

EXERCICE 1 : (6 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 - 5x + 4 = 0$

2°) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$$

a) Démontrer que (U_n) est majorée par 5.

b) Quelle est la limite éventuelle de (U_n) ?.

c) Etudier le sens de variation puis la convergence de (U_n) .

d) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\left| U_{n+1} - 3 \right| \leq \frac{1}{3} \left| U_n - 3 \right| \quad \text{et} \quad \left| U_n - 3 \right| \leq 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

EXERCICE 2 : (3 points)

Un triangle ABC isocèle, de sommet principal A, est inscrit dans un cercle de centre C et

de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue de A. soit α la mesure en radians de l'angle $\widehat{HCB}$; on suppose : $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

1°) Exprimer en fonction α de l'aire du triangle ABC.

2°) Etudier f définie sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$;

3°) Montrer qu'il existe une valeur de, que l'on déterminera ; pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale. Quelle est la nature du triangle ABC?.

(On rappelle que le centre du cercle circonscrit est le point de rencontre des médiatrices).

PROBLEME : (11 points)

Partie A : On considère la fonction h définie par $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x$

1°) Calculer les limites de h en $+\infty$ et à droite de 0.

2°) Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$

3°) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $x_0 \in]1, +\infty[$.
En déduire le signe de h .

Partie B : On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2(1 - \ln x) + 1 + \ln x$.

1°) Calculer les limites de g en $+\infty$ et à droite en 0.

2°) On note g' la dérivée de g ; démontrer que $g'(x) = x h(x)$.

3°) Démontrer que l'équation $g(x_0) > 0$.

4°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $x_1 \in]0, 1[$.

5°) On admet que $g(x) = 0$ admet une solution unique x_2 dans $]x_0, +\infty[$.

a) Déterminer le signe de g .

b) Démontrer que $x_1 \in]0,3 ; 0,4[$ et $x_2 \in]3,3 ; 3,7[$.

Partie C : On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x \ln x}{1 + x^2}.$$

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

2°) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

3°) Etudier les variations de f .

4°) Démontrer que si α est une solution de $g(x) = 0$ alors : $\ln \alpha = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}$.

5°) Démontrer que : $f(x_1) < 0$ et $f(x_2) > 0$;

6°) Vérifier $f(1) = 0$ puis en déduire le signe de f .

7°) Tracer la courbe ($\mathcal{C}_f$) de f dans le plan rapporté un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.