

EXERCICE 1 : (4 points)

1°) Calculer les intégrales définies suivantes

$$\text{a) } I = \int_0^{\pi} \sin^4 x \cos x \, dx \quad ; \quad \text{b) } J = \int_0^{\pi} x^2 \sin 2x \, dx$$

2°) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ le polynôme complexe

$$f(z) = z^3 - 2(2 + 3i)z^2 - 4(1 - 5i)z + 16(1 - i)$$

- a) Montrer que l'équation $f(z)=0$ admet une solution réelle $z_0 = a$.
En déduire les autres solutions de $f(z)=0$.
- b) Représenter dans le plan complexe, les images des solutions de cette équation.
- c) Démontrer que les solutions de $f(z)=0$, constituent les trois premiers termes d'une suite géométrique dont le 1^{er} terme est $u_0 = a$ et dont on donnera la raison. Calculer le 17^e terme u_{16} et écrire le terme général u_n de cette suite. Déterminer n pour que u_n appartienne à $\mathbb{Z}$.

EXERCICE 2 : (4 points)

Soit les nombres $A = 85$ et $B = 70$ écrits dans le système décimal.

- 1) Ecrire A et B dans le système binaire.
- 2) Dans le système binaire, effectuer les opérations suivantes
- 3)
 - a) $S = A + B$;
 - b) $D = A - B$;
 - c) Vérifier les résultats en les transcrivant dans le système à base 10.

PROBLEME : (12 points)

A] Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x(-2 + \ln x) \ln x, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C_f) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1°) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$ (On pourra poser $x = u^2$).

En déduire que la fonction f est continue à droite au point 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite au point 0. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
Etudier les variations de f .

2°) a) Calculer les coordonnées des points de (C_f) avec l'axe des abscisses.
Préciser les tangentes en ces points.

b) Tracer (C_f) (On prendra $e^{\sqrt{2}} \approx 4$)

3°) a) En intégrant deux fois par parties, calculer $\int x (\ln x)^2 dx$.

b) Calculer l'aire de la surface limitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

4°) Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = \int_x^1 \frac{1}{t} dt$

a) Etudier la fonction g : limites ; dérivée ; tableau de variations.

b) Tracer la courbe (Γ) de g dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

c) Calculer $K = \int_{e^{-2}}^1 \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 dx$. En déduire l'aire de la surface limitée par la

courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = e^{-2}$ et $x = 1$.

B] Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1°) Donner le domaine de définition D_f de f et étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f .

2°) Etudier le sens de variation de f . Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

3°) Calculer en fonction de e une mesure de l'aire de la surface de limitée par la représentation graphique (C_f) de f et par les droites d'équation : $y = 0$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 2$. On

pourra chercher une primitive de $x \ln x$ par une intégration par parties.
 e^x

NB: Les parties A et B du problème sont indépendants.
