

EXERCICE 1 : (6 points)

A

1°) Soit f une fonction numérique satisfaisant aux conditions suivantes :

- Son ensemble de définition est $D_f =]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$;
- $f'(x)$ est positive sur $]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$ et $f'(x)$ est négative sur $]-1; 4[$;
où f' désigne la fonction dérivée de f ;

$$\bullet \quad f(0) = \frac{11}{4} \quad f(-1) = \frac{5}{3} \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = f(6) = 0$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 5) = 0,$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 0$$

En utilisant les renseignements ci-dessus :

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Préciser les équations des asymptotes à la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Unité graphique 1cm).

2°) La fonction est-elle dérivable au point d'abscisse $x_0 = -1$? Justifier votre réponse.

3°) Construire la courbe (C) et ses asymptotes dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Préciser les tangentes ou demi tangentes à (C) que les renseignements vous donnent.

4°) Tracer dans le même repère la courbe (C') de $|f'|$.

B

On considère l'ensemble $E = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et la fonction f de E vers E qui à tout x associe $5x+3$.

a) Montrer que f est une bijection de E sur E .

b) Donner l'expression de la réciproque

f^{-1}

de f .

c) Résoudre dans E l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$.

EXERCICE 2 : (4 points)

A

$\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes et $P(z)$ est le polynôme à variable complexe z définie par

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10$$

1°) Vérifier que si z_0 est un zéro de $P(z)$ alors son conjugué $\overline{z_0}$ est aussi un zéro de $P(z)$.

2°) Vérifier que $1-i$ est un zéro de $P(z)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

4°) Représenter dans le plan complexe les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

On considère l'entier naturel décimale :

B

$N = \overline{abcabc}$ écrit dans le système de numération

a) Montrer que N est divisible par 11 et qu'il peut s'écrire $N = k \times abc$ où k est un entier naturel que l'on précisera.

b) En déduire que N est divisible par 7 et 13.

PROBLEME : (10 points)

A

A tout nombre complexe z on considère le nombre complexe $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles Z est défini.

b) Déterminer les ensembles des points M dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :

- $|Z| = 1$
- Z est un réel ;
- Z est un imaginaire pur.

B

On pose $\mathcal{E} = \mathbb{C} - \{i\}$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ; f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Soit M le point d'affixe z dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1°) Déterminer les coordonnées du point B d'affixe z_0 telle que $f(z_0) = 1 + 2i$.

2°) Soit z élément de $\mathcal{E}$. On désigne par r le module de $z+i$ et θ une mesure de son argument. Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et de θ .

3°) Soit A le point d'affixe $-i$.

a) Déterminer l'ensemble C des points M dont l'affixe z vérifie $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et :

l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - i$.

b) Montrer que B appartient à C et D . Construire C et D .

C

Soit $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto f_m(x) = (2m-1)x^5 - (m+4)x^3 - m + 5$ où m est un paramètre réel.

1°) Montrer que les courbes représentatives (C_m) de f_m passent par deux points de fixes A et B dont on précisera les coordonnées.

2°) Montrer que les courbes (C_m) admettent un axe de symétrie et donner son équation.

3°) Soit $m = 1$, construire la courbe (C_1) représentant les variations de f_1 dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4°) Montrer que les tangentes aux points fixes se coupent en un point I de l'axe de symétrie. Donner les coordonnées de I .

5°) Discuter suivant les valeurs du réel t l'existence et le signe des solutions de l'équation : $x^4 - 5x^2 + 4 - t = 0$.

