

EXERCICE 1 : (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; u ; v).

1°) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + \frac{1}{2} + i)^2 - \frac{1}{4} = 0$.

2°) On donne les points A (-1 ; -5) et $B(\frac{1}{3}; \frac{1}{6})$. à tout point M d'affixe z,

($z \neq -1 - 5i$), on associe le point M' d'affixe Z telle que $Z = \frac{1}{3i} \left(\frac{z-1-i}{-i} - \frac{z-1-i}{-i} \right)$

a) Déterminer l'ensemble (Γ) des nombres complexes tels que $Z = z$;

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que $|Z| = 3$.

c) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M tels que M' décrit le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1.

d) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que M' décrit le demi axe [O ; u) privé de {0}

EXERCICE 2 : (4 points)

Dans le plan (P) on donne un triangle équilatéral ABC de côté a ; (a >0) et le point I tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$ (faire un dessin).

1°) Déterminer trois réels α ; β et λ tels que I soit le barycentre de (A, α) ; (B, β) ; (C, λ).

2°) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 2 MB^2 - 2 MC^2 = 5 a^2.$$

3°) Discuter suivant les valeurs du réel k l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 2 MB^2 - 2 MC^2 = (k+1) a^2.$$

4°) Déterminer k de façon que B soit un point de (E_k).

PROBLEME : (11 points)

Les trois parties A ; B ; et C du problème sont indépendantes.

A) Soit la fonction $h : x \mapsto h(x) = \cos [2\pi \tan(x)]$

1°) Calculer $h\left(\frac{\pi}{4}\right)$; calculer $h'(x)$.

2°) Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2\pi \tan x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$.

B) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2 + bx + 8}{x + d}$

1°) Déterminer les réels b et d sachant la courbe (C_f) de f admet les droites d'équations : $x = 3$; et $y = 2x$ comme asymptotes.

Dans la suite du problème on prendra $b = -6$ et $d = -3$

2°) Étudier la fonction f

3°) Calculer $f(7)$; puis montrer que le point $I(3 ; 6)$ est centre de symétrie de (C_f) .

4°) Montrer que la restriction g , de f à l'intervalle $[5; +\infty[$ est une bijection de $[5; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Calculer $(g^{-1})'(16)$

5°) Montrer que l'équation $f(x) = -3$ a une solution unique α dans $[1; 2]$. Donner un encadrement d'amplitude $5 \cdot 10^{-1}$ de α . (on ne cherchera pas à résoudre l'équation).

6°) Tracer les courbes (C_f) , de f et $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1} dans le même repère.

7°) Montrer que $\forall x \in D_f, f'(x) = 2 - \frac{8}{(x-3)^2}$.

8°) Démontrer que $\forall x \in [5; 7]$ on a : $\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \leq f(x) \leq 16$.

C) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation ci-dessous et des renseignements sur sa courbe (C_f) :

- Le point $A(0 ; 1)$ est centre de symétrie de (C_f)
- La droite (D) d'équation : $y = \frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.
- (C_f) coupe (D) au seul point A .

Construire complètement la courbe (C_f) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; i ; j)$.

x	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
		+	-	+
$f(x)$	1	6	4	$+\infty$

