

EXERCICE 1 : (5 points)

On note n un entier naturel non nul, p l'entier naturel $3n + 1$ et q l'entier naturel $5n - 1$.

1°) Démontrer que le P.G.C.D de p et q est diviseur de 8.

2°) Pour quelles valeurs de n , ce P.G.C.D est-il égal à 8 ?

Calculer alors le PPCM de p et q .

EXERCICE 2 : (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \cos x$.

1°) Calculer $f'(x)$; $f''(x)$; $f^{(3)}(x)$.

2°) Soit n un entier naturel non nul ; montrer par récurrence que f est n fois dérivable et que : $f^{(n)}(x) = x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$

(On rappelle que $f^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f).

PROBLEME : (12 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C} ; f(z) = z^4 + iz^3 + 8z + 8i$

1°) Calculer $f(-i)$; puis résoudre l'équation (E) : $f(z) = 0$

2°) Dans le plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives :

$$a = 1 - i\sqrt{3} \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = -2.$$

a) Ecrire le nombre complexe a sous la forme trigonométrique.

b) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $q = \frac{b-c}{a-c}$

En déduire la nature du triangle ABC.

3°) On considère le système de points pondérés (A, $|a|$) ; (B, $|b|$) ; (C, $|c|$) où A, B et C étant les points définis en 2°) a , b et c leurs affixes respectives.

a) Déterminer le barycentre G du système.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$$

4°) Soit le point I l'isobarycentre du triangle ABC.

a) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = m ; \text{ où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

b) Pour quelles valeurs de m , l'ensemble (Γ) est le cercle circonscrit au triangle ABC ?

5°) Soit A' , B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$; $[AC]$; $[AB]$.

a) Déterminer m pour que les points A' , B' et C' soient élément de l'ensemble (Γ).

b) Pour quelle valeur de m l'ensemble (Γ) est un singleton $\{J\}$ où J est l'isobarycentre du triangle $A'B'C'$. Que peut-on dire des points I et J ?