

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit ABCD un rectangle de centre O tels que : $BC = 2\sqrt{3}$ et $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{1}{2}$.

1°) Calculer AC et AB. Faites une figure.

2°) a) Construire le point G, barycentre du système de points (A,1) ; (B,3) et le point G', barycentre du système de points (C,1) ; (D, 3).

b) Montrer que O est le milieu de [GG'], et calculer la distance OG.

3°) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{MC} + 3\vec{MD}\|.$$

4°) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$(\vec{MA} + 3\vec{MB}) \cdot (\vec{MC} + 3\vec{MD}) = 108.$$

Que représente cet ensemble pour le rectangle ABCD ?

EXERCICE 2 : (3 points)

On considère la suite (U_n) $n \in \mathbb{N}^*$, définie par : $U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

Montrer que (U_n) est une suite monotone. Quelle est la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$?

Soit $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

PROBLEME : (11 points)

Soit la fonction numérique de la variable réelle définie par $f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$

1°) Etudier les variations de f (On précisera les limites aux bornes de Df et on étudiera les branches infinies).

2°) a) Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = f(x) - 2x - 1$.

Calculer $h'(x)$, $h''(x)$ puis les limites de $h'(x)$ et $h(x)$ chacune en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Déterminer le sens de variation de h' et de h et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* h(x) < 0$

3°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ interpréter géométriquement ce résultat.

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Tracer en précisant les asymptotes éventuelles, la courbe représentative (C_g) de la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R}^* \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

On précisera la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.

4°) a) Justifier l'existence de $\int_{\frac{1}{2}}^x t e^{\frac{1}{t}} dt$ et de $\int_{\frac{1}{2}}^x e^{\frac{1}{t}} dt$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Déterminer par une intégration par parties la fonction φ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\int_{\frac{1}{2}}^x t e^{\frac{1}{t}} dt = \varphi(x) + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^x e^{\frac{1}{t}} dt$$

b) Trouver l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}^*$.

c) Calculer l'aire $A(x)$ du domaine plan délimité par (C_g) et les droites d'équations : $y = 2x + 1$; $x = x_0$ où $x_0 \geq \frac{1}{2}$.