

EXERCICE 1 : (5points)

Z est un nombre complexe différent de 1

1°) Comparer $|z - 1|$ et $|\bar{z} - 1|$

2°) On pose $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$. On appelle A, B, M et M' les points

Déterminer $\frac{z'+1}{z-1}$

du plan complexe d'abscisses respectives 1 ; -1 ; z et z'.

3°) Calculer en fonction de z et z' le nombre $r = \frac{z'+1}{z-1}$ et en déduire que r est réel. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.

EXERCICE 2 : (5points)

1°) Déterminer tous les couples d'entiers naturels a et b (a < b) tels que :

$$a \wedge b = d \text{ et } a \vee b = m \quad \text{vérifient} \quad \begin{cases} m + d = 126 \\ 5 \leq d \leq 10 \end{cases}$$

2°) Effectuer la division euclidienne de a par b pour a = -532 et b = -71.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ divisible par 17.

4°) Effectuer l'opération suivante $\overline{FACE}^{16} - \overline{BEC}^{16}$

5°) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 1 [3] \\ x \equiv 2 [7] \end{cases}$

Problème : (5points)

I-) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [n ; n+1]$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

b) En déduire en utilisant l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

II-) Soit f la fonction définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{-x}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2°) Étudier les variations de la fonction f

3°) Étudier la dérivabilité de f en 1.

4°) Déterminer une équation de la tangente à la courbe (Cf) de f en 0.

5°) Montrer que sur $] -\infty ; 1]$ f admet une bijection réciproque f^{-1} .

6°) Représenter dans le même repère orthonormé la courbe (Cf) de f et

(Cf f^{-1})
de f^{-1} .