

EXERCICE 1 : (6 points)

On suppose y et z sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = 2y + 3z \end{cases}$$

1°) Montrer que $y'' - 5y' + 4y = 0$.

2°) En déduire les expressions de y et de z en fonction x sachant que :
 $y(0) = 1$ et $z(0) = -1$.

EXERCICE 2 : (3 points)

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$; $y_0 = 8$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1°) Montrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$ sont la droite $(\mathcal{D})$ dont une équation est $5x - y + 3 = 0$.

En déduire que : $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2°) Montrer par récurrence que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

3°) Montrer que :

a) x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n divisible par 3.

b) Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4°) a) Montrer par récurrence, que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.

b) En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n .

PROBLEME : (11 points)

A – La fonction f est définie sur IR_+^* par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$

1° a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier le sens de variation de f (on ne demande pas de représenter f).

2° a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans IR_+^* une solution unique ℓ et que $\ell \in]1 ; 2[$.

b) Etudier le signe de $f(x)$ lorsque x décrit IR_+^* .

B – On se propose dans cette partie de calculer une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

1° Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1 ; 2]$ par

$$\varphi(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln x.$$

a) Etudier les variations de φ . Prouver que l'image par φ de l'intervalle $[1 ; 2]$ est un intervalle contenu dans $[1 ; 2]$.

b) Montrer que ℓ est l'unique solution de $\varphi(x) = x$.

2° On considère alors la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Démontrer que pour tout entier n on a : $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout réel x de $[1 ; 2]$ on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n , on a : $|U_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |U_n - \ell|$

d) Montrer que la suite U converge vers ℓ .

e) Déterminer un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-2} près de ℓ . Donner un encadrement de U_{n_0} d'amplitude 10^{-2} .

C – La fonction g est définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x ; x \in]0 ; 1] \end{cases}$$

1) Etudier la dérivabilité de g en 0.

2) Soit g' la dérivée de g . Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$, puis vérifier que :

$$g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout réel } x \text{ de }]0 ; 1].$$

3) En déduire le signe de $g'(x)$ lorsque x décrit $]0 ; 1]$. Dresser le tableau de variation de la fonction g .