

EXERCICE 1 : (5 points)

ABCD est un parallélogramme de centre O tel que $AB = 2a$ et $BC = a$ et l'angle

$$\left(\vec{AB} ; \vec{AD} \right) = \frac{\pi}{3} \quad \text{où } a \text{ est un réel strictement positif.}$$

1°) a) Montrer que $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$. Interpréter ce résultat.

b) Montrer que D est le barycentre des points pondérés (A,1) ; (B, -1) ; (C,1).

c) Calculer la distance DB.

2°) Déterminer et construire :

a) L'ensemble (F_1) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 11a^2$;

b) L'ensemble (F_2) des points M du plan tels que :

$$\| \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} \| = \| 3\vec{MA} - 2\vec{MB} - \vec{MC} \|.$$

c) L'ensemble (F_3) des points M du plan tels que :

$$(\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) \bullet (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}) = 0$$

EXERCICE 2 : (5 points)

f et g sont deux fonctions numériques à variables réelles deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

vérifiant le système d'équations différentielles : (S) $\begin{cases} f'(x) = f(x) + g(x) \\ g'(x) = -f(x) + g(x) \end{cases}$

1°) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + 2y = 0$.

2°) a) Exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$.

b) En déduire l'expression de $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f''(x)$.

c) Montrer que f est solution de (E).

3°) résoudre le système (S).

4°) En déduire la solution particulière de (S) vérifiant $f(0) = 2$ et $g(0) = -1$.

PROBLÈME : (10 points)

Dans ce problème n est un entier naturel.

A) Soit g_n la fonction définie du $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = x^3 - 3x^2 - n - 1$.

1°) Dresser le tableau de variation de g_n .

2°) Montrer l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n .

3°) Montrer que α_n n'appartient pas à $[2 ; 3]$.

4°) Déterminer le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x .

B) Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = e^{-x}(-x^3 + n + 1)$. On note (C_n) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1°) Dresser le tableau de variation de f_n .

2°) On note M_n le point de (C_n) d'abscisse α_n .

Montrer que $f_n(\alpha_n) = -3\alpha_n^2 e^{-\alpha_n}$. En déduire entre les coordonnées x et y de M_n une relation indépendante de n .

3°) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à (C_n) au point d'abscisse 0.

4°) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire la position relative des courbes (C_n) .

C) Soit h la fonction définie sur $I = [0, 1]$ par $h(x) = e^{-x}(x^2 + x + 1)$.

1°) Etudier le sens de variation de h . En déduire que pour tout nombre réel $x \in I$ on a : $h(x) \geq 1$.

2°) Montrer que : $3,10 \leq \alpha_0 \leq 3,11$.

3°) Montrer que le point de (C_0) d'abscisse $\frac{3}{2}$ est en dessous du point de même abscisse de (T_0) .

4°) Donner le tableau de f_0 .

5°) Tracer (C_0) et (T_0) .

6°) Calculer l'aire $\mathcal{A}_0$ de la partie du plan comprise entre (C_0) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

D) On considère les suites (U_n) ; (V_n) et (W_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x) dx ; \quad V_n = 2 [f_0(0) + f_1(0) + f_2(0) + \dots + f_n(0)] ; \quad W_n = \frac{1}{V_n}.$$

1°) Calculer U_0 .

2°) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\frac{1}{e} + U_{n+1} = 1 + U_n$.

En déduire la nature de la suite (U_n) .

3°) Calculer V_n .

4°) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $W_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$.

5°) Calculer $S = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$ en fonction de n .

EXERCICE 1

ABCD est un rectangle de centre O tel que $AB = 2a$ et $BC = a$ où a est un réel strictement positif.

- 1°) a) Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Interpréter ce résultat.
b) Montrer que D est le barycentre du système $\{(A, -1); (B, 1); (C, -1)\}$.
c) Calculer la distance DB.

2°) Déterminer et construire :

- a) L'ensemble (F_1) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$;
b) L'ensemble (F_2) des points M du plan tels que :

$$\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \|$$

- c) L'ensemble (F_3) des points M du plan tels que :
 $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0$

EXERCICE 2

On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^{e-1} (x+1)^2 [\ln(x+1)]^n dx$.

1°) Calculer I_0 .

2°) A l'aide d'une intégration par partie calculer I_1 .

3°) Montrer que la suite (I_n) est à termes positifs.

4°) a) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$.

c) En déduire que (I_n) est convergente et préciser sa limite.

PROBLÈME

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x - x^2 + x + 1)$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

A) Soit h la fonction définie par $h(x) = e^x - x^2 + x + 1$

1°) Dresser le tableau de variation de la fonction u définie par $u(x) = e^x - 2x + 1$.

En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

2°) Dresser le tableau de variation de h .

3°) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

4°) Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

5°) Etudier les variations de f et tracer $(\mathcal{C})$.

B) Soit (E) l'équation différentielle ; $z'' + 2z' - 3z = 3x^2 - 7x - 3$.

1°) Vérifier que la fonction h définie dans la partie A) est solution de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle (E') : $z'' + 2z' - 3z = 0$.

3°) Montrer que : t solution de (E) équivaut à $(t - h)$ solution de (E').

4°) En déduire les solutions de (E)

C) Soit g la fonction définie sur $I = [-1; 0]$ par $g(x) = \frac{1}{9}(x^2 - 1 - e^x)$.

1°) Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{9}\alpha$.

2°) Montrer que $g''(x) = -\frac{1}{9}u'(x)$.

En déduire que pour tout réel x élément de I on a : $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

3°) Etudier le sens de variation de g . En déduire que $g(I) \subset I$.

4°) Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n :

a) U_n est élément de I

b) $|U_{n+1} - \frac{1}{9}\alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \frac{1}{9}\alpha|$.

c) $|U_n - \frac{1}{9}\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

Lycée Technique	BAC BLANC		
SPÉCIALITÉ	MTI – MTGC	SESSION :	<i>Mai 2007</i>
ÉPREUVE DE :	MATHÉMATIQUES	DURÉE :	4 heures

EXERCICE 1 :

1°) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation d'inconnues $(x ; y) : a x + b y = c$ où a, b , et c sont des coefficients entiers relatifs.

a) cette équation a-t-elle des solutions dans les cas suivants ?

- $a = 7 ; b = 3$ et $c = 1$;
- $a = 6 ; b = 4$ et $c = 1$.

b) Quelles sont les conditions pour que cette équation ait des solutions dans $\mathbb{Z}^2$?

2°) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $3x - 7y = 5$.

b) Dédurre de l'étude précédente les entiers naturels A inférieurs à 57 tels que dans la division euclidienne de A par 3, le reste soit 1 et dans celle de A par 7, le reste soit 6.

3°) a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $9y'' + \pi^2 y = 0$

b) On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormé, passe par le point $P(1 ; \sqrt{2})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses. En utilisant les données ci-dessus, préciser $f(1)$ et $f'(1)$; Déterminer f .

EXERCICE 2 :

Le plan affine P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1°) Soit f l'application affine de P dans P qui au point $M(x ; y)$ associe le point

$$M'(x' ; y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$$

a) Montrer que f est une application affine bijective admettant un seul point invariant.

b) Quelle est la nature géométrique de $f \circ f$? caractériser $(f \circ f \circ f \circ f)$.

c) Soit M un point quelconque de P , on note :

$M_1 = f(M)$; $M_2 = f(M_1)$; $M_3 = f(M_2)$. Démontrer que l'iso barycentre des points M ; M_1 ; M_2 ; M_3 est le point invariant par f .

d) M est le point d'affixe z et M' celui d'affixe z' . Exprimer z' en fonction de z .

2°) On considère les points I et A d'affixes respectives 1 et -2 ; K est le milieu du segment $[IA]$. $(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $[IA]$.

Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

- a) Soit B le point d'affixe $b = \frac{1+4i}{1-2i}$. Ecrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle ($\mathcal{C}$).
- b) Soit D le point de ($\mathcal{C}$) tel que $(\vec{KI}, \vec{KD}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, où k est un entier relatif, et soit d l'affixe de D.
- c) Quel est le module de $d + \frac{1}{2}$? Donner un argument de : $d + \frac{1}{2}$.
- d) En déduire que $d = \frac{1}{4} + \frac{3i\sqrt{3}}{4}$
- d) Déterminer un réel a vérifiant l'égalité : $\frac{1+2ia}{1-ia} = \frac{1}{4} + \frac{3i\sqrt{3}}{4}$.

Problème :

Dans tout le problème on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x \ln x - x + 1$ et ($\mathcal{C}_g$) sa courbe représentative.

1°) Dresser le tableau de variation de g. En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2°) On note ($\mathcal{C}'$) la représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \ln x$.

Montrer que ($\mathcal{C}_g$) et ($\mathcal{C}'$) ont deux points communs que l'on déterminera ; et que pour tout x de $[1; e]$ on a : $x \ln x - x + 1 \leq \ln x$.

3°) a) Calculer $J = \int_1^e (x-1) \ln x dx$;

b) Soit (Δ) le domaine défini par : $\Delta = \{ M(x; y) / 1 \leq x \leq e \text{ et } g(x) \leq y \leq \ln x \}$.

Déterminer en cm² l'aire de (Δ). Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

Partie B : Etude d'une fonction f.

Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$.

1°) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1

2°) Déterminer le tableau de variation de f

3°) Tracer la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4°) a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α comprise entre 3,5 et 3,6.

b) Soit h la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]1 ; +\infty[$ par

$$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}(x+1).$$

- Montrer que $h(\alpha) = \alpha$.
- Etudier le sens de variation de h .
- On pose $I = [3 ; 4]$. Montrer que $h(I) \subset I$ et montrer que pour tout réel x de I on a $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$.

c) On définit la suite (U_n) par : $U_0 = 3$ et, pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = h(U_n)$.

Justifier successivement les trois propriétés suivantes

- Pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$
- Pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$
- La suite (U_n) converge vers α .

d) Déterminer un entier p , tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C :

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie

sur $]0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ et $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$.

1°) On pose $F(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$, en déduire I_1 .

2°) En utilisant une intégration par parties montre r que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$

3°) En utilisant la question 2°), montrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, on a : $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$.

4°) En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1 ; e]$, montrer que, pour tout entier n strictement positif, on a : $0 \leq I_n \leq 1$.

5°) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$.

6°) On considère dans P le cercle (r) de centre O et de rayon 1.

Soit A le point de coordonnées $(1,0)$ et A' le point de coordonnées $(-1, 0)$.

a). Par tout point H du segment $[A, A']$ distinct de A et A' , on mène la perpendiculaire (Δ) à la droite (AA') . (Δ) Coupe (r) en M et M' .

On pose $OH = x$. Calculer en fonction de x l'aire du triangle AMM' .

b). Montrer que le triangle AMM' d'aire maximale est équilatéral.