

EXERCICE 1 : (4points)

On considère le nombre complexe $z = (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3})$

1) Calculer sous forme algébrique z^2 .

2) Trouver le module et un argument de z^2 ; en déduire le module et un argument de z .

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{17\pi}{12}$ et $\sin \frac{17\pi}{12}$

4) En utilisant ce résultat, résoudre pour $x \in]-\pi ; \pi]$ l'équation :

$$(1 - \sqrt{3}) \cos x - (1 + \sqrt{3}) \sin x = 2.$$

EXERCICE 2 : (6 points)

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = a$ et $AC = 2a$; I désigne le milieu de $[AC]$ et G est le barycentre du système $\{ (A, 3); (B, -2); (C, 1) \}$.

1) Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère ABIG. Exprimer en fonction de a les distances GA ; GB ; et GC.

2) A tout point M du plan, on associe le nombre réel :

$$f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2.$$

a) Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et de a .

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$$f(M) = 2a^2.$$

3) A tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel :

$$h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2.$$

a) Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que :

$$h(M) = \overrightarrow{MB} \cdot \vec{u} - 2a^2.$$

b) Soit l'ensemble des points M du plan tels que $h(M) = -24$. Vérifier que les points I et B appartiennent à (Δ) , préciser la nature de cet ensemble. Construire (Δ) .

4) (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points E et F. Montrer que les triangles GEC et GFC sont Equilatéraux.

PROBLEME : (10points)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; + \infty [$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative (Unité graphique = 2 cm).

1°) Etudier le sens de variation et le signe de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad f_2(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

Etablir que, pour tout réel $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ **(1)**.

2°) Soit la fonction g définie sur $]0 ; + \infty [$ par : $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$

a) Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$.

b) Prouver que, pour tout $x \geq 0$; $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$

c) En déduire que, pour tout $x \geq 0$; $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$. **(2)**

3°) a) Montrer que f est dérivable sur $]0 ; + \infty [$ et calculer $f'(x)$.

b) Etablir que, pour tout $x \geq 0$; $g(x) \leq \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

En utilisant la relation **(2)** en déduire le sens de variation de f .

4°) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

(A cet effet, noter que **(2)** fournit un encadrement de $\ln(1+x)$.)

c) En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 et préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T) (utiliser **(1)**).

d) Dresser le tableau de variation de f , tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (T) .