

EXERCICE 1 : (3 points)

1) Soit un nombre entier N du système décimal qui s'écrit $N = xyzt$ et l'entier $yztx$ est divisible par 7.

a) Montrer que si $x = 7$ alors $yztx - 10N$ est divisible par 7.

En déduire que si $x = 7$ alors N est divisible par 7.

b) Montrer que $10N - 3x$ est multiple de 7. En déduire que si N est divisible par 7 alors $x = 7$.

2) Déterminer la solution f de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \text{ vérifiant les conditions } f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 3.$$

EXERCICE 2 : (5 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : $AB = 3\text{cm}$; $AC = 4\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$.

1) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés :

$$(B, 4) ; (C, 3) \text{ et } (A, -5).$$

2) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que :

$$4MB^2 + 3MC^2 - 5MA^2 = 12.$$

3) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que :

$$\|4\vec{MB} + 3\vec{MC} - 5\vec{MA}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

PROBLEME : (12 points)

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(x^2 + 1 - \ln x)$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2cm).

A) 1°) soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

a) Étudier le sens de variation de g et ses limites aux bornes de son ensemble de définition D_g .

(on ne demande pas la représentation graphique de g).

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique μ et que

$$1,30 \leq \mu \leq 1,35$$

c) Étudier le signe de $g(x)$.

2°) a) Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f .

3°) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe (C_f) .

b) Déterminer le point d'intersection B de (C_f) et (Δ) .

Préciser la position de (C_f) par rapport à (Δ) .

c) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) en précisant la tangente en B à (C_f) .

4°) Pour tout nombre réel $t \geq e$, calculer l'aire $A(t)$ de la portion du plan comprise entre (C_f) ; (Δ) les droites d'équations $x = e$ et $x = 1$.

B)

1°) a) Montrer que $g(x) = 0$ équivaut à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $I = [1,30; 1,35]$ par $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$.

b) Justifier la décroissance de h sur I et montrer que pour tout élément x de I , $h(x)$ appartient à I .

c) Prouver que pour tout élément x de I , $-\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq 0$.

d) En déduire que pour tout élément x de I : $|h(x) - \mu| \leq \frac{1}{3} |x - \mu|$

2°) Soit (U_n) la suite d'éléments de I , définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1,30 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout entier n : $|U_{n+1} - \mu| \leq \frac{1}{3} |U_n - \mu|$

b) En déduire que pour tout entier n : $|U_n - \mu| \leq \frac{1}{100} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

c) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

d) Préciser un entier n_0 tel que : $|U_n - \mu| \leq 10^{-5}$. Et donner la valeur de U_{n_0} .