

Exercice 1..... (5 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - (1 + \sqrt{3}i) = 0 \quad (1)$$

2°) Exprimer les solutions z_1 et z_2 de (1) en fonction de

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

3°) a) Calculer le module et l'argument de a et b.

b) Représenter les points images de a et b dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

c) En déduire une construction des points C et D d'affixes respectives z_1 et z_2 .

d) Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 .

4°) Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 2..... (5 points)

1°) Soit $A = \frac{n+9}{n-6}$ une fraction où n est un entier supérieur à 6

a) Trouver deux entiers naturels a et b pour que l'on ait

$$A = a + \frac{b}{n-6}$$

b) Déterminer n pour que A soit un entier naturel.

2°) Déterminer l'entier naturel n tel que $2 \times 3^n + 1$ soit divisible par 11.

3°) Trouver les couples d'entiers naturels (a ; b) tels que

$$2m - d = 220 \text{ où } m = a \vee b \text{ et } d = a \wedge b$$

PROBLÈME..... (10 points)

Partie A

Soit la fonction numérique φ définie par $\varphi(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$

1°) Étudier les variations de la fonction φ sur $[0 ; 1]$.

2°) Soit $a \in [0 ; 1]$; montrer que $\forall x \in [0 ; a]$ on a : $\varphi'(0) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(a)$.

En déduire que $\forall x \in [0 ; a]$ on a : $\frac{3}{2}a \leq (1 + \sqrt{1+a}) - 1 \leq \frac{3}{2}\sqrt{1+a}$.

Partie B

On donne la fonction numérique f définie par

$$f(x) = \frac{2x^3 + ax^2 + \frac{8}{bx^2 + x + c}}{\quad} \quad \text{où } a ; b ; c$$

sont des réels.

Soit (Cf) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1°) Déterminer les réels $a ; b$ et c sachant que (Cf) admet les droites d'équations $x = 3$ et $y = 2x$ comme asymptotes.

2°) Dans la suite du problème on prendra $a = -6 ; b = 0 ; c = -3$.

Étudier les variations de la fonction f .

3°) Calculer $f(7)$ et montrer que $I(3 ; 6)$ est centre de symétrie de (Cf) .

4°) Montrer que la restriction g de f à $[5 ; +\infty[$ est une bijection de $[5 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Calculer $(g^{-1})'$ sans expliciter g^{-1} .
(16)

5°) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique $\alpha \in [1 ; 2]$.

6°) Tracer (Cf) et $(C'g^{-1})$ la courbe de g^{-1} dans le même repère.

7°) Montrer que $\forall x \in Df ;$
$$f'(x) = 2 \frac{5}{(x-3)^2} .$$

En déduire que $\forall x \in [5 ; 7]$ on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{2}$.

8°) Démontrer que $\forall x \in [5 ; 7]$ on a : $\frac{3}{x+1} f(x) \leq 16$.

$$\frac{\overline{}}{2} \quad \frac{\overline{}}{2}$$

NB: *Les parties A et B du problème sont indépendantes.*

ACADÉMIE D'ENSEIGNEMENT DE BAMAKO RIVE GAUCHE	RÉPUBLIQUE DU MALI Un Peuple – Un But – Une Foi
<i>Lycée Technique de Bamako</i> (L T B) B.P.E : 225 TEL : 20 22 24 11 Email : lt@datatech.net.ml	Comité Pédagogique de Maths
Composition de la 1^{ère} Période 2009-	
<u>ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES : (Remplacement)</u>	
Séries : MTI-MTGC	Durée : 4 heures Coef : 05

EXERCICE 01 (5 points)

1°) Soit le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i$

- Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

2°) Soient les points A , B , C du plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'affixes respectives $z_A = i$; $z_B = 2 + 3i$; $z_C = 2 - 3i$.

- Déterminer l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ qui transforme B en B'.
- Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B et de rapport 5 qui transforme C en C'.
- Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme A en A'.

EXERCICE 02(4 points)

1°) Soit le polynôme $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$

Trouver les entiers naturels a ; b ; a' ; b' tels que $f(x) = (ax - b)(a'x - b')$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 = 0$

3°) Déterminer tous les couples (x ; y) d'entiers naturels tels que
$$\begin{cases} x + y = 56 \\ x^y = 105 \end{cases}$$

4°) Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'équation : $4x + 3y = 1$

PROBLÈME(11 points)

Les parties A et B du problème sont indépendantes

Partie A /

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 2}$ et soit (C_f) sa courbe

représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1°) Déterminer les réels $a; b; c$ tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

2°) Montrer que (C_f) admet une droite (Δ) asymptote.

3°) Étudier la fonction f .

4°) Étudier la position de (C_f) par rapport à (Δ) .

5°) Démontrer que pour tout x de $[3, 4]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

En déduire que pour tout x de $[3, 4]$ on a : $|f(x) + 4| \leq \frac{3}{4} |x - 3|$

6°) Calculer $(f^{-1})'(-4)$.

7°) Tracer dans le plan la droite (Δ) et la courbe (C_f) .

Partie B /

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 - x + 1}$ et soit (C_g) sa représentation graphique dans le repère $(I; \vec{u}; \vec{v})$.

1°) Étudier les variations de la fonction g . (On déterminera les points d'intersection de la courbe (C_g) avec les axes de coordonnées).

2°) Démontrer que la restriction h de g à $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ est une bijection de

$\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

3°) Quel est le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$?

4°) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

5°) Tracer la courbe (C_g) dans le repère $(I; \vec{u}; \vec{v})$.