

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Calculatrice non autorisée)

Coefficient : 5

Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (4 points)

- 1) a) Résoudre l'équation différentielle $(E): y' + 2y = 0$. (0,5 pt)
 b) Déterminer la solution f de (E) telle que : $f(0) = 1$. (0,5 pt)
- 2) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 1]$. (0,5 pt)
- 3) Déterminer en fonction de n la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n; n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$. (0,5 pt)
- 4) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$ pour tout entier naturel n .
 a) Calculer U_0 et U_1 . (0,5 pt)
 b) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1 pt)
 c) Calculer la somme : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_9$. (0,5 pt)

EXERCICE N°2 (4 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = -3$; $z_C = -2 - \frac{3}{2}i$. On considère les polynômes p et g tels que : $p(z) = z^3 + (5 - \frac{1}{2}i)z^2 + (9 - \frac{11}{2}i)z + 9 - 12i$ et

$$g(z) = z^2 + (3 - 2i)z - 6i$$

- 1) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe, $(3 + 2i)^2$. (0,25 pt)
- 2) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $g(z) = 0$. (0,75 pt)
- 3) a) Développer, réduire et ordonner $(z + 2 + \frac{3}{2}i)g(z)$. (0,5 pt)
 b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $p(z) = 0$. (0,5 pt)
- 4) a) Placer les points A, B et C dans le repère. (0,75 pt)
 b) Calculer $\frac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{CB}}}$ puis donner la nature du triangle ABC . (0,5 pt)
- 5) a) Calculer l'affixe du point D , image de A par la translation de vecteur $\vec{BC}$. (0,25 pt)
 b) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $ABCD$? Justifier. (0,5 pt)

PROBLEME (12 points)

Partie A (2 points)

Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

- 1) Etudier le sens de variation de g . (1,25 pt)
- 2) Calculer $g(1)$ puis en déduire que, pour $x \in [1; +\infty[$, $g(x) > 0$. (0,75 pt)

Partie B (8,25 points)

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 - e^{x-1} & \text{si } x \in]-\infty; 1[\\ f(x) = \frac{x^2 - 2x + \ln x}{x} & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

- 1) a) Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$. (0,5 pt)
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f . (0,75 pt)
- 2) Etudier la continuité de f en 1. (0,5 pt)
- 3) a) Montrer que :

- $\forall x \in]-\infty; 1[, \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - \frac{e^{x-1}-1}{x-1}$ (0,25 pt)
- $\forall x \in [1; +\infty[, \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} \frac{\ln x}{x-1}$ (0,25 pt)

En déduire la dérivabilité de f en 1. (0,75 pt)

- b) Donner une interprétation graphique des résultats de :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right] \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \right] \quad (0,5 \text{ pt})$$

- 4) a) Montrer que la droite (D_1) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$. (0,25 pt)
b) Montrer que la droite (D_2) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. (0,25 pt)
- 5) a) Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty; 1]$. (0,5 pt)
b) Calculer $f'(x)$ sur $]1; +\infty[$ puis montrer que : $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. (0,5 pt)
En déduire le sens de variation de f . (0,25 pt)
c) Dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)
- 6) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $1,6 < \alpha < 1,7$. (0,5 pt)
b) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x . (0,25 pt)
- 7) Tracer $(D_1), (D_2)$, les demi-tangentes et $(\mathcal{C})$ dans le repère. (1,5 pts)
- 8) Montrer que $\ln \alpha = \alpha(2 - \alpha)$. (0,25 pt)

Partie C (1,75 points)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

- 1) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire. (0,5 pt)
- 2) Montrer que : $\mathcal{A} = \frac{\alpha^4}{2} - 2\alpha^3 + \frac{5}{2}\alpha^2 - 2\alpha + \frac{3}{2}$. (0,25 pt)
- 3) On pose $I = \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)dx$, $J = \int_1^2 (x - 2)\frac{\ln x}{x}dx$ et $K = \int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$ et on admet que :
 $J = -\frac{\ln^2 2}{2} + 2 \ln 2 - 1$ et $K = -\frac{\ln^2 2}{2} - \ln 2 + 1$

a) Calculer I. (0,5 pt)

b) Soit V le volume engendré par la rotation complète autour de l'axe des abscisses de la portion du plan comprise entre les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Calculer V en unité de volume. (0,5 pt)

On donne : $\frac{\ln 2}{2} \simeq 0,35$; $e \simeq 2,72$; $e^{-1} \simeq 0,36$; $e^{-2} \simeq 0,13$;

$f(1,6) \simeq -0,11$ et $f(1,7) \simeq 0,01$