où $I(m) = \int_m^0 f(x) dx$ est l'aire du domaine plan limité par (f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=m$ et $x=0$

2) a) calculons $J(m) = \int_m^0 x e^x dx$

$$u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$$

$$v(x) = e^x \rightarrow v'(x) = e^x$$

$$J(m) = \left[x e^x \right]_m^0 - \int_m^0 e^x dx = \left[(x-1) e^x \right]_m^0 = -1 - (m-1) e^m$$

$$b) I_m = \int_m^0 f(x) dx = \int_m^0 [e^{2x} - e^x - x e^x] dx = \int_m^0 (e^{2x} - e^x) dx - \int_m^0 x e^x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right]_m^0 + 1 + (m-1) e^m = -\left(\frac{1}{2} e^{2m} - e^m \right) + \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + 1 + (m-1) e^m$$

$$= -\frac{1}{2} e^{2m} + e^m + \frac{1}{2} + m e^m - e^m = m e^m - \frac{1}{2} e^{2m} + \frac{1}{2}$$

$$3) \lim_{m \rightarrow -\infty} I(m) = \lim_{m \rightarrow -\infty} m e^m - \frac{1}{2} e^{2m} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4) calculons la valeur moyenne de f sur $[-2; 0]$

$$\mu = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[-2 e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2} \right] = -e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-4} + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{e^2} - \frac{1}{4e^4} + \frac{1}{4} = \frac{e^4 - 4e^2 - 1}{4e^4}$$

Problème

(3)

Partie B (suite)

2) Etudions le sens de variation de g , puis dressons son tableau de variation:

$$g'(x) = 2e^x - 1$$

posons $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\ln 2$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	ϕ	$+$

$x \in]-\infty; -\ln 2]$ $g'(x) \leq 0$ alors g ^{est} décroissante

$x \in [-\ln 2; +\infty[$ $g'(x) \geq 0$ alors g est croissante.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	ϕ	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1 + \ln 2$	$\nearrow +\infty$

$$g(-\ln 2) = -1 + \ln 2$$

3) a) vérifions que 0 est d'une des solutions.

$$g(0) = 0 \text{ d'où } 0 \text{ est solution de } g(x) = 0$$

b) Montrons que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

$$g(-1,6) = 0,003$$

$$g(-1,6) \times g(-1,5) < 0 \text{ d'où } -1,6 \leq \alpha \leq -1,5$$

$$g(-1,5) = -0,003$$

4) Le signe de $g(x)$

$$\forall x \in]-\infty, \alpha] \cup [0, +\infty[\quad g(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [\alpha, 0] \quad g(x) \leq 0$$

Partie C : Étude de la fonction principale.

$$\mathcal{D}f = \mathbb{R} \quad f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$$

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - xe^x - e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$$

$$2) f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + e^x(x+1)] = 2e^{2x} - xe^x - 2e^x = e^x(2e^x - x - 2) = e^x g(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$; $f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe.

Sens de variation de f :

$$\forall x \in]-\infty, \alpha] \cup [0, +\infty[\quad f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ est croissante.}$$

$$\forall x \in [\alpha, 0] \quad f'(x) \leq 0 \Rightarrow f \text{ est décroissante.}$$

3) Le tableau de variation

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow f(\alpha)$	$\searrow$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

$$f(0) = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$$

($\mathcal{C}_f$) admet une branche parabolique de direction l'axe (oy) au voisinage de $+\infty$.

$$y = 0 \text{ AH en } -\infty; \quad \alpha \approx -1,57 \quad f(\alpha) = e^{-3,14} - (-1,57+1)e^{-1,57} = 0,16$$

$$S = \{3i; 1-i\sqrt{2}; 1+i\sqrt{2}\}$$

2) Linéarisons $\sin^4 x \cos 3x$.

$$\begin{aligned} \sin^4 x \cos 3x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 \left(\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \right) = \frac{1}{32} \left(e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-i4x} \right) \left(\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{32} \left(e^{i7x} + e^{-i7x} - 4(e^{i5x} + e^{-i5x}) + 6(e^{i3x} + e^{-i3x}) - 3(e^{ix} + e^{-ix}) \right) \\ &= \frac{1}{32} (2\cos 7x - 4 \times 2\cos 5x + 6 \times 2\cos 3x - 3 \times 2\cos x) \\ &= \frac{1}{16} (\cos 7x - 4\cos 5x + 6\cos 3x - 3\cos x) \end{aligned}$$

Problème:

Partie A: Résolution de l'équation différentielle (E): $y' - 2y = xe^x$

1) Résolvons (F): $y' - 2y = 0$ $y' = 2y$ $y = ke^{2x}$ $k \in \mathbb{R}$

$$S = \{x \mapsto ke^{2x}; k \in \mathbb{R}\}$$

2) $\varphi(x) = (ax+b)e^x$

a) Déterminons a et b pour que φ soit solution de (E)

$$\varphi \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow \varphi'(x) - 2\varphi(x) = xe^x$$

$$\varphi(x) = (ax+b)e^x \Rightarrow \varphi'(x) = ae^x + e^x(ax+b) = e^x(a+ax+b)$$

$$\varphi'(x) - 2\varphi(x) = xe^x \Leftrightarrow e^x(a+ax+b) - 2(ax+b)e^x = xe^x$$

$$\Leftrightarrow e^x(-ax+a-b) = xe^x$$

Par identification $\begin{cases} -a = 1 \\ a-b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \varphi(x) = (-x-1)e^x$

b) Montrons que h est une solution de (F) $\Leftrightarrow \varphi + h$ est solution de (E)

$$\varphi + h \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow (\varphi + h)'(x) - 2(\varphi + h)(x) = xe^x$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) - 2\varphi(x) + h'(x) - 2h(x) = xe^x$$

$$\Leftrightarrow xe^x + h'(x) - 2h(x) = xe^x \Leftrightarrow h'(x) - 2h(x) = 0 \Leftrightarrow h \text{ est solution de (F)}$$

c) Déduisons l'ensemble des solutions de (E).

$$f(x) = \varphi(x) + h(x) = (-x-1)e^x + ke^{2x} \quad k \in \mathbb{R}$$

3) Déterminons la solution de l'équation (E) qui s'annule en 0.

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow -1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1 \quad f(x) = (-x-1)e^x + e^{2x}$$

Partie B: Étude d'une fonction auxiliaire.

$$D_g = \mathbb{R} \quad g(x) = 2e^x - x - 2$$

1) Déterminons la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - x - 2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

Composition de la 2^e Periode 2013-2014 STG

MATHEMATIQUES

(1)

Exercice 1: année 1970 : 250.000 personnes, diminution de 7%
 Un le nombre de visiteurs au cours de l'année (1970+n)

a) Trouvons l'expression de U_{n+1} en fonction de U_n . Soit $U_0 = 250.000$

$$U_1 = U_0 - \frac{7}{100} U_0 = 0,93 U_0$$

$$U_2 = U_1 - \frac{7}{100} U_1 = 0,93 U_1$$

$$\vdots$$

$$U_{n+1} = U_n - \frac{7}{100} U_n = 0,93 U_n$$

b) Calculons U_n en fonction de n

$U_{n+1} = 0,93 U_n \Rightarrow (U_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,93$ et de 1^{er} terme $U_0 = 250.000$.

$$U_n = U_0 q^n \Rightarrow U_n = 250.000 (0,93)^n$$

c) Le nombre de visiteurs en 1977 : $U_7 = 250.000 (0,93)^7 = 150.425$

Le nombre de visiteurs en 1979 : $U_9 = 250.000 (0,93)^9 = 130.103$

2) année 1980 : 200.000 personnes Croissance annuelle de 5%.

Soit $V_0 = 200.000$ $V_1 = V_0 + \frac{5}{100} V_0 = 1,05 V_0$

(V_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,05$ et de 1^{er} terme $V_0 = 200.000$
 $V_n = V_0 q^n \Rightarrow V_n = 200.000 (1,05)^n$

$$V_n > U_0 \Leftrightarrow 200.000 (1,05)^n > 250.000 \Leftrightarrow (1,05)^n > \frac{25}{20} \Leftrightarrow n \ln 1,05 > \ln \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln \frac{5}{4}}{\ln 1,05} \Leftrightarrow n > 4,57 \quad n = 5$$

En 1985 le nombre de visiteurs dépassera pour la première fois le nombre de visiteurs de l'année 1970.

Exercice 2:

1) $P(z) = z^3 + (-2-3i)z^2 + 3(1+2i)z - 9i$

Resolvons $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure

soit $z_0 = ib$; $P(z_0) = 0 \Leftrightarrow (ib)^3 + (-2-3i)(ib)^2 + 3(1+2i)ib - 9i = 0$

$$\Leftrightarrow -ib^3 + 2b^2 + 3ib^2 + 3ib - 6b - 9i = 0$$

$$\Rightarrow 2b^2 - 6b + i(-b^3 + 3b^2 + 3b - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 - 6b = 0 & (1) \\ -b^3 + 3b^2 + 3b - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $2b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow 2b(b-3) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou $b = 3$

$b = 3$ vérifie l'équation (2) d'où $z_0 = 3i$

	1	$-2-3i$	$3+6i$	$-9i$	
$3i$	$\downarrow$	$3i$	$-6i$	$9i$	
	1	-2	3	0	

$$(z-3i)(z^2-2z+3) = 0$$

$$z-3i = 0 \text{ ou } z^2-2z+3 = 0$$

$$z = 3i \quad \Delta = 1-3 = -2$$

$$z_1 = 1-i\sqrt{2} \quad z_2 = 1+i\sqrt{2}$$