

EXERCICE 1 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0 ; \frac{1}{2}]$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ et $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

1°) Etudier les variations de f et déterminer l'image par f de l'intervalle $[0 ; \frac{1}{2}]$.

2°) a) Démontrer que pour tout x de $[0 ; \frac{1}{2}]$, $\frac{1}{1-x} = 1+x + \frac{x^2}{1-x}$.

b) En déduire que $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$.

c) Calculer $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x) e^{-x} dx$.

d) Démontrer que : $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$.

Déduire une valeur décimale approchée de I .

EXERCICE 2 : (4 points)

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 0 ; U_1 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{U_n + U_{n-1}}{2}$.

On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = U_n - U_{n-1}$.

1°) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q .

2°) Déterminer U_n en fonction de n et calculer la limite de (U_n) .

PROBLEME : (12 points)

Soit la fonction f sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} (x^2 + 1 - \ln x)$

Partie A : Etude de f et construction de $\mathcal{C}_f$.

1°) Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

- a) Etudier les variations de g et les limites en 0 et $+\infty$.
- b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$.
- c) Etudier le signe de $g(x)$.

- 2°)** a) Etudier les limites de f en 0 et $+\infty$.
b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f .

3°) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = y$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

- b) Déterminer le point d'intersection B de (Δ) et $\mathcal{C}_f$; préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (Δ) .
- c) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite (Δ) en précisant la tangente en B à $\mathcal{C}_f$.

4°) Pour tout nombre réel $t \geq e$, calculer l'aire $A(t)$ de la portion du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$ et (Δ) et les droites d'équations $x = e$; $x = t$.

Partie B :

1°) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $I = [1,30; 1,35]$ par $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

b) Justifier la décroissance de h sur I , et montrer que pour tout élément x de I , $h(x)$ appartient à I .

c) Prouver que pour tout élément x de I , $-\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq 0$

d) En déduire que pour tout élément x de I , $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3} |x - \alpha|$.

2°) Soit (U_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = h(U_n) \text{ et la condition } U_0 = 1,30.$$

a) Montrer que pour tout entier n ; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|$.

b) En déduire que pour tout entier n , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{5}{100}$.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n) .