

**Exercice 1 : (5 points)**

On considère l'équation (E) :  $z^3 + (9i - 4)z^2 - (19 + 24i)z + 36 - 3i = 0$

1°) Résoudre (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

2°) Montrer que les points images des solutions appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

3°) Soient A ; B et C les points d'affixes respectives a ; b et c .

a) Résoudre le système d'inconnues a ; b ; c.

$$\begin{cases} a + b + c = 4 - 9i \\ a - b + c = -7i \\ a + b - c = 4 - 3i \end{cases}$$

b) Calculer  $\frac{a - c}{b - c}$ , et en déduire la nature du triangle ABC.

**Exercice 2 : (5 points)**

N et M sont deux nombres tels que N s'écrit  $\overline{1a3a}$  et M s'écrit  $\overline{bca35}$  .

1°) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel  $n$  le reste de la division de  $6n$  par 11.

2°) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $7x + y = 46$ .

3°) Sachant que N est divisible par 11 et que le couple (b ; c) est solution de  $7x + y = 46$ .  
Donner les écritures en base 4 de N et en base 7 de M.

4°) Déterminer l'entier naturel  $n$  tel que  $M^n \equiv 3 \pmod{5}$ .

5°) a) Ecrire dans le système décimal M et N.

b) Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  le système d'inconnues a et b

$$\begin{cases} \text{PPCM}(a ; b) = M - N \\ \text{PGCD}(a ; b) = 5N + 14 \end{cases}$$

## Problème

Soit  $f$  la fonction définie par  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   

$$x \mapsto |x| + \sqrt{x^2 - 2x}$$

1°) Montrer que

- a)  $\forall x \in ]-\infty; 0[ \quad \sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x \leq 0$  ;
- ;
- b)  $\forall x \in ]2; +\infty[ \quad \sqrt{x^2 - 2x} - 1 + x \geq 0$  ;
- ;
- c)  $\forall x \in ]-\infty; 0[ \quad x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} \leq 0$  ;
- ;
- d)  $\forall x \in ]2; +\infty[ \quad x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x} \geq 0$  .
- ;

2°)

- a) Ecrire  $f(x)$  sans le symbole valeur absolue.
- b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $x = 0$  et en  $x = 2$ , puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3°) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4°) Montrer que les droites  $(\Delta) : y = 2x - 1$  et  $(D) : y = -2x + 1$  sont asymptotes à la courbe  $(C_f)$  de  $f$ .

5°) Tracer la courbe  $(C_f)$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

6°) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $[3; 4]$  on a :  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq f'(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

b) En déduire que  $\forall x \in [3, 4]$  on a :  $x + \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{3} \leq f(x) \leq (1 + \sqrt{3})x - 2\sqrt{3}$ .

7°) a) Soit  $I = [2; +\infty[$  trouver  $f(I)$ .

b) Soit  $g : I \rightarrow f(I)$   
 $x \mapsto f(x)$

Montrer que  $g$  est une bijection.

c) Calculer  $(g^{-1})'(3)$ .

d) Construire la courbe  $(\Gamma)$  de  $g^{-1}$  (où  $g^{-1}$  est la bijection réciproque de  $g$ ).

8°) Calculer l'intégrale  $A = \int_3^4 \left( 2x + \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{2 - 4x - 3}} \right) dx$ .

9°) Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = x$   
+

et  $(C_h)$  sa courbe représentative.

- a) Calculer  $g(x - 1)$  ;
- b) Exprimer  $h$  à l'aide de  $g$  ;
- c) Par quelle application la courbe  $(C_g)$  de  $g$  a pour image  $(C_h)$ ?
- d) Construire la courbe  $(C_h)$  de  $h$ .

## Sujet de Remplacement

### Exercice 1 : (5 points)

On considère l'équation (E) :  $z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$ .

1°) Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

2°) En déduire la résolution de (E). On note  $z_0$  la solution réelle,  $z_1$  la solution dont la partie imaginaire est négative, et  $z_2$  la solution dont la partie imaginaire est positive.

3°) Soient A ; B ; C les points d'affixes respectives  $z_0$  ;  $z_1$  et  $z_2$ .  
Déterminer la nature du triangle ABC.

### Exercice 2 : (5 points)

1°) Déterminer suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de  $2007^n$  par 5.  
En déduire le reste de la division euclidienne de  $2^{2007}$  par 5.

2°) Résoudre dans la congruence  $2007^{n+3} \equiv 2 \pmod{5}$ .

3°) n est un entier naturel, soit  $I_n = \int_{-2}^2 (x^2 - 3)^n dx$ .

a) Calculer  $I_1$ .

b) Montrer que  $I_{n+1} = \int_{-2}^2 x^2 (x^2 - 3)^n dx = 3 I_n$ .

c) Soit  $f_n$  la fonction définie sur l'intervalle  $[-2 ; 2]$  par :

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 3)^{n+1}}{n+1} . \text{ Calculer } f'_n(x) .$$

d) En faisant une intégration par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(2n + 3) I_{n+1} + 6(n + 1) I_n = 4$$

e) En déduire  $I_2$  et  $I_3$ .



## **Problème : ( 10 points)**

A) Soit P la fonction polynôme définie par  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

$$1^\circ) \text{ Déterminer les réels } a, b, c, \text{ et } d \text{ tels que : } \begin{cases} P(1) + P'(0) = 0 \\ P'(1) + P(0) = -5 \\ P(1) - P'(0) = - \\ P'(1) - P(0) = 5 \end{cases}$$

Où P' désigne la dérivée de P.

2°) Dans la suite du problème on considère la fonction polynôme P définie par :

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 5$$

- a) Dresser le tableau de variation de P.
- b) Montrer que l'équation  $P(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]1; +\infty[$ .
- c) En déduire le signe de P(x).
- d) Déterminer l'entier naturel n tel que :  $n \leq \alpha \leq n+1$ .
- e) En déduire un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  de  $\alpha$ .

B) On considère la fonction f définie par

:  $f(x) = \frac{x - 2x + 5}{x - 1}$  et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1°) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de P(x).

2°) Dresser le tableau des variations de f.

3°) Déterminer la fonction g et le nombre réel a tel que pour tout x de  $\mathbb{R} - \{1\}$  ;

$$f(x) = g(x) + \frac{a}{x - 1}.$$

4°) Déterminer la limite en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) ; \text{ puis interpréter le résultat.}$$

5°) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de  $\varphi(x)$  ; puis en déduire la position relative de (C) de f et de la courbe ( $\Gamma$ ) de g.

6°) Tracer (C)et ( $\Gamma$ ) dans le même repère.

---