

TRAVAUX DIRIGES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Année scolaire : 2016-2017

CLASSE : STG

Lycée Technique de BKO

EXERCICE 1

1°) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$\text{a°) } z = \frac{2i+1}{1-3i} \quad \text{b°) } z = \frac{i-13}{-12+14i} \quad \text{c°) } z = \frac{1}{2+i} + \frac{1}{2-i} \quad \text{d°) } z = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$$

$$\text{e°) } z = (3-5i)(1+i)^4$$

2°) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$$\text{a°) } z = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad \text{b°) } z = -2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{c°) } z = -\sqrt{3}-i$$

3°) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes :

$$\text{a°) } z = -1 + i \quad \text{b°) } z = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{c°) } z = 2\sqrt{3} - 2i$$

EXERCICE 2

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 11 + (11\sqrt{3} - 2)i}{2 + 11i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4 + 2i}{3 - i}$$

1°) a°) Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique

b°) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2

2°) On pose $Z = \frac{z_2}{z_1}$

a°) Ecrire Z sous forme trigonométrique puis algébrique

b°) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$

c°) Résoudre l'équation $x \in \mathbb{R} \quad (\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x = 2$

EXERCICE 3

Pour tout nombre complexe z on pose $p(z) = z^3 - (3 + 5i)z^2 + (10i - 6)z + 8$

1°) Montrer que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera

2°) Factoriser $p(z)$

3°) a°) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $U = 2i$

b°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$

4°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}, \vec{j})$

On désigne par A, B, et C les points d'affixes respectives $2i; 1 + i; 2 + 2i$

a°) Placer les points A, B, C dans le plan

b°) Calculer les longueurs AB, AC, et BC. En déduire la nature du triangle ABC

c°) Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme. Placer D dans le plan

EXERCICE 4

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a°) $2z + \bar{z} - iz - 7 - i = 0$ b°) $\bar{z}^2 + 2|z|^2 - 3 = 0$

c°) $z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$ (on remarquera que $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$)

2°) Soit $z = 3 - i$ et $Z = 28 - 96i$. Calculer z^4 puis en déduire les racines quatrièmes de Z

3°) Déterminer les racines cubiques de $z = 8i$ (on écrira les solutions sous forme algébrique)

4°) linéariser : $\sin^3 x$; $\cos^5 x$; $\sin^4 \frac{\theta}{2}$; $\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$

EXERCICE 5

1°) Déterminer et construire l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition proposée

a°) $|z - 2 + 4i| = |z + 1 - 2i|$

b°) $|z - 3i| = 2$

2°) A tout nombre complexe $z \neq i$, on considère $Z = \frac{iz}{z-i}$. Déterminer les ensembles des points M dont l'affixe vérifie les conditions suivantes

a°) $|Z| = 1$

b°) Z est un réel

c°) Z est un imaginaire pur

EXERCICE 6

Soit le polynôme de variable complexe $f(z) = z^3 + (2 + 2i)z^2 + 2z + 4 + 8i$

1°) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera

2°) Déterminer trois nombres complexes a, b, c tel que $f(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

4°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$

On donne les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = -2$; $z_B = 1 - i$; $z_C = -1 + 3i$

a°) Placer les points A, B, C dans le plan

b°) Calculer le module et l'argument de $z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature du triangle

EXERCICE 7

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système

$$\begin{cases} x - y - iz = 0 \\ x + y - z = 0 \\ (1+i)x - 2y + z = 2 - 2i \end{cases}$$

2°) (x, y, z) étant la solution du système ci-dessus, on désigne par A, B, C les points du plan d'affixes respectives x, y , et z

a°) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = \frac{z - x}{z - y}$

b°) En déduire la nature du triangle ABC puis le construire dans le plan muni d'un repère orthonormal