

EXERCICE 1 : (6 points)

Au nombre complexe z de module 1 et d'argument θ , on associe le nombre complexe

$$T = z + 1 + \frac{2z + 1}{z^2 + z + 1}$$

1°) Pour quelles valeurs de z , T est-il défini ?

2°) $\bar{z}$ étant le conjugué de z , montrer que T peut s'écrire :

$$T = z + 1 + \frac{2 + z^{-1}}{z + z + 1}$$

En déduire, en fonction de θ , la partie réelle X et la partie imaginaire Y de T .

3°) a) Déterminer θ pour que T soit réel

b) T peut-il être imaginaire pur ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 : (3 points)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1}}{x}$

a) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $[0 ; +\infty[$.

b) Ce prolongement par continuité est-il dérivable en 0 ? Si oui quel est le nombre dérivé en 0 ?

PROBLEME : (11 points)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+2)^2} \text{ et soit } (C) \text{ sa courbe}$$

représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) .

1°) Etudier les variations de f ; et en déduire les asymptotes éventuelles à la courbe (C) .

2°) a) Le point $I(-2 : 1)$ est-il un centre de symétrie pour la courbe (C) ?

b) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C) avec la droite d'équation $y = 1$?

3°) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0. Déterminer la position de (C) par rapport à la droite (T) .

4°) Tracer la courbe (C) et la droite (T) .

5°) Soit l'équation (E) où x désigne une inconnue réelle :

$$(E) : (m-1)x^2 + (4m-1)x + 4m = 0 ; m \text{ étant un paramètre réel.}$$

A l'aide de la courbe (C) déterminer pour quelles valeurs de m , (E) admet :

a) Zéro solution ;

b) Deux solutions négatives ;

c) Une seule solution.

6°) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{(x+2)^2} \text{ et soit } (C') \text{ sa}$$

représentation graphique dans le repère (O, i, j) .

Comment (C') se déduit-elle de (C) ?

Tracer la courbe (C') dans le même repère que (C) .

7°) Soit h la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \geq -1 \\ h(x) = 2x + a & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Pour quelle valeur du réel a la fonction h est-elle continue au point -1 ?

Pour cette valeur, étudier la dérivabilité de la fonction h au point -1 .
