

EXERCICE 1 : (6 points)

Dans le plan complexe on considère les points A ; B ; C et M d'affixes respectives : $2 + 3i$; $-4 + 3i$; $2 - 3i$; $x + iy$.

1°) Déterminer l'ensemble (**E**) des points M tels que : $|z + 4 - 3i| = |z - 2 + 3i|$

2°) Soit $Z = \frac{z - 2 - 3i}{z - 2 + 3i}$ ($z \neq 2 - 3i$). Déterminer l'ensemble (**E**₁) des points M tels que **Z** soit un imaginaire pure positif.

3°) Soit K le point d'affixe $(-iz)$; déterminer l'ensemble (**E**₂) des points M pour que A ; M et K soient alignés.

4°) a) Calculer $(2 + 3i)^4$.

b) Résoudre dans l'équation $z^4 = -119 - 120i$.

EXERCICE 2 : (3 points)

Dans le plan affine on donne les points A (2 ; 3) B (-4 ; 3) C (2 ; -3).

1°) Déterminer le barycentre **G**_m des points (A, 1) ; (B, 1-m) ; (C, 1+m)

2°) Déterminer m pour que **G**_m soit le point E (0 ; 1).

3°) Déterminer l'ensemble des points **G**_m quand m décrit $\mathbb{R}$.

4°) On prend m = 0. Déterminer et construire l'ensemble (**F**₁) des points M tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 72$.

5°) soit I le milieu de AB, déterminer et construire l'ensemble (**F**₂) des points M tels que :

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3 \|\vec{MA} + \vec{MC}\| .$$

PROBLEME : (11 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ où a, b, c, d sont des réels.

A) Trouver a ; b ; c ; et d sachant que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f passe par les points $A(2 ; 3)$; $B(4 ; 7)$ et admet au point d'abscisse 2 une tangente horizontale.

B) Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1°) Etudier la fonction f ;

2°) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à son asymptote oblique $(\mathcal{D})$.

3°) a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[4 ; +\infty[$ notée g est une bijection de $[4 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g(5)$; $g(6)$; $(g^{-1})'(\frac{15}{2})$.

4°) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un centre de symétrie que l'on précisera.

5°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β .

6°) a) Montrer que $\forall x \in [4 ; 5]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

b) En déduire que $\left| f(x) - \frac{15}{2} \right| \leq \frac{3}{4} |x - 5|$.

7°) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ de f et $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ de g^{-1} .

C) La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ est donnée par une partie de son tableau de variation ci-dessous et les renseignements sur sa courbe $\mathcal{C}_h$.

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$	0	—	0	+	
$h(x)$	1				$+\infty$

-2

Renseignements :

- La courbe $(\mathcal{C}_h)$ passe par les points de coordonnées $(1 ; 0)$ et $(3 ; 0)$;
- La droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_h)$;
- La droite d'équation $x = 0$ est axe de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_h)$;

Tracer complètement la courbe $(\mathcal{C}_h)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.