

EXERCICE 1 : (5 points)

1. Soit P le polynôme de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 3(1 - 4i)z + 9.$$

a) Calculer P (3) ;

b) Montrer que pour tout z dans $\mathbb{C}$ $P(z) = (z - 3)(z^2 - 4iz - 3)$;

c) On pose $z = u + 2i$. Ecrire $z^2 - 4iz - 3$ sous forme $Q(u) = 0$, avec Q un polynôme de degré 2.

d) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Q(u) = 0$.

e) Dédire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$P(z) = 0.$$

2. On pose : $Z = \frac{1}{1 + i \tan \alpha}$. Calculer le module et un argument de Z.

(On discutera suivant les valeurs du réel α).

3. En utilisant les racines cubiques de l'unité résoudre l'équation d'inconnue Z :

$$Z^3 = (1 + i\sqrt{12})^3$$

EXERCICE 2 : (5 points)

1. a) Etudier suivant les valeurs de n, le reste de division par 7 du nombre

$$A = n^2 - n + 1.$$

b) En déduire les entiers n tels que le nombre A soit divisible par 7.

c) Déterminer le reste de la division par 7 du nombre $B = 2753^2 - 2753 + 1$.

2. Déterminer les triangles OAB rectangles en O, dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers,

le côté OA ayant pour mesure 12. Calculer OB = n et AB = N.

Parmi ces triangles, existe-il des triangles semblables ? Lesquels ?

PROBLEME : (10 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (Unité 2cm).

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1- Etudier la fonction g .

2-Montrer qu'il existe un réel unique α tel que : $g(\alpha) = 0$ puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel α .

3- Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude de la fonction f .

1- Déterminer les limites de la fonction aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition.

2- Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ on a $f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

En déduire le tableau des variations de f .

3- a) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$ on a : $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}$

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Etudier la position de (C) par rapport à $\mathcal{D}$.

4- Tracer la courbe (C) et la droite $\mathcal{D}$.

Partie C : Nombre de solutions d'une équation

1- Déterminer l'abscisse des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.

2- Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les représenter.

3- En déduire graphiquement suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = x + m$.