

EXERCICE 1 : (4 points)

- 1°) On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$
 a°) Vérifier que $g : x \rightarrow (x+1)e^{-2x}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$
 b°) Démontrer qu'une fonction $f + g$ est solution de (E) si et seulement si la fonction f est solution de $y' + 2y = 0$
 c°) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$
 2°) Résoudre dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 2x - 15 = 0$

Exercice 2 : (4 points)

Soit la fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

- 1°) a°) Calculer $h(x) + h(-x)$. Que peut-on en déduire ?
 b°) Calculer $h'(x)$
 c°) Quel est le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 1$. On justifiera la réponse.
 2°) a°) Montrer que pour tout $x \geq 1$; $h(x) - h(1) \leq \frac{(x-1)}{\sqrt{2}}$
 b°) Montrer que tout réel $x \in [0, 1]$; $h(x) \geq \frac{x}{\sqrt{2}}$
 3°) calculer si possible $h(1)$, $h(0)$, et $h^{-1}(1)$

Problème : (12 pts) ce problème est composé de deux parties indépendantes

PARTIE A

On considère la fonction h_m définie sur $\mathbb{R}$ par $h_m(x) = x + me^{-|x|}$ ou m est un réel positif non nul.

- 1°) Soit g_1 la fonction définie sur $] -\infty; 0[$ par $g_1(x) = x + e^x$.
 Dresser le tableau de variation de g_1 .
 2°) Soit g_2 la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par $g_2(x) = x + e^{-x}$.
 Dresser le tableau de variation de g_2 .
 3°) a) Déduire des résultats précédents le tableau de variation de h_1 et tracer sa courbe ($\mathcal{C}_1$) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité de longueur 2cm.
 b) Calculer $\int_0^\lambda (h_1(x) - x)dx$ où λ est un réel positif. Interpréter géométriquement ce nombre.

c) Sur l'axe des abscisses on partage l'intervalle $[0 ; 1]$ en n parties égales (n entier naturel supérieur ou égal à 2) ; soit $\frac{1}{n}$ l'abscisse de l'un des points de division ($i \in \{0;1;2;\dots\dots\dots n\}$).

La droite d'équation $x = \frac{i}{n}$ coupe la droite d'équation $y = x$ au point A_i et la courbe $(\mathcal{C}_1)$ au point B_i . Déterminer les coordonnées du milieu M_i de $[A_i, B_i]$. Déterminer par ses coordonnées l'isobarycentre G de tous les points A_i et B_i lorsque i décrit l'ensemble $\{0;1;2;\dots\dots\dots n\}$.

4°) Dans cette question m (réel positif non nul) n'est plus astreint à prendre la seule valeur 1.

- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles h_m présente au moins un minimum relatif.
- Déterminer et tracer l'ensemble des points des courbes $(\mathcal{C}_m)$ de h_m où la tangente est parallèle à $x'ox$.

PARTIE B

Dans cette partie $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes et le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

On considère l'application de $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe $z' = (1 + i)z + 2i$.

1°) On note Z_Ω l'affixe du point Ω de coordonnées $(-2 ; 0)$. Montrer que $f(Z_\Omega) = Z_\Omega$.

2°) Démontrer que pour tout couple $(z ; t) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f(z) = z'$ et $f(t) = t'$, on a $|z' - t'| = k|z - t|$ où k est un réel que l'on déterminera.

3°) On considère la suite (Z_n) définie par : $Z_0 = 1 + 3i$ et pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = f(Z_n)$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|Z_n - Z_\Omega| = 3\sqrt{2}^{n+1}$.

b) Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on note (d_n) la suite définie par $d_n = |Z_{n+1} - Z_n|$. Montrer que (d_n) est géométrique. Exprimer d_n en fonction de n .

c) On pose $S_n = d_0 + d_1 + d_2 + \dots\dots\dots + d_n$. Calculer S_n en fonction de n .

4°) Dans cette question pour tout n élément de $\mathbb{N}$, M_n désigne le point d'affixe Z_n . Déterminer les valeurs de n pour lesquelles M_n appartient au disque de centre Ω et rayon 6.