

Exercice 1 (5 points)

A/ 1^o) Résoudre l'équation différentielle (H) : $y'' - 4y' + 4y = 0$. En déduire la solution f qui vérifie les conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$. (1pt)

2^o) Le plan est muni d'un repère orthonormal, on considère la fonction f définie par $f(x) = (x+1)e^{2x}$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans ce repère.

a) Etudier la fonction f puis tracer sa courbe (C_f) . (1pt)

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$; $x = \ln 2$. (1pt)

B/- On pose : $u_1 = e^{1/2}$; $u_2 = e$; $u_3 = e^{3/2}$; $u_4 = e^2$.

a) Vérifier u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 sont les quatre premiers terme d'une suite géométrique croissante dont on calculera la raison q et le terme général u_n . (1pt)

b) On pose $A_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left[\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2x} \right] dx$. Exprimer A_n en fonction de n , puis montrer que (A_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison r . (1pt)

Exercice 2 (3 points)

Dans le plan, on considère un carré ABCD. Soit O le centre du carré et I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1^o) Déterminer et construire le barycentre G_1 des points pondérés :
 $(A, 1)$; $(B, -3)$; $(C, 1)$; $(D, -3)$. (1pt)

2^o) Déterminer et construire le barycentre G_2 des points pondérés :
 $(A, 1)$; $(B, 1)$; $(C, -3)$; $(D, -3)$. (1pt)

3^o) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
 $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MD} = 0$ (1pt)

Problème (12 points)

Partie I :

On considère la fonction g définie par : $g(x) = x^2 + \ln x$.

1°) Etudier les variations de g ; (1,5pt)

2°) Montrer qu'il existe un nombre unique x_0 tel que $g(x_0)=0$.

Montrer que $0,65 < x_0 < 0,66$. (1pt)

3°) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x . (1,5pt)

Partie II :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln x}{x}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 4cm.

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f ; (1pt)

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement. (1pt)

2°) a) Montrer que (C_f) admet une droite asymptote (D) en $+\infty$ que l'on précisera. (1pt)

b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (D) . (1pt)

3°) Calculer $f'(x)$, étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f . (1pt)

4°) x_0 étant le réel défini dans la partie A / 2°)

a) Montrer que $\ln(x_0) = -x_0^2$. En déduire que $f(x_0) = 1 - 2x_0 + \frac{1}{x_0}$ (0,5pt)

b) Montrer que la fonction h définie par $h(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$. (0,5pt)

c) En déduire que $f(x_0) < h(0,60)$ (0,5pt)

d) Montrer que $f(x_0) > f(0,65)$. Donner un encadrement de $f(x_0)$ à 10^{-2} près. (0,5pt)

5°) Calculer les coordonnées du point de (C_f) où la tangente est parallèle à (D) . (0,5pt)

Donner une équation de cette tangente (T) .

6°) Tracer (C_f) ; (D) et (T) dans le repère. (0,5pt)