

E) On donne  $I = \int_2^3 \frac{x \ln x}{(x^2-1)^2} dx$

1)

a) Calculer les intégrales suivantes

$$A = \int_2^3 \frac{1}{x} dx; B = \int_2^3 \frac{1}{x-2} dx; C = \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx$$

b) Vérifier que  $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

c) En déduire  $J = \int_2^3 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$

2) A l'aide d'une intégration par partie

a) Exprimer I en fonction de J (on pourra poser

$$U = \ln x \text{ et } V' = \frac{x}{(x^2-1)^2})$$

b) En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près de I.

### EXERCICE 8

Calculer en utilisant une intégration par partie

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx; J = \int_0^1 x^2 e^x dx; K = \int_1^2 x \ln x dx; L = \int_1^x \ln t dt$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos 2x dx; N = \int_1^e (t^2 + 3) \ln t dt; O = \int_0^1 (x+1) e^x dx$$

### EXERCICE 9

Soit  $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$  et (C) sa courbe représentative.

1) Soit  $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$  définie sur  $]0; +\infty[$

a) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

b) Calculer  $g(1)$  et en déduire le signe de  $g(x)$

2) a) Calculer la limite de  $f$  en 0 et en  $+\infty$

c) Calculer  $f'(x)$  et en déduire son tableau de variation

d) Montrer que la droite (D):  $y = x$  est asymptote à (C)

e) Etudier la position de (C) par rapport à (D)

f) Tracer la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé (unité graphique 2cm)

g) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=e$

- Hachurer l'aire A

- A l'aide d'une intégration par partie calculer

$$\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx$$

- Calculer l'aire A en unité d'aire puis en  $\text{Cm}^2$ .

### EXERCICE 10

Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y' - 2y = 0 \quad y' + \frac{1}{4}y = 0 \quad 2y' + y = 0 \quad 2y' + 3y = 0$$

$$-2y' + 5y = 0 \quad y'' + y = 0 \quad y'' + 3y = 0 \quad y'' + 16y = 0$$

$$2y'' + y = 0 \quad 4y'' - 9y = 0 \quad y'' - 4y = 0 \quad y'' + y' + y = 0$$

$$3y'' + y' - 4y = 0 \quad y'' - 6y' + 9y = 0 \quad y'' + y' - 2y = 0$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

### EXERCICE 11

Résoudre les équations différentielles suivantes vérifiant les conditions données

$$1) y' = x^2 + x + e^{-x} \quad y(0) = 5$$

$$2) 3y' - 2y = 0 \quad y(2) = e^2$$

- 3)  $y'' + 3y = 0$        $y(0) = 1$  et  $y'(0) = \sqrt{3}$   
 4)  $2y'' + 3y' = 0$        $y(0) = 2$  et  $y'(0) = -1$   
 5)  $3y'' + y' - 4y = 0$        $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$

### EXERCICE12

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' - 2y = x$

- 1) Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie par  $f(x) = ax+b$  soit solution de (E)
- 2) Déterminer les solutions de :  $y' - 2y = 0$
- 3) En déduire les solutions de (E)

### EXERCICE13

On considère l'équation différentielle (E) :  $y'' - 2y = \sin x$

- 1) Déterminer le réel A pour que la fonction  $f(x) = A \sin x$  soit une solution de (E)
- 2) Déterminer les solutions de :  $y'' - 2y = 0$   
En déduire les solutions de (E)

### EXERCICE14

On considère l'équation différentielle :  $y'' - y' - 6y = -6x - 1$  (1)

- 1) Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction polynôme g définie sur IR par  $g(x) = ax+b$  soit solution de l'équation (1)

- 2) a) Démontrer que f, fonction numérique de la variable réelle, deux fois dérivable sur IR est solution de (1) si et seulement si  $(f - g)$  est solution de l'équation différentielle :  $y'' - y' - 6y = 0$  (2)  
 b) Résoudre l'équation différentielle (2)  
 c) En déduire l'ensemble des solutions de (1)  
 d) Trouver la solution de (1) vérifiant  $f(1) = 2$  et  $f'(1) = 4$

- 3) Soit f la fonction numérique définie sur IR par  $f(x) = e^{3x-3} + x$

Etudier ses variations et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan muni du repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ . (On choisira 2cm pour unité de longueur)

Préciser la tangente à (C) au point d'abscisse 1