

Exercice1..... (5 points)

Soit la fonction f définie sur $[1 ; 3]$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1°) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x de $[1 ; 3]$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

2°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[1 ; 3]$ que l'on déterminera. En déduire que pour tout x de $[1 ; 3]$ on a : $|\sqrt{x+2} - 2| \leq \frac{1}{2}|x - 2|$

3°) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer que $\forall n \geq 0$ on a : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$

b) Démontrer que $\forall n \geq 0$ on a : $|u_n - 2| \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) En déduire la convergence de la suite (U_n) et préciser sa limite.

Exercice2.....(5 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}f$ de f puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}f$.

2°) a) Calculer $f'(x)$.

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection M_1 de la courbe $(\mathcal{C}f)$ avec l'axe des abscisses.

c) Soit M_2 le point de $(\mathcal{C}f)$ d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$. Déterminer une équation de la tangente (T) à

$(\mathcal{C}f)$ en M_2 .

d) On désigne par M_3 le point de la courbe $(\mathcal{C}f)$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de M_3 .

e) Soit M_4 le point de $(\mathcal{C}f)$ d'abscisse $\sqrt{e}$.

3°) Vérifier que les abscisses respectives $x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4$ des points $M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4$ sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

Problème.....(10 points)

Partie A

- 1°) a) Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y' + y = 0$
- b) Déterminer la solution particulière g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 4$.
- 2°) a) Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y' + 2y = 0$
- b) Déterminer la solution particulière définie sur $\mathbb{R}$ notée h telle que $h'(0) = 2$.

Partie B

- 1°) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = h(x) + g(x)$. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$,
- $$f(x) = \frac{4e^x - 1}{e^{2x}}.$$
- 2°) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
- 3°) Étudier les variations de la fonction f .
- 4°) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse $x = 0$.
- 5°) La fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x - 3 + 4e^{-x} - e^{-2x}$.
- Démontrer que u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 6°) Calculer $u(0)$ et en déduire à l'aide de ce qui précède le signe de la fonction u sur $\mathbb{R}$, puis la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la tangente (T) .
- 7°) Construire dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2cm la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (T) .

Partie C

- 1°) Résoudre l'équation $f(x) = 0$
- 2°) Calculer la primitive F de la fonction f vérifiant $F(-\ln 4) = 0$
- 3°) Calculer en fonction du nombre α , l'aire $A(\alpha)$ de l'ensemble des points $M(X; y)$ du plan tels que : $-\ln 4 \leq x \leq \alpha$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
- 4°) a) Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.
- b) Calculer le nombre réel α tel que $A(\alpha) = 2$.