

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit P l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$P(z) = 2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i.$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; i ; j)$.

1) a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle a que l'on déterminera.

b) Transformer $P(z)$ en un produit de deux facteurs, l'un du 1^{er} degré, l'autre du second degré.

2) Résoudre dans l'équation $P(z) = 0$. On appelle b et c les autres solutions autres que a ; b étant celle dont la partie réelle est positive.

3) Soit A, B, C affectés des coefficients respectifs $10 ; \beta ; \lambda$; d'affixes respectives

a, b, c . Déterminer les nombres réels β et λ tels que : O soit le barycentre.

EXERCICE 2 : (3 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; i ; j)$ on donne les points $A(2 ; 4) ; B(1 ; 0) ; C(6 ; 0)$.

1) Placer ces points dans le repère $(O ; i ; j)$.

2) On appelle H l'orthocentre du triangle ABC .

a) Placer le point H .

b) Vérifier que H est le barycentre des points $(A,1) ; (B,b) ; (C,c)$ où

$$b = \frac{12}{5} \quad \text{et} \quad c = \frac{3}{5}.$$

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$5 MA^2 + 12 MB^2 + 3 MC^2 = 140.$$

PROBLEME : (11 points)

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur l'intervalle

$I = \left[-\frac{1}{2} ; +\infty \right[$ Par : $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ et la fonction numérique f définie sur $] -1, +\infty [$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) a) Démontrer que pour tout réel $t \geq 0$: $-2t^3 \leq g'(t) \leq 0$.

b) Démontrer que pour $t \in \left[-\frac{1}{2} ; 0 \right]$: $0 \leq g'(t) \leq -2t^3$.

2) En utilisant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout $x \in [0; +\infty [$ on a : $-\frac{1}{2}x^4 \leq g(x) \leq 0$. (On utilisera une intégration).

3) a) Vérifier que pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$; $f(x) = \frac{-g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$.

b) En utilisant l'inégalité de la question 2) démontrer que f est dérivable en 0.

c) f est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.

4) Soit h la fonction définie sur $] -1 ; +\infty [$ par $h(x) = \frac{-x^2 - 2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$.

a) Etudier le sens de variation de h . Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de h sur $] -1 ; +\infty [$.

b) Démontrer que pour tout $x \in] -1 ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$ on a : $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$.

c) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

5) On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; i ; j)$; (Unité graphique 2cm).

a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Préciser les asymptotes à (C) puis construire (C) .

c) Calculer en cm^2 l'aire $A(m)$ du domaine plan limité par les droites d'équations :

$x = 1$; $x = m$ ($m > 1$), l'axe des abscisses et la courbe (C) . Déterminer la limite de $A(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.