

EXERCICE 1 : (5 points)

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} / \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on note M le point d'affixe z .

1°) Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que :
 $f(z_0) = 1 + 2i$.

2°) Soit z un élément de E . on note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument. Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et de α .

3°) Soit A le point d'affixe $-i$.

a) Déterminer l'ensemble (C) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble D des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - i$.

b) Montrer que B appartient à (C) et D , et construire (C) et D .

EXERCICE 2 : (4 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = (1+i\sqrt{12})^3$

2°) Soit l'équation $(E) : z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$

a) Montrer que (E) admet des solutions imaginaires pures. Résoudre (E) .

b) Soient A, B, C , et D les points d'affixes respectives : $-3i$; $2 - i$; $2 + i$ et $3i$.

Déterminer l'affixe du centre de gravité de $[A, B, C, D]$

c) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 64$.

PROBLEME : (11 points)

1°) On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{1}{e-1} e^x - x - \frac{1}{e-1}.$$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Calculer $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$.

b) Etudier le sens de variation de f et les limites de f aux bornes de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote que l'on précisera.

c) Utiliser les variations de f pour déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

d) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2°) On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = e^x - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{e-1}$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de F dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

a) Etudier le sens de variation de F et les limites de F aux bornes de $\mathcal{D}_F$. Montrer que la courbe (Γ) admet une asymptote que l'on précisera.

b) Etudier les positions relatives des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et (Γ) .

c) Tracer la courbe (Γ) sur le même graphique que la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3°) Etablir que pour tout nombre réel x : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$.

Donner une interprétation géométrique de $F(0)$.

4°) n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

a) Démontrer que : $f(n) \leq F(n) \leq f(n+1)$. En déduire l'existence d'un unique réel U_n de l'intervalle $[n; n+1]$ tel que $F(n) = f(U_n)$.

b) À l'aide des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et (Γ) , représenter sur l'axe des abscisses les points d'abscisses respectives U_1 et U_2 .

c) On considère la suite de terme général $V_n = U_n - n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la suite (V_n) est bornée. Etablir que V_n vérifie l'égalité :

$$\frac{e^{V_n}}{e-1} = 1 - \frac{1}{2e^n} + \frac{V_n}{e^n}.$$

En déduire que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite que l'on déterminera.